

ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA



**OHYB A KRUT
VE SLOŽITÝCH SOUSTAVÁCH**

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1985

Elementární teorie ohybu, popř. krutu, která se běžně používá v inženýrské praxi, je porovnávána s exaktní teorií. Rozdíly jsou důležité nejen pro správné posuzování pevnosti, ale také pro řešení inverzní úlohy, kdy ze změřených poměrných deformací chceme usuzovat na velikost působících sil. Probírá se vliv náhlých změn průřezu na tuhost hřídelů. To umožňuje zpřesnit výpočty vlastních frekvencí.

Na vybraných příkladech složitých konstrukcí se probírají různé přibližné metody řešení pružné napjatosti a deformací. Jde např. o skládané rotory, o příčné nehomogenní nosníky, o rošty a mříže, o prostorové deformace kruhového prstence a o disková kola a setrvačníky.

Závěrem se probírají soustavy s velkými průhyby (s geometrickou nelinearitou). Na příkladu válcové šroubovitě pružiny umístěné v poli odstředivých sil se ukazuje analytická metoda řešení. V závěru se popisuje i metoda numerická, jejímž základem jsou konečné prvky.

O B S A H

Předmluva	5
1. NEPŘESNOSTI ELEMENTÁRNÍ TEORIE OHYBU	7
2. ROVINNÝ OHYB Z HLEDISKA TEORIE PROSTOROVÉ PRUŽNOSTI	17
3. SMYKOVÁ NAPĚTÍ PŘI OHYBU U VYBRANÝCH PRŮŘEZŮ	23
4. KŘIVÝ PRUT Z HLEDISKA TEORIE ROVINNÉ PRUŽNOSTI	26
5. TUHOST HŘÍDELŮ S NÁHLOU ZMĚNOU PRŮŘEZU	29
6. SLOŽENÝ NOSNÍK S TUHÝMI, VZÁJEMNĚ PROPOJENÝMI KONCOVÝMI ČELY ..	36
7. PŘÍČNĚ NEHOMOGENNÍ NOSNÍKY	45
8. PŘIBLIŽNÝ VÝPOČET ROŠTŮ	50
9. STABILITA MŘÍŽE	56
10. DILATACE A OHYB KRUHOVÉHO PRSTENCE V JEHO ROVINĚ	58
11. OHYB A KRUT KRUHOVÉHO PRSTENCE PŘI JEHO VYBOČENÍ Z ROVINY	68
12. DISKOVÁ KOLA A SETRVAČNÍKY	73
13. ZMĚNA OSOVÉ SÍLY V ROTUJÍCÍ PRUŽINĚ	87
14. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ GEOMETRICKY NELINEÁRNÍCH ÚLOH	92
15. PŘECHOD OD DISKRETNÍCH PARAMETRŮ KE SPOJITÝM A NAOPAK	103
Závěr	110
Literatura	111

"Inženýr pracující v průmyslu je neustále konfrontován s novými problémy, které vzdorují rutinním metodám řešení. S takovými úlohami se může úspěšně vypořádat jen ten, kdo dobře rozumí aplikaci základních principů a spíše ovládá různé obecné metody řešení, než aby hluboce znal jen některou z nich."

Š. Timošenko
D. H. Young (1937)

PŘEDMLUVA

Úlohu o ohybu nosníku, která je jednou z nejbanálnějších, s jakou se v praxi setkáme, lze exaktně řešit jen výjimečně. Většinou se musíme spokojit jen s přibližným "inženýrským" řešením založeným na některých zjednodušujících předpokladech. Některé případy se exaktně řešit dají a tu bude jistě velmi zajímavé vědět, zda vznikají difference mezi oběma řešeními a zda tyto difference mohou mít praktický význam. To je důležité nejenom z hlediska dimenzování konstrukcí, ale také pro experimentální výzkum, jehož výsledky se často liší od obou uvedených řešení. Příčina zpravidla tkví v nedostatečném vystižení skutečných okrajových podmínek, v nepřesném odhadu fyzikálních vlastností materiálu a v geometrických nebo ještě i jiných odchylkách díla od výpočtového modelu. Uvedeme tedy příklady ohybu a krutu řešené jednak exaktně, jednak za zjednodušujících předpokladů, a poukážeme na možné rozdíly.

Některé konstrukce jsou však tak členité a tak složité, že je nelze řešit rutinními metodami. Velkou pomocí zde mohou být programové systémy např. pro metodu konečných elementů nebo pro jiné novodobé metody numerického řešení. To však zpravidla vyžaduje, zvláště u nově navrhovaných koncepcí, určitou přípravu a čas. Konstruktérovi poskytne mnohdy více užítka pohotové a méně nákladné přibližné řešení, které může získat rychle, ovšem za cenu některých zjednodušení. K tomu je zapotřebí mít určitou představivost a zkušenost. To ukážeme na příkladech přibližných řešení napjatosti a tuhosti složitých konstrukčních sestav. Mohou být inspirací k řešení i jiných obdobných úloh.

Protože je třeba předpokládat, že složitější úlohy se budou řešit na počítačích, věnovali jsme pozornost i některým koncepčním otázkám výpočtů velkých deformací, kdy se uplatňuje geometrická nelinearita.

V textu, ke kterému jsme připojili mnoho odkazů na doplňující literaturu, se tedy probírají různé přístupy k dané úloze a k jejímu řešení. Pamětlivi slov věhlasných učitelů mechaniky, které jsme v záhlaví citovali, doufáme, že tento spis přinese inženýrům z praxe největší užitek.

1. NEPŘESNOSTI ELEMENTÁRNÍ TEORIE OHYBU

Budeme vyšetřovat napjatost a deformaci v desce o konstantní tloušťce $2h$. Ve střední rovině desky zvolíme souřadnice x, y , takže lící povrchy desky budou mít rovnici $z = \pm h$. O rovinné úloze hovoříme tehdy, jestliže veličiny vstupující do výpočtu nezávisí na souřadnici z . Definiční oblast, v níž řešení hledáme, označíme $\Omega(x, y)$. Budeme předpokládat, že v této oblasti známe rozdělení teplotních rozdílů $t = t(x, y)$ měřených od konstantní referenční teploty. Posuvy ve směrech os souřadnic os x, y, z označíme u, v, w . Rozlišíme dva případy.

Při rovinném přetvoření bude

$$w = 0 \quad (1.1)$$

Při rovinné napjatosti bude

$$\tilde{\sigma}_z = 0 \quad \tau_{zx} = 0 \quad \tau_{zy} = 0 \quad (1.2)$$

Vztahy (1.1), resp. (1.2), by měly platit ve všech bodech tělesa. Tomu lze striktně vyhovět jen u podmínky (1.1). Podmínku (1.2) můžeme předepsat jen na lících desky $z = \pm h$, uvnitř desky obecně splněna nebude. U rovinné napjatosti nebude proto plátit ani podmínka nezávislosti veličin na souřadnici z . Odchyłka však bude zanedbatelná, bude-li deska tenká.

Představme si např., že v desce, u které jsou na lících splněny předpoklady (1.2), vzniká nerovnoměrná napjatost. Pak vzniká také nerovnoměrná příčná kontrakce. Kdybychom dvě takové stejné a stejně zatížené desky položili na sebe, jejich lící povrchy by nesplynuly. K jejich spojení bychom musili mezi nimi připojit napětí $\tilde{\sigma}_z$ v rozporu s požadavkem (1.2). To znamená, že nesplnění požadavku (1.2) bude záviset na tloušťce desky.

Úplného splnění požadavku (1.2) dosáhneme, budeme-li počítat s průměrnými hodnotami posuvů, přetvoření i napětí. Průměrné hodnoty označíme hvězdičkou; definujeme je předpisem

$$f^*(x, y) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x, y, z) dz \quad (1.3)$$

Mluvíme pak o zobecněné rovinné napjatosti. Tuto napjatost budeme mít v dalším textu na mysli, kdykoli budeme hovořit o rovinné napjatosti. Hvězdičky u symbolů budeme přitom vynechávat.

V publikaci /1/ jsme podrobně odvodili základní rovnice matematické teorie pružnosti. Zde uvedeme jen výsledek, který se vztahuje na rovinné

úlohy. Osm neznámých funkcí (σ_x , σ_y , τ_{xy} , ε_x , ε_y , γ_{xy} , u, v) splňuje

(a) dvě rovnice rovnováhy

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0\end{aligned}\tag{1.4}$$

(objemové síly neuvažujeme)

(b) tři konstitutivní rovnice

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_i} (\sigma_x - \mu_i \sigma_y) + \alpha_i t \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_i} (\sigma_y - \mu_i \sigma_x) + \alpha_i t \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_i} \tau_{xy}\end{aligned}\tag{1.5}$$

(c) tři kinematické vztahy

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{1.6}$$

Do rovnice (1.5) dosadíme pro případ rovinné napjatosti $i = 1$

$$\begin{aligned}E_1 &= E & \mu_1 &= \mu \\ \alpha_1 &= \alpha & G_1 &= \frac{E}{2(1+\mu)} = G\end{aligned}\tag{1.7}$$

a pro případ rovinného přetvoření $i = 2$

$$\begin{aligned}E_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} \quad , & \mu_2 &= -\frac{\mu}{1-\mu} \\ \alpha_2 &= \alpha(1+\mu) & G_2 &= \frac{E}{2(1+\mu)} = G\end{aligned}\tag{1.8}$$

Zde E je modul pružnosti v tahu-tlaku,

G - modul pružnosti ve smyku,

μ - Poissonovo číslo,

α - délková roztažnost.

Při rovinné napjatosti vzniká příčné poměrné prodloužení

$$\varepsilon_2 = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) + \alpha t\tag{1.9}$$

kdežto při rovinném přetvoření vzniká ve směru osy z normálové napětí

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \mu(\sigma_x + \sigma_y) - \alpha E t = \\ &= \frac{1}{1+\mu_2} [\mu_2(\sigma_x + \sigma_y) - \alpha_2 E_2 t] \end{aligned} \quad (1.10)$$

K soustavě rovnic (1.4) až (1.6) je nutné předepsat okrajové podmínky na hranici Γ oblasti Ω . Mohou být dvojího druhu. Buď je předepsán napěťový vektor $\vec{f} = \{f_x, f_y\}$ nebo je předepsán vektor posuvu $\vec{u} = \{\tilde{u}, \tilde{v}\}$. V prvním případě bude na hranici Γ_1

$$\begin{aligned} f_x &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y \\ f_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{aligned} \quad (1.11)$$

kde n_x, n_y jsou směrové kosiny vnější normály k hranici Γ_1 .
V druhém případě bude

$$u = \tilde{u} \quad v = \tilde{v} \quad (1.12)$$

na hranici Γ_2 . Přitom $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Když z rovnic (1.6) vyloučíme posuvy, dostaneme rovnici kompatibility

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.13)$$

kterou musí poměrná přetvoření $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ splňovat. Když do rovnice (1.13) dosadíme z Hookeova zákona (1.5) a pak s použitím (1.4) vyloučíme smykové napětí $\tau_{xy} (= \tau_{yx})$, dostaneme po úpravě

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) + E_i \alpha_i \nabla^2 t = 0 \quad (1.14)$$

kde

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$$

Tím jsme převedli rovnici kompatibility (1.13) na tvar, v němž vystupují napětí. Ta pak musí ještě splňovat rovnice rovnováhy (1.4). Oběma požadavkům vyhovíme najednou, zavedeme-li Airyho funkci napětí $\Phi = \Phi(x, y)$ takovou, že

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} & \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dosažením těchto výrazů do rovnice (1.14) dostaneme podmínku

$$\nabla^4 \bar{\phi} = - E_i \alpha_i \nabla^2 t \quad (1.16)$$

Splňuje-li teplotní pole rovnici $\nabla^2 t = 0$, zjednoduší se podmínka (1.16) na tvar

$$\nabla^4 \bar{\phi} = 0 \quad (1.17)$$

To budeme v dalším textu předpokládat. Přitom

$$\nabla^4 \bar{\phi} = \nabla^2(\nabla^2 \bar{\phi}) = \frac{\partial^4 \bar{\phi}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \bar{\phi}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \bar{\phi}}{\partial y^4} \quad (1.18)$$

Podle Muschelišviliho /2/ lze k řešení rovinných úloh s výhodou užít Goursatových funkcí φ , ψ komplexní proměnné $z = x + iy$; $x, y \in \Omega$. Předpokládáme, že oblast Ω je jednoduše souvislá a že φ , ψ jsou v této oblasti holomorfní /1/. S Airyho funkcí napětí $\bar{\phi}(x, y)$ jsou vázány rovnicí

$$\varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\varphi(z)} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + i \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \quad (1.19)$$

Pruhem vyznačujeme komplexně sdružené číslo. Pak platí tyto vztahy:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} [\varphi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} &= 2 [\bar{z} \varphi''(z) + \varphi'(z)] \\ 2G(u + iv) &= \alpha \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\varphi(z)} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Jejich podrobné odvození je uvedeno např. v lit. /2/. V nich G je modul pružnosti ve smyku, μ Poissonovo číslo. Dále

$$\alpha = \frac{3 - \mu}{1 + \mu} \quad \text{pro rovinnou napjatost}$$

$$\alpha = 3 - 4\mu \quad \text{pro rovinné přetvoření.}$$

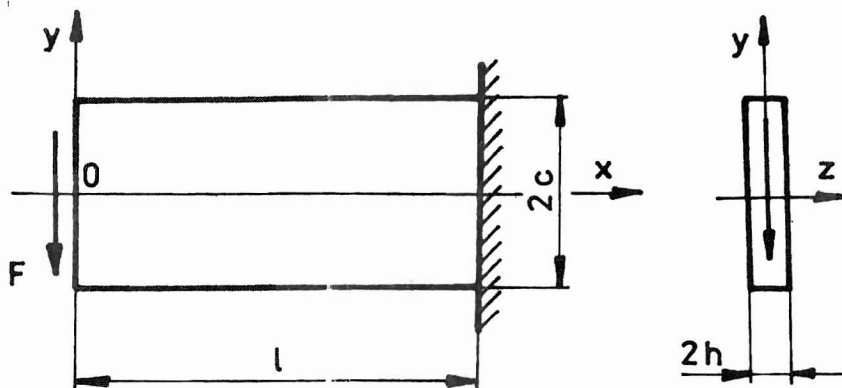
Když s použitím (1.20) vyjádříme okrajové podmínky (1.11), dostaneme (na hranici Γ_1)

$$\varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\varphi(z)} = i (f_x + i f_y) \quad (1.21)$$

a místo (1.12) budeme mít (na hranici Γ_2)

$$\alpha \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\varphi(z)} = 2G(\tilde{u} + i\tilde{v}) \quad (1.22)$$

Uvedeme nyní některá řešení, která mají vztah k ohybu nosníku. Definiční oblast zvolíme obdélníkovou o rozměrech $2c \cdot l$. Deska pak bude představovat nosník o průřezu $2c \cdot 2h$ a o délce l . Nosník na konci $x = l$ vetkneme a v řezu $x = 0$ zatížíme silou F (obr. 1).



Obr. 1

Podle inženýrské nauky o pružnosti vypočteme posouvající sílu $T = -F = \text{konst}$ a ohybový moment $M = -Fx$. Osový kvadratický moment průřezu je

$$J = \frac{1}{12} \cdot 2h \cdot (2c)^3 = \frac{4}{3} hc^3 \quad (1.23)$$

a napětí vyjdou

$$\sigma_x = -\frac{M}{J} y = -\frac{Fxy}{J} \quad (1.24)$$

$$\tau_{xy} = \frac{F}{2J} (c^2 - y^2) \quad (1.25)$$

Smyková napětí jsou parabolicky rozdělena po výšce průřezu a splňují podmínku

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} 2h dy = F \quad (1.26)$$

Ta vyjadřuje statickou ekvivalenci mezi smykovými elementárními silami v průřezu a (záporně vzatou) posouvající silou. Průhyb dostaneme integrací diferenciální rovnice

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \quad (1.27)$$

Kladné znaménko na pravé straně odpovídá zvolené orientaci souřadnicové soustavy. Zkráceně můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$v''(x) = -\frac{Fx}{EJ} \quad (1.28)$$

Okrajové podmínky jsou

$$v(l) = 0 \quad v'(l) = 0 \quad (1.29)$$

Tomu odpovídá řešení

$$v(x) = -\frac{F}{6EJ} (2l^3 - 3l^2x + x^3) \quad (1.30)$$

Podívejme se nyní na stejnou úlohu z hlediska teorie rovinné pružnosti. Pomocí Goursatových funkcí

$$\begin{aligned} \psi &= -i\alpha z^3 \\ \psi &= i(2\alpha z^3 + 12\alpha c^2 z) \end{aligned} \quad (1.31)$$

v nichž $\alpha = F/16c^3$ a i je imaginární jednotka, vyjde

$$\sigma_x = \frac{F_{xy}}{J} \quad \sigma_y = 0 \quad (1.32)$$

$$\tau_{xy} = \frac{F}{2J} (c^2 - y^2) \quad (1.33)$$

Napětí jsou tedy stejná, jaká vycházejí podle inženýrské teorie [srovnej (1.32) s rovnicí (1.24) a (1.33) s rovnicí (1.25)].

Pro posuvy dostaneme z rovnic (1.31), (1.20)

$$2Gu = [-y^3(x+c) + 3x^2y(x+c) + 12c^2y] \frac{F}{32hc^3} \quad (1.34)$$

$$2Gv = [-x^3(x+c) - 3xy^2(-x+c) + 12c^2x] \frac{F}{32hc^3} \quad (1.35)$$

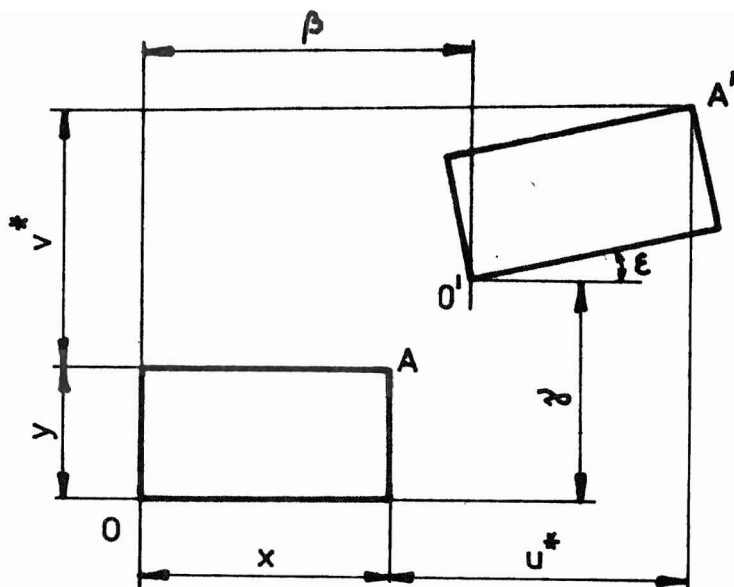
Tyto posuvy jsou určeny až na malé posunutí a otočení tělesa jako absolutně tuhému celku. Toto posunutí a otočení je dáno vztahy (obr. 2)

$$\begin{aligned} u^* &= \beta - \varepsilon y \\ v^* &= \gamma + \varepsilon x \end{aligned} \quad (1.36)$$

kde β , γ , ε jsou reálné konstanty.

Vypočteme posuvy bodů na střednici $y = 0$ a využijeme přitom vztahů (1.7), resp. (1.8). Po úpravě vyjde

$$\begin{aligned} u_0 &= \beta \\ v_0 &= -\frac{Fx^3}{6E_1J} + \frac{3Fx}{8Gch} + \gamma + \varepsilon x \end{aligned} \quad (1.37)$$



Obr. 2

Protože zkos v bodě $x = l$, $y = 0$ bude

$$\frac{1}{G} (\tau_{xy})_{max} = \frac{3F}{8Gch} \quad (1.38)$$

budou okrajové podmínky v místě vetknutí.

$$\begin{aligned} u_0(l) &= 0 & v_0(l) &= 0 \\ v_0'(l) &= \frac{3F}{8Gch} \end{aligned} \quad (1.39)$$

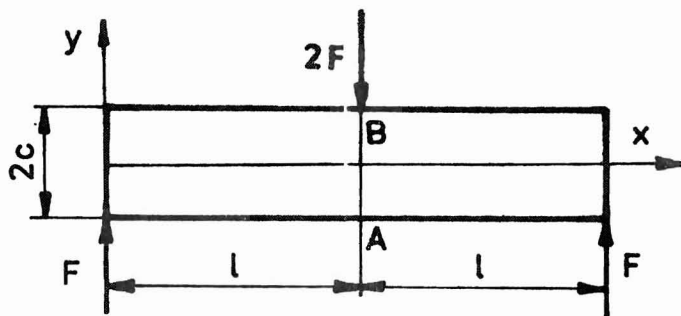
S nimi dají rovnice (1.37) nakonec

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ v_0 &= -\frac{F}{6EJ} (2l^3 - 3l^2x + x^3) - \frac{3F}{8Gch} (l-x) \end{aligned} \quad (1.40)$$

První člen na pravé straně (1.40) odpovídá přesně vztahu (1.30). Druhý člen představuje opravu na vliv smykových deformací.

Z rovnice (1.34) je zřejmé, že průřezy nezůstávají rovinné, ale že se v průmětu do roviny x , z bortí do tvaru kubické paraboly. Bortí se i vetknutý průřez. Kdybychom tomu zabránili, neplatilo by uvedené řešení a průhyb by byl menší než vychází podle (1.40).

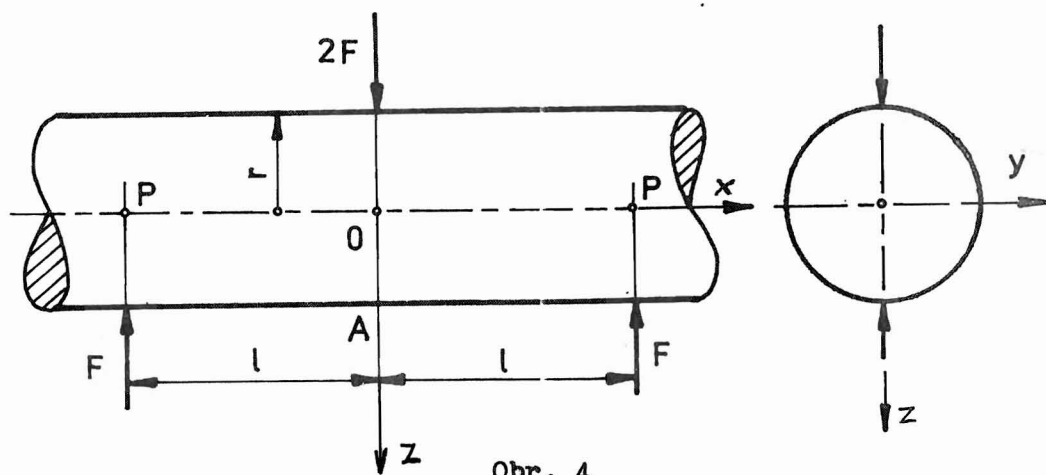
Vidíme také, že inženýrská teorie dává stejná napětí jako teorie rovinné pružnosti jen za předpokladu, že síla F se do průřezu $x = 0$ přenáší prostřednictvím smykových napětí $\tau_{xy} = (F/2J)(c^2 - y^2)$. Každý jiný přenos síly F způsobuje odchylku od uvedených výsledků.



Obr. 3

Kdybychom tedy doplnili konzolový nosník na obr. 1 symetricky na nosník podle obr. 3, nedostali bychom stejný průhyb ani stejnou napjatost, neboť průřez \$AB\$ se nemůže bortit a síla se nepřenáší prostřednictvím parabolicky rozdělených smykových napětí. Na to musíme pamatovat, chceme-li např. využít krátkého nosníku jako siloměrného prvku a z naměřeného prodloužení ϵ_x v bodě \$A\$ určovat zatěžující sílu \$2F\$. Kdybychom takový siloměrný prvek necejchovali a spoléhali na platnost inženýrské teorie o ohybu nosníků, vypočítali bychom velmi pravděpodobně menší velikost síly než skutečnou.

Případ nosníku podle obr. 3 nelze řešit v uzavřeném tvaru, ale jen nekonečnými řadami. První řešení tohoto druhu uveřejnil Filon /3/.

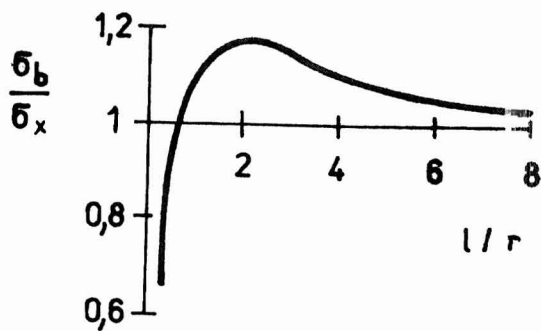


Obr. 4

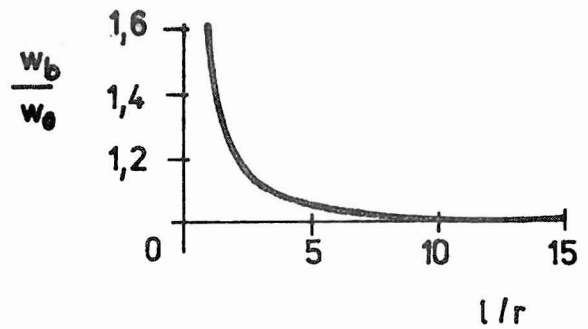
Na obr. 4 je znázorněn nekonečný pružný hřídel o poloměru \$a\$ zatížený silami rovněž "tříbodovým ohybem" (obdobně k obr. 3). Řešení metodami prostorové teorie pružnosti podali Kasano, Oshima a Matsumoto /4/. Ukázali, že napětí σ_x v místě $x=0, y=0, z=r$ (bod \$A\$ na obr. 4) se liší od napětí σ_b vypočteného z nosíkové teorie

$$\sigma_b = \frac{4Fl}{\pi r^3} \quad (1.41)$$

a je většinou menší, jak ukazuje obr. 5. V témže místě existuje i malé obvodové napětí, ale lze je prakticky zanedbat.



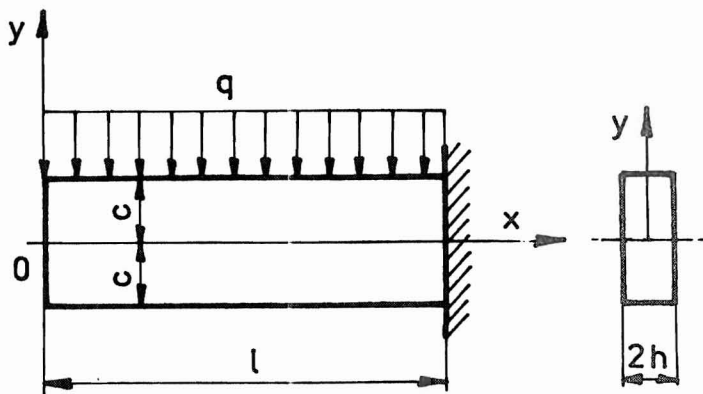
Obr. 5



Obr. 6

Průhyb w_0 bodu O (na střednici pod zatěžující silou) vzhledem ke spojnicí bodů P (na střednici nad podporami) se rovněž liší od průhybu w_b nosníkové teorie (korigované se zřetelem ke smykovým deformacím), jak ukazuje obr. 6; výsledky se vztahují k Poissonovu číslu $\mu = 0,3$.

Z obr. 5 je zřejmé, že pro $l < 2r$ nemá smysl hovořit o nosníku; převládá lokální koncentrace napětí v okolí působíště zatěžujících sil. Pro $l = 2r$ je osové napětí σ_x uprostřed rozpětí proti působíšti síly $2F$ (v bodě A , obr. 4) menší než ohybové napětí σ_b podle nosníkové teorie v poměru 1 : 1,18. Zvětšuje-li se poměr l/r , zmenšuje se rozdíl mezi těmito napětími. Z obr. 6 vidíme, že průhyb při poměru $l/r = 2$ vypočtený podle nosníkové teorie se liší od skutečného průhybu asi o 20 %. Rozdíl se rychle zmenšuje, roste-li l/r .



Obr. 7

Pro rovnoměrně zatížený konzolový nosník tloušťky $2h$ podle obr. 7 dostaneme užitím funkcí

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha_1 i z^4 + \alpha_2 i z^2 - \alpha_3 z \\ \psi &= \beta_1 i z^4 + \beta_2 i z^2 - \beta_3 z \end{aligned} \tag{1.42}$$

(α_1 až β_3 jsou reálné konstanty, které vypočteme z okrajových podmínek) toto řešení

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{q}{2J} x^2 y + \frac{q}{15J} (3c^2 y - 5y^3) \\
\sigma_y &= \frac{q}{6J} (y^3 - 3c^2 y - 2c^3) \\
\tau_{xy} &= \frac{q}{2J} x (c^2 - y^2)
\end{aligned}
\tag{1.43}$$

Přitom $J = 4c^3 h/3$. Elementární teorie ohybu dává pro tento případ

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{q}{2J} x^2 y & \sigma_y &= 0 \\
\tau_{xy} &= \frac{q}{2J} x (c^2 - y^2)
\end{aligned}
\tag{1.44}$$

Ze srovnání rovnic (1.43) a (1.44) vidíme, že podle exaktního řešení působí vždy kromě napětí σ_x také napětí σ_y v mezích $-q/2h \leq \sigma_y \leq 0$. Druhý člen v první z rovnic (1.43) popisuje napětí, kterým se rovněž obě řešení liší. Toto napětí nedává v průřezu žádnou výslednou sílu ani silovou dvojici. Musili bychom je v řezu $x=0$ připojit, kdybychom si přáli, aby exaktní řešení platilo beze zbytku. Pak ani ohybové napětí σ_x není na souřadnici y lineárně závislé, jak předpokládá elementární teorie. Největší ohybové napětí vychází v místě $x=l$, $y=c$, a to podle (1.43)

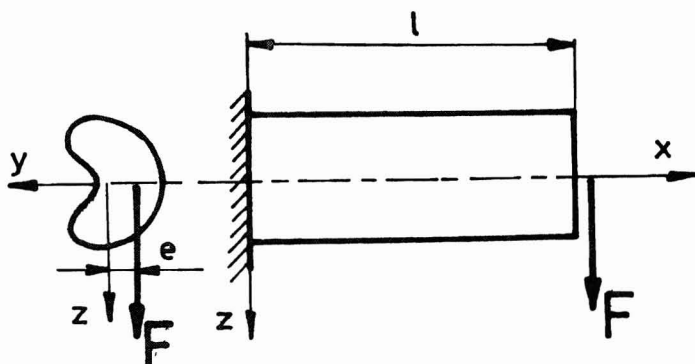
$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{3}{8} \frac{q}{h} \left(\frac{l}{c}\right)^2 \left[1 - \frac{4}{15} \frac{c^2}{l^2}\right]
\tag{1.45}$$

Protože v témže místě působí ještě $\sigma_y = -q$, dostaneme redukované napětí podle Guestovy hypotézy

$$\sigma_{\text{red}} = (\sigma_x)_{\max} + q = \frac{3}{8} \frac{q}{h} \left(\frac{l}{c}\right)^2 \left[1 + \frac{16}{15} \frac{c^2}{l^2}\right]
\tag{1.46}$$

Podle elementární teorie (1.44) by v rovnicích (1.45) a (1.46) vyšla místo hranatých závorek jednička.

2. ROVINNÝ OHYB Z HLEDISKA TEORIE PROSTOROVÉ PRUŽNOSTI



Obr. 8

Na obr. 8 je znázorněn nosník stálého průřezu, vetknutý v rovině $x=0$ a zatížený v řezu $x=l$ silou F rovnoběžně s osou z . Předpokládáme, že osy y , z jsou v řezu $x=0$ hlavními centrálními osami, takže ohyb se děje v rovině x, z . Průřez vymezuje v rovině $x=0$ jednoduše souvislou oblast Ω , má hranici Γ , plošný obsah A a kvadratický moment J k ose y .

Kdyby na konci nosníku působil v rovině x, z ohybový moment M místo síly F , a to takový, že by bylo

$$\sigma_x = E \frac{z}{R} = \frac{M}{J} z \quad (2.1)$$

byla by ostatní napětí nulová. Zde R značí poloměr křivosti střednice deformovaného nosníku. Řešení (2.1) představuje čistý ohyb a je exaktní, splňuje podmínky rovnováhy i kompatibility.

Působí-li nyní na konci nosníku síla F , vzniká v řezu o souřadnici x ohybový moment $M(x) = -F(l-x)$. Analogicky k rovnici (2.1) budeme předpokládat, že platí vztah

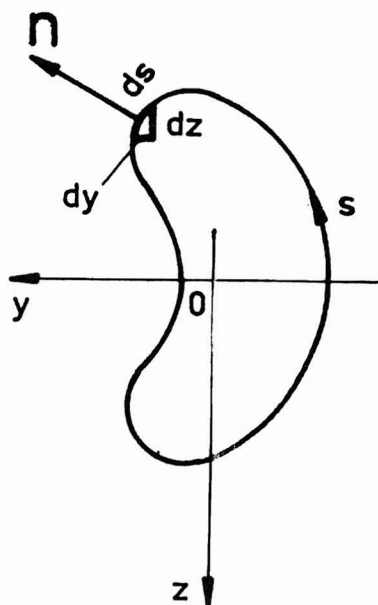
$$\sigma_x = -\frac{F}{J} (l-x) z \quad (2.2)$$

V řezu mohou zřejmě působil ještě tečná napětí τ_{xy} , τ_{xz} . Ostatní napětí (σ_y , σ_z a τ_{yz}) budeme považovat za nulová. Objemové síly zanedbáme. Za těchto předpokladů dají diferenciální rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{Fz}{J} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

Člen na pravé straně rovnice (2.3) představuje derivaci $-\partial \sigma_x / \partial x$ a byl vypočten užitím (2.2). Z rovnic (2.4) je zřejmé, že tečná napětí nezávisí na souřadnici x , takže jsou ve všech průřezech stejná.



Obr. 9

Normála \vec{n} k hranici Γ průřezu (obr. 9) má směrové kosiny

$$\begin{aligned} n_x &= 0 \\ n_y &= \cos(n, y) = dz/ds \\ n_z &= \cos(n, z) = -dy/ds \end{aligned} \quad (2.5)$$

Protože boční povrch nosníku není zatížen, musí být

$$\tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = 0 \quad (2.6)$$

Vzhledem k pravidlu o sdružených smykových napětích nemohou τ_{xy} , τ_{xz} dávat v trojúhelníkovém elementu na obr. 9 žádnou výslednici, která by měla nenulovou složku ve směru normály \vec{n} . Z Hookeova zákona dostaneme tato nenulová poměrná přetvoření

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \sigma_x, & \varepsilon_y &= \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \cdot \tau_{xy} \\ \gamma_{xz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xz} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pro ně musí platit rovnice kompatibility, které jsou odvozeny např. v lit. /1/, /2/. Z nich plyne

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right] &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} \\
 \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right] &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

První tři z rovnic (2.8) jsou identicky splněny. Zbývající dvě dají podmínky [s použitím (2.7)]

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} &= 2G \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} = -2\mu G \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x \partial z} \\
 -\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y \partial z} &= 2G \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial z} = -2\mu G \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Protože $\epsilon_x = \sigma_x / E = \sigma_x / 2(1+\mu)G$, dostaneme z rovnic (2.9) s použitím (2.2)

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} = -\frac{\mu}{1+\mu} \frac{F}{J} \quad (2.10)$$

$$-\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y \partial z} = 0 \quad (2.11)$$

Tyto dvě rovnice můžeme pomocí vztahu (2.3) ještě zjednodušit. Z rovnice (2.3) dosadíme do (2.10) za $\partial \tau_{xy} / \partial y$ a do (2.11) za $\partial \tau_{xz} / \partial z$. Vyjde

$$\nabla^2 \tau_{xz} = -\frac{1}{1+\mu} \frac{F}{J} \quad (2.12)$$

$$\nabla^2 \tau_{xy} = 0 \quad (2.13)$$

V těchto rovnicích jsme označili $\nabla^2 = \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$. Rovnicím rovnováhy (2.3) a (2.4) vyhovíme, když tečná napětí odvodíme z funkce napětí $\Phi(y, z)$ tak, že

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{Fz^2}{2J} + f(y) \quad (2.14)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.15)$$

Funkce $f(y)$ může být libovolná. Dosazením (2.14) a (2.15) do rovnice kompatibility (2.12) a (2.13) dostaneme podmínky

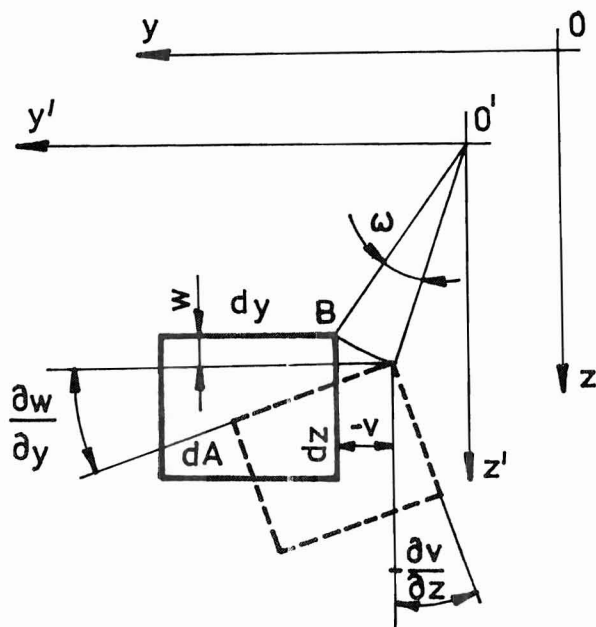
$$\frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \Phi) = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \Phi) = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{F}{J} y - \frac{d^2 f}{dy^2} \quad (2.17)$$

Z rovnice (2.16) usuzujeme, že výraz $\nabla^2 \Phi$ nezávisí na z . Proto lze levou stranu (2.17) považovat za obyčejnou derivaci a integrovat. Vyjde

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{F}{J} y - \frac{df}{dy} + c \quad (2.18)$$

Abychom zjistili význam integrační konstanty c , vypočteme otočení elementu dA plochy průřezu kolem osy rovnoběžné s osou x (obr. 10).



Obr. 10

Vyjde

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.19)$$

Zde u , w jsou posuvy bodu $B(y,z)$. Jsou spojitymi funkcemi souřadnic. Snadno dokážeme, že

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (2.20)$$

Za oblé závorky v rovnici (2.20) můžeme dosadit zksoy γ_{xz} , popř. γ_{xy} . S použitím Hookeova zákona dostaneme

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2G} \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right] \quad (2.21)$$

Dosadíme sem z rovnic (2.14), (2.15) a (2.18).

Vyjde

$$\frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{1}{2G} \left[\frac{\mu}{1+\mu} \frac{F}{J} y + c \right] \quad (2.22)$$

Derivace $\partial w / \partial x$ na levé straně (2.22) má význam zkrutu (poměrného nakroucení) podélného vlákna procházejícího bodem $B(y,z)$ (obr. 10). Má-li vznikat pouze ohyb nosníku a nikoli jeho krut, musí být střední hodnota zkrutu v průřezu nulová. Tak tomu bude, položíme-li $c=0$. Je totiž $\int y dA = 0$, neboť osy y , z procházejí těžištěm průřezu. Bude tedy podle (2.18)

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial z^2} = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{F}{J} y - \frac{df}{dy} \quad (2.23)$$

Tím jsme získali diferenciální rovnici pro $\bar{\Phi}(y,z)$. Z okrajové podmínky (2.6) dostaneme pomocí (2.5), (2.14) a (2.15)

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} = \left[\frac{Fz^2}{2J} - f(y) \right] \frac{dy}{ds} \quad (2.24)$$

Je-li funkce $f(y)$ známa, lze z rovnice (2.24) vypočítat okrajové hodnoty $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}(s)$ (integrací podél hranice Γ) a z rovnice (2.23) určit průběh funkce napětí $\bar{\Phi}$ v celém průřezu. Řešení dostaneme jednoznačně až na aditivní konstantu, která nemá význam, protože při derivování odpadá.

Klíčovou otázkou je tedy určení funkce $f(y)$. Řešení se zjednoduší, lze-li hranici průřezu Γ popsat rovnicí

$$\frac{Fz^2}{2J} - f(y) = 0 \quad (2.25)$$

To platí např. pro kružnici a elipsu. Z rovnice (2.25) pak vyjde $\partial \bar{\Phi} / \partial s = 0$ [nezávisle na $f(y)$], a tedy $\bar{\Phi} = 0$ na Γ .

Vypočteme-li tečná napětí popsaným způsobem, budou elementární síly $\tau_{xy} dA$, $\tau_{xz} dA$ dávat v průřezu výslednici F procházející středem smyku

(středem ohybu). Vzdálenost této výslednice od roviny (x, y) je e (obr. 8). Musí platit tyto podmínky statické ekvivalence sil v průřezu

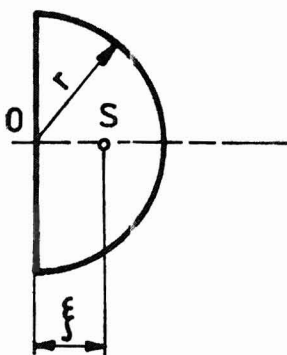
$$\int_A \tau_{xz} dA = F \quad \int_A \tau_{xy} dA = 0$$

$$\int_A (z \tau_{xy} - y \tau_{xz}) dA = Fe \quad (2.26)$$

První dvě podmínky splňuje nalezené řešení identicky; třetí podmínka umožňuje vypočítat

$$e = \frac{1}{F} \iint_A (z \tau_{xy} - y \tau_{xz}) dy dz \quad (2.27)$$

Je-li průřez souměrný k ose z , je $e = 0$. Obecně tomu tak není. Např. u půlkruhového průřezu znázorněného na obr. 11 je vzdálenost středu smyku S od středu kruhu O $\xi \doteq 0,511 r$.



Obr. 11

Požadovali jsme, aby vymizela střední hodnota zkrutu

$$\frac{1}{A} \int_A \frac{\partial w}{\partial x} dA = 0 \quad (2.28)$$

což vedlo k podmínce $c = 0$. Tím jsme zároveň definovali polohu středu smyku v průřezu. Existují však i jiné definice /5/, /6/.

3. SMYKOVÁ NAPĚTÍ PŘI OHYBU U VYBRANÝCH PRŮŘEZŮ

Uvedeme některá řešení pro tečná napětí v nosnicích zatížených obdobně k obr. 8 konstantní posouvající silou.

Má-li kruhový průřez rovnici

$$y^2 + z^2 = r^2 \quad (3.1)$$

dostaneme srovnáním s rovnicí (2.25) funkci

$$f(y) = F(r^2 - y^2) / 2J \quad (3.2)$$

Funkce napětí pak vyjde

$$\bar{\Phi} = \frac{(1+2\mu)}{8(1+\mu)} \frac{F}{J} (y^2 + z^2 - r^2) y \quad (3.3)$$

a napětí jsou

$$\tau_{xz} = \frac{3+2\mu}{8(1+\mu)} \frac{F}{J} (r^2 - z^2 - \frac{1-2\mu}{3+2\mu} y^2) \quad (3.4)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{1+2\mu}{4(1+\mu)} \frac{F}{J} yz \quad (3.5)$$

Přitom $J = \pi r^4 / 4$ značí kvadratický moment kruhu k centrální ose. Plocha kruhu je $A = \pi r^2$. Největší tečné napětí vzniká ve středu průřezu ($y=0, z=0$). Podle (3.4) je

$$\tau_{max} = \frac{3+2\mu}{8(1+\mu)} \frac{F}{J} r^2 = \frac{3+2\mu}{2(1+\mu)} \frac{F}{A} \quad (3.6)$$

Na koncích neutrální osy (v bodech $y = \pm r, z = 0$) vyjde

$$\tau_{xz1} = \frac{1+2\mu}{1+\mu} \frac{F}{A} \quad (3.7)$$

Pro $\mu = 0,3$ máme

$$\tau_{max} \doteq 1,385 \frac{F}{A} \quad \tau_{xz1} \doteq 1,231 \frac{F}{A} \quad (3.8)$$

Jak známo, inženýrská teorie ohybu tyto hodnoty nerozlišuje a dává

$$\tau_{max} = \tau_{xz1} \doteq 1,333 \frac{F}{A} \quad (3.9)$$

Eliptický průřez o poloosách b, h je ohraničen elipsou, která má rovnici

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1 \quad (3.10)$$

Tentokrát vyjde

$$f(y) = \frac{Fh^2}{2J} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad (3.11)$$

takže

$$\Phi = \frac{\mu b^2 + (1+\mu)h^2}{2(1+\mu)(b^2 + 3h^2)} - \frac{F}{J} \left(\frac{h^2}{b^2} y^2 + z^2 - h^2\right) y \quad (3.12)$$

Napětí uprostřed průřezu vychází

$$\tau_{\max} = \frac{Fh^2}{2J} \left[1 - \frac{\frac{\mu}{1+\mu} b^2 + h^2}{b^2 + 3h^2}\right] \quad (3.13)$$

a napětí v koncových bodech neutrální osy

$$\tau_{xz1} = \frac{Fh^2}{J} \frac{\mu b^2 + (1+\mu)h^2}{(1+\mu)(b^2 + 3h^2)} \quad (3.14)$$

Napětí τ_{xz} je po neutrální ose rozděleno tím nerovnoměrněji, čím je šířka $2b$ větší než výška $2h$ průřezu. Je-li $b \gg h$, $\mu = 0,3$, vyjde

$$\tau_{\max} \doteq 1,54 \frac{F}{A}, \quad \tau_{xz1} \doteq 0,92 \frac{F}{A} \quad (3.15)$$

Obdélníkový průřez o šířce $2b$ a výšce $2h$ je ohraničen přímkami, pro něž platí rovnice

$$(y^2 - b^2)(z^2 - h^2) = 0 \quad (3.16)$$

Vezmeme

$$f(y) = \frac{Fh^2}{2J} = \text{konst} \quad (3.17)$$

Na stranách $z = \pm h$ bude podmínka (2.25) splněna. Pro $y = \pm b$ máme zase $dy/ds = 0$, takže $\Phi = 0$ na celém obvodu průřezu. Řešení nelze získat v uzavřeném tvaru, ale jen ve tvaru nekonečné řady. Původní řešení pochází od Saint-Venanta; viz též práci Reissnera a Thomase /7/. Uvedeme pouze výsledky.

Napětí uprostřed průřezu (v bodě $y = 0, z = 0$) vyjde $\tau_{xz0} = \frac{3F}{2A} f_0\left(\frac{h}{b}\right)$ (3.18)

a napětí v koncových bodech neutrální osy ($y = \pm b, z = 0$) bude

$$\tau_{xz1} = \frac{3F}{2A} f_1 \left(\frac{h}{b} \right) \quad (3.19)$$

Hodnoty f_0, f_1 jsou v tab. 1. Napětí τ_{xz} je sudou funkcí souřadnice y .

Tab. 1 Funkce f_0, f_1 pro obdélníkový průřez

Funkce	h/b	2	1	0,5	0,25
f_0	$\mu = 0,3$	0,980	0,931	0,834	0,775
	$\mu = 0,25$	0,983	0,940	0,856	0,805
f_1	$\mu = 0,3$	1,038	1,145	1,457	2,140
	$\mu = 0,25$	1,033	1,126	1,396	1,988

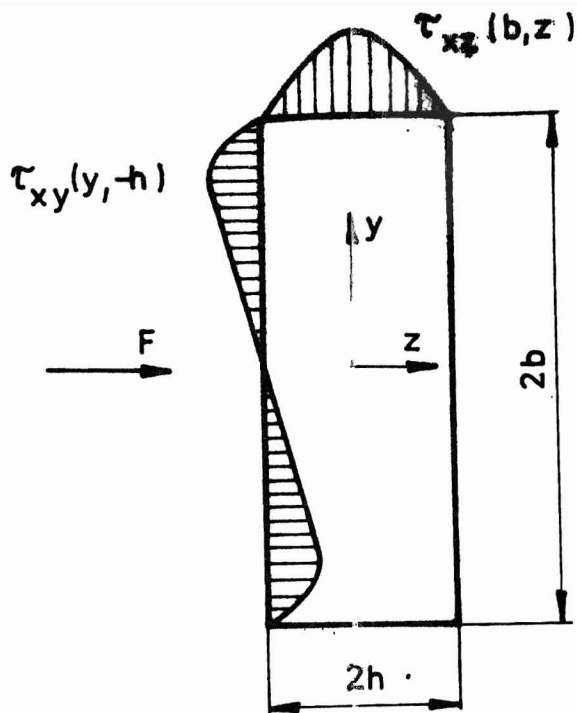
Jak známo, elementární inženýrská teorie ohybu hodnoty τ_{xz0} a τ_{xz1} nerozlišuje a dává $f_0 = f_1 = 1$. Z tab. 1 lze posoudit chybu, která tím vzniká.

Je-li nosník velmi široký ($b > 15h$), nevzniká největší smykové napětí na okrajích $y = \pm b, z = 0$, ale v bodech $y = \pm \eta, z = \pm h$ na široké straně v blízkosti rohů a je to nikoli svislé, ale vodorovné napětí τ_{xy} (tab. 2).

Tab. 2 Tečná napětí v nosníku se širokým obdélníkovým průřezem pro $\mu = 0,25$

$\frac{b}{h}$	$\frac{\tau_{xz}(\pm b, 0)}{3F/2A}$	$\frac{ \tau_{xy}(\pm \eta, \pm h) }{3F/2A}$	$\frac{b - \eta}{2h}$
0	1,000	0,000	0,000
2	1,396	0,316	0,314
4	1,988	0,968	0,522
6	2,582	1,695	0,649
8	3,176	2,452	0,739
10	3,770	3,226	0,810
15	5,255	5,202	0,939
20	6,740	7,209	1,030
25	8,225	9,233	1,102
30	15,650	19,466	1,322

Napětí τ_{xy} je lichou funkcí souřadnic y, z . Inženýrská teorie ohybu je zanedbává. Průběhy napětí τ_{xy}, τ_{xz} na okrajích obdélníkového průřezu naznačuje schematicky obr. 12.

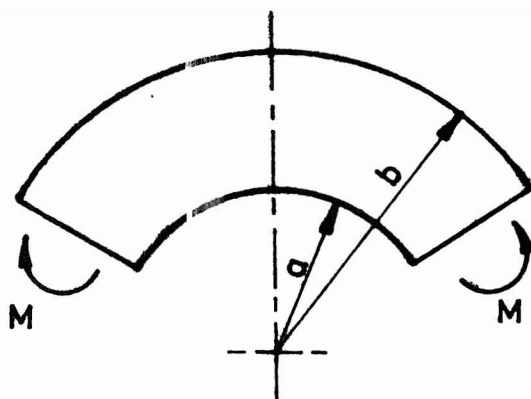


Obr. 12

4. KŘIVÝ PRUT Z HLEDISKA TEORIE ROVINNÉ PRUŽNOSTI

Vyšetříme napjatost v desce o tloušťce $2h$, která má tvar mezikruhové výseče a je namáhána rovinným ohybem (obr. 13). Airyho funkci napětí $\Phi(x, y)$ převedeme do polárních souřadnic. Místo vzorců (1.15) a (1.18) dostaneme

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$



Obr. 13

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \\ \nabla^2 (\nabla^2 \Phi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Vzhledem k rotační symetrii bude funkce Φ záviset pouze na poloměru r , takže parciální derivace podle φ odpadnou. Pak

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = 0 \quad (4.3)$$

$$\nabla^4 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (4.4)$$

Vezmeme

$$\Phi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 \quad (4.5)$$

Dosazením se lze přesvědčit, že funkce (4.5) splňuje rovnici (4.4). Zde A , B , C jsou konstanty. Hledané řešení musí vyhovovat okrajovým podmínkám

$$\sigma_r = 0 \quad \text{pro} \quad r = a, \quad r = b \quad (4.6)$$

$$\int_a^b \sigma_\varphi dr = 0 \quad 2h \int_a^b \sigma_\varphi r dr = -M \quad (4.7)$$

Podmínky (4.7) vyjadřují statickou ekvivalenci elementárních sil $2h\sigma_\varphi dr$ v průřezu s ohybovým momentem M .

S použitím (4.1), (4.5) až (4.7) vyjde

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4M}{2hD} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{4M}{2hD} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right) \\ \tau_{ry} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Přitom

$$D = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2 \quad (4.9)$$

Největší napětí vzniká na poloměru $r=a$, a to

$$\sigma_{\max} = \frac{2M}{hD} \left(2b^2 \ln \frac{b}{a} - b^2 + a^2 \right) \quad (4.10)$$

Jak známo, Winklerova inženýrská teorie křivých prutů zanedbává napětí σ_r a pro obvodové napětí σ_y dává hyperbolický průběh

$$\sigma_y = \frac{M}{h} \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b-a} \ln \frac{b}{a}}{(a+b) \ln \frac{b}{a} - 2(b-a)} \quad (4.11)$$

Linearizovaný průběh podle elementární teorie tenkých prutů je popsán vzorcem

$$\sigma_y = \frac{3M}{h} \frac{b+a-2r}{(b-a)^3} \quad (4.12)$$

Největší napětí odtud dostaneme, když dosadíme $r=a$. Srovnání všech tří teorií umožňuje tab. 3.

Tab. 3 Srovnání přibližných vzorců pro výpočet největšího napětí při čistém ohybu křivého prutu obdélníkového průřezu

b/a	Přesné řešení (4.10)	Winklerova teorie (4.11)	Lineární průběh
1,3	100	99,9	91,3
2	100	99,6	77,4
3	100	99,7	65,4

5. TUHOST HŘÍDELŮ S NÁHLOU ZMĚNOU PRŮŘEZU

Mění-li se průřez po délce nosníku jen zvolna, můžeme předpokládat, že se tím nenaruší platnost teorie ohybu odvozené pro prizmatické nosníky. Pouze ohybová tuhost EJ již nebude konstantní, ale bude funkcí souřadnice x . Pro malé průhyby $w(x)$ pak bude platit diferenciální rovnice

$$w''(x) = - \frac{M(x)}{EJ(x)} \quad (5.1)$$

Záporné znaménko na pravé straně platí pro případ, že průhyb $w = w(x)$ směřuje od osy x dolů a že kladný ohybový moment je definován tak, aby působil tah ve spodním vlákně. Toto pravidlo platí pro případ, že rovina ohybu je svislá.

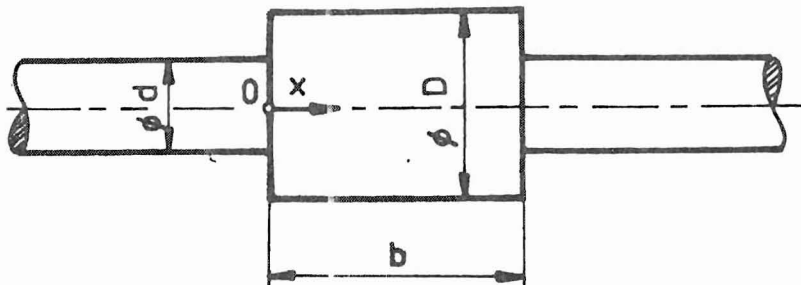
V praxi se vzorce (5.1) používá i tehdy, mění-li se průřez nespojitě. Jak ukázali Sanderson a Kitching /8/, vzniká tím chyba, která se projeví více nebo méně podle toho, jaký je geometrický tvar a jak probíhá ohybový moment hřídele. K přesnějšimu výpočtu je třeba nespojitou změnu osového kvadratického momentu průřezu nahradit spojitou funkcí a rovnicí (5.1) pak řešit s touto náhradní spojitou funkcí (numericky nebo graficky). Autoři práce /8/ ji zjišťovali s použitím řešení prostorových úloh metodou konečných prvků. Tvar hřídele osazeného v délce b z průměru d na průměr D je zřejmý z obr. 14. Vypočte se veličina

$$\beta = \left(\frac{D}{d} \right)^{3/4} \quad (5.2)$$

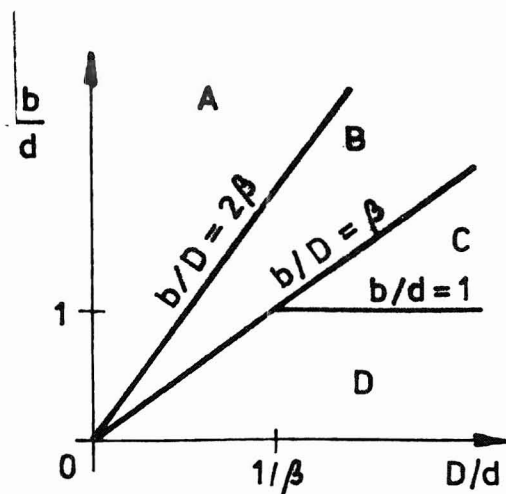
která umožní zařadit daný případ do některé z kategorií A až D vyznačených na obr. 15. Z následujících obrázků se pro daný poměr D/d odečte poměr $J(x)/J_0$, kde

$$J_0 = \frac{\pi}{64} d^4 \quad (5.3)$$

a dosadí do rovnice (5.1). Ta se pak integruje numericky.

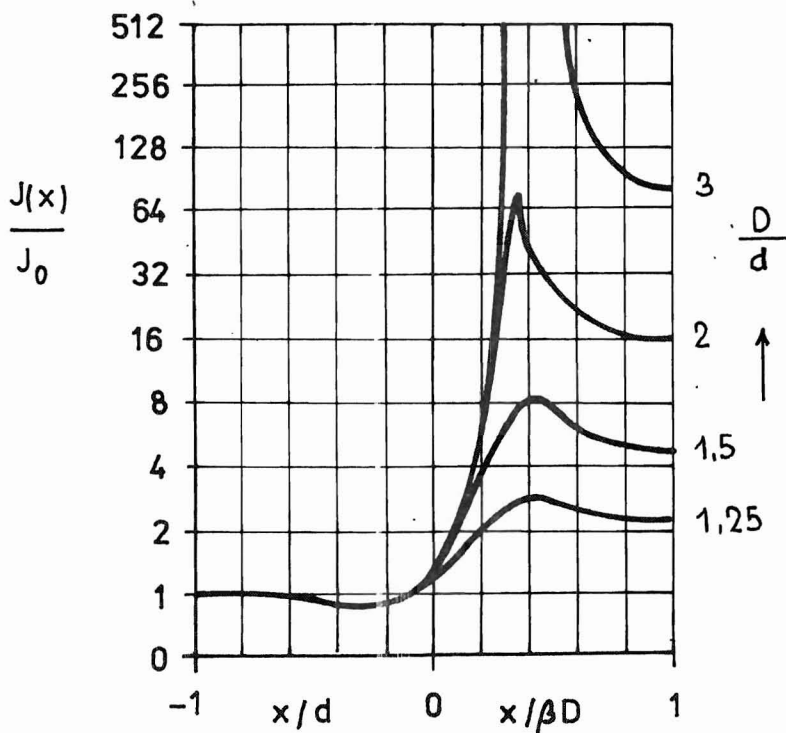


Obr. 14



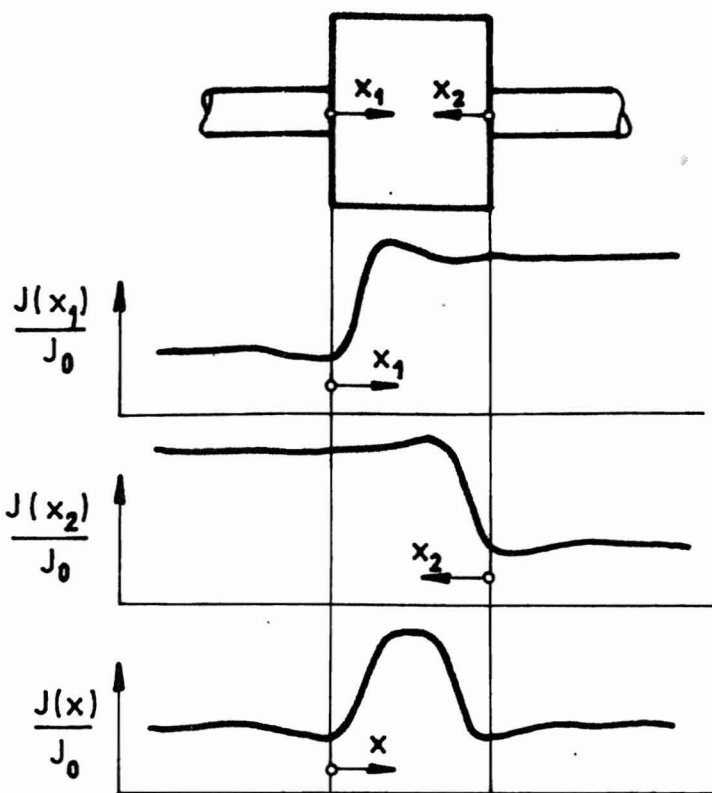
Obr. 15

Jde-li o kategorii A (ojedinělé osazení v dlouhém hřídeli), použije se obr. 16. Pro kategorii B (středně dlouhá osazená část) se použije superpozice průběhů odečtených z obr. 16 tak, jak naznačuje obr. 17. Konečně pro kategorii D (krátká osazená část) platí obr. 18. Pro kategorii C nemáme žádný podklad. Je možné použít superpozice stejně jako v případě B (s omezující podmínkou $b/D = \beta$).^{x)}



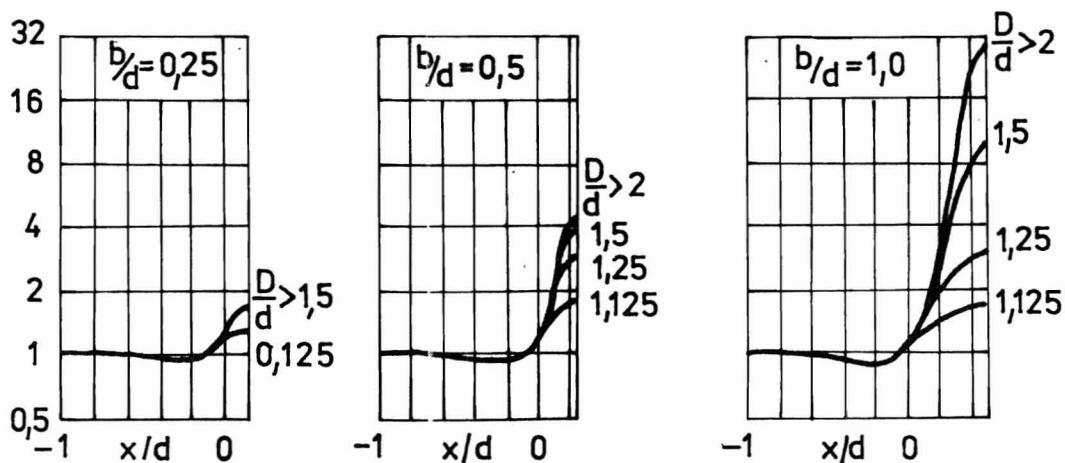
Obr. 16

x) Obrázky jsou v semilogaritmických souřadnicích. Na to je třeba při superpozici pamatovat.



$$J(x) = J(x_1) + J(x_2) - \pi D^4/64$$

Obr. 17



Obr. 18

Poznamenejme, že hodnota $J(x)$ uprostřed osazení je u kategorie B větší než $\pi D^4/64$ v důsledku superpozice vlivů obou nespojitostí průřezu. Opak platí ze stejného důvodu pro kategorii D.

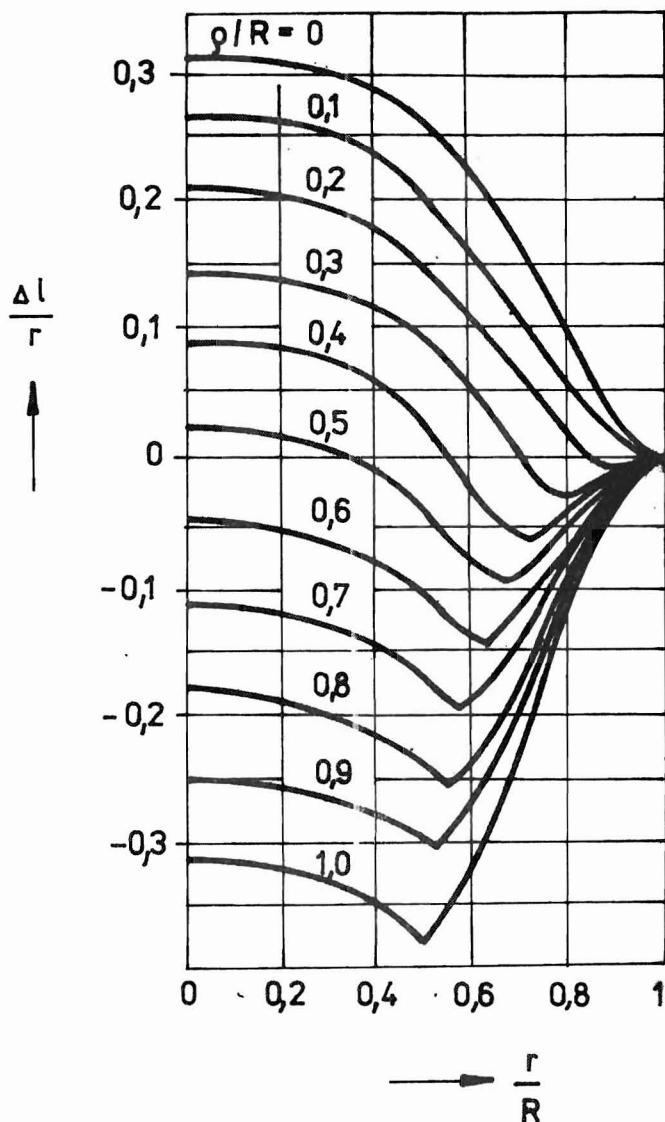
Inženýrům by bylo jistě příjemnější, kdyby se místo funkce $J(x)$ počítalo v celém intervalu $0 < x < b$ s nějakou efektivní, konstantní

hodnotou osového kvadratického momentu průřezu tak, jako to najdeme ve starší literatuře pro vliv nalisovaných turbínových kotoučů /9/, /10/. Avšak tu by se ukázalo, že výsledky by nebyly dost univerzální. Hodnota J_{ef} by závisela nejen na geometrii hřídele, ale také na způsobu jeho zatížení, zejména na průběhu ohybového momentu $M(x)$.

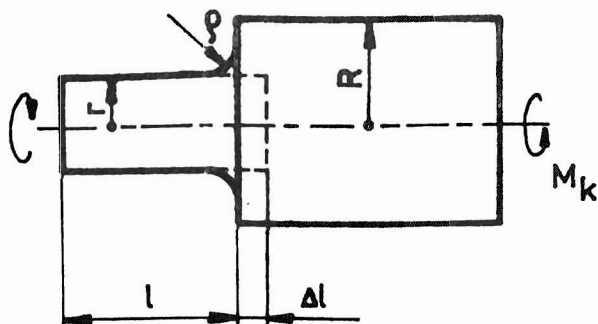
Obdobnou úlohu pro krut řešil Sähn /11/. Osazením se zpravidla přenáší konstantní krouticí moment, takže není nutné zavádět proměnný moment tuhosti v krutu $J_k(x)$, ale stačí počítat s jeho nespojitou změnou (brát J_k po částech konstantní) a vliv koncentrované deformace v místě osazení nebo zápichu započítat zvětšením výpočtové délky hřídele s menším průřezem o přírůstek Δl , tj. brát jeho "redukovanou" délku

$$l_{red} = l + \Delta l$$

Velikost Δl lze odečíst z diagramů, které uvádíme dále.



Obr. 19



Obr. 20

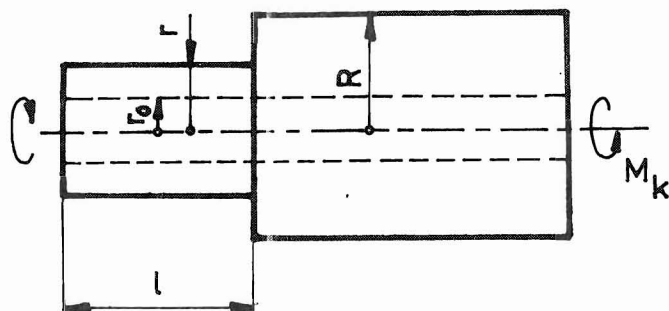
Z obr. 19 je možno odečíst přírůstek Δl v poměru k poloměru r , což je menší z obou poloměrů, v závislosti na poměru r/R osazeného hřídele (obr.20). Symbolem R značíme větší poloměr, symbolem ρ poloměr zaoblení kořene vrubu. Křivky na obr. 19 jsou zakresleny pro parametr ρ/r . Případ $\rho/r = 0$ odpovídá ostrému osazení.

Je-li osazení ostré a hřídel dutý (poloměr dutiny je r_0 , viz obr. 21), platí obr. 22. Má-li hřídel o poloměru r nákrůžek o poloměru R a osazení je ostré (obr. 23), odečteme přírůstek délky Δl z obr. 24.

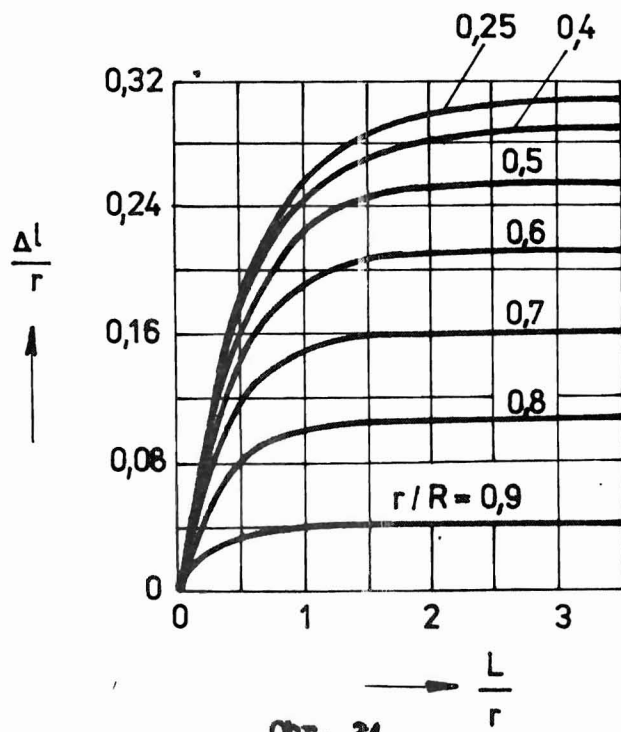
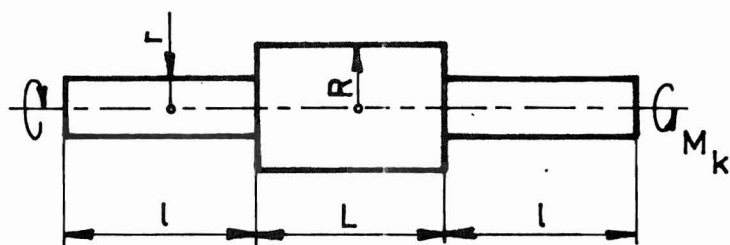
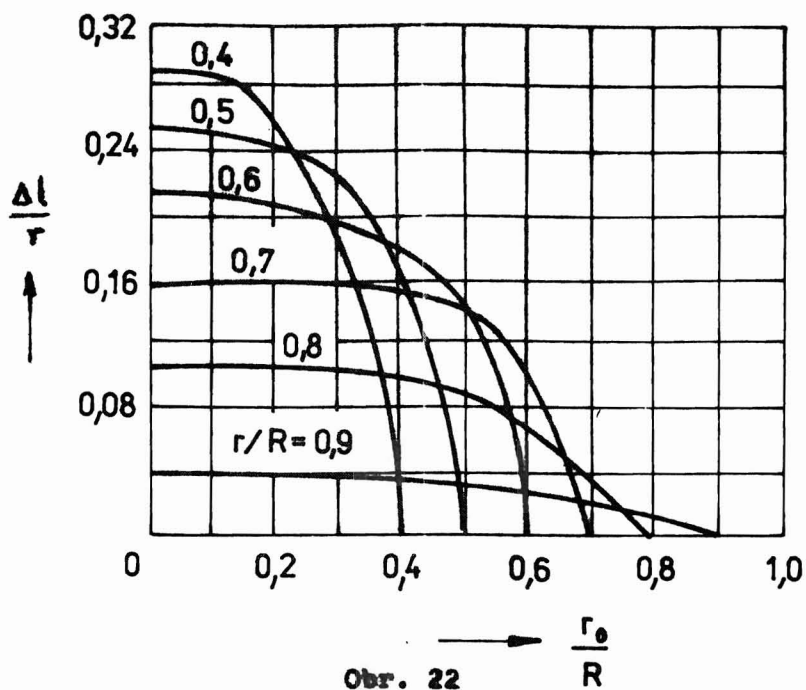
Pro hřídel s ostrým zápichem (s obvodovou trhlinou) podle obr. 25 platí obr. 26. Konečně pro hřídel s půlkruhovým zápichem podle obr. 27 platí obr. 28.

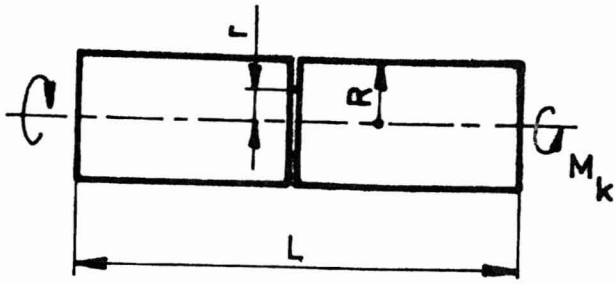
Hodnoty uvedené pro osazení a nákrůžky s nulovým poloměrem zaoblení by bylo možno použít také pro nalisované náboje, avšak jen při malých namáháních. Jinak vznikají relativní skluzu na okraji dotykové plochy a deformace jsou větší /12/.

V kořeni ostrých vrubů dává teorie pružnosti nekonečně velká napětí. Ta ve skutečnosti nemohou vzniknout, napětí zůstanou konečná vlivem plastických deformací. Zde uvedené výsledky platí za předpokladu, že oblast zasažená plastickými deformacemi je z hlediska poddajnosti hřídele zanedbatelná.

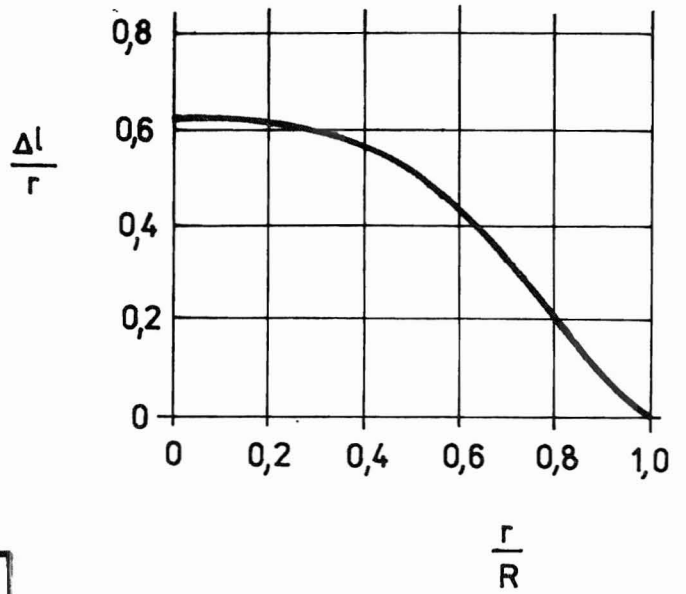


Obr. 21

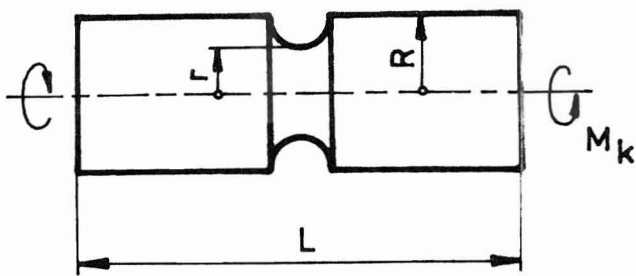




Obr. 25

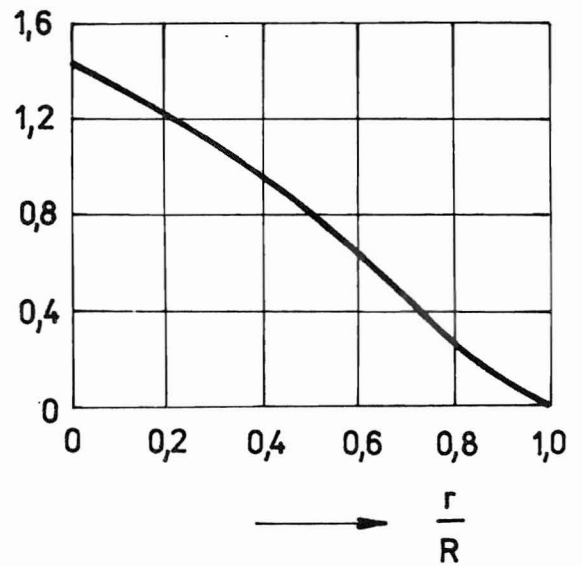


Obr. 26



Obr. 27

$$\frac{\Delta l}{r} \sqrt{\frac{r}{R}}$$



Obr. 28

Příklad

Vzájemné otočení konců hřídele podle obr. 25, resp. 27 se vypočte ze vzorce

$$\varphi = \frac{M_k L}{G \pi R^4/2} + \frac{M_k \Delta l}{G \pi r^4/2}$$

Délka Δl se odečte z obr. 26, resp. z obr. 28.

Pro hřídel s nákrůžkem podle obr. 23 dostaneme

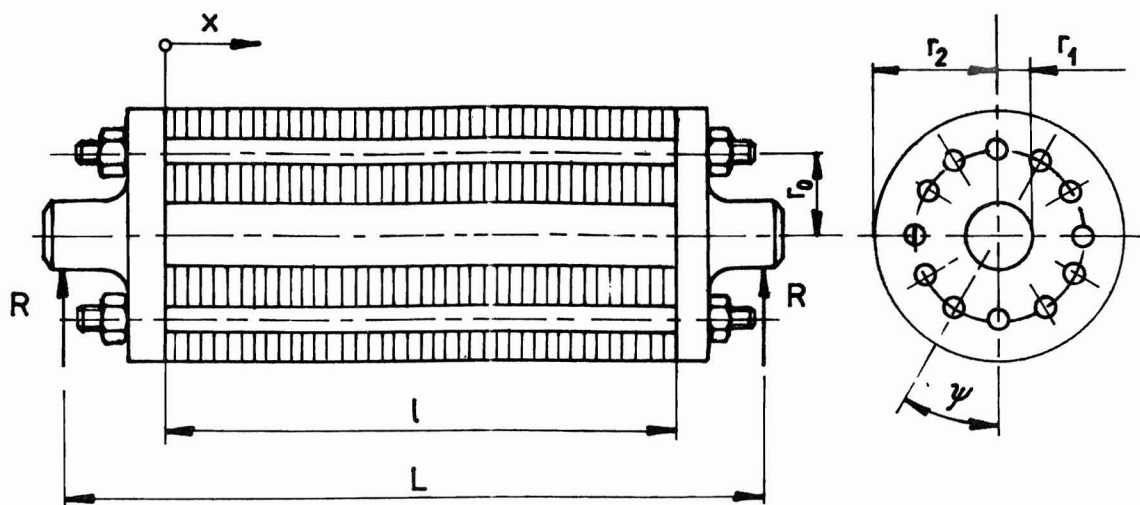
$$\varphi = \frac{M_k L}{G \pi R^4/2} + \frac{M_k \cdot 2(l + \Delta l)}{G \pi r^4/2}$$

V těchto vzorcích je $\pi R^4/2$ resp. $\pi r^4/2$ moment tuhosti hřídele v kruhu, G modul pružnosti ve smyku. Hodnotu Δl pro hřídel s nákrůžkem odečteme z obr. 24.

6. SLOŽENÝ NOSNÍK S TUHÝMI, VZÁJEMNĚ PROPOJENÝMI KONCOVÝMI ČELY

Tělesa velkých rotorů bývají sestavena z kotoučů spojených soustavou svorníků. Navrhují se tak z technologických důvodů /13/. Jiným příkladem konstrukce tohoto typu je stator velkého elektrického generátoru, jehož těleso je složeno z mnoha mezikruhových segmentů dynamového plechu a staženo průběžnými svorníky mezi dvě relativně tuhá čela. Zvláštností tohoto uspořádání je, že napjatost jádra konstrukce (kotoučů, mezikruhových listů dynamového plechu apod.) závisí na lokální deformaci nosníku, tj. na změně křivosti ohybové čáry, kdežto napjatost svorníků je dána převážně jen relativním pohybem koncových čel. U listěných konstrukcí je třeba mimo to počítat s nelineární deformační charakteristikou jádra /14/. Stejného typu je i úloha o nosníku s čely spojenými lanem /15/.

Metodu řešení ukážeme na zjednodušeném modelu sestávajícím z lineárně pružného "jádra" ve tvaru mezikruhového válce o poloměrech $r_2 > r_1$ a o délce l . Na koncích $x=0$ resp. $x=l$ je válec zakončen tuhými čely spojenými na roztečné kružnici o poloměru r_0 soustavou pravidelně rozmístěných svorníků ϕd o celkovém počtu $n > 2$. Budeme předpokládat, že nosník je na čepch čel prostě podepřen a v délce l zatížen rovnoměrně vlastní tíhou q [N/m] (obr. 29).



Obr. 29

Nepůsobí-li na nosník žádné příčné zatížení ($q = 0$), je v něm pouze předpětí vzniklé utažením matek svorníků. Ačkoli je velmi obtížné dosáhnout stejné velikosti sil ve svornících, budeme předpokládat, že v každém z předepjatých nosníků působí stejná tahová síla F_0 , takže tlakové napětí v jádru nosníku bude

$$p_0 = \frac{n F_0}{S} \quad (6.1)$$

kde

$$S = \pi (r_2^2 - r_1^2) - n \frac{\pi d^2}{4} \quad (6.2)$$

je plocha mezikruží zmenšená o n otvorů pro svorníky ϕd . Poměrné stlačení jádra tlakem p_0 je $-\epsilon_0$ (mínus, neboť jde o záporné poměrné prodloužení).

Zvolme nyní soustavu kartézských souřadnic x, y, z tak, že osa x padne do osy nepřetvořeného nosníku, osa y bude vodorovná a osa z svislá (ve směru příčného zatížení vlastní tíhou). Bude-li platit Bernoulliho-Navierova hypotéza o zachování rovinnosti průřezů, bude poměrné osové prodloužení zatíženého nosníku

$$\epsilon_x = \epsilon_x(x, z) = \epsilon_0 + \varkappa(x) z \quad (6.3)$$

kde $\varkappa = \varkappa(x)$ je křivost střednice a ϵ_0 její počáteční poměrné prodloužení (je ovšem $\epsilon_0 < 0$). Křivost \varkappa je kladná, leží-li střed křivosti nad střednicí. Pro napětí $\sigma_x = -p_0$ je definován tečný modul

$$E_t = \frac{d\sigma_x}{d\epsilon_x} \quad (6.4)$$

Budeme předpokládat, že ohybové deformace jsou malé, takže pro ně bude platit rovnice (6.4) i tehdy, nebude-li závislost $\varepsilon_x = \varepsilon_x(\sigma_x)$ lineární a změna poměrného prodloužení infinitesimální. Bude pak

$$\Delta \sigma_x \cong E_t \Delta \varepsilon_x = E_t \alpha(x) z \quad (6.5)$$

Pro lineárně pružný materiál se tečný modul E_t ztotožní s Youngovým modulem pružnosti E . Má-li jádro nelineární deformační charakteristiku, budou se obě hodnoty lišit.

Pro k -tý svorník máme souřadnici

$$z = z_k = r_0 \sin \psi_k = r_0 \sin \left(\frac{2\pi k}{n} + \psi_0 \right) \quad (6.6)$$

kde ψ_0 je libovolný počáteční úhel (závislý na pootočení nosníku) a $k = 1, 2, \dots, n$. Jeho poměrné prodloužení vyvolané ohybem bude

$$\Delta \varepsilon_k = z_k \int_0^l \alpha(x) dx \cdot \frac{1}{l} \quad (6.7)$$

Dva sousední řezy vzdálené dx se totiž vzájemně otočí o úhel $d\varphi = \alpha dx$ a vzdálenost mezi nimi se na souřadnici $z = z_k$ zvětší o $z_k d\varphi$. Odtud plyne (6.7). Pro vnitřní statické účinky (M -ohybový moment, N - osová síla, T - posouvající síla) musí platit podmínky statické ekvivalence

$$N = \int_S \sigma_x dS + n F_0 + c l \sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_k \quad (6.8)$$

$$M = \int_S z \sigma_x dS + c l \sum_{k=1}^n z_k \Delta \varepsilon_k \quad (6.9)$$

$$T = \int_S \tau_{xz} dS \quad (6.10)$$

kde

$$c = E \frac{\pi d^2}{4l} \quad \sigma_x = -p_0 + \Delta \sigma_x \quad (6.11)$$

Vzhledem k platnosti (6.1) bude

$$\int_S p_0 dS = n F_0 \quad (6.12)$$

takže po dosazení za G_x z rovnice (6.11) do (6.8) bude

$$N = \int_S \Delta G_x dS + c \ell \sum_{k=1}^n \Delta \varepsilon_k \quad (6.13)$$

Tato hodnota musí být nulová (žádná osová síla ve skutečnosti nepůsobí). Protože

$$\sum_{k=1}^n \sin \psi_k = \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{2\pi k}{n} + \psi_0 \right) = 0 \quad (6.14)$$

a také

$$\int_S z dS = 0 \quad (6.15)$$

je podmínka nulové osové síly splněna.^{x)} Z rovnice (6.9) dostaneme

$$M(x) = E_t \alpha e(x) \int_S z^2 dS + c \int_0^l \alpha e(x) dx \sum_{k=1}^n z_k^2 \quad (6.16)$$

Označíme

$$J = \int_S z^2 dS \quad (6.17)$$

a vypočteme

$$J = \frac{\pi}{4} (r_2^4 - r_1^4) - \frac{\pi d^2}{4} \sum_{k=1}^n z_k^2 \quad (6.18)$$

$$\sum_{k=1}^n z_k^2 = r_0^2 \sum_{k=1}^n \sin^2 \left(\frac{2\pi k}{n} + \psi_0 \right) = r_0^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} [1 - \cos \left(\frac{4\pi k}{n} + 2\psi_0 \right)] = \frac{n}{2} r_0^2 \quad (6.19)$$

Vyjde tedy

$$J = \frac{\pi}{4} (r_2^4 - r_1^4) - \frac{\pi n}{8} d^2 r_0^2 \quad (6.20)$$

x) Stačí do rovnice (6.13) dosadit z rovnic (6.5), popř. (6.6) a (6.7), abychom to ihned poznali.

a z rovnice (6.16)

$$M(x) = E_t \alpha(x) J + \frac{n}{2} c r_0^2 \int_0^l \alpha(x) dx \quad (6.21)$$

Protože $\alpha(x) = d\varphi(x)/dx$, je

$$M(x) = E_t \alpha(x) J + \frac{n}{2} c r_0^2 [\varphi(l) - \varphi(0)] \quad (6.22)$$

kde $\varphi(x)$ značí úhel, který svírá tečna k ohybové čáře s osou x (zanedbáme-li smykové deformace). V hranaté závorce (6.22) je tedy relativní úhel obou čel nosníku. Z rovnice (6.22) poznáváme, že $\alpha(x)$ má tvar

$$\alpha(x) = \frac{M(x)}{E_t J} - C_0 \quad (6.23)$$

kde

$$C_0 = \frac{n}{2 E_t J} c r_0^2 [\varphi(l) - \varphi(0)] \quad (6.24)$$

Když (6.23) dosadíme do rovnice (6.21) dostaneme

$$C_0 (E_t J + \frac{n}{2} c r_0^2 l) = \frac{n}{2} c r_0^2 \frac{1}{E_t J} \int_0^l M dx \quad (6.25)$$

Tuto rovnici upravíme a za C dosadíme ze vztahu (6.11).
Vyjde

$$C_0 = \frac{1}{1 + \frac{8 E_t J}{\pi n E r_0^2 d^2}} \cdot \frac{1}{l E_t J} \int_0^l M(x) dx \quad (6.26)$$

Protože průběh $M(x)$ známe, můžeme konstantu C_0 vypočítat. Podle obr.29 máme v intervalu $0 < x < l$

$$M(x) = \frac{q l}{2} (x + \frac{L-l}{2}) - \frac{q x^2}{2} \quad (6.27)$$

neboť $R = q l / 2$. Tíhu čel zanedbáváme. Délkové zatížení q působí proto jen na intervalu $0 < x < l$. Integrací dostaneme

$$\int_0^l M(x) dx = \frac{q l^2}{2} \left(\frac{l}{2} + \frac{L-l}{2} \right) - \frac{q l^3}{6} = \frac{q l^2}{12} (3L - 2l) \quad (6.28)$$

Je tedy

$$C_0 = \frac{1}{1 + \frac{8 E_t J}{\pi n E r_0^2 d^2}} \cdot \frac{q \ell (3L - 2\ell)}{12 E_t J} \quad (6.29)$$

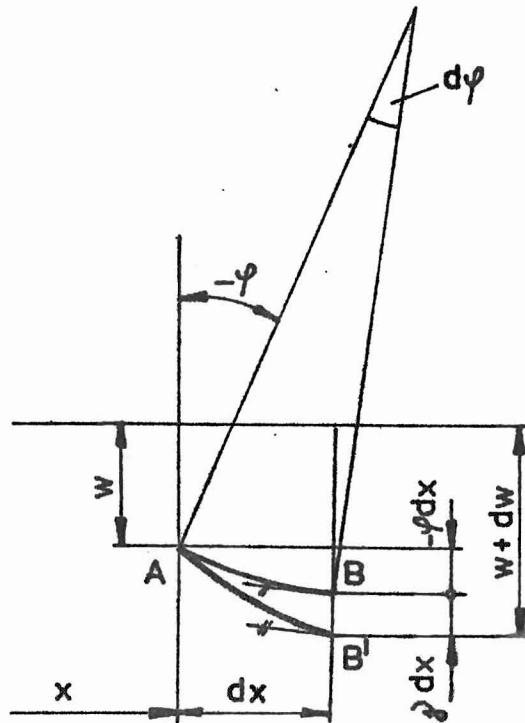
Nyní odvodíme rovnici ohybové čáry $W = W(x)$. Započítáme přitom také smykové deformace.

Úhel φ jsme definovali tak, že pro $x > 0$ se průřezy s rostoucím x otáčejí proti hodinovým ručičkám. Podle obr. 30 bude tedy platit, že

$$dw = -\varphi dx + \gamma dx \quad (6.30)$$

V této rovnici značí γ zkos, takže

$$\gamma = \frac{T}{k_s G S} \quad (6.31)$$



Obr. 30

Vlivem smyku dochází k deplanaci průřezů. Za předpokladu, že posouvající síla se mění jen zvolna, je deplanace souměrných (nekonečně blízkých) průřezů prakticky stejná a její vliv na osová poměrná prodloužení lze zanedbat. Tečné roviny k průřezům vedené v jejich středech A, B (obr. 30) svírají spolu úhel $d\varphi$. Vlivem smyku se průřezy relativně posunou,

takže oblouk střednice AB přejde v oblouk AB'. Normály k průřezům v bodech B, B' jsou rovnoběžné. Úhel BAB' je právě zkos γ .

Rovnici (6.30) zderivujeme, za dy/dx dosadíme $\alpha(x)$ a za dT/dx dosadíme $-q$. Bude pak

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\alpha(x) - \frac{q}{k_s GA} \quad (6.32)$$

S použitím (6.23) vyjde nakonec

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E_t J} + C_0 - \frac{q}{k_s GA} \quad (6.33)$$

Za $M(x)$ dosadíme z rovnice (6.27) a za C_0 z rovnice (6.29). Rovnici (6.33) integrujeme s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} w(0) &= w'(0) \frac{L-l}{2} \\ w(l) &= -w'(l) \frac{L-l}{2} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Vyplývají z předpokladu, že deformaci čepů a čel lze zanedbat. Vzhledem k souměrnosti můžeme druhou z podmínek (6.34) nahradit podmínkou

$$w'\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad (6.35)$$

Integrace rovnice (6.33) je velmi jednoduchá a nebudeme ji proto rozepisovat.

Za koeficient k_s v rovnici (6.33) dosadíme podle tab. 4 pro mezikruhový průřez ^{x)}

$$k_s = \frac{6(1+\mu)(1+m^2)^2}{(7+6\mu)(1+m^2)^2 + (20+12\mu)m^2} \quad (6.36)$$

kde $m = r_1/r_2$ značí poměr vnitřního a vnějšího poloměru, μ Poissonovo číslo.

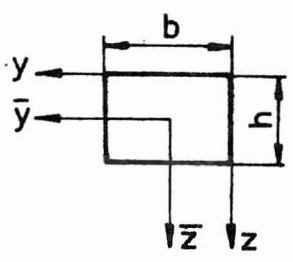
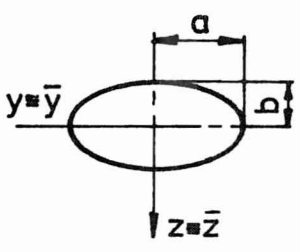
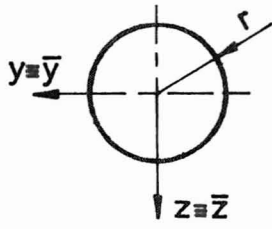
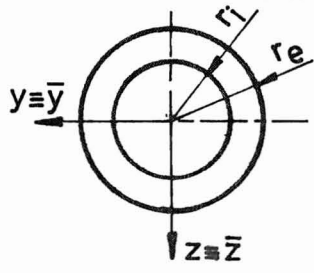
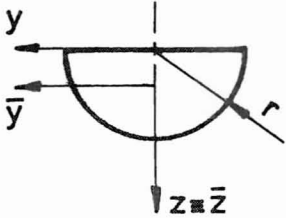
Diskuse

Předpokládali jsme, že k ohybu svorníků se spotřebuje jen zanedbatelná část ohybového momentu, neboť ohybová tuhost jádra je nepoměrně větší než ohybová tuhost svorníku. Také jsme zanedbali vůli mezi svorníkem a jádrem, i případné tření.

x) Viz též lit. /16/, /17/ a /18/.

Tab. 4 Geometrické vlastnosti některých průřezů

\bar{y}, \bar{z} = centrální osy; y_T, z_T = souřadnice těžiště; S = průřez
 J = osový kvadratický moment; k_s = smykový koeficient

Průřez	y_T, z_T, S	J	k_s
	$y_T = b/2$ $z_T = h/2$ $S = bh$	$J_{\bar{y}} = \frac{1}{12} bh^3$ $J_{\bar{z}} = \frac{1}{12} b^3h$	$\frac{10(1+\mu)}{12+11\mu}$
	$y_T = 0$ $z_T = 0$ $S = \pi ab$	$J_{\bar{y}} = \frac{1}{4} \pi ab^3$ $J_{\bar{z}} = \frac{1}{4} \pi a^3b$	$\frac{12a^2(1+\mu)(3a^2+b^2)}{a^4(40+37\mu)+C}$ $C = a^2b^2(16+10\mu) + \mu b^4$
	$y_T = 0$ $z_T = 0$ $S = \pi r^2$	$J_{\bar{y}} = J_{\bar{z}} = \frac{1}{4} \pi r^4$	$\frac{6(1+\mu)}{7+6\mu}$
	$y_T = 0$ $z_T = 0$ $S = \pi(r_e^2 - r_i^2)$	$J_{\bar{y}} = J_{\bar{z}} = \frac{1}{4} \pi (r_e^4 - r_i^4)$	$\frac{6(1+\mu)(1+m^2)^2}{(7+6\mu)(1+m^2)^2+C}$ $C = (20+12\mu)m^2$ $m = r_i/r_e$
	$y_T = 0$ $z_T = \frac{4}{3\pi} r$ $S = \frac{\pi}{2} r^2$	$J_{\bar{y}} = 0,109757r^4$ $J_{\bar{z}} = \frac{1}{8} \pi r^4$	$\frac{1+\mu}{1,305+1,273\mu}$

Bylo by chybou se domnívat, že pro rozdíl úhlů můžeme psát

$$\varphi(l) - \varphi(0) = \frac{1}{E_t J} \int_0^l M(x) dx \quad (a)$$

neboť toto pravidlo o momentové ploše v daném případě neplatí. Moment $M(x)$ se totiž nepřenáší pouze jádrem, ale také svorníky. Jádrem se přeneše pouze část $M_1(x) < M(x)$, totiž

$$M_1(x) = E_t J \alpha(x) \quad (b)$$

Výraz $E_t J$ je ohybová tuhost jádra nosníku při namáhání v okolí pracovního předpětí $G_x = -p_0$.

Nelze-li považovat jádro nosníku za homogenní válec, nahradí se $E_t J$ efektivní hodnotou vypočtenou z deformačních vlastností jádra nosníku. Takový případ nastává např. u skládaných rotorů s dotykovou plochou mezi kotouči omezenou na poměrně úzké mezikruží /13/.

Dalším předpokladem platnosti rovnic (6.8) a (6.9) je, že všechny svorníky sledují pohyb čel a že tedy nedojde vlivem nedostatečného předpětí k jejich uvolnění. Pro všechna k musí tedy platit podmínka

$$F_0 + E \frac{\pi d^2}{4} \Delta \varepsilon_k > 0 \quad (c)$$

Za $\Delta \varepsilon_k$ přitom dosazujeme z rovnice (6.7). S použitím (6.24) vyjde

$$l \Delta \varepsilon_k = z_k [\varphi(l) - \varphi(0)] = \frac{8 l E_t J}{\pi n E r_0^2 d^2} z_k C_0 \quad (d)$$

Konstanta C_0 je dána výrazem (6.29). Za z_k zvolíme nejméně příznivý případ, totiž $z_k = -r_0$. Podmínka (c) tak získá tvar

$$F_0 > \frac{2 E_t J}{n r_0} C_0 \quad (e)$$

Udává velikost potřebného předpětí svorníků.

7. PŘÍČNĚ NEHOMOGENNÍ NOSNÍKY

V předchozí kapitole jsme s pomocí obr. 30 odvodili diferenciální rovnici pro ohybovou čáru $w(x)$ nosníku i se zřetelem k jeho smykovým deformacím. Nyní tento případ zobecníme. Budeme předpokládat, že nosník přenáší ještě tlakovou sílu P (bude-li tahová, dosadíme $-P$) a že spočívá na pružném podkladě, který při průhybu w vyvolává spojitě rozdělenou reakci k_w (k je Winklerův modul podkladu) a při otočení střednice o úhel φ vyvolává spojitě rozdělený silový moment $m^* = -k^*\varphi$ (k^* je rotační modul podkladu). Protože zkos $\gamma = T/k_sGS$ [podle (6.31)], bude platit kinematický vztah

$$\frac{dw}{dx} = -\varphi + \frac{T}{k_sGS} \quad (7.1)$$

Z Hookeova zákona vyjde

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EJ} + \frac{M_T}{EJ} \quad (7.2)$$

kde M_T je teplotní moment

$$M_T = \int_s E \alpha \Delta t z dS \quad (7.3)$$

$\Delta t(z)$ je rozdíl teploty v daném bodě od teploty referenční, která je v celém nosníku konstantní, α je délková roztažnost. Z rovnic rovnováhy elementu nosníku o délce dx dostaneme, že

$$\frac{dM}{dx} = T + (k^* - P)\varphi - m \quad (7.4)$$

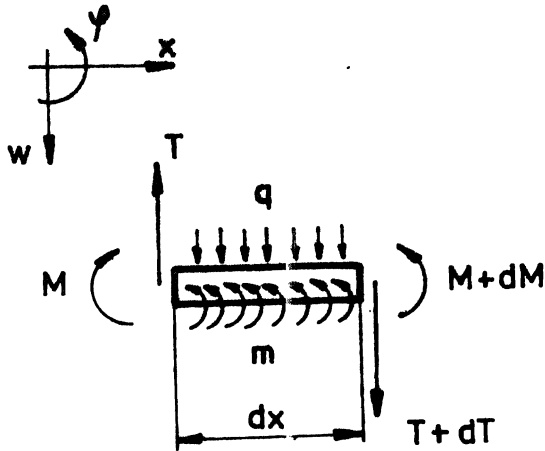
$$\frac{dT}{dx} = k_w - q \quad (7.5)$$

Zde m je spojitě rozdělený vnější moment a q délkové zatížení. Význam ostatních veličin jsme již vysvětlili. Měrné momenty m , m^* točí v opačném smyslu než obíhají ručičky na hodinách. Používáme tedy konvence podle obr. 31. Rovnice (7.1), (7.2), (7.4) a (7.5) lze zapsat maticově ve tvaru

$$\frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \\ M \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1/k_sGS \\ 0 & 0 & 1/EJ & 0 \\ 0 & k^* - P & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \\ M \\ T \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (7.6)$$

kde

$$\begin{aligned} f_1 &= 0 & f_2 &= M_T/EJ \\ f_3 &= -m & f_4 &= -q \end{aligned}$$



Obr. 31

Platí pro případ, že ohyb nosníku se děje v rovině x, z .
Zkráceně zapíšeme rovnici (7.6) takto

$$\frac{d}{dx} \{s\} = [A] \{s\} + \{f\} \quad (7.7)$$

Zde $\{s\} = [W \varphi M T]^T$ značí tzv. stavový vektor. Rovnici (7.7) můžeme řešit např. s použitím exponenciální funkce matice [19].

Postupným vyloučením některých proměnných lze rovnice (7.1), (7.2), (7.4) a (7.5) upravit také do tvaru

$$q = -\frac{d}{dx} [k_s G S (\frac{dw}{dx} + \varphi)] + k_w \quad (7.8)$$

$$m = -\frac{d}{dx} (EJ \frac{d\varphi}{dx}) + k_s G S \frac{dw}{dx} + (k_s G S + k^* - P) \varphi + \frac{dM_T}{dx} \quad (7.9)$$

$$T = k_s G S (\frac{dw}{dx} + \varphi) \quad (7.10)$$

$$M = EJ \frac{d\varphi}{dx} - M_T \quad (7.11)$$

Položíme-li v těchto rovnicích $m = 0$, $k^* = 0$, $M_T = 0$, $\lim k_s G S \rightarrow \infty$, tj. zanedbáme-li smyk a bereme nulový spojitý moment v nosníku bez tepelných pnutí, dostaneme po úpravě tuto soustavu rovnic

$$\frac{d^2}{dx^2} (EJ \frac{d^2 w}{dx^2}) + \frac{d}{dx} P \frac{dw}{dx} + k_w = q \quad (7.12)$$

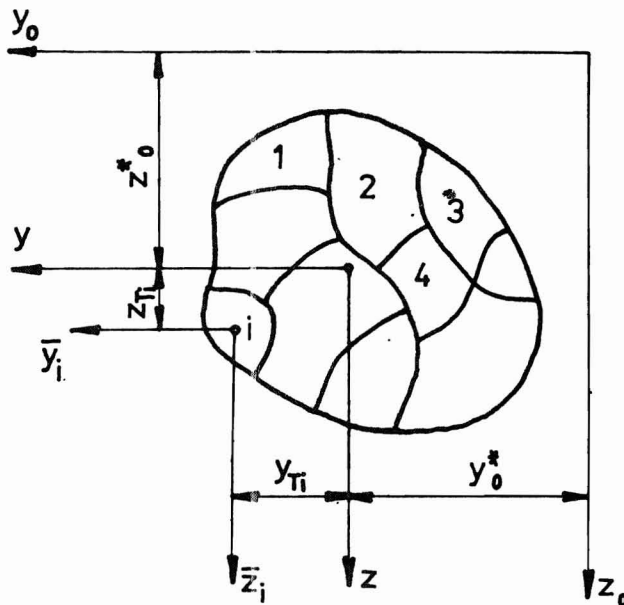
$$T = - \frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - P \frac{dw}{dx} \quad (7.13)$$

$$M = - EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (7.14)$$

$$\varphi = - \frac{dw}{dx} \quad (7.15)$$

Rovnice ve tvaru (7.12) až (7.15) najdeme téměř v každé učebnici aplikované pružnosti. Jsou to Eulerovy - Bernoulliho rovnice.

Nyní tyto rovnice zobecníme pro případ, že se nosník skládá z různorodých podélných tyčí či vláken (výztuh a pojiva). Lze si představit, že jde o soustavu navzájem spojených tyčí různých elastických vlastností (obr. 32). Jednotlivé tyče mají průřez S_i , souřadnice těžiště y_{0i} , z_{0i} a modul pružnosti E_i .



Obr. 32

Předpokládejme nyní, že se tyče rovnoměrně prodlouží. Relativní prodloužení všech tyčí bude stejné; označíme je ε . Napětí bude však v každé tyči jiné, a to

$$\sigma_i = E_i \varepsilon \quad (7.16)$$

Pro polohu y_0^* , z_0^* působí výsledná síla

$$F = \sum \sigma_i S_i \quad (7.17)$$

která by způsobila rovnoměrné prodloužení ale žádný ohyb, platí momentové podmínky

$$F_{y_0^*} = \sum y_{0i} \sigma_i S_i \quad (7.18)$$

$$F_{z_0^*} = \sum z_{0i} \sigma_i S_i \quad (7.19)$$

v nichž $y_{0i} = y_0^* + y_{\tau i}$, $z_{0i} = z_0^* + z_{\tau i}$ (obr. 32). Dosadíme sem z rovnic (7.16) a (7.17). Vyjde

$$y_0^* \varepsilon \sum E_i S_i = \varepsilon \sum y_{0i} E_i S_i \quad (7.20)$$

$$z_0^* \varepsilon \sum E_i S_i = \varepsilon \sum z_{0i} E_i S_i \quad (7.21)$$

V těchto rovnicích se ε krátí. Zvolíme nějakou referenční hodnotu E modulu pružnosti a podělíme jí rovnice (7.20) a (7.21). Poté vypočteme souřadnice y_0^* , z_0^* . Po úpravě bude

$$y_0^* = \frac{1}{S^*} \sum y_{0i} S_i^* \quad (7.22)$$

$$z_0^* = \frac{1}{S^*} \sum z_{0i} S_i^* \quad (7.23)$$

kde

$$S^* = \sum S_i^* \quad (7.24)$$

$$S_i^* = \frac{E_i}{E} S_i \quad (7.25)$$

Vzorce (7.22) a (7.23) mají úplně stejný tvar jako vzorce pro výpočet polohy těžiště průřezu (v homogenním nosníku) rozděleného na části. Lze tak ukázat, že všechny vzorce platné pro homogenní nosník budou i nadále platit, nahradíme-li plošný element dS_i hodnotou

$$dS_i^* = \frac{E_i}{E} dS_i \quad (7.26)$$

Dostaneme tak "modulově vážené" průřezové charakteristiky (označujeme je hvězdičkou)

průřez

$$S^* = \sum \frac{E_i}{E} S \quad (7.27)$$

osové kvadratické momenty

$$J_{y_0^*}^* = \sum \frac{E_i}{E} J_{y_{0i}} = \sum \frac{E_i}{E} (J_{\bar{y}_i} + z_{0i}^2 S_i) \quad (7.28)$$

$$J_{z_0^*}^* = \sum \frac{E_i}{E} J_{z_{0i}} = \sum \frac{E_i}{E} (J_{\bar{z}_i} + y_{0i}^2 S_i) \quad (7.29)$$

a deviační moment

$$J_{y_0 z_0}^* = \sum \frac{E_i}{E} (J_{\bar{y}_i \bar{z}_i} + y_{0i} z_{0i} S_i) \quad (7.30)$$

K centrálním osám y, z budou tyto momenty

$$J_y^* = J_{y_0}^* - z_0^{*2} S^* \quad (7.31)$$

$$J_z^* = J_{z_0}^* - y_0^{*2} S^* \quad (7.32)$$

$$J_{yz}^* = J_{y_0 z_0}^* - y_0^* z_0^* S^* \quad (7.33)$$

Rovnice odvozené pro ohyb homogenního nosníku v rovině x, z zůstanou v platnosti, nahradíme-li ohybovou tuhost EJ hodnotou EJ_y^* a smykovou tuhost $k_s GS$ výslednou hodnotou \tilde{C} . Pro výpočet této hodnoty nemáme jednoduchý předpis. Lze-li předpokládat přibližně pravidelnou, kvazi-homogenní strukturu, můžeme brát

$$\tilde{C} = \frac{T}{\gamma} = k_s G \tilde{S} \quad (7.34)$$

$$\tilde{S} = \sum \frac{G_i}{G} S_i \quad (7.35)$$

Mají-li jednotlivé složky (vlákna, tyče) stejné Poissonovo číslo, je $\tilde{S} = S^*$.

Při rovinném ohybu musí být splněna podmínka

$$J_{yz}^* = 0 \quad (7.36)$$

Jinak je třeba počítat s tím, že ohyb bude prostorový. Předpokládejme, že v nosníku nebude tlaková síla ($P = 0$) a že průřez nemá nulový deviační moment (7.33). Pak budou pro prostorový ohyb platit rovnice

$$\frac{dw}{dx} = -\varphi + \frac{1}{G\tilde{S}} (\alpha_{zz} T_z - \alpha_{yz} T_y) \quad (7.37)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{(M_y + M_{Ty}) J_z^*}{E(J_y^* J_z^* - J_{yz}^{*2})} + \frac{(M_z + M_{Tz}) J_{yz}^*}{E(J_y^* J_z^* - J_{yz}^{*2})} \quad (7.38)$$

Rovnice (7.37) a (7.38) nastoupí místo rovnic (7.1) a (7.2). Koeficienty α_{zz}, α_{yz} závisí na tvaru a složení průřezu. Teplotní momenty jsou definovány vztahy

$$M_{Ty} = E \int_S \alpha_{\Delta t} z dS^* \quad (7.39)$$

$$M_{Tz} = E \int_S \alpha \Delta t y dS^* \quad (7.40)$$

Zde $\Delta t (y, z)$ je rozdíl teplot v daném bodě od referenční teploty. Integraci v rovnicích (7.39) a (7.40) uskutečňujeme po jednotlivých ploškách S_i , takže např.

$$\int \alpha \Delta t z dS^* = \sum_i \alpha_i \int_{S_i} \Delta t (y, z) \frac{E_i}{E} dS_i \quad (7.41)$$

Referenční hodnotu modulu pružnosti volíme libovolně, zpravidla však tak, aby se shodovala s modulem pružnosti některé složky zastoupené ve struktuře. U homogenních materiálů pak bude $E_i = E$ pro všechna i , takže $E J_y^* = E J_y$, $S^* = S$.

Poznámka

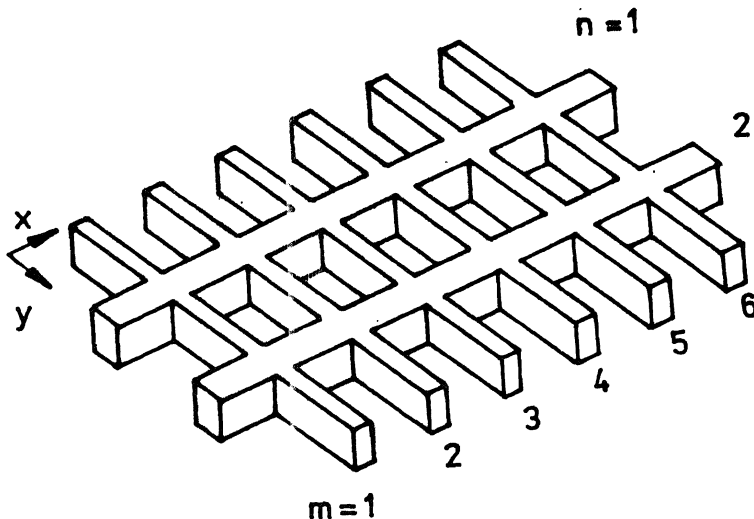
Ve výpočtu ohybu příčně nehomogenního nosníku jsme zanedbali vliv různého Poissonova čísla na vzájemné působení strukturních složek. Přesnější výpočet pro vrstvené kruhové válce, který respektuje i různost Poissonových čísel, obsahuje práce /20/.

8. PŘIBLIŽNÝ VÝPOČET ROŠTŮ

Rošt se skládá z podélníků a z příčníků, které se navzájem kolmo protínají a jsou v místech překřížení pevně spojeny. Budeme předpokládat, že jak podélníky, tak příčníky mají stejný průřez a stejnou vzdálenost (u podélníků jsou však tyto hodnoty obecně jiné než u příčníků). Materiál je v obou případech též.

Podélníky mají zpravidla funkci hlavních nosných prvků a budeme je proto číslovat $1, 2, \dots, n, \dots, N$. Příčníky bývají kratší a představují soustavu výtuh. Budeme je číslovat $1, 2, \dots, m, \dots, M$. Příklad roštu pro $N = 2$ a $M = 6$ je uveden na obr. 33.

Označení podélníků a příčníků lze zaměnit, tj. podélníky lze považovat za příčníky a naopak. Stačí tedy, soustředíme-li se na rozbor deformací a namáhání pouze jedné z obou soustav, tj. na podélníky.



Obr. 33

Výpočet zjednodušíme předpokladem, že krut podélníků i příčníků lze zanedbat. Tento předpoklad je oprávněný, jsou-li průřezy otevřené a tenkostěnné. Avšak ani v jiných případech nevzniká větší chyba než asi 5 % /16/. Dalším zjednodušujícím předpokladem bude, že příčnický se deformují do tvaru poloviny sinusovky. Průhyb podélníků rozvineme do Fourierovy řady, takže při prostém (kloubovém) podepření konců roštu bude průhyb podélníků o délce L

$$w_n = \sin \frac{\pi n}{N+1} \sum_{j=1}^{\infty} K_j \sin \frac{j \pi x}{L} \quad (8.1)$$

a průhyb příčníků o délce l .

$$w_m = \sin \frac{\pi y}{l} \sum_{j=1}^{\infty} K_j \sin \frac{j \pi m}{M+1} \quad (8.2)$$

Protože ohybové momenty dostaneme z průhybů teprve po dvojnásobném derivování a protože derivováním se chyby zvětšují, dostaneme ze vzorců dobrou aproximaci ohybových momentů jen v podélnících. Jejich přetváření jsme totiž předpokladem (8.1) nijak zvlášť neomezili. Omezení, které klademe na funkce $w_n = w_n(x)$, je spojitost a splnění okrajových podmínek $w_n(0) = 0$, $w_n(l) = 0$. Zato funkce $w_m = w_m(y)$ nedovoluje jiný tvar průhybovky příčnicku než sinusovku. Avšak toto zjednodušení způsobí jen velmi malou chybu ve výpočtu deformací, takže deformační podmínka (průhyb ve styčnicku je pro podélník i příčník společný) umožní poměrně přesný výpočet výztužného působení příčníků. K výpočtu namáhání se vztah (8.2) již nehodí.

Sklon n -tého podélníku tedy bude

$$\varphi_n = \frac{dw}{dx} = \sin \frac{\pi n}{N+1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j \pi}{L} K_j \cos \frac{j \pi x}{L} \quad (8.3)$$

a jeho ohybový moment

$$M_n = -EJ_p \frac{d^2 w}{dx^2} = EJ_p \sin \frac{\pi n}{N+1} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j\pi}{L} \right)^2 K_j \sin \frac{j\pi x}{L} \quad (8.4)$$

Než budeme pokračovat v odvozování vzorců pro součinitele K_j Fourierovy řady, připomeneme některé vzorce známé z matematiky. Především platí, že

$$\int_0^L \sin^2 \frac{j\pi x}{L} dx = \frac{L}{2} \quad (8.5)$$

$$\int_0^L \sin \frac{j\pi x}{L} \sin \frac{k\pi x}{L} dx = 0 \quad (\text{pro } j \neq k) \quad (8.6)$$

(j, k jsou celá čísla). K důkazu vzorce (8.5) použijeme substituce

$$\frac{\pi x}{L} = \varphi \quad (8.7)$$

a vztahu

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) \quad (8.8)$$

Vzorec (8.6) vyjadřuje známou vlastnost goniometrických funkcí $\sin j\varphi$, $\sin k\varphi$, totiž ortogonalitu na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Další vzorec, který budeme potřebovat, je

$$\sum_{n=1}^N \sin^2 \frac{\pi n}{N+1} = \frac{N+1}{2} \quad (8.9)$$

Např. pro $N = 2$

$$\left(\sin \frac{\pi}{3} \right)^2 + \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right)^2 = 0,75 + 0,75 = \frac{3}{2} = \frac{N+1}{2}$$

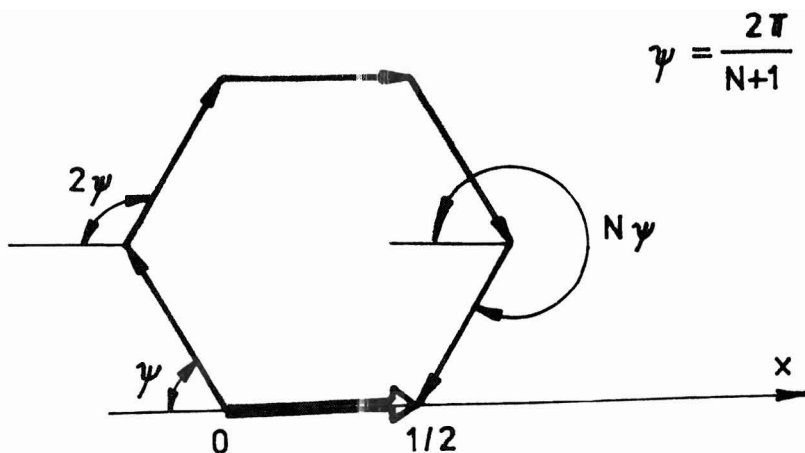
K odvození vzorce (8.9) použijeme nejprve formule (8.8).

Bude

$$\sum_{n=1}^N \sin^2 \frac{\pi n}{N+1} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi n}{N+1} \right) = \frac{N}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \cos \frac{2\pi n}{N+1} \quad (8.10)$$

Druhý člen na pravé straně rovnice (8.10) si můžeme představit jako součet průmětů stran pravidelného $(N+1)$ -úhelníku do osy x , přičemž délka jeho strany je $1/2$ (obr. 34).^{x)}

x) Pro kreslení obrázku bylo použito $N = 5$.



Obr. 34

Poslední strana, která by polygon uzavírala, chybí, neboť sečítáme od 1 do N a nikoli do $N + 1$. Výsledek tedy je

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \cos \frac{2\pi n}{N+1} = \frac{1}{2} \quad (8.11)$$

K výpočtu součinitelů K_j použijeme principu virtuálních prací, podle něhož se virtuální práce δA vnějších sil působících na pružné těleso za rovnováhy rovná virtuální práci δU vnitřních sil, tj. virtuální změně deformační energie. Deformační energie v podélníku je

$$U_n = \frac{1}{2EJ_p} \int_0^L M_n^2(x) dx = \frac{1}{2} EJ_p \sin^2 \frac{\pi n}{N+1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^4 \pi^4}{2L^3} K_j^2 \quad (8.12)$$

Vypočetli jsme ji s použitím vzorců (8.4), (8.5) a (8.6).
Ve všech podélnících bude

$$\sum_{n=1}^N U_n = \frac{\pi^4 EJ_p (N+1)}{8L^3} \sum_{j=1}^{\infty} j^4 K_j^2 \quad (8.13)$$

Obdobně vypočteme deformační práci ve všech příčnicích

$$\sum_{m=1}^M U_m = \frac{\pi^4 EJ_v (M+1)}{8l^3} \sum_{j=1}^{\infty} K_j^2 \quad (8.14)$$

Při odvození vzorců (8.13) a (8.14) jsme použili formuli (8.9). Index "p" se vztahuje k podélníkům, index "v" k příčnicům (výztuhám).

Nechť působí pouze jedna osamělá síla F_{rs} . Je kolmá k roštu a působí ve styčnicku, v němž se protíná r -tý podélník s s -tým příčnicem.

Změní-li se nyní jeden ze součinitelů Fourierovy řady o nekonečně malou hodnotu δK_j , vykoná vnější síla F_{rs} virtuální práci

$$\delta A = F_{rs} \delta w_{rs} = F_{rs} \sin \frac{\pi r}{N+1} \sin \frac{j\pi s}{M+1} \delta K_j \quad (8.15)$$

Virtuální změna deformační energie je

$$\delta U = \frac{\partial}{\partial K_j} \left(\sum_{n=1}^N U_n + \sum_{m=1}^M U_m \right) \delta K_j \quad (8.16)$$

Když do rovnice (8.16) dosadíme výrazy (8.13) a (8.14), dostaneme (pro určité j)

$$\delta U = \frac{\pi^4 E J_p (N+1)}{4 L^3} j^4 K_j \delta K_j + \frac{\pi^4 E J_v (M+1)}{4 l^3} K_j \delta K_j \quad (8.17)$$

Dosazením (8.15) a (8.17) do podmínky

$$\delta A = \delta U \quad (8.18)$$

dostaneme rovnici pro určení koeficientu K_j . Vyjde

$$K_j = \frac{2l^3}{\pi^4 E J_v} \cdot \frac{F_{rs} \sin \frac{\pi r}{N+1} \sin \frac{j\pi s}{M+1}}{\frac{M+1}{2} + \frac{N+1}{2} j^4 \frac{J_p}{J_v} \cdot \frac{l^3}{L^3}} \quad (8.19)$$

Známe-li tyto koeficienty, můžeme vypočítat nejen průhyby, ale také ohybové momenty v podélnících podle rovnice (8.4).

Kdybychom rovnici (8.4) ještě jednou derivovali v domnění, že dostaneme průběh posouvající síly T_n v n -tém podélníku, byli bychom zklamáni. Průběh posouvající síly je po částech konstantní, ve styčnicích nespojitý. Tuto nespojitost Fourierova řada nemůže přesně vystihnout; konverguje k aritmetickému průměru limit zleva a zprava a k přesnějšímu vystižení průběhu posouvající síly v okolí styčniců je třeba velkého počtu sčítanců. Posouvající sílu by proto bylo třeba počítat jinak /21/.

Použitá metoda výpočtu umožňuje velmi snadno respektovat zmenšení únosnosti vlivem vzpěru. Přenáší-li totiž rošt tlakové síly P_p v podélnících resp. P_v v příčnicích, zvyšují se jejich deformace přibližně v poměru $(P_{PE} - P_p)/P_{PE}$ resp. $(P_{VE} - P_v)/P_{VE}$, kde

$$P_{PE} = \frac{\pi^2 E J_p}{L^2} \quad P_{VE} = \frac{\pi^2 E J_v}{l^2} \quad (8.20)$$

jsou Eulerovy vzpěrné síly. Je to ukázáno např. v lit. /22/, díl II. str. 52.

Když takto doplníme dříve uvedený výpočet a rozšíříme jej i na jiné způsoby zatížení, dostaneme pro součinitele K_j výrazy uvedené v tab. 5.

Tab. 5 Koeficienty K_j v rovnicích (8.1) až (8.4)

Zatížení	K_j
<p>Osamělé síly F_{rs} v bodě</p> <p>$x = x_s$</p> <p>$y = y_r$</p>	$\frac{\frac{2L^3}{\pi^4 EJ_V} \frac{P_V E}{P_{VE} - P_V} \sum_{s=1}^M \sum_{r=1}^N F_{rs} \sin \frac{\pi r}{N+1} \sin \frac{j\pi s}{M+1}}{\frac{N+1}{2} j^4 \left(\frac{\ell}{L}\right)^3 \left(\frac{J_p}{J_V}\right) \left(1 - \frac{P_p}{j P_{pE}}\right) + \frac{M+1}{2}}$
<p>Konstantní délkové zatížení q_s působí na s-tý příčnick</p> <p>($s = 1, 2, \dots, M$)</p>	$\frac{\frac{4L^4}{\pi^5 EJ_V} \frac{P_{VE}}{P_{VE} - P_V} \sum_{s=1}^M q_s \sin \frac{j\pi s}{M+1}}{\frac{N+1}{2} j^4 \left(\frac{\ell}{L}\right)^3 \left(\frac{J_p}{J_V}\right) \left(1 - \frac{P_p}{j P_{pE}}\right) + \frac{M+1}{2}}$
<p>Stejné zatížení q působící na všechny příčnicky</p>	<p>Postačí brát $j = 1$, takže bude</p> $K_1 = \frac{\frac{4L^4}{\pi^5 EJ_V} \frac{P_{VE}}{P_{VE} - P_V} q \cotg \frac{\pi}{2(M+1)}}{\frac{N+1}{2} \left(\frac{\ell}{L}\right)^3 \left(\frac{J_p}{J_V}\right) \left(1 - \frac{P_p}{P_{pE}}\right) + \frac{M+1}{2}}$

Tlakové síly P_p v podélnicích, resp. P_V v příčných výztuhách, mohou vzniknout nejenom přímým silovým působením v rovině roštu, ale také nepřímo účinkem teplotních dilatací, nemohou-li se konce podélníků, resp. příčnicků, volně posouvat.

Poznámka

Prakticky postačí, bereme-li v součtech

$$\sum_{j=1}^{\infty} \approx \sum_{j=1}^M$$

9. STABILITA MŘÍŽE

Rozdíl mezi roštem a mříží je ten, že rošt je namáhán příčně, kdežto mříž je namáhána ve své rovině. Obě tyto konstrukce lze považovat za zvláštní typ rámu a řešit obvyklými metodami.

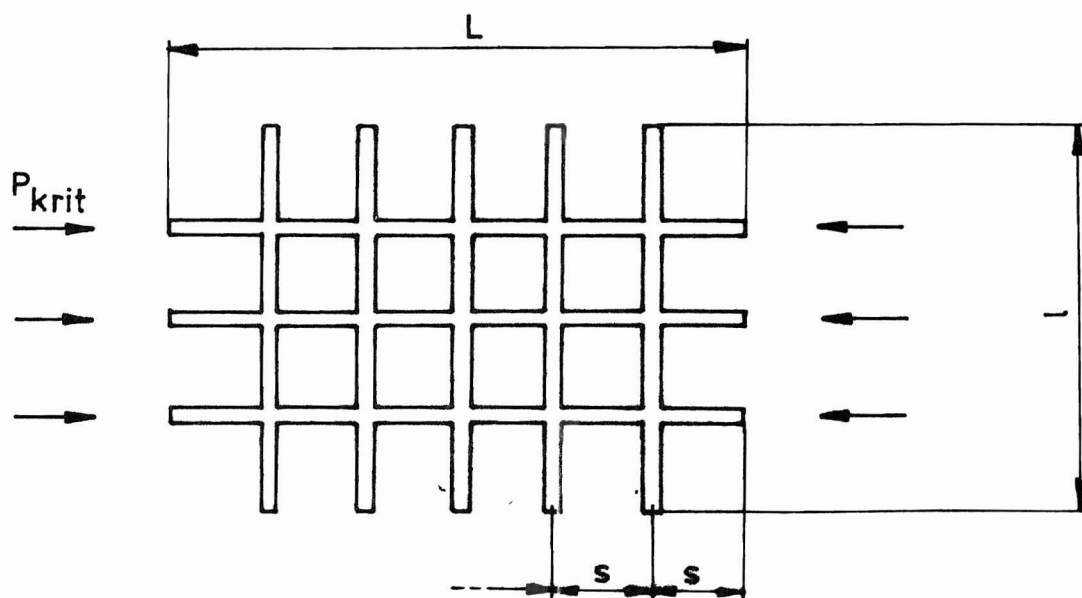
Výhodné je, je-li rošt, popř. mříž pravidelná, např. mají-li všechny podélníky, resp. příčnický, stejný průřez a stejnou rozteč. Příklad takového roštu byl znázorněn na obr. 33. Pak se všechny vztahy zjednodušují. Jak jsme ukázali v předchozí kapitole, lze energetickou metodou dostat velmi užitečné vzorce, které zahrnují i vliv tlakových sil v podélnících, popř. v příčnicích, na tuhost a namáhání roštu při jeho dalším zatěžování příčnými silami (osamělými i spojitě rozdělenými).

Nyní se budeme zabývat případem, kdy stejná konstrukce je zatížena pouze tlakovými silami v podélnících (nikoli v příčnicích), a chceme posoudit její bezpečnost vzhledem ke kritickému vzpěrnému zatížení. Uvedeme pouze výsledky, jejichž odvození lze najít v lit. /23/.

Nejprve vypočítáme konstantu

$$D_1 = 0,0866 \frac{L^2}{\sqrt{C_1 s e^3 (J_p/J_v)}} \quad (9.1)$$

kde L je délka podélníku s osovým kvadratickým momentem J_p . Příčná výztuha má délku e a osový kvadratický moment J_v . Rozteč příčných výztuh je $s = L/(M+1)$ (obr. 35). Konstantu C_1 odečteme z tab. 6.



Obr. 35

Tab. 6 Hodnoty C_1 ve vzorcích (9.1) a (9.3)

Počet podélníků N	C_1 Konce příčných výztuh	
	prostě podepřené	vetknuté
1	0,020 833	0,005 208 3
2	0,030 864	0,006 172 8
3	0,041 089	0,008 041 9
4	0,051 342	0,010 009
5	0,061 603	0,011 997
6	0,071 866	0,013 990
7	0,082 131	0,015 986
8	0,092 396	0,017 982
9	0,102 66	0,019 979
10	0,112 93	0,021 976

Další postup výpočtu závisí na velikosti hodnoty D_1 , jak je zřejmé z tab. 7. K výpočtu kritické osové tlakové síly v podélnících potřebujeme ještě Eulerovu sílu

$$P_{PE} = \frac{\pi^2 E J_p}{L^2} \quad (9.2)$$

a případně ještě konstantu

$$D_2 = 0,202 \frac{L^2}{\sqrt{C_1 s e^3 (J_p / J_v)}} \quad (9.3)$$

Zřejmě $D_2 \doteq 2,3326 D_1$.

Tab. 7 Kritické osové síly v podélnících

Konce podélníků	D_1	P_{krit}
prostě podepřené	$D_1 \leq 1$	$(1 + D_1) P_{PE}$
	$D_1 > 1$	$D_2 P_{PE}$
vetknuté	$D_1 \leq 1$	$(4 + D_1) P_{PE}$
	$D_1 > 1$	$(3 + D_2) P_{PE}$

Výpočet se týká mříže, jejíž podélníky jsou zatíženy stejnými tlakovými silami. Příčníky žádnou osovou sílu nepřenesou. Jejich konce mohou být buď vetknuté nebo prostě podepřené. Předpokládá se, že kritické tlakové namáhání zůstává v elastické oblasti.

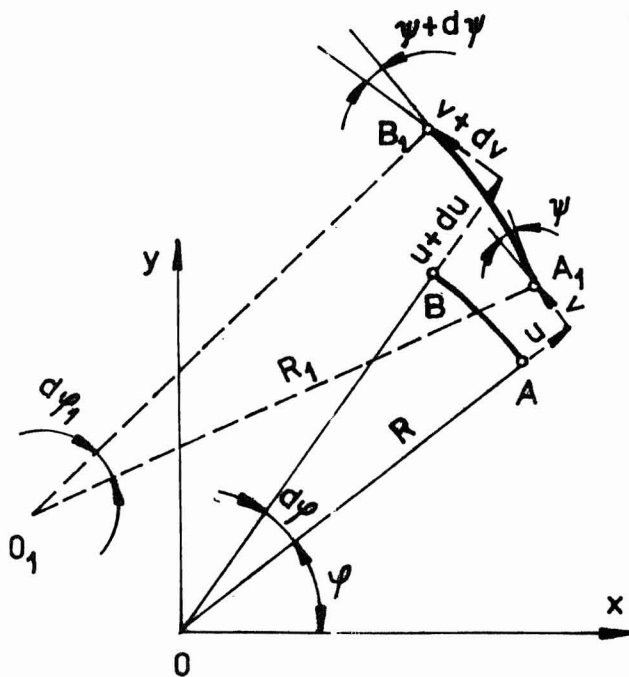
10. DILATACE A OHYB KRUHOVÉHO PRSTENCE V JEHO ROVINĚ

Relativně tenký uzavřený kruhový prut nazýváme prstenec. Předpokládáme, že pro něj platí Bernoulliho-Navierova hypotéza o zachování rovinnosti průřezů, takže posuvy bodů v průřezu jsou lineárními funkcemi souřadnic (radiální a axiální souřadnice). Budeme také předpokládat, že platí teorie ohybu tenkých prutů, tj. že (vnější) rozměry průřezu jsou malé ve srovnání s poloměrem, a že jsou splněny podmínky pro rovinný ohyb.

Obecnou teorii prstence rozdělujeme na dva případy; na dilataci a ohyb prstence v jeho rovině a na ohyb a krut, při němž prstenec z roviny vybočuje. Tento druhý případ probereme v příští kapitole.

Za prstence můžeme ve strojnictví považovat různé nákršky, prstencové výztuhy rotačních skořepin, úzké přírubby, věnce setrvačnicků a diskových kol.

Probereme nejprve dilataci a ohyb prstence v jeho rovině. Vzhledem k platnosti Bernoulliho-Navierovy hypotézy stačí vyšetřit deformaci střednice o poloměru R , neboť posuvy ostatních bodů jsou dány předpokladem, že průřezy zůstanou rovinné a že je střednice protíná i po deformaci kolmo. K popisu zvolíme válcové souřadnice r, φ, z a tomu odpovídající posuvy u, v, w . Při rovinné deformaci prstence je axiální posuv w bodů na střednici nulový. Nenulové jsou pouze radiální posuv u a obvodový posuv v . Pro body na střednici máme před deformací souřadnice $(R, \varphi, 0)$ a po deformaci $(R+u, \varphi+v/R, 0)$. Vyšetříme, jaké vzniká poměrné prodloužení ϵ_φ a jaká změna křivosti α_2 střednice v daném bodě.



Obr. 36

Na obr. 36 je vyznačen oblouk AB střednice před deformací a jeho poloha $A_1 B_1$ po deformaci. Úhel ψ , který svírá tečna k deformované střednici v bodě A_1 s obvodovým směrem (s kolmicí na paprsek OA) je zřejmé

$$\psi = \frac{du}{R dy} \quad (10.1)$$

Tentýž úhel v bodě B_1 je

$$\psi + d\psi = \psi + \frac{d^2u}{R^2 dy^2} R dy \quad (10.2)$$

Úhel $d\psi_1$ tedy je

$$d\psi_1 = d\psi + \frac{dv}{R} - d\psi = d\psi + \frac{dv}{R} - \frac{d^2u}{R^2 dy^2} R dy \quad (10.3)$$

Protože úhel ψ je malý, je prodloužení úsečky AB rovno

$$A_1 B_1 - AB = dv + u dy \quad (10.4)$$

a poměrné (obvodové) prodloužení bude

$$\epsilon_\psi = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} = \frac{dv + u dy}{R dy} \quad (10.5)$$

Z trojúhelníku $O_1 A_1 B_1$ máme

$$R_1 d\psi_1 = R dy (1 + \epsilon_\psi) \quad (10.6)$$

Do vztahu (10.6) dosadíme z rovnic (10.3) a (10.5). Vyjde

$$R_1 dy + \frac{R_1}{R} dv - \frac{d^2u}{R^2 dy^2} R R_1 dy = R dy + dv + u dy \quad (10.7)$$

Tuto rovnici krátíme součinem $R R_1 dy$ a dostaneme

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \frac{dv}{R dy} - \frac{d^2u}{R^2 dy^2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} \frac{dv}{R dy} + \frac{u}{R R_1} \quad (10.8)$$

Rovnici (10.8) upravíme na tvar

$$\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right) \left(1 + \frac{dv}{R dy} \right) = \frac{d^2u}{R^2 dy^2} + \frac{u}{R R_1} \quad (10.9)$$

Protože zmenšení křivosti je dáno vztahem

$$\alpha_z = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \quad (10.10)$$

takže

$$R_1 = \frac{R}{1 - R \alpha_z} \quad (10.11)$$

bude

$$\kappa_z \left(1 + \frac{dv}{Rd\varphi}\right) = \frac{d^2u}{R^2d\varphi^2} + \frac{u}{R^2} (1 - R\kappa_z) \quad (10.12)$$

Využijeme toho, že posuvy a jejich derivace, jakož i změna křivosti κ_z jsou malé veličiny. Posuvy u , v jsou malé vzhledem k R , derivace $du/Rd\varphi$, $dv/Rd\varphi$ jsou malé vzhledem k 1 a κ je malé vzhledem k $1/R$. Vzhledem k těmto předpokladům lze druhé členy v oblých závorkách rovnice (10.12) zanedbat. Dostaneme

$$\kappa_z = \frac{d^2u}{R^2d\varphi^2} + \frac{u}{R^2} \quad (10.13)$$

Z Hookeova zákona a z Bernoulliho-Navierovy hypotézy lze odvodit vztah mezi zmenšením křivosti κ_z a ohybovým momentem M , který působí tah ve vnitřním vlákne

$$\kappa_z = \frac{M}{EJ} \quad (10.14)$$

Zde EJ je ohybová tuhost prstence při ohybu v jeho rovině. Dosazením (10.14) do (10.13) dostaneme diferenciální rovnici ohybové čáry prstence^{x)}

$$\frac{d^2u}{R^2d\varphi^2} + \frac{u}{R^2} = \frac{M}{EJ} \quad (10.15)$$

Veličiny u , M závisí na souřadnici φ .

Kromě rovnice (10.14) pro ohyb máme ještě podmínku pro roztažení střednice

$$\varepsilon_\varphi = \frac{N}{ES} \quad (10.16)$$

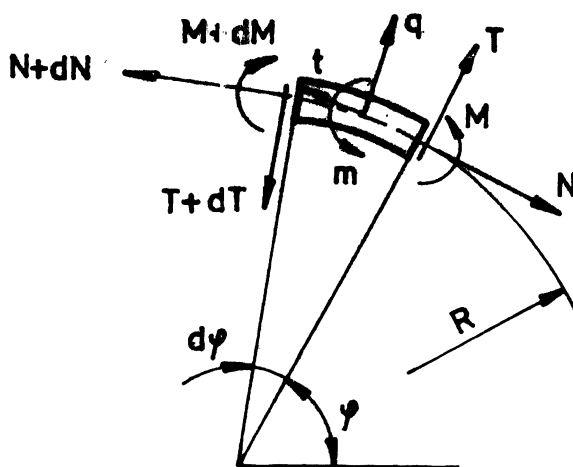
kde ES je tuhost v tahu prstence namáhaného tahovou silou N . Odtud a z rovnice (10.5) dostaneme druhou diferenciální rovnici ve tvaru

$$\frac{dv}{Rd\varphi} + \frac{u}{R} = \frac{N}{ES} \quad (10.17)$$

Zde u , v , N závisí na úhlu φ , přičemž funkce $u(\varphi)$ je řešením rovnice (10.15).

Diferenciální rovnice (10.15) a (10.17) byly odvozeny z kinematických (geometrických) vztahů a z konstitutivního Hookeova zákona. Zbývá ještě splnit diferenciální rovnice statické rovnováhy. Na obr. 37 je za-

x) Odvodil ji Boussinesq; viz /24/, popř. /22/, díl II, str. 95.



Obr. 37

kreslena elementární část prstence o délce $Rd\varphi$. Je zatížena ohybovým momentem $M(\varphi)$, tahovou silou $N(\varphi)$, posouvající silou $T(\varphi)$, radiální měrnou silou (délkovým zatížením) $q(\varphi)$, obvodovou měrnou silou $t(\varphi)$ a měrným ohybovým momentem $m(\varphi)$. Měrné veličiny se vztahují k jednotce délky oblouku střednice. Musí pro ně platit tyto rovnice:

(a) rovnováha radiálních složek sil

$$\frac{dT}{Rd\varphi} = q - \frac{N}{R} \quad (10.18)$$

(b) rovnováha obvodových složek sil

$$\frac{dN}{Rd\varphi} = -t + \frac{T}{R} \quad (10.19)$$

(c) rovnováha momentů

$$\frac{dM}{Rd\varphi} = m + T \quad (10.20)$$

Z uvedených silových veličin jsou N , T , M vnitřní statické účinky, kdežto t , q , m jsou vnější spojitě rozdělené síly a moment. Vnější síly a momenty jsou dané, vnitřní síly je třeba hledat.

Je-li např. dáno

$$\left. \begin{aligned} t &= t_n \sin n\varphi \\ q &= q_n \cos n\varphi \\ m &= m_n \sin n\varphi \end{aligned} \right\} \quad (10.21)$$

kde $n > 1$ je celé číslo a t_n , q_n , m_n jsou amplitudy, bude mít partikulární řešení rovnic (10.18) až (10.20) tvar

$$\left. \begin{aligned} N &= N_n \cos n\varphi \\ T &= T_n \sin n\varphi \\ M &= M_n \cos n\varphi \end{aligned} \right\} \quad (10.22)$$

Vzhledem k periodicitě odpadnou integrační konstanty. ^{x)}

Rovnice (10.18) až (10.20) dají

$$\left. \begin{aligned} n T_n &= q_n R - N_n \\ - n N_n &= -t_n R + T_n \\ - n M_n &= (m_n + T_n) R \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

Odtud vyjde

$$\left. \begin{aligned} N_n &= \frac{R}{n^2-1} (n t_n - q_n) \\ T_n &= \frac{R}{n^2-1} (n q_n - t_n) \\ M_n &= -\frac{1}{n} (m_n + T_n) R \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

Z měrných sil může být konstantní pouze q (jinak by nebyly splněny podmínky celkové rovnováhy prstence). V tom případě

$$\left. \begin{aligned} q &= q_0 \\ N &= N_0 = q_0 R \\ T &= T_0 \\ M &= M_0 \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

Kdybychom položili $n = 1$, platilo by řešení (10.24) jen za předpokladu, že $q_1 = t_1$. Prvé dvě z rovnic (10.23) se přitom stanou lineárně závislé. Podmínka řešitelnosti $q_1 = t_1$ soustavy rovnic (10.23) je zároveň podmínkou rovnováhy sil působících na celý prsteneček.

Když jsme takto vyřešili otázku vnitřních sil, můžeme je dosadit do vzorců (10.15) a (10.17). Řešení posuvů bude mít tvar (pro $n > 1$, n celé)

$$\left. \begin{aligned} u &= u_n \cos n\varphi \\ v &= v_n \sin n\varphi \end{aligned} \right\} \quad (10.26)$$

Z rovnice (10.15) vyjde

$$u_n = -\frac{1}{n^2-1} \frac{R^2}{EJ} M_n \quad (10.27)$$

x) Uzavřený prut je staticky neurčitý. Podmínka periodicity je v podstatě deformační podmínka. Odpadnutí integračních konstant znamená, že partikulární řešení je zároveň úplným integrálem.

a z rovnice (10.17) pro $n > 1$ x)

$$v_n = \frac{RN_n}{nES} + \frac{1}{n(n^2-1)} \frac{R^2 M_n}{EJ} \quad (10.28)$$

Prakticky každé vnější rovnovážné zatížení prstence, které je symetrické; popř. antisymetrické k některé rovině, můžeme vyjádřit Fourierovými řadami

$$q = q_0 + \sum_{n=2}^{\infty} q_n \cos n\varphi \quad (10.29)$$

$$t = \sum_{n=2}^{\infty} t_n \sin n\varphi \quad (10.30)$$

$$m = \sum_{n=2}^{\infty} m_n \sin n\varphi \quad (10.31)$$

Potom také

$$N = N_0 + \sum_{n=2}^{\infty} N_n \cos n\varphi \quad (10.32)$$

$$T = \sum_{n=2}^{\infty} T_n \sin n\varphi \quad (10.33)$$

$$M = M_0 + \sum_{n=2}^{\infty} M_n \cos n\varphi \quad (10.34)$$

$$u = u_0 - \frac{R^2}{EJ} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{M_n}{n^2-1} \cos n\varphi \quad (10.35)$$

$$v = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{R}{ES} \frac{N_n}{n} + \frac{R^2}{EJ} \frac{M_n}{n(n^2-1)} \right] \quad (10.36)$$

Přitom podle (10.15) a (10.18)

$$M_0 = EJ \frac{u_0}{R^2} \quad N_0 = q_0 R \quad (10.37)$$

x) Příklad $n = 0$, resp. $n = 1$, probereme zvlášť.

a podle (10.17)

$$u_0 = \frac{RN_0}{ES} = \frac{q_0 R^2}{ES} \quad (10.38)$$

Ostatní hodnoty jsou dány rovnicemi (10.24).

Případ $n = 1$ je zvláštní tím, že vyžaduje vazbu mezi q_1 a t_1 , jak jsme již uvedli ($q_1 = t_1$). Rovnice (10.18) by byly jinak rozporné. Oddělíme-li v tomto případě polovinu prstence řezem $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$, dostaneme z momentové podmínky rovnováhy ke středu prstence hodnotu $N_1 = q_1 R$ a z rovnice (10.18) nebo (10.19) také $T_1 = 0$. Z rovnice (10.20) pak máme $M_1 = 0$. To znamená, že takto zatížený prsteneček se neohýbá, tedy $u_1 = 0$. Existují v něm pouze obvodové posuvy $V_1 = N_1 R / ES = q_1 R^2 / ES$ (mají průběh $v = V_1 \sin \varphi$).

Zpravidla však vystačíme s případy $n = 0, 2, 4, \dots$; je to dáno stupněm souměrnosti vnějšího zatížení. Tomu odpovídají rovnice (10.29) až (10.38).

Je-li třeba, můžeme ještě připojit řešení, které získáme, když v rovnicích (10.21) a (10.22) zaměníme $\sin n\varphi$ za $\cos n\varphi$ a naopak. V rovnicích (10.24) až (10.36) pak musíme n zaměnit za $-n$. Superpozicí obou řešení bychom mohli vystihnout i zcela nesymetrický průběh vnějšího zatížení.

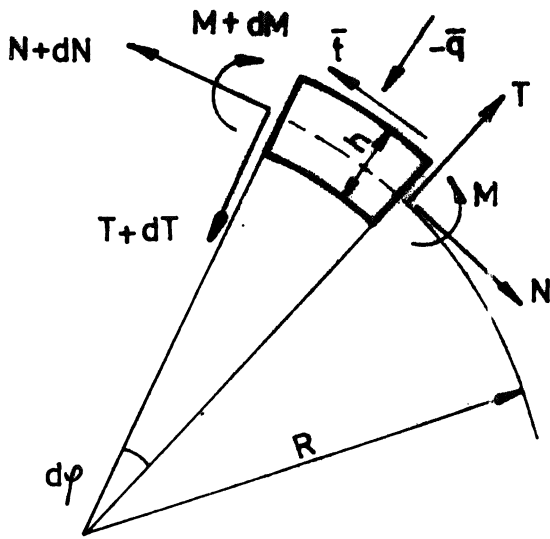
Poznámka

Vnucuje se otázka, jaký praktický význam mělo zavedení měrného ohybového momentu m (obr. 37). To pochopíme, uvědomíme-li si, že např. vestavěný rozpěrný kroužek bude obecně namáhán radiálními a obvodovými silami nikoli na střednici, ale na vnějším válcovém povrchu, jehož poloměr je $R + h/2$ (obr. 38). Nechť jsou tyto síly \bar{q} , popř. \bar{t} . Z podmínek statické ekvivalence dostaneme pro rovnocenné zatížení na střednici tyto vztahy:

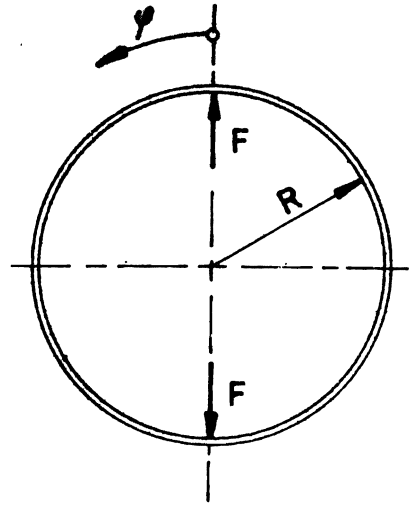
$$\left. \begin{aligned} q &= \bar{q} \frac{2R+h}{2R} \\ t &= \bar{t} \frac{2R+h}{2R} \\ m &= \frac{\bar{t}h}{2} \end{aligned} \right\} \quad (10.39)$$

Příklad

O správnosti odvozených vztahů se přesvědčíme řešením úlohy o rozpínání prstence dvěma radiálními silami podle obr. 39. Kdyby se řešení získané z rovnic (10.26) až (10.36) lišilo od výsledků známých z literatury (např. /22/, díl II, str. 77), nemohly by být odvozené rovnice správné.



Obr. 38



Obr. 39

Osamělé síly F nahradíme měrnými silami na intervalu $0 \leq \varphi < 2\pi$ (obr. 40)

$$q_\varphi = \frac{F}{2\varepsilon}$$

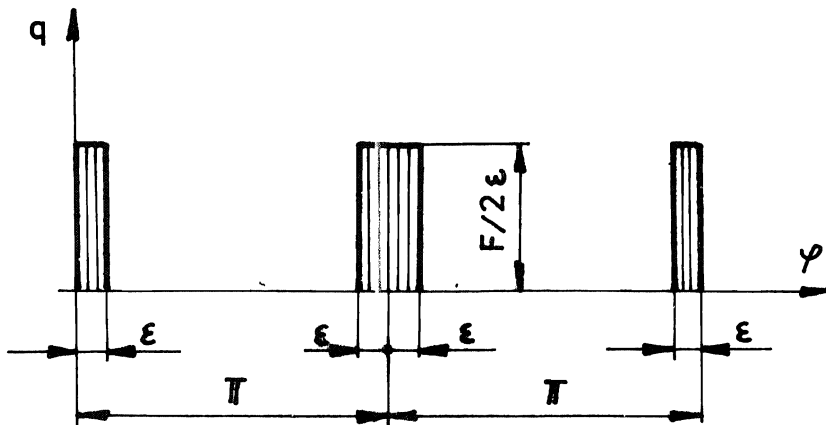
pro $0 \leq \varphi < \varepsilon$

$\pi - \varepsilon < \varphi < \pi + \varepsilon$

$2\pi - \varepsilon < \varphi < 2\pi$

$$q_\varphi = 0$$

jinde.



Obr. 40

Pak přejdeme k limitě $\varepsilon \rightarrow 0$. Protože pro sudé $n > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} q(\varphi) \cos n\varphi d\varphi &= \frac{1}{n} [\sin n\varphi]_0^\varepsilon + \frac{1}{n} [\sin\varphi]_{\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} + \frac{1}{n} [\sin n\varphi]_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{n} \sin n\varepsilon + \frac{2}{n} \sin n\varepsilon + \frac{1}{n} \sin n\varepsilon = \\ &= \frac{4}{n} \sin n\varepsilon \doteq 4\varepsilon \end{aligned}$$

a pro liché n tento integrál vymizí, bude

$$q(\varphi) = \frac{2F}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \cos n\varphi \right]$$

Máme tedy

$$q_0 = \frac{F}{\pi} \qquad q_n = \frac{2F}{\pi}$$

a rovnice (10.31) dává

$$M(\varphi) = \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} M_n \cos n\varphi = -\frac{2FR}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^2-1}$$

Vypočteme hodnotu $M(0)$. Pro $\varphi = 0$ dává součet

$$\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots = \frac{1}{2}$$

a tedy

$$M(0) = -\frac{FR}{\pi}$$

v souladu s výsledky známými z literatury /22/, které byly odvozeny nezávisle zavedením vnitřní staticky neurčité veličiny a použitím Castiglianovy věty. Pro radiální posuv v bodě $\varphi = 0$ (v působišti síly F) dostaneme, zanedbáme-li dilataci prstence, z rovnice (10.35)

$$u(0) = -\frac{R^2}{EJ} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{M_n}{n^2-1} = \frac{2}{\pi} \frac{FR^3}{EJ} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)^2}$$

Protože součet dává

$$\begin{aligned} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)^2} &= \frac{1}{9} + \frac{1}{225} + \frac{1}{1225} + \dots = \\ &= \frac{\pi^2-8}{16} \doteq 0,11685 \end{aligned}$$

vyjde

$$u(0) = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi} \right) \frac{FR^3}{EJ} \doteq 0,074389 \frac{FR^3}{EJ}$$

shodně s lit. /22/.

Diskuse

Je jistě zvláštní, že pro rovnoměrnou dilataci prstence $u = u_0 = \text{konst}$, $v = 0$, $w = 0$ dostáváme nenulový ohybový moment $M_0 = EJ u_0 / R^2 = q_0 J / S$ podle (10.37) a (10.38). Pro obdélníkový průřez $b \cdot h$ je to $M_0 = q_0 h^2 / 12$. Tomu přísluší ohybové napětí $\sigma_0 = 6 M_0 / bh^2 = q_0 / 2b$. Tahové napětí je v tomto případě $\sigma_t = N/S = q_0 R / bh$. V krajních vláknech je tedy napětí σ_1 , resp. σ_2 , vypočtené ze vzorce

$$\sigma_{1,2} = \frac{q_0 R}{bh} \left(1 \pm \frac{h}{2R} \right)$$

Horní znaménko platí pro vnitřní vlákno ($r_1 = R - h/2$), dolní znaménko pro vnější vlákno ($r_2 = R + h/2$). Druhý člen v oblé závorce je velmi malý, je-li $h \ll R$. Pak je napětí v rovnoměrně rozpínaném věnci konstantní.

Připomeňme si vzorce pro tlustostěnnou tlakovou nádobu s vnitřním přetlakem. Pro ni je

$$\sigma_1 = p \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \sigma_2 = p \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Když tlak p přepočteme na ekvivalentní zatížení střednice podle vztahu

$$\frac{q_0}{b} = p \frac{r_1}{R}$$

a za r_1 , r_2 dosadíme $R \mp h/2$, dostaneme po úpravě x)

$$\sigma_1 = \frac{q_0 R}{bh} \left(1 - \frac{h}{2R} \right)^{-1} \left(1 + \frac{h^2}{4R^2} \right) \approx \frac{q_0 R}{bh} \left(1 + \frac{h}{2R} \right)$$

$$\sigma_2 = \frac{q_0 R}{b} \frac{2r_1}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{q_0 R}{bh} \left(1 - \frac{h}{2R} \right)$$

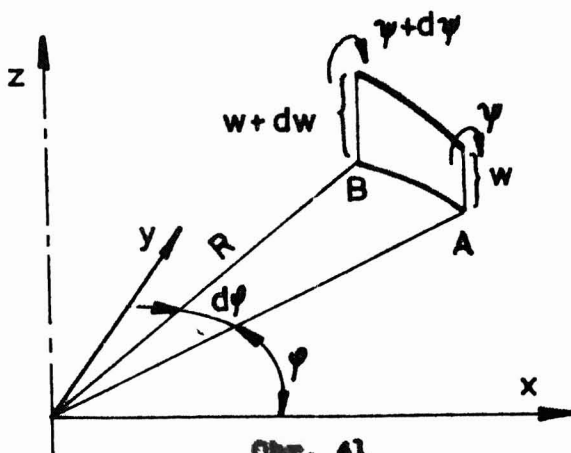
Vidíme tedy, že ohybový moment M_0 představuje korekci konstantního obvodového napětí na polytropický průběh známý z teorie tlakových nádob. Není to tedy nic nepřirozeného, že tento ohybový moment vyšel nenulový.

x) Použijeme vztahu $(1 - \varepsilon)^{-1} \approx 1 + \varepsilon$ pro $|\varepsilon| \ll 1$

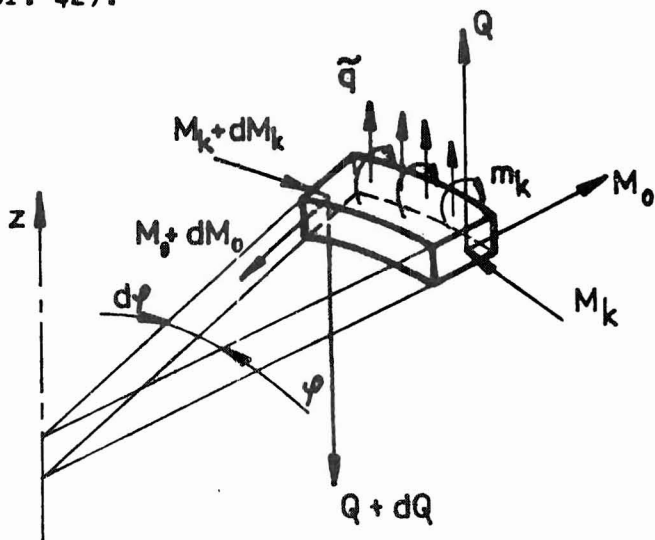
Dále se vnučuje otázka, zda tento výpočet, při němž dané zatížení rozvíjíme do Fourierových řad, není zbytečně složitý ve srovnání s výpočtem prstence jako staticky neurčitého křivého prutu s použitím Ménabréovy nebo Castiglianovy věty. Po pravdě řečeno význam řešení uvedeného v této kapitole se ukáže nejzřetelněji teprve tehdy, je-li prstenec vestavěn do nějaké staticky neurčité soustavy, takže jeho zatížení není předem dáno, ale určuje se z deformačních podmínek pro každou Fourierovu složku zvlášť. Tak tomu je např. u věnců diskových kol, u prstenců vestavěných do nesouměrně zatížených skořepin apod. Totéž lze říci i o teorii, kterou uvedeme v následující kapitole. O aplikacích se zmíníme v kap. 12.

11. OHYB A KRUT KRUHOVÉHO PRSTENCE PŘI JEHO VYBOČENÍ Z ROVINY

V této kapitole budeme předpokládat, že se body střednice prstence posouvají jenom axiálně. Průřezy si zachovávají rovinnost a kolmost k ohybové čáře, mohou se však také pootáčet kolem tečny ke střednici. Změnu tvaru průřezu, jeho deplanaci, zejména vliv této deplanace na napjatost zanedbáváme. Naše teorie bude proto platit jen pro prstence s plným nebo uzavřeným průřezem, jehož všechny rozměry jsou malé ve srovnání s poloměrem. Otočení průřezu označíme ψ , axiální posuv w . Deformace elementu AB prstence jsou znázorněny na obr. 41.



V prstenci působí ohybový moment M_0 , kroučící moment M_k a příčná posouvající síla Q . Vnější zatížení představuje měrná příčná síla \tilde{q} a měrný kroučící moment m_k ; vztahují se k oblouku střednice jednotkové délky (obr. 42).



Obr. 42

Zřejmě musí být splněny podmínky rovnováhy

$$\frac{dQ}{Rd\varphi} = \tilde{q} \quad (11.1)$$

$$\frac{dM_0}{Rd\varphi} = \frac{1}{R} M_k - Q \quad (11.2)$$

$$\frac{dM_k}{Rd\varphi} = m_k - \frac{1}{R} M_0 \quad (11.3)$$

Budeme předpokládat, že je dáno (pro $n > 1$, n celé)

$$m_k = m_{kn} \cos n\varphi, \quad \tilde{q} = \tilde{q}_n \cos n\varphi \quad (11.4)$$

Z rovnic (11.1) až (11.3) dostaneme pro hledané funkce

$$\begin{aligned} Q &= Q_n \sin n\varphi \\ M_0 &= M_{0n} \cos n\varphi \\ M_k &= M_{kn} \sin n\varphi \end{aligned} \quad (11.5)$$

výsledek

$$Q_n = \frac{1}{n} \tilde{q}_n R \quad (11.6)$$

$$M_{0n} = \frac{1}{n^2 - 1} R [\tilde{q}_n R - m_{kn}] \quad (11.7)$$

$$M_{kn} = \frac{1}{n^2 - 1} R \left[-\frac{1}{n} \tilde{q}_n R + n m_{kn} \right] \quad (11.8)$$

Případ $n = 0$ odpovídá rovnoměrnému zkrucování prstence. Tehdy $\tilde{q} = 0$,
 $m_k = m_{k0} = \text{konst.}$ Vyjde

$$Q = 0, \quad M_0 = m_{k0} R, \quad M_k = 0 \quad (11.9)$$

Případ $n = 1$ vyžaduje vazbu mezi m_{k1} a \tilde{q}_1 ; musí totiž platit podmínka celkové rovnováhy

$$m_{k1} = \tilde{q}_1 R \quad (11.10)$$

Z rovnice (11.1) vyjde

$$Q_1 = \tilde{q}_1 R \quad (11.11)$$

Pokud platí (11.10), jsou rovnice (11.2) a (11.3) pro $n = 1$ lineárně závislé. Z kterékoli z nich vyjde podmínka

$$M_{01} + M_{k1} = \tilde{q}_1 R^2 \quad (11.12)$$

Separovat tyto dvě veličiny budeme moci teprve později pomocí rovnice (11.24). Nejčastěji však vystačíme s případy $n = 0, 2, 4, \dots$

Nyní přikročíme k výpočtu deformací. Otočí-li se nějaký průřez kolem střednice o úhel ψ , posune se bod vzdálený o z od roviny střednice radiálně o vzdálenost $z\psi$. Tím vznikne obvodové poměrné prodloužení $z\psi/R$ (za předpokladu, že průřez zůstává rovinný a jen se potočí). Obvodové poměrné prodloužení však vzniká také relativní změnou úhlu $d\psi/Rd\psi$, takže

$$\epsilon_\psi = -z \frac{d^2w}{R^2 d\psi^2} + \frac{z\psi}{R} \quad (11.13)$$

Tomu odpovídá ohybový moment

$$M_0 = \int_0 \epsilon_\psi z dS = \left(-\frac{d^2w}{R^2 d\psi^2} + \frac{\psi}{R} \right) E \int_S z^2 dS \quad (11.14)$$

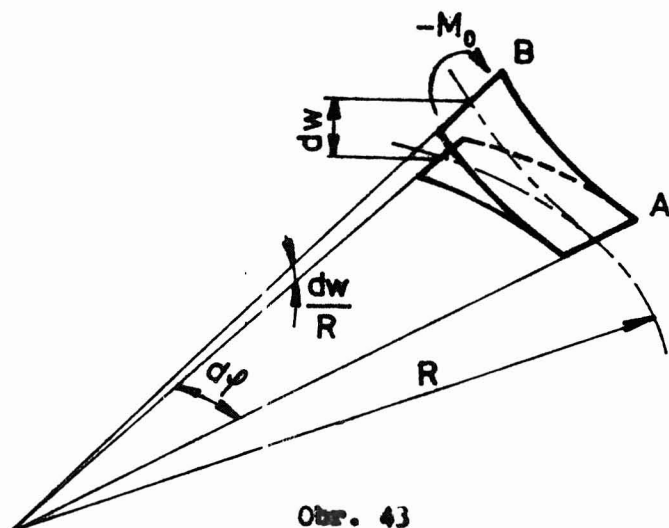
Integrál na pravé straně (11.14) je však osový kvadratický moment J_0 , takže

$$M_0 = \left(-\frac{d^2w}{R^2 d\psi^2} + \frac{\psi}{R} \right) E J_0 \quad (11.15)$$

Tak jsme získali první diferenciální rovnici pro ohyb

$$\frac{d^2w}{R^2 d\psi^2} - \frac{\psi}{R} = -\frac{M_0}{E J_0} \quad (11.16)$$

Druhou rovnicí odvodíme pro krut. Zkroucení vzniká nejen otáčením průřezů o úhel ψ , ale také pouhým osovým posuvem w , pokud nejsou tyto veličiny po obvodu konstantní. Abychom to nahlédli, budeme uvažovat o čistém ohybu tenké výseče obdélníkového průřezu (obr. 43). Je zřejmé, že výseč se přetvoří do rozvinutelné plochy, tj. do tvaru části kuželové pláště. Tím se průřez B vzhledem k průřezu A otočí o úhel dw/R . Jedině tehdy budou obvodová poměrná prodloužení, a tím i ohybová napětí, úměrná souřadnici z a nezávislá na souřadnici r . Je-li tedy úhel $d\psi = -dw/R$, je zkroucení nulové.



Obr. 43

Pro krut tedy bude platit vztah

$$\frac{1}{R d\psi} \left(d\psi + \frac{dw}{R} \right) = - \frac{M_k}{G J_k} \quad (11.17)$$

Po úpravě

$$\frac{d\psi}{R d\psi} + \frac{1}{R} \frac{dw}{R d\psi} = - \frac{M_k}{G J_k} \quad (11.18)$$

To je druhá diferenciální rovnice pro neznámé funkce $\psi(\varphi)$, $w(\varphi)$.

Řešení rovnic (11.16) a (11.18) bude mít pro zatížení (11.4) tvar

$$w = w_n \cos n\varphi \quad (11.19)$$

$$\psi = \psi_n \cos n\varphi \quad (11.20)$$

Integrační konstanty odpadají vzhledem k periodicitě. Dosazením (11.19), (11.20) a (11.5) do rovnic (11.16) a (11.18) dostaneme pro $n > 1$, n celé

$$w_n = \frac{1}{n^2 - 1} \left[\frac{M_{0n} R^2}{E J_0} - \frac{1}{n} \frac{M_{kn} R^2}{G J_k} \right] \quad (11.21)$$

$$\psi_n = \frac{1}{n^2-1} \left[-\frac{M_{0n} R}{EJ_0} + n \frac{M_{kn} R}{GJ_k} \right] \quad (11.22)$$

Je-li $n = 0$, jde o rovnoměrně zkrucovaný prstenec. Jak již víme, působí v tomto případě v průřezu - zdánlivě paradoxně - pouze ohybový moment $M_0 = m_k R = \text{konst}$ a průhyb $w = 0$. Z rovnice (11.16) pak máme

$$\psi = \frac{M_0 R}{EJ_0} = \frac{m_k R^2}{EJ_0} = \text{konst} \quad (11.23)$$

Rovnice (11.17) je identicky splněna. Výsledek (11.23) se shoduje s řešením známým z literatury (viz např. /22/, díl II, str. 157).

Je-li $n = 1$, vedou rovnice (11.16) a (11.18) ke sporu, pokud není

$$M_{01} = \frac{EJ}{GJ_k} M_{k1} \quad (11.24)$$

Odtud a z rovnice (11.12) vyjde

$$M_{01} = \frac{EJ}{EJ + GJ_k} \tilde{q}_1 R^2 \quad (11.25)$$

$$M_{k1} = \frac{GJ_k}{EJ + GJ_k} \tilde{q}_1 R^2 \quad (11.26)$$

Pro amplitudy deformací dostaneme pouze rovnici

$$w_1 + R\psi_1 = \frac{\tilde{q}_1 R^2}{EJ + GJ_k} \quad (11.27)$$

Samozřejmě musí platit podmínka (11.10). K tomu lze superponovat otočení prstence jako absolutně tuhého tělesa, pro něž platí podmínka

$$w_1^* + R\psi_1^* = 0 \quad (11.28)$$

To znamená, že kteroukoli z amplitud w_1 , ψ_1 v rovnici (11.27) můžeme stanovit libovolně. Změnou této volby dosáhneme pouze změnu otočení prstence kolem osy $\varphi = \pi/2$ jako tuhého tělesa. To nahlédneme, když rovnice (11.27) a (11.28) sečteme.

Například můžeme zvolit řešení

$$w_1 = 0 \quad \psi = \frac{\tilde{q}_1 R}{EJ + GJ_k} \quad (11.29)$$

nebo naopak

$$\psi_1 = 0 \qquad w_1 = \frac{\tilde{q}_1 R^2}{EJ + GJ_k} \qquad (11.30)$$

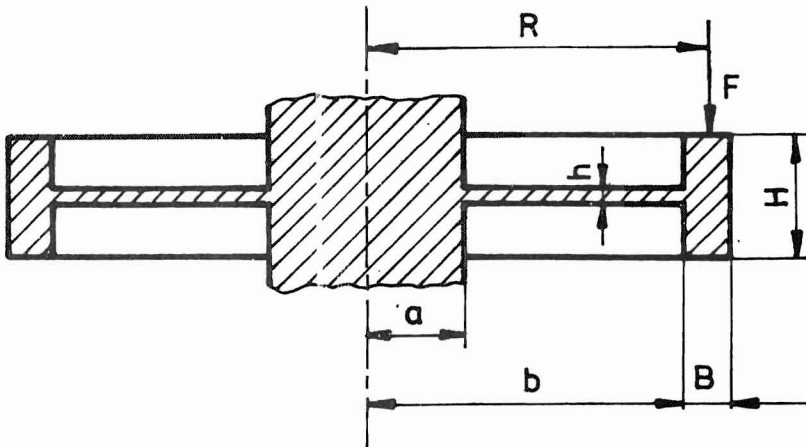
Správná bude i lineární kombinace těchto dvou řešení. Zvolíme takovou, která vyhoví geometrickým podmínkám uložení prstence.

S použitím superpozice jednotlivých harmonických složek můžeme snadno dostat výsledky pro jakékoli průběhy $\tilde{q}_r(\varphi)$, $m_k(\varphi)$, které lze rozvinout do Fourierovy řady. Protože jsme to v předchozí kapitole podrobně vysvětlili, nebudeme tyto řady rozepisovat.

12. DISKOVÁ KOLA A SETRVAČNÍKY

Poznatky z 10. a 11. kapitoly lze využít k řešení napjatosti a deformací věnců diskových kol a setrvačnicků, a to i setrvačnicků s rameny, při obecném prostorovém namáhání. K tomu potřebujeme rozvinout zatížení věnce do Fourierových řad a pro každou z jejích složek napsat potřebnou deformační podmínku, která vyjadřuje vazbu věnce s diskem, popř. s rameny. Řešení je jednoduché, je-li disk rovinný.

Uvedeme příklad řešení diskového ozubeného kola s čelním šikmým ozubením a vypočteme jeho deformaci a namáhání vzniklé působením osamělé síly F na věnci, která působí ve směru osy kola (obr. 44).



Obr. 44

Věvec má průřezy $B \cdot H$, moment tuhosti v krutu (přibližně)

$$J_k = 0,277 \frac{B^3 H^3}{B^2 + H^2} \quad (12.1)$$

a osový kvadratický moment

$$J_0 = \frac{1}{12} B H^3 \quad (12.2)$$

Disk má ohybovou tuhost

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \quad (12.3)$$

Pro průhyb disku platí diferenciální rovnice (viz /25/, str. 317)

$$\Delta \Delta W = 0 \quad (12.4)$$

přičemž pro operátor Δ platí vztah (v polárních souřadnicích)

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (12.5)$$

Řešení rovnice (12.4) má obecně tvar

$$W = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} R'_m \sin m\varphi \quad (12.6)$$

kde

$$R_0 = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r \quad (12.7)$$

$$R_1 = A_1 r + B_1 r^3 + C_1 \frac{1}{r} + D_1 r \ln r \quad (12.8)$$

a pro $m > 1$

$$R_m = A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2} \quad (12.9)$$

Obdobné vztahy platí i pro R'_m . Vyskytují se v nich konstanty A'_1, B'_1, \dots, D'_m . Nebudeme je rozepisovat.

Ohybové momenty a krouticí moment v disku jsou

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) \right] \quad (12.10)$$

$$M_\varphi = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right] \quad (12.11)$$

$$M_{r\varphi} = (1-\mu) D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right] \quad (12.12)$$

Posouvající síly v disku jsou

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta W) \quad Q_\varphi = -D \frac{\partial (\Delta W)}{r \partial \varphi} \quad (12.13)$$

Disk je na vnitřním obvodu $r=a$ vetknutý, na vnějším obvodu $r=b$ je k němu připojen věnec.

Jak známo, do okrajových podmínek nevstupuje z disku posouvající síla Q_r samostatně, ale vždy jen v kombinaci s krouticím momentem ve tvaru efektivní posouvající síly

$$V = Q_r - \frac{\partial M_{r\varphi}}{r \partial \varphi} \quad (12.14)$$

Rovnice (12.4) až (12.14) jsou odvozeny v lit. /25/.

Osamělou sílu F působící v bodě $r=R$, $\varphi=0$ rozvineme do Fourierovy řady, jejíž složky představují harmonicky proměnné délkové zatížení q (ČSN 01 1302, č. 3.29; vhodnější název by byl liniové zatížení nebo měrná síla)

$$q = -\frac{F}{\pi R} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\varphi \right) \quad (12.15)$$

Je tedy

$$q_0 = -\frac{F}{2\pi R} \quad q_m = -\frac{F}{\pi R} \quad (12.16)$$

V rovnici (12.6) ponecháme jen nulový člen a kosinové členy.

Nyní využijeme řešení z kap. 11 a sestavíme deformační podmínky pro disk a věnec. Mezi věncem a diskem se bude přenášet staticky neurčité zatížení V , M_r (na poloměru $r=b$).

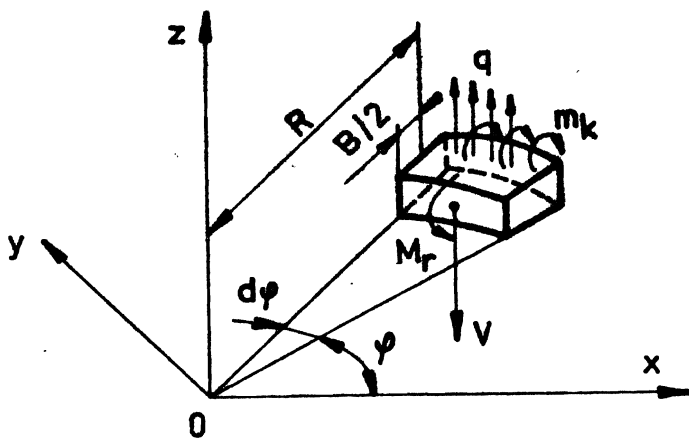
Na věnec se tedy podle obr. 45 přenesou zatížení

$$\tilde{q} = q - V \frac{b}{R} \quad m_k = M_r \frac{b}{R} + q \frac{B}{2} \quad (12.17)$$

Veličiny \tilde{q} , m_k se vztahují ke střednici $r=R$, kdežto V , M_r působí na poloměru $r=b = R - B/2$.

Deformační podmínky vyjadřují skutečnost, že průhyb a úhel otočení na poloměru $r=b$ je pro disk a věnec společný. Tedy

$$\left. \begin{aligned} W_{\text{disk}} &= W_{\text{věnec}} + \psi \frac{B}{2} \\ \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)_{\text{disk}} &= -\psi \end{aligned} \right\} \quad \text{pro } r=b \quad (12.18)$$



Obr. 45

Uvedeme pouze výsledky odvozené v práci /26/ pro případ, že lze zanedbat rozdíl mezi poloměry b a R .

Největší průhyb, radiální a obvodové ohybové napětí v disku vznikají v bodě $r=b$, $\varphi = 0$. Platí pro ně vzorce

$$w_{\max} = \frac{F b^2}{E h^3} \alpha_{\max} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (12.19)$$

$$\sigma_{r\max} = \frac{F}{h^2} \beta_{\max} \quad \sigma_{\varphi\max} = \frac{F}{h^2} \gamma_{\max}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\max} = & \frac{3(1-\mu^2)}{4\pi} \left[\left\{ \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) (1 + \rho^2 \mu_0) - 2(1 + \mu_0) \ln \rho \right\} + \right. \\ & + 2 \left\{ \mu_1 (\rho^2 - 1)^2 + 2 \ln \rho + 1 - \rho^2 \right\} + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{16 x_m}{m \rho} \left\{ \mu_m [(m+1) \rho^{2m} - m \rho^{2m+2} - 1] + \right. \\ & \left. \left. + \rho^{2m} + m - m \rho^2 - 1 \right\} \right] \end{aligned}$$

(12.20)

$$\begin{aligned} \beta_{\max} = & -\frac{3}{2\pi} \left[(\rho^2 \mu_0 - 1) + 2(2\rho^2 \mu_1 - 1) + \right. \\ & \left. + \sum_{m=2}^{\infty} 16 x_m \rho^m \left\{ (m-1) - (m+1) \mu_m \right\} \right] \end{aligned}$$

(12.21)

$$\gamma_{\max} = -\mu \beta_{\max}$$

(12.22)

V těchto vzorcích je μ Poissonovo číslo a dále

$$\varrho = b/a \quad \eta = \frac{EJ_0}{RD} \quad \xi = \frac{GJ_k}{RD}$$

$$\mu_0 = \frac{s_0 - 1 + 2 \ln \varrho}{\varrho^2 - t_0}$$

$$\mu_1 = \frac{\varrho^2 - s_1}{\varrho^4 - t_1}$$

$$s_0 = \frac{\eta + \mu + 3}{\eta + \mu + 1}$$

$$s_1 = \frac{\xi + \eta + \mu + 1}{\xi + \eta + \mu + 3}$$

$$t_0 = \frac{\eta + \mu - 1}{\eta + \mu + 1}$$

$$t_1 = \frac{\xi + \eta + \mu - 1}{\xi + \eta + \mu + 3}$$

$$\mu_m = \frac{u_m \varrho^{2m} - s_m \varrho^2 + m - 1}{m t_m \varrho^{2m+2} - (m+1) u_m \varrho^{2m+1}}$$

$$x_m = \frac{1}{\delta_m + \mu_m \Phi_m}$$

$$\delta_m = \varrho^{2m-2} (u'_m - u_m z'_m) - m (s'_m - s_m z'_m)$$

$$\Phi_m = \varrho^{2m-2} [(m+1)(u'_m - u_m z'_m) - m \varrho^2 (t'_m - t_m z'_m)]$$

$$u_m = [m^2 (\xi + \eta + \mu - 1) - m^3 \xi - m (\eta + \mu - 1)] \frac{1}{z_m}$$

$$t_m = [m^2 (-\xi + \eta + \mu + 1) - m^3 \xi - m (\eta + \mu + 3) - 2(\eta + \mu + 1)] \frac{1}{z_m}$$

$$s_m = [m^2 (-\xi + \eta + \mu - 1) + m^3 \xi + m (\eta + \mu + 3) - 2(\eta + \mu + 1)] \frac{1}{z_m}$$

$$z_m = [m^2 (\xi + \eta + \mu - 1) + m^3 \xi + m (\eta + \mu - 1)]$$

$$u'_m = m^3 \eta - m^2 (\xi + \eta + \mu - 1) + m (\xi + \mu - 1)$$

$$t'_m = m^3 \eta - m^2 (\xi + \eta + \mu - 1) - m (\xi + 2\eta + \mu + 3) - 4$$

$$s'_m = m^3 \eta + m^2 (\xi + \eta + \mu - 1) - m (\xi + 2\eta + \mu + 3) + 4$$

$$z'_m = m^3 \eta + m^2 (\xi + \eta + \mu - 1) + m (\xi + \mu - 1)$$

Tyto vzorce jsou sice snadno programovatelné, ale málo přehledné. Uvádíme proto číselný příklad, který může sloužit ke kontrole programu. Příklad je převzat z práce /26/.

Příklad

Pro diskové kolo na obr. 44 je dáno $a = 75 \text{ mm}$, $b \cong R = 280 \text{ mm}$, $B = 17,5 \text{ mm}$, $H = 70 \text{ mm}$, $h = 12,5 \text{ mm}$, $F = 1430 \text{ N}$.

Vyjde

$$\varrho = \frac{b}{a} = \frac{280}{75} = 3,73333$$

$$\eta = (1-\mu^2) \frac{B}{R} \left(\frac{H}{h}\right)^3 = (1-0,3^2) \frac{17,5}{280} \left(\frac{70}{12,5}\right)^3 = 9,98816$$

$$\begin{aligned} \xi &\cong 0,1385 (1-\mu) \frac{B^3 H^3}{R h^3 (B^2 + H^2)} = \\ &= 0,1385 (1-0,3) \frac{17,5^3 \cdot 70^3}{280 \cdot 12,5^3 (17,5^2 + 70^2)} = 0,75116 \end{aligned}$$

Přesnější výpočet podle vzorců pro krut obdélníkového průřezu dává $\xi = 0,809078$. Pro další výpočet vezmeme $\eta = 10$, $\xi = 0,81$. Ze vzorců (12.20) až (12.22) vyjde

$$\alpha_{\max} = 0,648, \beta_{\max} = 4,415, \gamma_{\max} = 1,325$$

takže

$$w_{\max} = \frac{F b^2}{E h^3} \alpha_{\max} = \frac{1430 \cdot 280^2}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 12,5^3} \cdot 0,648 \cong 0,177 \text{ mm}$$

$$\sigma_{r\max} = \frac{F}{h^2} \beta_{\max} = \frac{1430 \cdot 4,415}{12,5^2} \cong 40,41 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\varphi\max} = \mu \sigma_{r\max} = 0,3 \cdot 40,41 \cong 12,12 \text{ MPa}$$

Rozměry disku jsme dosazovali v milimetrech, sílu v newtonech. Modul pružnosti v megapascálech. Napětí pak vyjdou také v megapascálech.

Zcela obdobně lze řešit diskové kolo zatížené radiální silou. Tehdy vstoupí do výpočtu vzorce z kapitoly 10. Pro disk dostaneme s použitím Airyho funkce napětí $\Phi(r, \varphi)$ vztahy

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \varphi^2} \quad (12.23)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2} \quad (12.24)$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi} \right) \quad (12.25)$$

příčemž

$$\Delta \Delta \bar{\Phi} = 0 \quad (12.26)$$

Rovnice (12.26) je obdobná k rovnici (12.4), takže také její řešení má analogický tvar.

Naznačené řešení není obtížné, ale poměrně pracné. Vnucuje se proto otázka, zda by nebylo možné získat užitečné výsledky nějakou snazší, byť méně přibližnou metodou. Skutečně, řešení se zjednoduší, budeme-li věnec považovat za kruhový prsteneček uložený na disku jako na pružném podkladu a ohýbaný ve své rovině /27/. Lze-li předpokládat, že $m \approx 0$, $N \ll Rq$, dostaneme z rovnic (10.18) a (10.20) přibližný vztah

$$\frac{d^2 M}{R^2 d\varphi^2} = q \quad (12.27)$$

Je-li q reakcí pružného podkladu s modulem k takovou, že

$$q = -ku \quad (12.28)$$

vyjde z rovnic (10.15) a (12.27) diferenciální rovnice

$$\frac{d^4 u}{R^4 d\varphi^4} + \frac{1}{R^2} \frac{d^2 u}{R^2 d\varphi^2} + \frac{k}{EJ} u = 0 \quad (12.29)$$

Dosadíme bezrozměrovou proměnnou

$$\beta^4 = \frac{kR^4}{4EJ} = \frac{3kR^4}{EB^3H} \quad (12.30)$$

a dostaneme

$$\frac{d^4 u}{d\varphi^4} + \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + 4\beta^4 u = 0 \quad (12.31)$$

Řešení této rovnice lze předpokládat ve tvaru

$$u(\varphi) = C e^{\lambda \varphi} \quad (12.32)$$

přičemž λ splňuje charakteristikou rovnicí

$$\lambda^4 + \lambda^2 + 4\beta^4 = 0 \quad (12.33)$$

Řešení

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4\beta^4}} \quad (12.34)$$

lze zjednodušit za předpokladu, že $\beta \gg 2$.

Pak^{x)}

$$\lambda \approx \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \pm 2i\beta^2} \approx \pm \sqrt{\pm 2i\beta^2} = \pm (1 \pm i)\beta \quad (12.35)$$

Řešení (12.32) bude mít v tom případě tvar

$$u(\varphi) = e^{\beta\varphi} (C_1 \cos\beta\varphi + C_2 \sin\beta\varphi) + e^{-\beta\varphi} (C_3 \cos\beta\varphi + C_4 \sin\beta\varphi) \quad (12.36)$$

Protože deformace neroste do nekonečna, musí být v oblasti $\varphi > 0$ konstanty $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Řešení lze použít, pokud deformace popsané rovnicí (12.36) přibližně vymizí pro $\varphi > \pi$. Protože $\beta \gg 2$, je tato podmínka splněna. Celkem budeme mít

$$\left. \begin{aligned} u(\varphi) &= e^{-\beta\varphi} (C_3 \cos\beta\varphi + C_4 \sin\beta\varphi) & \text{pro } 0 \leq \varphi < \pi \\ u(\varphi) &= e^{\beta\varphi} (C_1 \cos\beta\varphi + C_2 \sin\beta\varphi) & \text{pro } -\pi < \varphi \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.37)$$

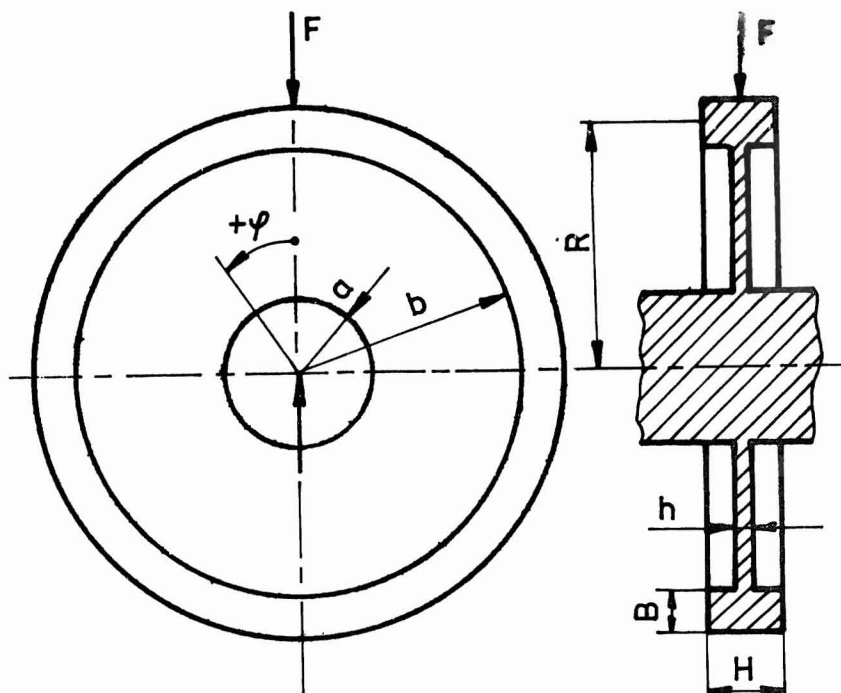
Je-li nyní věnec kola zatížen v bodě $\varphi = 0$ osamělou silou F podle obr. 46, bude řešení symetrické k ose $\varphi = 0$. Stačí proto uvažovat jen interval $0 \leq \varphi < \pi$ a brát

$$u(\varphi) = e^{-\beta\varphi} (C_3 \cos\beta\varphi + C_4 \sin\beta\varphi) \quad (12.38)$$

Integrační konstanty určíme z okrajových podmínek v řezu $\varphi = 0$.

x) Připomeňme, že $\sqrt{i} = \pm \sqrt{e^{i\pi/2}} = \pm e^{i\pi/4} = \pm \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i)$

Podobně $\sqrt{-i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} (1-i)$



Obr. 46

Zřejmě

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0 \quad (12.39)$$

neboť ve věnci nenastává zlom. Kromě toho se vnější síla přenesse jako posouvající síla $T(\varphi)$ z jedné poloviny vlevo, z druhé poloviny vpravo od řezu. Bude proto $T(0) = -F/2$, takže

$$\left[\frac{d^3u}{d\varphi^3} + \frac{du}{d\varphi}\right]_{\varphi=0} = \frac{R^2}{EJ} \left[\frac{dM}{d\varphi}\right]_{\varphi=0} = -\frac{FR^3}{2EJ} \quad (12.40)$$

Z podmínek (12.39) a (12.40) vypočteme

$$C_3 = C_4 = -\frac{FR^3}{8EJ\beta^3} \quad (12.41)$$

kde $J = \frac{1}{12} B^3 H$ a β je dáno rovnicí (12.30). Pak bude (stále jen pro $0 \leq \varphi < \pi$)

$$u(\varphi) = -\frac{FR^3}{8EJ\beta^3} e^{-\beta\varphi} (\cos\beta\varphi + \sin\beta\varphi) \quad (12.42)$$

$$u'(\varphi) = \frac{FR^3}{4EJ\beta^2} e^{-\beta\varphi} \sin\beta\varphi \quad (12.43)$$

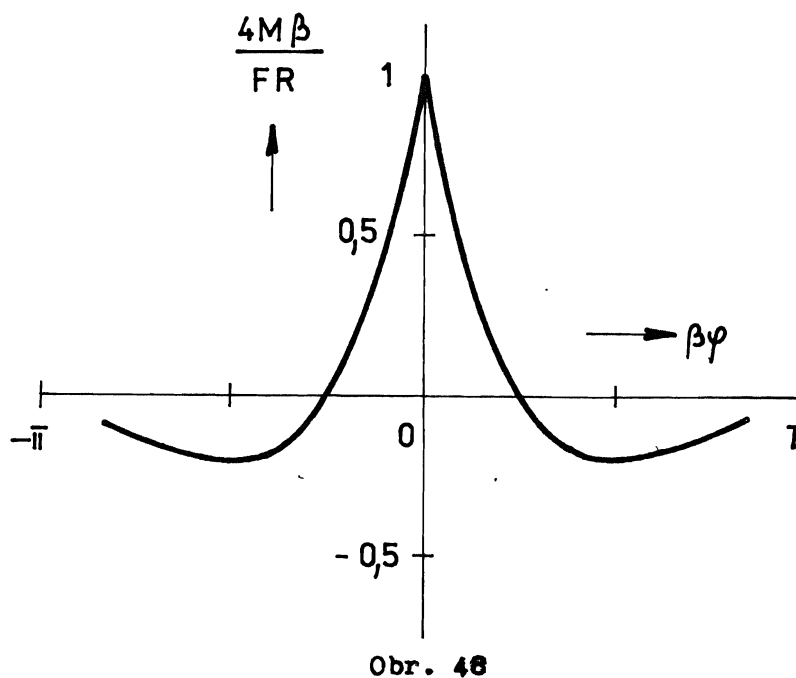
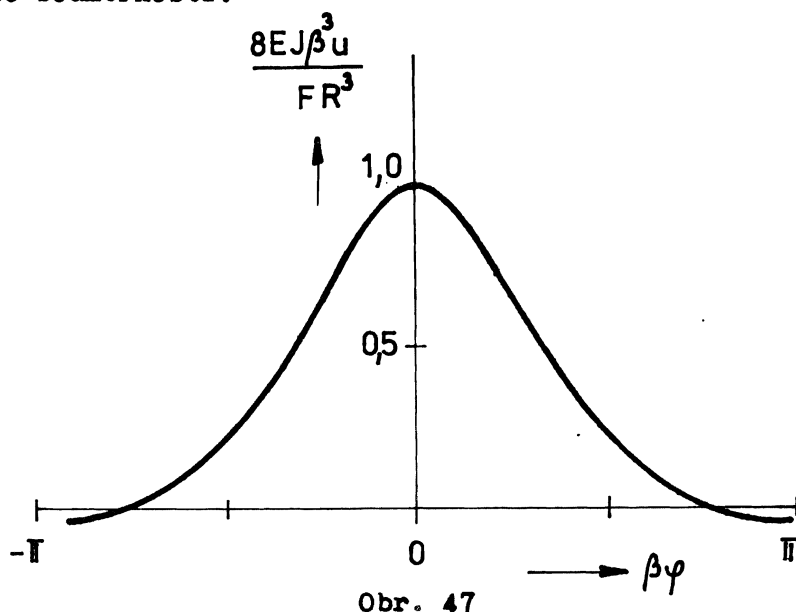
Z rovnice (10.15) vypočteme ohybový moment

$$M = \frac{FR}{4\beta} e^{-\beta\varphi} (\cos\beta\varphi - \sin\beta\varphi) \quad (12.44)$$

Průběh funkcí (12.42) a (12.44) je zřejmý z obr. 47 a 48. Ohybové namáhání je ve věnci zřejmě tím více lokalizováno, čím je β větší, tj. čím je tuhost disku relativně větší. Průběhy na obr. 47 a 48 byly pro větší názornost zakresleny v rozsahu $-\pi < \varphi < \pi$, přičemž

$$u(-\varphi) = u(\varphi) \quad M(-\varphi) = M(\varphi) \quad (12.45)$$

což plyne ze souměrnosti.



Maximální ohybové napětí ve věnci pak vychází v řezu $\varphi = 0$, a to

$$\sigma_{\max} = \frac{GM(0)}{B^2 H} = \frac{3FR}{2\beta B^2 H} \quad (12.46)$$

a maximální napětí v disku pod věncem (na poloměru $r = b$, obr. 46)

$$\sigma_d = \frac{1}{h} ku(0) = -\frac{FR^3 k}{8EJh\beta^3} = -\frac{3FR^3 k}{2EB^3 H h\beta^3} \quad (12.47)$$

Zbývá určit modul tuhosti k disku. To je možné jen experimentálně pro určitý typ kola. Volbou této konstanty můžeme podle zvoleného kritéria (nejlepší shoda maximálního napětí ve věnci, popř. v disku, nebo nejlepší shoda v maximálním průhybu apod.) přizpůsobit nalezené přibližné řešení v určitém rozsahu parametrů fyzikální realitě.

Podle /27/ lze pro ocelová kola s plným rovným diskem a pro obvyklé relativní rozměry věnců brát

$$k \cong 2,2 \frac{Eh}{b-a} \quad (12.48)$$

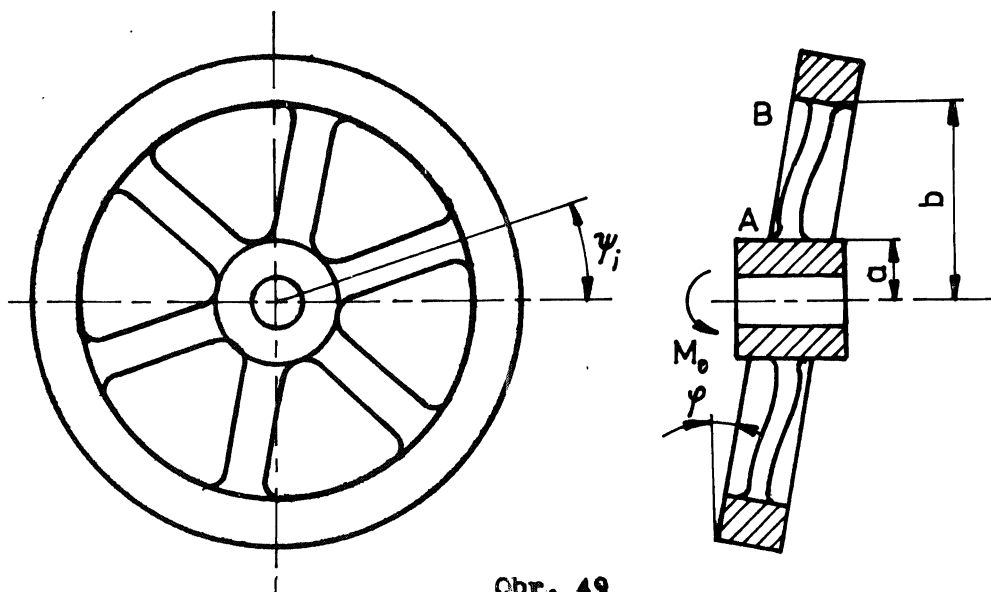
Metodami, které jsme v kap. 10 až 12 uvedli, lze řešit i namáhání setrvačníků s rameny. Exaktní řešení rovinné úlohy tohoto typu uveřejnil Safronov /28/. Počítal vlastní pnutí v soustavě věnec-náboj s rameny, vzniklé natažením věnce, popř. i náboje, s přesahem poloměrů (nalisováním nebo natažením za tepla). Věnec, popř. náboj, přitom pojímal nikoli jako prstenec, ale jako mezikruhovou desku ve stavu rovinné napjatosti, pro kterou platí vztahy (12.23) až (12.26).

Litínové setrvačníky velkých pístových, popř. pracovních strojů mívají relativně tuhý věnec i náboj a štíhlá ramena. Pak je možné zanedbat deformaci věnce i náboje a uvažovat jen o deformaci ramen. Při působení momentu M_0 podle obr. 49 se věnec otočí oproti náboji o úhel φ . V mezích platnosti Hookeova zákona bude

$$M_0 = k_0 \varphi \quad (12.49)$$

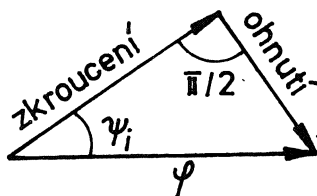
Abychom určili tuhost ("pružinovou konstantu") k_0 , budeme sledovat deformaci i -tého ramene, jehož poloha je určena úhlovou souřadnicí ψ_i . Má-li setrvačník n ramen ($n > 2$, n je celé, zpravidla sudé číslo), bude

$$\psi_i = \psi_0 + \frac{2\pi}{n} i \quad (12.50)$$



Obr. 49

Zde $i = 1, 2, \dots, n$; ψ_0 je libovolný úhel. Toto i -té rameno se ohne o úhel $\varphi \sin \psi_i$ a zkroutí o úhel $\varphi \cos \psi_i$. Abychom to nahlédli, stačí si úhly znázornit vektorově (obr. 50).



Obr. 50

Nyní rameno v bodě B uvolníme a připojíme staticky neurčitou osovou sílu F_i , ohybový moment M_{0i} a krouticí moment M_{ki} .

S použitím příčinkových činitelů α , β , γ , δ můžeme napsat tyto vztahy pro posuvy, resp. úhly v bodě:

$$\begin{aligned} b\varphi \sin \psi_i &= \alpha F_i - \beta M_{0i} \\ \varphi \sin \psi_i &= \beta F_i - \gamma M_{0i} \\ \varphi \cos \psi_i &= \delta M_{ki} \end{aligned} \quad (12.51)$$

Je-li průřez ramen stálý, takže jejich ohybová tuhost EJ_0 popř. torzní tuhost GJ_k jsou konstantní, bude

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(b-a)^3}{3EJ_0} & \beta &= \frac{(b-a)^2}{2EJ_0} & \gamma &= \frac{b-a}{EJ_0} \\ \delta &= \frac{b-a}{GJ_k} \end{aligned} \quad (12.52)$$

Zatížení F_i , M_{oi} , M_{ki} působí z věnce na i -té rameno. Pro uvolněný náboj s rameny musí platit podmínky rovnováhy

$$M_o = b \sum F_i \sin \psi_i - \sum M_{oi} \sin \psi_i + \sum M_{ki} \cos \psi_i \quad (12.53)$$

$$0 = b \sum F_i \cos \psi_i - \sum M_{oi} \cos \psi_i - \sum M_{ki} \sin \psi_i \quad (12.54)$$

Jsou to momentové podmínky rovnováhy ke dvěma vzájemně kolmým průměrům. Sčítá se od $i = 1$ do $i = n$ x).

Řešením rovnic (12.51) dostaneme

$$\left. \begin{aligned} F_i &= \frac{\gamma b - \beta}{\alpha \gamma - \beta^2} \varphi \sin \psi_i \\ M_{oi} &= \frac{\beta b - \alpha}{\alpha \gamma - \beta^2} \varphi \sin \psi_i \\ M_{ki} &= \frac{1}{\delta} \varphi \cos \psi_i \end{aligned} \right\} \quad (12.55)$$

Vzhledem k rovnici (12.50) vyjde (pro $n > 2$)

$$\sum \sin \psi_i \cos \psi_i = \frac{1}{2} \sum \sin 2\psi_i = 0$$

$$\sum \sin^2 \psi_i = \sum \frac{1}{2} (1 - \cos 2\psi_i) = \frac{n}{2} \quad (12.56)$$

$$\sum \cos^2 \psi_i = \sum \frac{1}{2} (1 + \cos 2\psi_i) = \frac{n}{2}$$

Dosadíme-li tedy vztahy (12.55) do (12.53), vyjde

$$M_o = \left[\frac{b(\gamma b - \beta)}{\alpha \gamma - \beta^2} - \frac{\beta b - \alpha}{\alpha \gamma - \beta^2} + \frac{1}{\delta} \right] \frac{n}{2} \varphi \quad (12.57)$$

x) Protože všechny síly F_i jsou rovnoběžné s osou setrvačníku a žádná silová dvojice kolem této osy zřejmě nepůsobí, stačí napsat jen dvě rovnice rovnováhy.

Rovnice (12.54) bude přitom samozřejmě splněna. Porovnáme-li rovnice (12.49) a (12.57), dojdeme k závěru, že tuhost k_0 nezávisí na úhlu ψ_0 a je

$$k_0 = \frac{n}{2} \left[\frac{\alpha - 2\beta b + \gamma b^2}{\alpha\gamma - \beta^2} + \frac{1}{\delta} \right] \quad (12.58)$$

Platí-li rovnice (12.52), bude po úpravě

$$k_0 = \frac{2n EJ_0}{b-a} \left[\frac{b^3 - a^3}{(b-a)^3} + \frac{GJ_k}{EJ_0} \right] \quad (12.59)$$

Analogicky lze odvodit tuhost C při zatížení náboje oproti věnci momentem M_k (obr. 51).

Ve vztahu

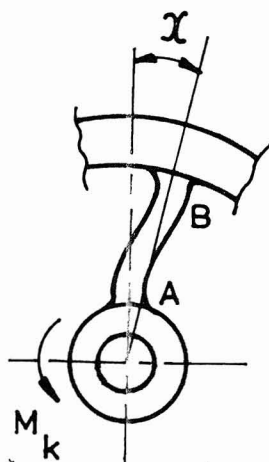
$$M_k = C \chi \quad (12.60)$$

vyjde

$$C = \frac{4n EJ_1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{(b-a)^3} \quad (12.61)$$

Ponecháváme čtenáři, aby se o tom přesvědčil. Ve vzorci (12.61) značí EJ_1 ohybovou tuhost ramene při jeho ohybu v rovině kolmé k ose setrvačnicku.

Ohybové a torzní kmitání setrvačnicků s rameny je probráno v lit. /29/, str. 304 až 309.^{x)}



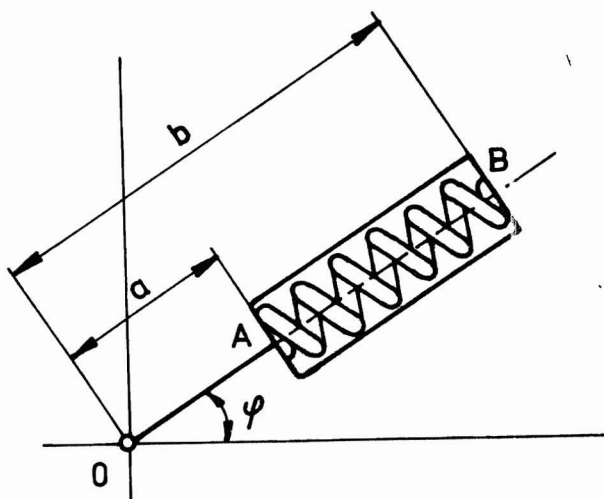
Obr. 51

x) Ve vzorci pro tuhost k_0 je v lit. /29/, str. 308, tisková chyba.

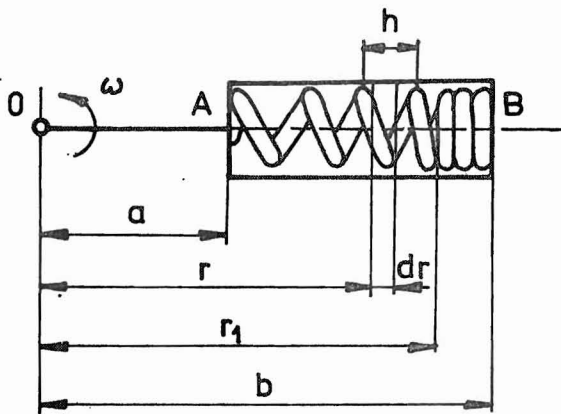
13. ZMĚNA OSOVÉ SÍLY V ROTUJÍCÍ PRUŽINĚ

V této kapitole se budeme zabývat případem válcové šroubovitě pružiny zabudované do nějakého tělesa, které rotuje kolem osy kolmé k ose pružiny. Předpokládáme-li, že příčným průhybům pružiny zabrání její hladké vedení, postačí zabývat se pouze vlivem rotace na osové deformace pružiny.

Zvolíme zvláštní případ, kdy osa pružiny spadá za rotace do radiálního paprsku, takže na pružinu působí vnější povrchové i objemové síly jen ve směru její osy. Budeme předpokládat, že pružina se nachází bez tření ve válcovém pouzdře, které spolu s pružinou rotuje v rovině nánkresny kolem bodu O rovnoměrnou úhlovou rychlostí ω (obr. 52 a 53).



Obr. 52



Obr. 53

Pružina má průměr vinutí D , průměr drátu d a výšku závitu h ; je v pouzdře předepjatá tlakovou silou F_0 . Ptáme se, jak se změní reakce pružiny vlivem rotace.

Pro předpětí pružiny platí zřejmě vztah

$$F_0 = k(H - h_0) \tag{13.1}$$

kde H je výška závitu volné (nezatížené) pružiny, h_0 - výška závitu předepjaté, nerotující pružiny, úhel $\varphi = \text{konst}$ a

$$k = \frac{G d^4}{8 D^3} \tag{13.2}$$

značí tuhost jednoho závitu pružiny, jejíž modul pružnosti ve smyku je G . Vztah (13.2) platí pro hustě vinutou pružinu.

Za rotace bude $\varphi = \omega t$ a výška závitu pružiny se změní na $h = h(r)$ (obr. 53). Je omezena nerovnostmi

$$d \leq h, \quad \text{popř.} \quad d \leq h \leq H \quad (13.3)$$

Druhá z nerovností (13.3) platí v případě, že se konec pružiny v bodě A pouze opírá a může odlehnout. Hmotnost elementu pružiny o délce dr je

$$dm = \rho \frac{\pi d^2}{4} \pi D \frac{dr}{h} \quad (13.4)$$

Přenáší se jím tlaková síla $F = F(r)$. Přírůstek dF této síly vyrovnává odstředivou sílu působící na hmotný element dm , takže

$$dF = \omega^2 r dm \quad (13.5)$$

Přitom pro $d < h$, popř. pro $d < h \leq H$ platí závislost

$$F = k(H-h) \quad (13.6)$$

Vztah (13.6) tedy platí jen, pokud závity na sebe nedosedají. Dosednou-li (tj. pro $r_1 \leq r \leq b$), bude

$$F \cong F_1 = k(H-d) \quad (13.7)$$

Předpokládejme nejprve, že závity na sebe ještě nedosednou. Pak podle (13.5) a (13.6)

$$\omega^2 r dm = -k dh \quad (13.8)$$

Když za dm dosadíme z rovnice (13.4), dostaneme

$$h dh = -K r dr \quad (13.9)$$

kde

$$K = \frac{\pi^2 d^2 D \omega^2 \rho}{4k} = \frac{2\pi^2 D^4 \omega^2 \rho}{G d^2} \quad (13.10)$$

Vyloučíme-li z rovnic (13.4) až (13.6) h , dostaneme diferenciální rovnici

$$\left(H - \frac{F}{k}\right) dF = k K r dr \quad (13.11)$$

Integrací rovnice (13.9) vyjde

$$h^2 = -K r^2 + C_1 \quad (13.12)$$

a z rovnice (13.11)

$$F^2 - 2kHF + k^2 K r^2 + C_2 = 0 \quad (13.13)$$

Předpokládejme nejprve, že závity pružiny na sebe nedosedají a že oba konce pružiny jsou v bodech A, B pevně uchyceny. Reakce v bodech A, B představují dvě neznámé, pro něž můžeme napsat jedinou podmínku statické rovnováhy

$$R_A + R_B = \int \omega^2 r dm = \omega^2 \rho \frac{\pi^2 a^2 D}{4} \int_a^b \frac{r dr}{h(r)} \quad (13.14)$$

Druhá podmínka musí být deformační. Vyjadřuje okolnost, že celková délka pružiny zůstává i za rotace konstantní. Lze ji chápat též tak, že se zachovává hmotnost. To vede k podmínce $\int dm = m = \text{konst}$ a odtud a z rovnice (13.4)

$$\int_a^b \frac{dr}{h(r)} = \frac{b-a}{h_0} \quad (13.15)$$

Do rovnice (13.15) dosadíme ze vztahu (13.12) a vypočteme integrační konstantu C_1 . Vyjde nejprve

$$\int_a^b \frac{dr}{\sqrt{C_1 - Kr^2}} = \frac{1}{\sqrt{K}} \left[\arcsin \left(b \sqrt{\frac{K}{C_1}} \right) - \arcsin \left(a \sqrt{\frac{K}{C_1}} \right) \right] \quad (13.16)$$

a pak z rovnice (13.15) po úpravě

$$\sqrt{\frac{K}{C_1}} \left(b \sqrt{1 - \frac{K}{C_1} a^2} - a \sqrt{1 - \frac{K}{C_1} b^2} \right) = \sin \frac{(b-a)\sqrt{K}}{h_0} \quad (13.17)$$

Tuto rovnici je nutné řešit numericky. Když takto určíme konstantu C_1 , dostaneme z rovnic (13.13) a (13.6) také konstantu C_2 . Podmínka rovnováhy (13.14) bude přitom automaticky splněna, neboť rovnice (13.13) byla odvozena s použitím vztahu (13.5), což je rovněž podmínka rovnováhy.

Podle principu akce a reakce bude

$$R_A = -F(a), \quad R_B = F(b) \quad (13.18)$$

Z rovnice (13.12) vypočteme $h = \sqrt{C_1 - Kr^2}$, dosadíme do (13.6) a odtud do (13.13). Vyjde

$$C_2 = k^2 (H^2 - C_1) \quad (13.19)$$

Pak z rovnice (13.13) určíme

$$F = kH - \sqrt{k^2 H^2 - k^2 Kr^2 - C_2} \quad (13.20)$$

Před odmocninou platí jen znaménko minus, neboť stlačení nemůže být větší než H , takže $F < kH$.

Položme si otázku, jak se řešení změní, dosednou-li některé závity na sebe. V tom případě bude $h = d$, takže poloměr r_1 oddělující část pružiny s dosedajícími závity vyjde z rovnice (13.12) ^{x)}

$$r_1 = \sqrt{\frac{C_1 - d^2}{K}} \quad (13.21)$$

V podmínce (13.15) pak bude r_1 místo b , takže konstanta C_1 vyjde z podmínky [srov. s (13.17)]

$$\sqrt{\frac{K}{C_1}} \left(r_1 \sqrt{1 - \frac{K}{C_1} a^2} - a \sqrt{1 - \frac{K}{C_1} r_1^2} \right) = \sin \frac{(r_1 - a) \sqrt{K}}{h_0} \quad (13.22)$$

Je zřejmé, že rovnice (13.21) a (13.22) se musí řešit simultánně a že je to možné jen numericky. Vypočteme z nich konstantu C_1 a poloměr r_1 . Vztahy (13.19) a (13.20) pak platí jen pro $a \leq r \leq r_1$.

V intervalu $r_1 \leq r \leq b$ máme

$$F = F(r) + \omega^2 \rho \frac{\pi a D}{8} (r^2 - r_1^2) \quad (13.23)$$

Druhý člen v rovnici (13.23) představuje odstředivou sílu závitů v intervalu (r_1, r) . Na rozhraní $r = r_1$ působí síla F stlačení rovné právě $(H - d)$. Máme tedy k dispozici ještě kontrolní vztah

$$F(r_1) = k(H - d) = F_1 \quad (13.24)$$

Nyní by bylo možné uvažovat ještě o případě, že se pružina v bodě A pouze opírá, takže se tam může uvolnit. Stane se tak za podmínky, že $F(a) = 0$. Odtud vypočteme K a tír i úhlovou rychlost ω . Jestliže se levý konec uvolní, bude místo podmínky (13.15) platit $F(r_2) = 0$ ($r_2 > a$ je poloměr vyznačující polohu konce A uvolněné pružiny). Rovnice (13.15) bude platit s tou změnou, že a nahradíme symbolem r_2 (dotý-

x) Vyjde-li $r_1 > b$, pak závity na sebe nedosedají.

kají-li se závity, pak také b se nahradí symbolem r_1). Z těchto dvou podmínek a z rovnice (13.6) vyjdou integrační konstanty C_1, C_2 a poloměr r_2 .

Poznámka

Stejnou úlohu řešil Gillespie /30/, avšak s tím, že pružina přesahovala osu rotace, takže bod O padne mezi body A, B (obr. 53). Použil však zjednodušení v tom, že podmínku pro dosednutí závitů formuloval jako $h = 0$ (místo $h = d$) a že místo podmínky (13.15) $\int [1/h(r)] dr = \text{konst}$ použil vztah $\int h(r) dr = \text{konst}$. Jeho řešení tedy není "exaktní", jak v nadpisu své práce prohlašuje.

Diskuse

Protože počítáme s tím, že hustota závitů a tím i měrná hmotnost pružiny se za rotace změní, počítáme s velkými posuvy. Souřadnice r na obr. 53 se vztahuje k přetvořené pružině. Je to tedy Eulerův způsob popisu /31/. Proto je třeba vycházet z Almansiho tenzoru poměrného přetvoření, který pro malá přetvoření dává

$$\varepsilon(r) = \frac{h_0 - h(r)}{h(r)} \quad (a)$$

a nikoli z Greenova-Lagrangeova tenzoru, který dává pro malá přetvoření hodnotu

$$\varepsilon(r) = \frac{h_0 - h(r)}{h_0} \quad (b)$$

Když do podmínky

$$\int_a^b \varepsilon(r) dr = 0 \quad (c)$$

pro zachování délky pružiny dosadíme z rovnice (a), dostaneme

$$h_0 \int_a^b \frac{dr}{h} - \int_a^b dr = 0 \quad (d)$$

a odtud

$$\int_a^b \frac{dr}{h(r)} = \frac{b-a}{h_0} \quad (e)$$

což je rovnice (13.15). Vyjdeme-li však (nesprávně) z definice (b), dostaneme podmínku

$$\int_a^b h(r) dr = h_0(b-a) \quad (f)$$

Vzhledem k rovnici (13.6) lze tuto podmínku zapsat také ve tvaru

$$\int_a^b F(r) dr = k(H-h_0)(b-a) = F_0(b-a) = \text{konst} \quad (g)$$

Právě této nesprávné podmínky použil autor práce /30/.

Bylo by velkou chybou, kdybychom např. počítali konstantu C_1 v rovnici (13.12) z podmínky, že pro $\omega = 0$ (a tedy $K = 0$) je $h = h_0$, takže $C_1 = h_0^2$. Rovnici (13.12) jsme totiž nedostali řešením diferenciální rovnice, v níž by ω vystupovala jako nezávisle proměnná. Naopak, při integraci rovnice (13.9) jsme brali $\omega = \text{konst}$. Okrajové podmínky pro tuto rovnici musíme proto hledat na okrajích intervalu $r \in \langle a, b \rangle$ a nikoli v závislosti na volbě ω .

Je-li $\omega = 0$, je samozřejmě $C_1 = h_0^2$, ale to platí jen pro tento případ. Konstanta C_1 je skutečně konstantní vzhledem k r , nikoli však vzhledem k parametru $k(\omega^2)$. Limituje-li K k nule, je rovnice (13.17) pro $C_1 = h_0^2$ splněna. Z rovnic (13.19) a (13.20) pak vyjde $F = k(H-h_0) = F_0$, jak bylo možno očekávat.

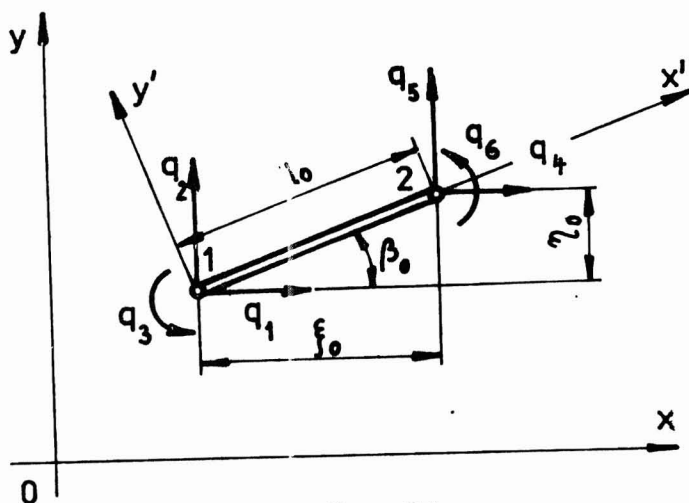
14. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ GEOMETRICKY NELINEÁRNÍCH ÚLOH

Jednu z takových úloh jsme řešili v předchozí kapitole. Jde o výpočet velkých deformací prutů a jejich soustav, zůstává-li namáhání v mezích platnosti Hookeova zákona. Jako příklad můžeme uvést velké deformace různě tvarovaných pružin, jež mohou být v různých rovnovážných stavech. Mohou např. přejít přes labilní oblast do oblasti pokritické stability. Tyto pružiny se používají nejen jako závěsy s nelineární deformační charakteristikou, ale také jako konstrukční prvky různých regulátorů a přístrojů. V jednoduchých případech lze jejich deformace počítat analyticky, ale už na příkladu rotující válcové šroubovitě, hustě vinuté pružiny jsme viděli, že to nebývá snadné.

V této kapitole popíšeme metodu numerického řešení rovinného, geometricky nelineárního ohybu obecně křivých prutů. Zobecnění metody na prostorové konstrukce je snadné a nebudeme je proto uvádět. Metoda,

kteřou se budeme zabývat, je jenom jednou z mnoha možných metod. Rozsah kapitoly nám nedovolí, abychom tuto látku probírali ve větší šíři. Poskytneme však alespoň základ nutný k úspěšnému numerickému řešení technicky významných úloh.

Křivé tenké pruty můžeme rozdělit na křivočaré konečné elementy nebo je můžeme přibližně nahradit lomeným prutem složeným z většího počtu přímých nosníkových prvků. K popisu metody použijeme modelu složeného z přímých nosníkových prvků. Důvodem není jenom snazší odvození matice tuhosti, ale také okolnost, že v okolí labilní rovnováhy je třeba připojovat ještě tzv. geometrickou matici, pomocí které lze popsat i vzpěr přímých prutů. O tom pojednáme v diskusi k této kapitole.



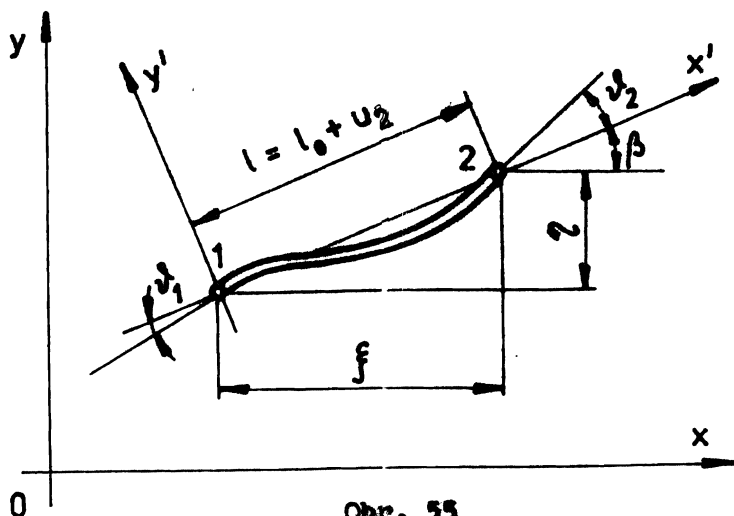
Obr. 54

Na obr. 54 je zakreslen nosníkový prvek, jehož deformace jsou popsány šesti zobecněnými souřadnicemi q_1, q_2, \dots, q_6 . Jeho délka je l_0 . Relativní poloha jeho uzlových bodů je popsána veličinami ξ_0, η_0 , z nichž lze vypočítat i úhel

$$\beta_0 = \operatorname{arctg} \frac{\eta_0}{\xi_0} \quad (14.1)$$

Kromě globálního souřadnicového systému x, y zvolíme ještě lokální systém x', y' vztažený k nosníkovému prvku tak, že počátek je v jednom uzlovém bodě a osa x' prochází ještě druhým uzlovým bodem. Abychom obě soustavy lépe rozlišili, označíme v uzlech $i = 1, 2$ zobecněné posuvy vztažené k lokální souřadnicové soustavě x', y' symboly u_i, v_i, ϑ_i . Z definice vyplývá, že

$$u_1 = 0 \quad v_1 = 0 \quad \vartheta_2 = 0 \quad (14.2)$$



Obr. 55

Na obr. 55 je zakreslena poloha a tvar nosníkového prvku po deformaci. Zřejmě

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + q_4 - q_1 \\ \eta &= \eta_0 + q_5 - q_2 \\ \beta &= \arctg (\eta/\xi)\end{aligned}\tag{14.3}$$

Nejsou-li deformace malé, je třeba stanovit způsob jejich popisu. Malé deformace vztahujeme vždy k nepřetvořenému tělesu, protože jeho tvar je předem známý. Např. poměrné prodloužení prvku 1 - 2 na obr. 54 a 55 je

$$\varepsilon_L = \frac{l - l_0}{l_0}\tag{14.4}$$

Protože ε_L je malé, je $l \approx l_0$, takže nezáleží na tom, která z těchto veličin je ve jmenovateli. Je-li ε_L velké, pak

$$\varepsilon_E = \frac{l - l_0}{l}\tag{14.5}$$

bude už podstatně jiná hodnota. Veličina ε_L odpovídá Lagrangeovu způsobu popisu, kdežto ε_E odpovídá Eulerovu způsobu. Podrobnosti lze najít např. v lit. /31/.

Pro náš případ, kdy poměrné deformace jsou malé, ale posuvy velké, se jeví velmi výhodná metoda, která vychází z Lagrangeovy formulace úlohy, avšak ne zcela důsledně. Postupně budeme měnit lokální souřadnicový systém, v němž odečítáme posuvy, takže systém bude krok za krokem sledovat pohyb nosníkového prvku. Relativně k tomuto přestavovanému systé-

mu budou posuvy stále malé. Budou tedy platit jednoduchá pravidla pro počítání s malými čísly, jež vedou k lineárním závislostem.^{x)} Nelinearita se bude uplatňovat jen prostřednictvím opakované transformace souřadnic. Tímto přestavovaným systémem bude soustava souřadnic x' , y' . Jeho poloha vzhledem ke globálnímu systému x , y bude dána proměnlivým úhlem β .

Předpokládejme nejprve, že posuvy jsou malé, takže $\beta \approx \beta_0$. Pak bude platit tento transformační vztah /32/

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vartheta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} \quad (14.6)$$

Zkráceně jej zapíšeme ve tvaru vzorce

$$\{u\} = [T]\{q\} \quad (14.7)$$

v němž $[T]$ je transformační matice.

Mezi vektorem zobecněných posuvů $\{u\}$ a vektorem zobecněných sil $\{f\}$ (v lokální souřadnicové soustavě) platí lineární vztah

$$[k]\{u\} = \{f\} \quad (14.8)$$

kde $[k]$ je elementární matice tuhosti. Použijeme-li transformace (14.7), dostaneme

$$[K]\{q\} = \{Q\} \quad (14.9)$$

kde $\{Q\}$ je vektor zobecněných sil v globální soustavě souřadnic, $[K]$ je elementární matice tuhosti v téže soustavě.

x) Připomeňme, že diferenciál nelineární funkce $f = f(x, y)$ je lineární funkcí přírůstků dx , dy , neboť $df = f_x dx + f_y dy$ (indexy označují parciální derivaci).

Zřejmě ^{x)}

$$[K] = [T]^T [k] [T] \quad (14.10)$$

$$\{Q\} = [T]^T \{f\} \quad (14.11)$$

Pravý horní index T znamená transpozici matice (záměnu sloupců a řádků). Vektory (14.9) nyní rozlišíme indexy " i " podle jejich příslušnosti k jednotlivým konečným prvkům a načteme je do připraveného (vynulovaného) vektoru všech zobecněných sil, které v globálním systému průběžně očíslovujeme. Podrobnosti obsahují např. /32/, /33/. Dostaneme

$$\sum [K]_i \{q\}_i = \{Q\} \quad (14.12)$$

Symbol \sum znamená načtení elementárních matic popř. vektorů do připraveného globálního pole (assembling). Levou stranu rovnice (14.12) můžeme zapsat do tvaru

$$\sum [K]_i \{q\}_i = [K] \{q\} \quad (14.13)$$

kde

$$[K] = \sum [K]_i \quad (14.14)$$

značí celkovou matici tuhosti a $\{q\}$ celkový vektor zobecněných posuvů. Pro pravou stranu rovnice (14.12) zavedeme označení

$$\{Q\} = \sum \{Q\}_i \quad (14.15)$$

a místo (14.12) budeme mít

$$[K] \{q\} = \{Q\} \quad (14.16)$$

Zde $\{Q\}$ je celkový vektor zobecněných sil. Tento vektor vyvolává v dané konstrukci deformaci popsanou vektorem zobecněných posuvů $\{q\}$. Jestliže z této konstrukce uvolníme i -tý prvek, budou na něj v uzlech působit síly $[K]_i \{q\}_i$. Chceme-li dostat vratné síly, kterými i -tý prvek působí na uzlové body, musíme vzít tento výraz s opačným znaménkem, musíme tedy brát $-[K]_i \{q\}_i$. Tyto vratné (direkční) síly jsou v rovnováze s působícími zobecněnými silami $\{Q\}_i$, neboť v rovnováze je každý izolovaný (uvolněný) uzlový bod. Bude tedy platit, že

x) Matice $[T]$ je ortogonální, takže $[T]^{-1} = [T]^T$. Pro $\{u\}$ platí transformační rovnice (14.7), pro $\{f\}$ obdobná rovnice $\{f\} = [T] \{Q\}$. Tak dostaneme $[k][T] \{q\} = [T] \{Q\}$. Vynásobením zleva maticí $[T]^T$ dostaneme (14.9).

$$\{Q\}_i - [K]_i \{q\}_i = \{0\} \quad (14.17)$$

Načtením těchto vektorů do výsledného vektoru, čemuž odpovídá skládání sil působících ve skutečné konstrukci, dostaneme (14.12), popř. (14.16).

Sledujme nyní, co se změní, bude-li sice přetvoření malé, ale posuvy budou velké. Změní se pouze to, že úhel β se bude více lišit od hodnoty β_0 , což se projeví jednak ve změně velikosti prvků matice $[T]$, jednak ve změně transformačního vztahu (14.6). Ten by stále platil, kdyby se vektor $\{q\}$ vztahoval na posuvy prvku přemístěného do polohy znázorněné na obr. 55. Jde-li však o posuvy měřené od výchozí polohy podle obr. 54, nebude třetí a šestý řádek v maticovém vztahu (14.6) platit. Místo toho budeme mít

$$v_1 = q_3 - (\beta - \beta_0) \quad (14.18)$$

$$v_2 = q_6 - (\beta - \beta_0) \quad (14.19)$$

Úhel β se už nebude přibližně rovnat β_0 , ale bude záviset na posuvech q_1 , q_2 , q_4 a q_5 podle vztahu (14.3). Tím se rovnice (14.16) stane nelineární. Bude mít tvar

$$[K(q)]\{q\} = \{Q\} \quad (14.20)$$

a bude třeba ji řešit postupnými iteracemi, např. Newtonovou-Raphsonovou metodou. Potom je však lhostejné, jsou-li přetvoření malá či nikoliv. Představují-li matice tuhosti tzv. tečné matice $[34]$, budou stejné vztahy platit i pro fyzikálně nelineární úlohy. Pak ovšem bude třeba vzít zřetel také k posuvu u_2 , pro který bude platit vztah

$$u_2 = l - l_0 \quad (14.21)$$

Do tohoto vztahu dosadíme podle Pythagorovy věty

$$l = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (14.22)$$

$$l_0 = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2} \quad (14.23)$$

Ačkoli u_2 nemusí být malé, bude zpravidla přece jen mnohem menší než l nebo l_0 , takže na pravé straně (14.21) bude rozdíl velkých čísel, což povede ke ztrátě numerické přesnosti. Proto je výhodnější nedosazovat z rovnice (14.22) a (14.23) do (14.21), ale vycházet raději ze vztahu

$$l^2 - l_0^2 = \xi^2 + \eta^2 - \xi_0^2 - \eta_0^2 \quad (14.24)$$

Když sem dosadíme z rovnic (14.3), vyjde

$$l^2 - l_0^2 = (q_4 - q_1 + 2\xi_0)(q_4 - q_1) + (q_5 - q_2 + 2\eta_0)(q_5 - q_2) \quad (14.25)$$

Za levou stranu (14.25) vezmeme

$$l^2 - l_0^2 = (l + l_0)(l - l_0) \cong 2l_0(l - l_0) \quad (14.26)$$

takže nakonec bude

$$u_2 = \frac{1}{2l_0} [(q_4 - q_1 + 2\xi_0)(q_4 - q_1) + (q_5 - q_2 + 2\eta_0)(q_5 - q_2)] \quad (14.27)$$

Představme si nyní, že máme nějakou konfiguraci přetvořené konstrukce, na kterou působí daný vektor zobecněných sil $\{F\}$. Tato konfigurace je odhadnutá; poněkud se liší od konfigurace skutečné. Pro typický konstrukční prvek platí obr. 55. Pro ni dovedeme vypočítat vratné síly $\{Q\} = -\sum \{Q\}_i$. Použijeme k tomu rovnice (14.16). Tyto vratné síly však nebudou v rovnováze se silami $\{F\}$, neboť geometrická konfigurace byla pouze odhadnuta a neplatí přesně. Zbudou reziduální (nevyvážené) síly

$$\{R\} = \{F\} - \{Q\} = \{F\} - \sum [K]_i \{q\}_i = \{F\} - [K] \{q\} \quad (14.28)$$

kteří způsobí dodatečnou deformaci soustavy $\{\Delta q\}$. Vypočteme ji ze soustavy rovnic

$$[K] \{\Delta q\} = \{R\} \quad (14.29)$$

Nyní můžeme původní odhad geometrické konfigurace, tj. vektor $\{q\}$ zpřesnit. Přidáme k němu index n (n -tá aproximace) a dostaneme posloupnost, pro niž platí tento rekurentní vztah

$$\{q\}_{n+1} = \{q\}_n + \{\Delta q\}_n \quad (14.30)$$

Na levé straně máme $(n+1)$ ní aproximaci, na pravé straně n -tou aproximací s příslušnou opravou. Tak můžeme pokračovat až do jistého $n = N$, při němž je norma přírůstkového vektoru $\{\Delta q\}$ zanedbatelná, takže

$$\frac{\|\{\Delta q\}_N\|}{\|\{q\}_N\|} \ll \varepsilon \quad (14.31)$$

kde $\varepsilon > 0$ je zvolená kritériální hodnota.

Místo rovnice (14.31) můžeme požadovat, aby veškerá c_j vypočtená ze vzorce (14.32) byla menší než ε . Přitom

$$c_j = \frac{|\Delta q_j|}{q_{\max}} \quad (14.32)$$

Zde $q_{\max} = \max(|q_k|)$ značí největší absolutní hodnotu posuvu téhož druhu (např. úhlu otočení, je-li Δq_j úhel otočení). Za ε se volí podle okolností 10^{-6} až 10^{-2} .

Celý postup výpočtu shrneme do tohoto návodu:

- (1) Pro danou aproximaci stanovíme lokální souřadnice x' , y' u každého konečného prvku.
- (2) Vypočteme elementární matice tuhosti $[k]_i$ v lokálních souřadnicích.
- (3) Elementární matice tuhosti transformujeme podle vztahu (14.10) a načteme podle (14.14). Dostaneme tak celkovou matici tuhosti $[K]$.
- (4) Ze vztahů (14.18), (14.19) a (14.27) vypočteme v lokálních souřadnicích deformační vektory

$$\{u\}_i = [0 \ 0 \ v_1 \ u_2 \ 0 \ v_2]^T$$

- (5) Vypočteme vratné síly pro jednotlivé prvky

$$-\{f\}_i = -[k]_i \{u\}_i$$

a transformujeme je podle vztahu (14.11)

$$-\{Q\}_i = -[T]_i^T \{f\}_i$$

- (6) Načtením vytváříme vektor vratných sil $-\{Q\} = -\sum \{Q\}_i$

- (7) Vypočteme $\{\Delta q\}$ z rovnice (14.29), tj. ze vztahu

$$[K] \{\Delta q\} = \{F\} - \{Q\}$$

Vypočtené hodnoty přičteme k vektoru $\{q\}$ [viz (14.30)]

- (8) Testujeme konvergenci. Je-li třeba, postupujeme znovu od bodu (1).

Diskuse

Numerické řešení soustavy nelineárních rovnic typu (14.20) má v sobě mnohá úskalí. Řešení nemusí být jednoznačné a nalezené řešení se nemusí ztotožňovat s řešením hledaným. Může se stát, že při nevhodném počátečním odhadu řešení (při volbě nulté aproximace) přejde řešení do nestabilní oblasti v rozporu s fyzikální realitou a že bude divergovat. Proto je někdy lépe zatížení rozdělit na několik stupňů, přičemž konečný stav řešení určitého stupně je zároveň počátečním stavem stupně ná-

sledujícího. Zmenšuje-li se determinant k nule nebo ztratí-li matice tuhosti pozitivní definitnost (známkou této ztráty může být objevení záporných hodnot na diagonále), znamená to vždy ztrátu stability konstrukce. Máme-li pro takový případ správně vystihnout chování konstrukce, musíme uvážit i vliv tahové nebo tlakové síly na velikost ohybových momentů, který není v matici tuhosti zahrnut. V okolí kritického zatížení konstrukce musíme tedy k matici tuhosti připojit ještě geometrickou matici.

Má-li např. přímý nosníkový prvek v obecném řezu x osový posuv $u(x)$, příčný posuv $v(x)$ a úhel otočení tečny ke střednici $\vartheta(x)$, bude poměrné prodloužení ϵ_x vlákna ve vzdálenosti y od neutrální osy při rovinném ohybu x)

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{a})$$

První člen na pravé straně představuje poměrné protažení střednice, druhý poměrnou deformaci vyvolanou zakřivením a třetí člen - nelineární - poměrné prodloužení vzniklé příčnými posuvy. Úsečka dx se totiž těmito posuvy prodlouží na ds , přičemž

$$ds = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right)^2} \approx dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (\text{b})$$

Je tedy

$$\frac{ds - dx}{dx} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{c})$$

Deformační energie pak vyjde

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_S E \epsilon_x^2 dS dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l ES \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l P \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (\text{d})$$

Využili jsme poznatku, že neutrální osa prochází těžištěm průřezu, takže $\int y ds = 0$. Dále jsme zavedli osový kvadratický moment

$$J = \int_S y^2 dS \quad (\text{e})$$

x) Ač jde o lokální souřadnice, budeme je pro stručnost označovat x, y (čárky vynecháme).

a osovou sílu vzniklou protažením

$$P = E \int \frac{\partial u}{\partial x} dS \quad (f)$$

Příčný posuv interpolujeme kubickým polynomem, takže

$$v(x) = [N(x)] \{u\} \quad (g)$$

kde

$$\{u\} = [u_1 \quad v_1 \quad \vartheta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \vartheta_2]^T$$

$$[N(x)] = [0 \quad h_1 \quad h_2 \quad 0 \quad h_3 \quad h_4]$$

$$h_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$h_2 = -x + 2\frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}$$

$$h_3 = 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$h_4 = \frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}$$

Pro $u(x)$ máme lineární interpolaci

$$u(x) = [H(x)] \{u\} \quad (h)$$

kde

$$[H(x)] = \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad 0 \quad 0 \quad \left(\frac{x}{l}\right) \quad 0 \quad 0 \right]$$

Označme derivaci

$$v'(x) = [N'(x)] \{u\} = [G(x)] \{u\} \quad (i)$$

Pak výraz (d) můžeme zapsat ve tvaru

$$U = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} + \frac{1}{2} \{u\}^T [k_G] \{u\} \quad (j)$$

kde první člen na pravé straně obsahuje obvyklou matici tuhosti, odvozenou z prvních dvou členů na pravé straně rovnice (d). Zbývajícím členem

$$[k_G] = P \int_0^l [G(x)]^T [G(x)] dx \quad (k)$$

představuje geometrickou matici ^{x)}. Vyjde

$$[k_G] = \frac{P}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Síla P je kladná, je-li tahová.

Dosadíme-li za souřadnice v_1^0 , v_2^0 hodnoty

$$v_1^0 = v_2^0 = \frac{v_2 - v_1}{l} \quad (m)$$

což odpovídá kloubově spojeným příným prutům, které se neohýbají, t.j. zavedeme-li transformaci

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_1^0 \\ u_2 \\ v_2 \\ v_2^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & 0 & 1/l \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/l & 0 & 1/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (n)$$

čili zkráceně

$$\{u\} = [R] \{\bar{u}\} \quad (o)$$

vyjde

$$\frac{1}{2} \{u\}^T [k_G] \{u\} = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [\bar{k}_G] \{\bar{u}\} \quad (p)$$

x) Není-li síla P konstantní, zůstane za integračním znaménkem.

kde

$$[\bar{k}_G] = [R]^T [k_G] [R] = \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (q)$$

značí geometrickou matici pro kloubově připojený ideální prut.

Jak je z odvození patrné, poslední člen v rovnici (j) vyjadřuje přírůstek deformační práce vykonané osovou ("membránovou") silou P při příčných posuvech. Je to tedy právě ten člen, který potřebujeme k popisu vzpěru. Se součtem matic ($[k] + [k_G]$) nakládáme právě tak, jako s pouhou elementární maticí $[k]$. Mimo kritickou oblast je geometrická matice $[k_G]$ zanedbatelná a můžeme ji vynechat.

15. PŘECHOD OD DISKRÉTNÍCH PARAMETRŮ KE SPOJITÝM A NAOPAK

Pružné těleso má nekonečně mnoho stupňů volnosti. Např. ohybová čára prostě podepřeného pružného nosníku má rovnici

$$W = W(x) = W_1 \sin \frac{\pi x}{l} + W_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + W_j \sin \frac{j\pi x}{l} + \dots \quad (15.1)$$

Je popsána zadáním spojité funkce $W(x)$, tzn. předpisem hodnot W v nekonečném množství bodů x , $0 < x < l$. Jediný požadavek, kterému musí hodnoty W vyhovovat, je požadavek spojitosti v nulté a v první derivaci.^{x)} Funkce $W(x)$ mimo to splňuje okrajové podmínky $W(0) = 0$, $W(l) = 0$. Může být, jak jsme ukázali, rozvinuta ve Fourierovu řadu. Ta má spočetné, ale nekonečné množství koeficientů W_j , jež lze považovat za zobecněné souřadnice. Každé z nich přísluší jeden stupeň volnosti.

Omezíme-li v rovnici (15.1) počet členů řady, takže $j \leq N$, dostaneme soustavu s konečným počtem stupňů volnosti. Takovou soustavu však

x) Obvykle se však ještě požaduje, aby $w/l \ll 1$ a $dw/dx \ll 1$ (malé deformace).

dostaneme i jinými postupy, např. rozčleněním nosníku na konečné prvky nebo náhradou diferenciální rovnice ohybové čáry odpovídající diferenční rovnicí. Tímto způsobem přejdeme od spojitých funkcí k diskretním hodnotám, které nepočítáme z diferenciálních, ale z algebraických rovnic.

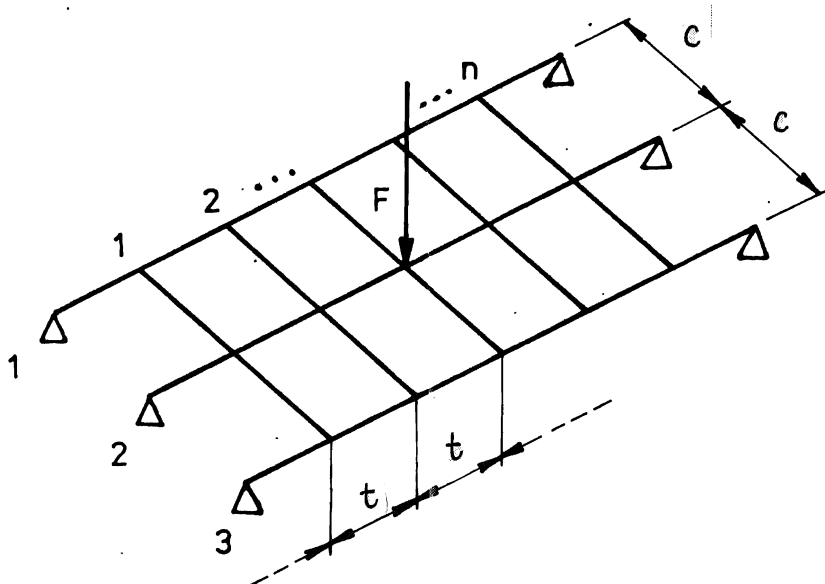
Někdy je výhodný opačný postup. Ukážeme to na příkladu roštu, který se skládá ze tří podélníků o rozteči c a z n příčných o rozteči t . Budeme předpokládat, že podélníky mají ohybovou tuhost EJ , příčníky EJ_0 , a že jsou splněny podmínky pro rovinný ohyb. Podélníky budou na koncích prostě (kloubově) podepřeny, jinak bude rošt volný (příčníky nebudou podepřeny).

Délka podélníků je $l = (n+1)t$, délka příčníků je $2c$. Nejprve budeme předpokládat, že všechny podélníky jsou zatíženy stejně a rovnoměrně délkovým zatížením (měrnou silou) q . Jejich největší průhyb pak bude

$$w_{max} = \frac{5q l^4}{384 EJ} \quad (15.2)$$

a bude u všech podélníků stejný. Příčníky nebudou namáhány.

Nyní probereme případ zatížení roštu osamělou silou F , která působí pouze uprostřed, tj. v polovině délky prostředního podélníku (obr. 56).



Obr. 56

Oba krajní podélníky se prohnu do tvaru $w_1(x)$, tedy stejně, ale méně než prostřední podélník, jehož průhyb bude $w_2(x)$. Protože uvnitř definičního intervalu bude zřejmě $w_2 > w_1$, budou se příčníky ohýbat a zčásti i zkrucovat. Také oba krajní podélníky se budou zkrucovat. Jestliže krut zanedbáme, bude se i -tý příčník prohýbat vzhledem ke krajním podélníkům v místě $x = x_i$ o hodnotu

$$w_2(x_i) - w_1(x_i) = \frac{Q_i (2c)^3}{48 EJ_0} \quad (15.3)$$

Přítom Q_i je síla přenášená do příčnicku z prostředního podélníku. x)

Oddělené působení příčnicků nyní nahradíme působením spojitým. Tím se vyhneme nutnosti analyzovat deformaci a napjatost jednotlivých příčnicků. K takovému postupu nás opravňuje skutečnost, že příčnický jsou relativně blízko u sebe (poměr $l/t = n+1$ je - jak předpokládáme - velké číslo). Jinými slovy, síly Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) nahradíme spojitým délkovým (měrným) zatížením $\bar{q}(x)$ takovým, že bude

$$\bar{q}(x_i)t = Q_i \quad (15.4)$$

Pružinová konstanta (tuhost) pružné vazby mezi oběma krajními podélníky a prostředním podélníkem plyne z definice

$$k(x) = \frac{\bar{q}(x_i)}{w_2(x_i) - w_1(x_i)} \quad (15.5)$$

Je to délkové zatížení, které - jakožto vnitřní reakce mezi podélníky - způsobí jednotkový rozdíl jejich průhybů. Když z rovnic (15.3) a (15.4) dosadíme do (15.5), vyjde

$$k = \frac{48 EJ_0}{(2c)^3 t} = \frac{6 EJ_0}{c^3 t} = \text{konst} \quad (15.6)$$

To znamená, že na prostřední podélník působí směrem nahoru délkové zatížení $-\bar{q}_2$, přičemž

$$\bar{q}_2(x) = k [w_2(x) - w_1(x)] \quad (15.7)$$

a na každý z krajních podélníků působí směrem dolů

$$\bar{q}_1(x) = \frac{1}{2} k [w_2(x) - w_1(x)] \quad (15.8)$$

Polovina na pravé straně rovnice (15.8) vyjadřuje skutečnost, že krajní podélníky jsou dva. Zatížení \bar{q}_1 a \bar{q}_2 splňují zákon o akci a reakci.

x) O chybě, která vzniká zanedbáním krutu, pojednáme později (v diskusi).

Pro průhyb podélníků máme tedy tuto soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{d^4 w_1}{dx^4} = \frac{1}{EJ} q_1(x) + \frac{1}{2} \frac{k}{EJ} (w_2 - w_1) \quad (15.9)$$

$$\frac{d^4 w_2}{dx^4} = \frac{1}{EJ} q_2(x) - \frac{k}{EJ} (w_2 - w_1) \quad (15.10)$$

Působí-li jen osamělá síla F uprostřed, je

$$q_1(x) = 0 \quad (15.11)$$

$$q_2(x) = \frac{2F}{l} \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \sin \frac{3\pi x}{l} + \sin \frac{5\pi x}{l} - \dots \right) \quad (15.12)$$

Rovnice (15.12) popisuje zobecněnou funkci

$$q_2(x) = F \delta \left(\frac{l}{2} - x \right) \quad (15.13)$$

ve tvaru Fourierovy řady. Zde $\delta(x)$ je Diracova zobecněná funkce, pro niž máme definici

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pro } x \neq 0 \quad (15.14)$$

$$\int_{-a}^a \delta(x) dx = 1 \quad \text{pro } a > 0 \quad (15.15)$$

Funkce $w_1(x)$, $w_2(x)$ nahradíme jejich lineárními kombinacemi takovými, abychom hledané funkce separovali. Zavedeme

$$f(x) = w_2(x) - w_1(x) \quad (15.16)$$

$$g(x) = w_2(x) + 2w_1(x) \quad (15.17)$$

Pak ovšem

$$w_1(x) = \frac{1}{3} [g(x) - f(x)] \quad (15.18)$$

$$w_2(x) = \frac{1}{3} [g(x) + 2f(x)] \quad (15.19)$$

Když rovnice (15.10) a (15.9) odečteme, vyjde s použitím (15.16)

$$\frac{d^4 f}{dx^4} + \frac{3}{2} \frac{k}{EJ} f = \frac{1}{EJ} (q_2 - q_1) \quad (15.20)$$

Znásobíme-li rovnici (15.9) dvěma a sečteme s rovnicí (15.10), dostaneme s pomocí (15.17)

$$\frac{d^4 q}{dx^4} = \frac{1}{EJ} (q_2 + 2q_1) \quad (15.21)$$

Řešení těchto rovnic můžeme napsat ve tvaru

$$f(x) = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + f_{\text{part}} \quad (15.22)$$

$$q(x) = C_5 + C_6 x + C_7 x^2 + C_8 x^3 + q_{\text{part}} \quad (15.23)$$

Řešení je tedy dáno součtem obecného integrálu homogenní rovnice a partikulárního integrálu. Přitom

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3}{8} \frac{k}{EJ}} \quad (15.24)$$

Protože obě pravé strany rovnic (15.20) a (15.21) jsou v daném případě stejné a rovnají se [podle (15.11) a (15.22)]

$$\frac{q_2}{EJ} = \frac{2F}{\ell EJ} \left(\sin \frac{\pi x}{\ell} - \sin \frac{3\pi x}{\ell} + \sin \frac{5\pi x}{\ell} - \dots \right) = \quad (15.25)$$

$$= \frac{2F}{\ell EJ} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{j-1}{2}} \sin \frac{j\pi x}{\ell} \quad (15.26)$$

vyjdou partikulární integrály ve tvaru

$$f_{\text{part}}(x) = \frac{2F\ell^3}{\pi^4 EJ} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{j-1}{2}}}{j^4 + \frac{q}{\pi^4} \frac{J_0}{J} \frac{\ell^4}{c^2 t}} \sin \frac{j\pi x}{\ell} \quad (15.27)$$

$$q_{\text{part}}(x) = \frac{2F\ell^3}{\pi^4 EJ} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{j^4} (-1)^{\frac{j-1}{2}} \sin \frac{j\pi x}{\ell} \quad (15.28)$$

Protože partikulární integrály splňují v daném případě všechny okrajové podmínky (na okrajích $x = 0$, resp. $x = l$, musí být nulový průhyb i jeho druhá derivace, tj. musí být nulový ohybový moment), budou integrační konstanty $C_1 = C_2 = \dots = C_8 = 0$.

Výrazy (15.27) a (15.28) tedy dosadíme přímo do rovnic (15.18) a (15.19).

S označením

$$\alpha = \frac{g}{\pi^4} \frac{J_0}{J} \frac{l^4}{c^3 t} \quad (15.29)$$

budeme mít

$$W_1(x) = \frac{2F l^3 \alpha}{3\pi^4 EJ} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{j-1}{2}}}{j^4(j^4+\alpha)} \sin \frac{j\pi x}{l} \quad (15.30)$$

$$W_2(x) = \frac{2F l^3}{3\pi^4 EJ} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{j-1}{2}} \frac{3j^4+\alpha}{j^4(j^4+\alpha)} \sin \frac{j\pi x}{l} \quad (15.31)$$

Diskuse

Bude-li $J_0 = 0$, vymizí vazba mezi podélníky ($\alpha = 0$). V tom případě musí být $W_1 = 0$, $W_2(x=l/2) = Fl^3/48EJ$. Skutečně, pro $\alpha = 0$ vyjde $W_1(x) = 0$ a z rovnice (15.31)

$$W_2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{2Fl^3}{\pi^4 EJ} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) = \frac{Fl^3}{48 EJ} \quad (a)$$

Bude-li naopak $J_0 \rightarrow \infty$, poroste α nade všechny meze. To odpovídá absolutně tuhým příčnicům, takže musí vyjít $W_1(x) = W_2(x)$ a také $W_1(x=l/2) = Fl^3/144 EJ$. Skutečně, pro $\alpha \rightarrow \infty$ máme z rovnic (15.30) a (15.31) $W_1 = W_2$ a také

$$W_1\left(\frac{l}{2}\right) = W_2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{2Fl^3}{3\pi^4 EJ} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) = \frac{Fl^3}{144 EJ} \quad (b)$$

Ohybové momenty v podélnicích vypočteme dvojnásobným derivováním rovnic (15.30) a (15.31), neboť obecně platí, že

$$M(x) = -EJ \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (c)$$

To už nebudeme rozepisovat.

Pochybnost je zdrojem pokroku. Zbývá ještě posoudit, jaké jsme se dopustili chyby přechodem ke spojitým parametrům. Chyba bude jistě tím menší, čím větší bude n . Chybu můžeme posoudit jedině srovnáním s přesným řešením. Zvolme proto extrémní případ $n = 1$ (pouze jeden příčník). Pro jednoduchost zvolíme $J_0 = J$, $c = t = \ell/2$. Neuplatní-li se krut, půjde o staticky neurčitou soustavu čtyř ohybaných nosníků. Reakce přenášená na oba krajní podélníky vyjde $0,2 F$, na prostřední podélník se přeneše síla $F - 2 \cdot 0,2 F = 0,6 F$. Z ohybové teorie nosníků vypočteme "exaktní" hodnoty průhybů

$$w_1\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{F\ell^3}{240 EJ} \quad , \quad w_2\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{F\ell^3}{80 EJ} \quad (d)$$

Ze vzorce (15.29) vyjde $\alpha \doteq 1,4783$ a ze vzorců (15.30), (15.31) dostaneme

$$w_1\left(\frac{\ell}{2}\right) \doteq \frac{F\ell^3}{244,86 EJ} \quad , \quad w_2\left(\frac{\ell}{2}\right) \doteq \frac{F\ell^3}{78,996 EJ} \quad (e)$$

Relativní chyba těchto vzorců je pouze 2,0 % resp. 1,3 %.

Krut se neuplatní, mohou-li se krajní podélníky v podporách volně otáčet. Kdybychom jejich ořáčení kolem podélné osy v podporách zcela zamazali, vznikl by v nich krut. Posoudíme jeho vliv pro případ čtvercového průřezu, pro který vyjde poměr krutové a ohybové tuhosti

$$\frac{GJ_k}{EJ} = 0,648817 \quad (f)$$

(je-li $E/G = 2,6$).

Ostatní předpoklady se nezmění ($c = t$, $J = J_0$, $n = 1$, ohybové momenty se do podpor nepřenesou). Reakce přenášená z příčníku na oba krajní podélníky vyjde v tomto případě $0,23 F$ a na prostřední podélník se přeneše síla $0,54 F$.

Vyjde

$$w_1\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{F\ell^3}{208,86 EJ} \quad , \quad w_2\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{F\ell^3}{88,83 EJ} \quad (g)$$

Chyba vzorců (e) proti těmto hodnotám je 17 % resp. 11 %. Je větší než oněch 5 %, které jsme uváděli v kap. 8, neboť počet příčníků je extrémně

malý. Chyba závisí ovšem také na poměru tuhostí $G J_k/EJ$. Např. u otevřených tenkostěnných profilů je tento poměr velmi malý, takže i chyba, která vzniká zanedbáním krutu, je velmi malá.

Teorii by bylo možno zobecnit přidáním torzní spojitě pružné vazby, ale řešení by se zkomplikovalo. Pak by už nebyl velký rozdíl v pracnosti přibližného a přesného řešení (s použitím maticové algebry a vhodného počítače).

ZÁVĚR

Uvedli jsme některé obraty a výpočtové postupy, kterými lze poměrně rychle a snadno dospět k výsledkům sice přibližným, ale technicky užitečným. Rozmanitost řešených úloh i použitých metod byla volena úmyslně, aby povzbuzovala čtenářovu představivost a vynalézavost. Připojené diskuse, jakož i porovnání výsledků s rigorózním řešením, vedou naopak ke kritickému pohledu na přibližná řešení. Tvůrčí inženýr potřebuje obojí, má-li se dostávat rychle vpřed a zároveň se vyvarovat nepříjemných chyb. Nebylo tedy naším úmyslem poskytnout receptář, ale spíše inspirovat čtenáře k samostatnému promýšlení fyzikálních úloh a k hledání nejvhodnějších metod jejich řešení.

Autor upřímně děkuje českému výboru Strojnické společnosti ČSVTS a Domu techniky ČSVTS Praha, zvláště Ing. Vladimíru Václavíkovi, za podnět k této práci a za péči věnovanou přípravě semináře. Děkuje též všem pracovníkům, kteří se obětavě podíleli na vypracování předloh a na vydání této publikace.

LITERATURA

- /1/ HÖSCHL, C.: Vznik náhlého lomu. Publikace DT ČSVTS Praha, č. 60-608-84(2799), 1984.
- /2/ MUSCHELIŠVILI, N.I.: Někotoryje osnovnyje zadači matěmatičeskoj těoriji uprugosti. 5. vyd., Nauka, Moskva 1966.
- /3/ FILON, L.N.G., Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 201 (1903), s. 63.
- /4/ KASANO, H. - OSHIMA, H. - MATSUMOTO, H.: An infinite solid cylinder under bending by concentrated loads. Bulletin of the JSME 24 (1981), č. 189, s. 514-519.
- /5/ STEPHEN, N.G.: The relationship between the centers of flexure and twist. International Journal of Mechanical Sciences 21 (1979), s. 373-377.
- /6/ TSAI, W.T.: Shear centers. Journal of the Engineering Mechanical Division, Proceedings of the ASCE 105 (1979), č. EM 5, s. 893-896.
- /7/ REISSNER, E. - THOMAS, G.B., Journal of Mathematical Physics 25 (1946), s. 24.
- /8/ SANDERSON, N. - KITCHING, R.: Flexibility of shafts with abrupt changes of section. International Journal of Mechanical Sciences 20 (1978), č. 3, s. 189-199.
- /9/ ECK, B.: Versteifender Einfluss der Turbinenscheiben auf die Durchbiegung des Läufers. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 72 (1928), č. 2, s. 51-56.
- /10/ KALMES, V.Ja.: Vlijanije posadki diskov i vtulok na izgib i kritičeskuju skorost' turbinnogo rotora. Energomašinostrojenije (1964), č. 4, s. 28-30.
- /11/ SÄHN, S.: Torsionsfederzahlen abgesetzter Wellen mit Kreisquerschnitt und Folgerungen für die Gestaltung von Schrumpfverbindungen. Konstruktion im Maschinen-Apparate- und Gerätebau 19 (1967), č. 1, s. 12-19.
- /12/ HÖSCHL, C.: Napjatost a útlum ve spojích namáhaných krutem. Strojírénství 23 (1973), č. 9, s. 515-520.
- /13/ HÖSCHL, C.: Pevnost předepjatých skládaných rotorů. Strojnícky časopis 24 (1973), č. 1, s. 50-63.
- /14/ HÖSCHL, C.: Napjatost a deformace listěných konstrukcí. Zpráva ÚT-ČSAV č. Z 852/83, Praha 1983.
- /15/ HOLNICKI - SZULC, J.: Beams with cable connected boundaries. International Journal of Engineering Science 21 (1983), č. 7, s. 753-764.

- /16/ PILKEY, W.D. - CHANG, Pin Yu: Modern formulas for statics and dynamics. A stress and strain approach. McGraw-Hill, New York 1978.
- /17/ HOPKINS, R.B.: Design analysis of shafts and beams. McGraw-Hill, New York 1970.
- /18/ COWPER, G.R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Series E, 33 (1966), s. 355-340.
- /19/ HÖSCHL, C.: Příčiny možného selhání metody přenosových matic ve statice a dynamice pružných těles. Strojírnoství (v tisku).
- /20/ LO, K.H. - CONWAY, H.D.: Effect of change of Poisson's ratio on the bending of a multi-layered circular cylinder. International Journal of Mechanical Sciences 16 (1974), č. 10, s. 757-768.
- /21/ CHANG, Pin Yu: A simple method for elastic analysis of grillages. Journal of Ship Research 12 (1968), č. 2.
- /22/ TIMOŠENKO, Š.: Pružnost a pevnost. Díl I a II. Technicko-vědecké nakladatelství, Praha 1951.
- /23/ CHANG, Pin Yu - MICHELSEN, F.C.: On the stability of grillage beams. Journal of Ship Research 13 (1969), č. 1, s. 153-159.
- /24/ BOUSSINESQ, J., Comptes Rendus 97 (1883), s. 843.
- /25/ TIMOŠENKO, Š.P. - WOJNOWSKI-KRIEGER, S.: Plastinky i oboločki. Překlad z angl. orig., 2. vyd. Nauka, Moskva 1966.
- /26/ RAMAHOHANA RAO, A. - NARAYANAMURTHI, R.G.: On the bending of the web in a wheel subjected to a single concentrated lateral load on the rim. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 53 (1973), č. 7, s. 375-384.
- /27/ NĚMEC, J. - HÖSCHL, C. - MILBAUER, M.: Theorie pevnosti diskových kol. Strojnický sborník č. 5, SNTL, Praha 1954, s. 129-158.
- /28/ SAFRONOV, Ju.V.: Načalnyje naprjaženija v sostavnyh kolesach so spicami. Izvěstija Akademii Nauk SSSR, Mechanika i mašinostrojenije (1964), č. 2, s. 96-104.
- /29/ KOŽEŠNÍK, J.: Dynamika strojů. SNTL, Praha 1958.
- /30/ GILLESPIE, S.J.: An exact solution to the variation in force along rotating springs. The Journal of Mechanical Engineering Science 13 (1971), č. 4, s. 302-305.
- /31/ HÖSCHL, C.: Principy a zákony mechaniky poddajných těles, 1. část. Publikace DT ČSVTS Praha č. 60-537-78 (1491). Praha 1978.
- /32/ OKROUHLÍK, M. - LOUCKÝ, K.: Algoritmizace a programování výpočtů v mechanice využitím maticové algebry. Publikace DT ČSVTS Praha, 1982.

- /33/ COOK, R.D.: Concepts and applications of finite element analysis.
2. vyd. John Wiley, New York 1981.
- /34/ HÖSCHL, C.: Nové směry ve využití metody konečných prvků. Publikace
DT ČSVTS Praha, č. 60-603-84 (2680), Praha 1984.
- /35/ DHATT, G. - TOUZOT, G.: Une présentation de la méthode des éléments
finis. Wiley - Interscience publication, Chichester 1983.

Druh publikace: Sborník
Název: Stavba strojů 99
OHYB A KRUT VE SLOŽITÝCH SOUSTAVÁCH
Autor: Prof. Ing. Cyril Höschl,
Ústav termomechaniky ČSAV
Počet stran: 114
Náklad: 160 výtisků
Formát: A4
Číslo publikace: 60 -603 -85
Vydal a rozmnožil: Dům techniky ČSVTS Praha
Praha 1, Gorkého náměstí 23
Rok vydání: 1985 DT 01 - 109/85
Cena publikace: 190 Kčs (cenový výměr DT č. 271/84)

Publikace nebyla v DT jazykově upravena