

UNE APPLICATION DU LEMME DE MITTAG-LEFFLER DANS
LA CATEGORIE DES QUOTIENTS D'ESPACES DE FRECHET

BELMESNAOUI AQZZOUZ, Sala Eljadida

(Reçu le 6 juillet 2006)

Abstract. An application of Mittag-Leffler lemma in the category of quotients of Fréchet spaces. We use Mittag-Leffler Lemma to prove that for a nonempty interval $]a, b[\subset \mathbb{R}$, the restriction mapping $H^\infty(]a, b[+ i\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(]a, b[)$ is surjective and we give a corollary.

Keywords: Fréchet space, projective limit, surjective mapping

MSC 2000: 46M05, 46M15, 46M40

1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Le Lemme de Mittag-Leffler est un résultat classique. Dans son livre ([5], chapitre 3, Section 3.4) Jochen Wengenroth a donné la connection entre le Lemme de Mittag-Leffler et l'exactitude du foncteur limite projective, il a montré que la procédure de Mittag-Leffler peut être utilisée pour donner une condition suffisante pour qu'un système projectif (X_n) satisfait $\text{Proj}_1(X_n) = 0$. Notons que les espaces du système projectif et dénombrable (X_n) peuvent être des groupes topologiques métrisables et complets ou des espaces de Fréchet. Aussi, notons que le Lemme de Mittag-Leffler joue un rôle centrale dans les travaux de Palamodov [2] et [3] i.e. concernant les foncteurs Proj_1 et Ext_1 pour les espaces de Fréchet et les limites projectives des espaces \mathcal{DF} .

Dans [1] nous avons étendu le Lemme de Mittag-Leffler à la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet. L'objectif de ce papier est de donner une application de cette extension. Pour cela nous utiliserons le Lemme de Mittag-Leffler dans la catégorie des espaces de Fréchet pour établir que si $]a, b[$ est un intervalle non vide de \mathbb{R} , alors toute fonction $f \in C^\infty(]a, b[)$ est la restriction d'une fonction $\tilde{f} \in H^\infty(]a, b[+ i\mathbb{R})$ tel que $f = \tilde{f}|_{]a, b[}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, pour tout $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, on a $D^n f(x) = 0$.

Ensuite, nous déduirons à partir du Lemme de Mittag-Leffler dans la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet (Théorème 3.2 de [1]) que $\varprojlim_k (E_k|F_k) = (\varprojlim_k E_k)|(\varprojlim_k F_k)$, où $E_k = H^k(]a, b[+i\mathbb{R})$ et $F_k = \text{Ker}(R_k)$ et R_k est la restriction $H^k(]a, b[+i\mathbb{R}) \rightarrow C^k(]a, b[)$, où $H^k(]a, b[+i\mathbb{R})$ est l'espace de Fréchet des fonctions de classe C^k sur $]a, b[+i\mathbb{R}$ dont la restriction à $]a, b[$ est de classe C^k et $D^\alpha f(x) = 0$ pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \leq k - 1$.

Enfin, rappelons la définition de la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet. Soit (E, τ_E) un espace de Fréchet. Un sous-espace de Fréchet de E est un sous-espace vectoriel F , muni d'une topologie s_F telle que l'injection $(F, s_F) \rightarrow (E, \tau_E)$ est continue. Un quotient d'espaces de Fréchet $E|F$ est un couple (E, F) , où E est un espace de Fréchet et F un sous-espace de Fréchet de E . Si $E|F$ et $E_1|F_1$ sont deux quotients d'espaces de Fréchet, un morphisme strict $u: E|F \rightarrow E_1|F_1$ est induit par une application linéaire continue $u_1: E \rightarrow E_1$ dont la restriction $u_{1|F}: F \rightarrow F_1$ est continue; le morphisme u est injectif si $u_1^{-1}(F_1) = F$ i.e. si $x \in E$ est tel que $u_1(x) \in F_1$ alors $x \in F$. Le morphisme strict u est dit un pseudo-isomorphisme s'il est induit par une application linéaire continue et surjective $u_1: E \rightarrow E_1$ telle que $u_1^{-1}(F_1) = F$. Dans [4], L. Waelbroeck a construit la catégorie abélienne **qFré**, elle a comme objets les quotients d'espaces de Fréchet et pour morphismes les applications de la forme $u = v \circ s^{-1}$, où s est un pseudo-isomorphisme et v est un morphisme strict. Pour plus d'informations voir [4].

2. LE RÉSULTAT PRINCIPAL

Nous notons par $C^\infty(]a, b[)$ l'espace de toutes les fonctions C^∞ sur $]a, b[$. Il est bien connu que $C^\infty(]a, b[)$ est un espace de Fréchet. Définissons maintenant l'espace $H_\infty^k(]a, b[+i\mathbb{R})$.

On désigne par $H_\infty^k(]a, b[+i\mathbb{R})$, l'espace des fonctions $f \in C^k(]a, b[+i\mathbb{R})$ telles que $f|_{]a, b[} \in C^\infty(]a, b[)$ et

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq k - 1: D^\alpha f(x) = 0.$$

La topologie de Fréchet de l'espace $H_\infty^k(]a, b[+i\mathbb{R})$ est donnée par la famille des semi-normes $(\|\cdot\|_{n,k})$, où

$$\|f\|_{n,k} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in K} |f^{(n)}(x)| + \sup_{|\alpha| \leq k-1} \sup_{x \in K'} |D^\alpha f(x)|$$

et où K et K' sont des compacts contenus dans $]a, b[$.

L'espace $H_\infty^k(]a, b[+i\mathbb{R})$, muni de la topologie ci-dessus, est un espace de Fréchet.

Notons que l'application restriction

$$R_k: H_\infty^k(]a, b[+i\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(]a, b[), f \longmapsto \tilde{f}$$

est continue.

Nous allons utiliser le Lemme de Mittag-Leffler pour montrer qu'elle est surjective. Pour cela, nous aurons besoin de deux Lemmes.

Mais rappelons d'abord que si K est une partie compacte d'une variété $V \subset U$, où U est un voisinage ouvert de K , alors une fonction plateau associée à (K, V) est une fonction de classe C^∞ , à support compact dans V , et égale à 1 sur un voisinage de K .

Lemme 2.1. *Il existe une suite de fonctions plateaux $(\varphi_n)_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{supp}(\varphi_n) \subset [-1/n, 1/n]$.*

Preuve. On considère une suite décroissante de nombres positifs $(\lambda_n)_n$ qui converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, on considère aussi la fonction $\psi \in \mathcal{D}([-1, +1])$ qui est égale à 1 sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Nous prolongeons la fonction ψ en disant que $\psi(x) = 0$ si $|x| \geq 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons $\varphi_n(x) = \psi(\lambda_n x)$, alors $\text{supp}(\psi) \subset]-\lambda_n/n, \lambda_n/n[$ et par suite, $\text{supp}(\varphi_n) \subset [-1/n, 1/n]$. \square

Lemme 2.2. *Toute fonction $f \in \mathcal{D}([a, b])$ est la restriction d'une fonction $\tilde{f} \in H_\infty^k(]a, b[+i\mathbb{R})$.*

Preuve. Soit $K = \text{supp}(f)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$M_n = \sup_{x \in K} |f^{(n)}(x)|$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}: \lambda_n = M_n \text{ et } \alpha_n = \sum_{p=0}^{n+k} \lambda_p$$

On voit que $\alpha_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}([-1, 1])$. La suite $(1/\alpha_n)_n$ donne une suite de fonctions plateaux $(\psi_n)_n$ avec $\psi_n(x) = \varphi(x/\alpha_n)$.

La série $\tilde{f}(x + iy) = \sum_{n=0}^{\infty} n!^{-1} f^{(n)}(x + iy) \psi_n(y) (iy)^n$ converge si $y \neq 0$ (elle est localement finie) et elle est d'ordre C^k sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Si $y = 0$, seul le premier terme qui n'est pas nul, et donc la série est convergente. Par conséquent, la fonction \tilde{f} est d'ordre C^k sur un voisinage de \mathbb{R} .

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $|\alpha| \leq k$. Alors

$$\begin{aligned} D^{(\alpha_1, \alpha_2)}(f^{(n)}(x)\psi_n(y)(iy)^n) &= f^{(n+\alpha_1)}(x)D^{\alpha_2}(\psi_n(y)(iy)^n) \\ &= f^{(n+\alpha_1)}(x) \sum_{i=0}^{\alpha_2} \psi_n^{(\alpha_2)}(y)n(n-1)\dots(n-p-1) \end{aligned}$$

Mais

$$|D^{\alpha_2}(\psi_n(y)(iy)^n)| \leq n! \sup_{y \in [0,1], 0 \leq p \leq n} \psi_n^{(\alpha_2-p)} \sum_{p \neq 0} \left(\frac{1}{p}\right)$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} n!^{-1} f^{(n)}(x)\psi_n(y)(iy)^n$ est dominée par la série géométrique convergente de terme général $(1/\delta_0)^{n-k}$. Donc $\tilde{f} \in C^k(K + i\mathbb{R})$.

Du calcul de

$$\tilde{f}(x + iy) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \tilde{f} \right)$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n+1)}(x)\psi_n(x)(iy)^n + \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}\psi'_n(y) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x)\psi'_n(y)(iy)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x)(\psi_n(x) - \psi_{n+1}(x)) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(iy)^n \end{aligned}$$

Le Lemme 2.2. est établi. □

Théorème 2.3. *L'application restriction $R_k: H_{\infty}^k([a, b[+i\mathbb{R}) \rightarrow C^{\infty}([a, b[)$ est surjective.*

Preuve. Soit $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert de $]a, b[$ localement fini. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $\psi_j \in \mathcal{D}(U_j)$ telle que $\text{supp}(\psi_j) \subset U_j$.

Soit $f \in C^{\infty}([a, b[)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, nous considérons $f_j = \psi_j f$. D'après le Lemme 2.2 ce f_j se prolonge en une fonction \tilde{f}_j . On obtient ainsi une famille de fonctions $(\tilde{f}_j)_j$ localement d'ordre finis sur $]a, b[$. Ce qui montre que la restriction $H_{\infty}^k([a, b[+i\mathbb{R}) \rightarrow C^{\infty}([a, b[)$ est surjective, et par suite le Théorème 2.3. est établi. □

Enfin, pour établir notre résultat fondamental, nous aurons besoin de rappeler le Lemme de Mittag-Leffler.

Lemme de Mittag-Leffler 2.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient E_n, E'_n, E''_n des espaces de Fréchet, $i_n: E''_n \rightarrow E'_n$ des applications linéaires continues injectives et $s_n: E'_n \rightarrow E_n$ des applications linéaires continues surjectives tels que la suite

$$(0, i_n, s_n, 0): 0 \longrightarrow E''_n \longrightarrow E'_n \longrightarrow E_n \longrightarrow 0$$

est exacte. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n: E_{n+1} \rightarrow E_n, u'_n: E'_{n+1} \rightarrow E'_n$, et $u''_n: E''_{n+1} \rightarrow E''_n$ sont des applications linéaires continues telles que

$$u'_n \circ i_{n+1} = i_n \circ u''_{n+1} \quad \text{et} \quad s'_n \circ u_{n+1} = s_n \circ i'_{n+1}$$

Si de plus les images des applications u'_n sont denses, alors la suite

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n E''_n \longrightarrow \varprojlim_n E'_n \longrightarrow \varprojlim_n E_n \longrightarrow 0$$

est exacte.

Preuve. Pour une démonstration de ce Lemme voir par exemple le livre de J. Wengenroth ([5], section 3). \square

Maintenant nous sommes en mesure d'établir notre résultat fondamental

Théorème 2.5. L'application restriction $H^\infty(]a, b[+i\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(]a, b[)$ est surjective.

Preuve. Soit K une partie compacte de $]a, b[$, et $k \in \mathbb{N}$. Notons par $C_0^k(K)$ l'espace des fonctions de classe C^k sur \mathbb{R} à support dans K , et par $H^k(K+i\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^k sur $]a, b[+i\mathbb{R}$ dont la restriction à $]a, b[$ est de classe C^k et

$$D^\alpha f(x) = 0 \quad \text{pour tout } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \leq k-1$$

On sait que les espaces $C^k(]a, b[)$ et $H^k(K+i\mathbb{R})$ sont de Fréchet et pour tout k , la restriction

$$R_k: H^k(]a, b[+i\mathbb{R}) \longrightarrow C^k(]a, b[)$$

a une image fermée, et donc $\text{Im}(R_k)$ est un espace de Fréchet.

Il est facile de montrer que chacun des systèmes $(\text{Ker}(R_k))_k, (H^k(]a, b[+i\mathbb{R}))_k$ et $(C^k(]a, b[))_k$ est projectif dans la catégorie des espaces de Fréchet. Notons par $\text{Ker}(R_\infty) = \varprojlim_k \text{Ker}(R_k)$, $H^\infty(]a, b[+i\mathbb{R}) = \varprojlim_k H^k(]a, b[+i\mathbb{R})$ et $C^\infty(]a, b[) = \varprojlim_k C^k(]a, b[)$ leurs limites projectives, qui sont aussi des espaces de Fréchet.

Montrons que le complexe

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(R_\infty) \longrightarrow H^\infty(]a, b[+i\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(]a, b[) \longrightarrow 0$$

est exact.

En effet, nous avons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(R_{k+1}) & \longrightarrow & H^{k+1}(]a, b[+i\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^{k+1}(]a, b[) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(R_k) & \longrightarrow & H^k(]a, b[+i\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^k(]a, b[) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

où l'application $u'_k: H^{k+1}(]a, b[+i\mathbb{R}) \rightarrow H^k(]a, b[+i\mathbb{R})$ est l'injection canonique, $v_{k+1,k}: C^{k+1}(K) \rightarrow C^k(K)$ est l'application identité, l'application $u''_k: \text{Ker}(R_{k+1}) \rightarrow \text{Ker}(R_k)$ est l'injection canonique et l'application $i_j: \text{Ker}(R_j) \rightarrow H^j(K + i\mathbb{R})$ est l'injection canonique pour $j = k, k + 1$.

Comme les applications u''_k ont des images denses, il résulte du Lemme de Mittag-Leffler ci-dessus que la suite

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(R_\infty) \longrightarrow H^\infty(]a, b[+i\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(]a, b[) \longrightarrow 0$$

est exacte. En d'autres mots, toute fonction $f \in C^\infty(K)$ se prolonge en une fonction \tilde{f} de classe C^∞ sur $K + i\mathbb{R}$ tel que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \forall x \in K: D^\alpha f(x) = 0.$$

Donc

$$\tilde{f}|_{]a, b[} = f \text{ et } \forall x \in K: D^\alpha \tilde{f}(x) = 0.$$

Ce qui montre le résultat. □

Comme conséquence du Théorème 2.1, nous obtenons le résultat suivant:

Corollaire 2.6.

$$\varprojlim_k (H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}] | \text{Ker}(R_k)) = (\varprojlim_k H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}])) | (\varprojlim_k \text{Ker}(R_k)).$$

Preuve. Soient $(\text{Ker}(R_k))_k$ et $(H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}]))_k$ les systèmes projectifs du Théorème 2.5 et soient $\text{Ker}(R_\infty) = \varprojlim_k \text{Ker}(R_k)$, $H^\infty(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}]) = \varprojlim_k H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}])$ leurs limites projectives. D'abord il est clair que chaque quotient d'espaces de Fréchet $H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}] | \text{Ker}(R_k))$ définit une suite exacte qui est la suivante:

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(R_k) \longrightarrow H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}]) \longrightarrow H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}] | \text{Ker}(R_k)) \longrightarrow 0$$

En appliquant le foncteur limite projective, il découle du Théorème 3.2 de [1] que la suite suivante:

$$0 \longrightarrow \varprojlim_k \text{Ker}(R_k) \longrightarrow \varprojlim_k H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}]) \longrightarrow \varprojlim_k (H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}] | \text{Ker}(R_k)) \longrightarrow 0$$

est exacte dans la catégorie **qFré**. Ceci montre que

$$\begin{aligned} \varprojlim_k (H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}] | \text{Ker}(R_k)) &= \text{Coker}(\varprojlim_k \text{Ker}(R_k) \longrightarrow \varprojlim_k H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}])) \\ &= (\varprojlim_k H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}])) | (\varprojlim_k \text{Ker}(R_k)). \end{aligned}$$

Par conséquent, le Corollaire est établi. □

Bibliographie

- [1] *B. Aqzzouz, R. Nouira:* L'exactitude du foncteur limite projective sur la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet. To appear in Czech. Math. J. in 2008.
- [2] *V. P. Palamodov:* The projective limit functor in the category of topological linear spaces. Mat. Sb. (N.S.) 75 (1968), 567–603. (Russian.) zbl
- [3] *V. P. Palamodov:* Homological methods in the theory of locally convex spaces. Usp. Mat. Nauk 26 (1971), 3–65. (Russian.) zbl
- [4] *L. Waelbroeck:* Quotient Fréchet spaces. Rev. Roum. Math. Pures Appl. 34 (1989), 171–179. zbl
- [5] *J. Wengenroth:* Derived Functors in Functional Analysis. Lect. Notes Math. 1810, Springer, Berlin, 2003. zbl

L'adresse de l'auteur: Belmesnaoui Aqzzouz, Université Mohammed V-Souissi, Faculté des Sciences Economiques, juridiques et sociales, Département d'Economie, B.P. 5295, Sala Eljadida, Morocco, e-mail: baqzzouz@hotmail.com.