Akademie věd České republiky

Teze doktorské disertační práce
k získání vědeckého titulu „doktor věd"
ve skupině věd fyzikálně-matematických

Classical Operators and Imbeddings. Recent Results and Challenges

Komise pro obhajoby doktorských disertací
v oboru matematická analýza a příbuzné obory

Jméno uchazeče: doc. RNDr. Miroslav Krbec, CSc.
Pracoviště uchazeče: Matematický ústav AV ČR

Praha, 5. února 2004

Obsah

1 Struktura disertační práce

Disertační práce je souborem prací: sestává z části publikované monografie (z roku 1991, spoluautor V. Kokilashvili, která byla založena na vlastních pracích autorů), a z dalších sedmi publikovaných článků. Originální texty byly pro účel disertační práce formálně, nikoli však obsahově pozměněny: opakované definice pojmů byly nahrazeny příslušnými odkazy a bylo sjednoceno značení. Tyto práce se týkají váhových nerovnosti pro klasické operátory, dekompozičních a extrapolačních technik, limitních vnoření prostorů Sobolevova, Běsovova a Triebelova-Lizorkinova typu a aplikací vět o vnoření a extrapolačních technik na kvalitativní vlastnosti eliptických rovnic a systémů.

Tomu odpovídá členění práce na jednotlivé kapitoly. **První kapitola** obsahuje nejdůležitější výsledky z „orliczovské části" monografie

V. Kokilashvili and M. Krbec, *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces.* World Scientific, Singapore 1991,

založené na článcích:

V. Kokilashvili and M. Krbec, *Weighted inequalities for Riesz potentials and fractional maximal functions in Orlicz spaces* (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR **283** (1985), 280–283. English transl.: Soviet Math. Dokl. **32** (1985), 70–73,

V. Kokilashvili and M. Krbec, *On the boundedness of anisotropic fractional maximal functions and potentials in weighted Orlicz classes.* (Russian). Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR **82** (1986), 107–115,

V. Kokilashvili and M. Krbec, *Carleson measures and A_p weights in Orlicz spaces.* Soobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR **137** (1990), 269–271

a na článku

M. Krbec, *Two weights weak type inequalities for the maximal function in the Zygmund class.* In: Function Spaces and Applications, Proc. Swedish-US Conf. Lund 1986. M. Cwikel et al. (eds.). Lecture Notes in Math., Vol. 1302, Springer-Verlag, Berlin 1988, 317–320.

Druhá kapitola se skládá z nedávných výsledků, obsažených v článcích

D. E. Edmunds and M. Krbec, *On decomposition in exponential Orlicz spaces.* Math. Nachr. **213** (2000), 77–88,

A. Fiorenza and M. Krbec, *On optimal decomposition in Zygmund spaces.* Georgian Math. J. 9(2002).

D. E. Edmunds and M. Krbec, *Decomposition and Moser's lemma.* Rev. Mat. Complutense **9** (2002), 1–18.

Třetí kapitola je věnována vztahům limitních vnoření Trudingerova a Brézisova-Waingerova typu (někdy také nazývaných T-vnoření a BW-vnoření nebo kritická a superkritická vnoření) a limitním vnořením prostorů s dominující smíšenou hladkostí. Obsah je tvořen následujícími třemi články:

D. E. Edmunds and M. Krbec, *Two limiting cases of Sobolev imbeddings.* Houston J. Math. **21** (1995), 119–128,

M. Krbec and H.-J. Schmeisser, *Limiting imbeddings. The case of missing derivatives.* Ricerche Mat. **XLV** (1996), 423–447.

M. Krbec and H.-J. Schmeisser, *Imbeddings of Brézis-Wainger type. The case of missing derivatives.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 131A(2001), 1–34.

Závěrečná čtvrtá kapitola obsahuje několik aplikací výsledků v teorii prostorů funkcí v parciálních diferenciálních rovnicích (PDE). Je však velmi obtížné vést zde nějakou dělící čáru mezi teorií a aplikacemi. Kapitolu tvoří články

M. Krbec and T. Schott, *Superposition of imbeddings and Fefferman's inequality.* Boll. Un. Mat. Ital., Sez. B, Artic. Ric. Mat. **8** (1999), 629–637

a „aplikační" část společného článku s A. Fiorenzou o dekompozicích v Zygmundových prostorech (viz druhá kapitola).

2 Publikace autora, mající vztah k disertaci

Monografie:

[1] V. Kokilashvili and M. Krbec: *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces.* World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong 1991, 233 pp. Zbl. 0751.46021, MR: 93g:42013.

[2] I. Genebashvili, A. Gogatishvili V. Kokilashvili and M. Krbec: *Weight Theory for Integral Transforms on Spaces of Homogeneous Type.* Addison-Wesley, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 92, Harlow 1998, 410 pp. Zbl. 0955.42001, MR: CMP: 2001 03.

[3] C. Eck, J. Jarušek and M. Krbec: *Unilateral Contact Problems. Variational Methods and Existence Theorems.* To appear at M. Dekker, Inc., New York 2004.

Články (ve vědeckých časopisech nebo referovaných sbornících):

[1] S. Fučík and M. Krbec: *Boundary value problem with bounded nonlinearity and general null-space of the linear part.* Math. Z. 155(1977), 129–138. Zbl. 0346.35051, MR: 57 #13179.

[2] M. Krbec: *Modular interpolation spaces I.* Z. Anal. Anwendungen 1(1982), 25–40. Zbl. 0519.46026, MR: 84k:46056.

[3] M. Krbec: *On anisotropic imbeddings.* Comment. Math. Univ. Carolinae 25(1985), 473–481. Zbl. 0564.46029, MR: 86c:46033.

[4] V. Kokilashvili and M. Krbec: *Weighted inequalities for Riesz potentials and fractional maximal functions in Orlicz spaces* (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR 283(1985), 280–283. Zbl. 0622.42015, MR: 87h:42028. (English transl.: Soviet Math. Dokl. 32(1985), 70–73.)

[5] M. Krbec: *An integral characterization of zero traces in nonreflexive Sobolev type spaces.* Coll. Math. Soc. János Bolyai 49(1985), 525–529. Zbl. 0631.46037.

[6] V. Kokilashvili. and M. Krbec: *On boundedness of anisotropic fractional order maximal functions and potentials in weighted Orlicz spaces* (Russian). Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR 82(1986), 106–115. V. Kokilashvili and M. Krbec: Zbl. 0626.46019, MR: 88m:42033.

[7] M. Krbec: *Two weight weak type inequalitites for the maximal function in the Zygmund class.* In: Lecture Notes Math. Vol. 1302, Function Spaces and Applications, US–Swedish Seminar Lund, June 1986 (M. Cwikel, ed.). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1988, 317–320. Zbl. 0645.46030, MR: 89j:42017.

[8] M. Krbec: *Weighted norm inequalities in Orlicz spaces.* In: Function spaces, differential operators and nonlinear analysis. (L. Päivarinta, ed.) Research Notes in Mathematics Series, Longman Sci. & Tech., Harlow 1989, 77–88. Zbl. 0695.46013, MR: 91k:46025.

[9] V. Kokilashvili and M. Krbec: *Carleson measures and A_p weights in Orlicz spaces.* Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR 137(1990), 269–271. Zbl. 0729.42010, MR: 91k:42026.

[10] A. S. Gogatishvili, V. M. Kokilashvili and M. Krbec: *Maximal functions in the classes* $\varphi(L)$ (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR 314 (1990), 534–536. English transl.: Sov. Math. Dokl. 42 (1991), 488–490. Zbl. 0755.42011, MR: 92c:42018.

[11] M. Krbec and L. Pick: *On imbeddings between weighted Orlicz classes.* Z. Anal. Anwendungen 10(1991), 107–117. Zbl. 0755.46010, MR: 93e:46039.

[12] B. Opic, L. Pick and M. Krbec: *Imbedding theorems for weighted Orlicz-Sobolev spaces.* J. London Math. Soc. (2)46(1992), 543–556. Zbl. pre00563144, MR: 93k:46021.

[13] A. Gogatishvili, V. Kokilashvili and M. Krbec: *Maximal functions,* $\Phi(L)$ *classes and Carleson measures.* Proc. A. Razmadze Math. Inst. 102(1993), 85–97. Zbl. 0815.42010, MR: 95e:42016.

[14] M. Krbec, B. Opic, L. Pick and J. Rákosník: *Some recent results on Hardy type operators in weighted function spaces and related topics.* In: Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis. Teubner-Texte zur Mathematik, Band 133 (H.-J. Schmeisser and H. Triebel, eds.). B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart-Leipzig 1993, 158–184. Zbl. 0803.46036, MR: 94g:47041.

[15] D. E. Edmunds and M. Krbec: *On two limiting cases of Sobolev imbeddings.* Houston J. Math. 21(1995), 119–128. Zbl. 0835.46027, MR: 96c:46038.

[16] M. Krbec: *Inequalities for classical operators in Orlicz spaces.* In: Fourier Analysis and Partial Differential Equations (J. García-Cuerva et al., eds.). CRC Press, Studies in Advanced Mathematics, Boca Racon 1995, 211–226. MR: 96e:42018.

[17] M. Krbec and H.-J. Schmeisser: *Extrapolation of reduced imbeddings.* In: Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Proc. Conf. held in Paseky nad Jizerou 1995 (J. Rákosník, ed.), 71–88. Zbl. 0879.46014, MR: 98k:46053.

[18] M. Krbec and H.-J. Schmeisser: *Limiting imbeddings. The case of missing derivatives.* Ricerche Mat. XLV(1996), 423–447. Zbl. 0930.46029, MR: 2001f:46049.

[19] M. Krbec and J. Lang: *On imbeddings between weighted Orlicz-Lorentz spaces.* Georgian Math. J. 4,2(1997), 117–128. Zbl. 0899.46022, MR: 98d:46033.

[20] A. Fiorenza and M. Krbec: *Indices of Orlicz spaces and some applications.* Comment. Math. Univ. Carolinae 38,3(1997), 433–451. Zbl. 0937.46023, MR: 99b:46032.

[21] M. Krbec and T. Schott: *Embeddings of weighted Sobolev spaces in the borderline case.* Real Anal. Exchange 23,2(1997–98), 395–420. Zbl. 0946.46029, MR: 99f:46045.

[22] M. Krbec: *Extrapolation of Sobolev imbeddings.* Collectanea Math. 48(4,5,6)(1997), 601–617. Zbl. 0908.46022, MR: 98m:46049.

[23] M. Krbec and T. Schott: *Superposition of imbeddings and Fefferman's inequality.* Boll. Un. Mat. Ital., Sez. B, Artic. Ric. Mat. 8,2(1999), 629-637. Zbl. 0948.46023, MR: 2000g:46044.

[24] M. Krbec: *The trace inequality and some applications.* Le Matematiche LIV(1999), 95–109. Zbl. 0954.26007, MR: 2001c:46062.

[25] D. E. Edmunds and M. Krbec: *On decomposition in exponential Orlicz spaces.* Math. Nachr. 213(2000), 77–88. Zbl. pre01455878, MR: 2001c:46053.

[26] A. Fiorenza and M. Krbec: *On the domain and range of the maximal operator.* Nagoya Math. J. 158(2000), 43–61. Zbl. pre01491168, MR: CMP: 2000 14.

[27] A. Fiorenza and M. Krbec: *On some fundamental properties of the maximal operator.* In: Function Spaces and Applications (D. E. Edmunds et al., eds.). Narosa Publ. House, New Delhi 2000, 69–81.

[28] H. Heinig, R. Kerman and M. Krbec: *Weighted exponential inequalities.* Georgian Math. J. 8(2001), 69–86. Zbl. pre01621370, MR: CMP: 2001 12.

[29] M. Krbec: *On extrapolation of Sobolev and Morrey type imbeddings.* Function spaces. Proceedings of the 5th international conference, Poznan, Poland, August 28-September 3, 1998 (H. Hudzik et al., eds.). Lect. Notes Pure Appl. Math. 213, Marcel Dekker, New York 2000, 297-321. Zbl. 0966.46016, MR: 2001g:46078.

[30] M. Krbec and H.-J. Schmeisser: *Imbeddings of Brézis-Wainger type. The case of missing derivatives.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 131A(2001), 1–34. MR: CMP: 2001 14.

[31] D. E. Edmunds and M. Krbec: *Decomposition and Moser's lemma.* Rev. Mat. Complutense 9(2002), 1–18. Zbl. pre01808649, MR 2003e:46036.

[32] D. Cruz-Uribe, SFO, and M. Krbec: *Localization and extrapolation in Lorentz-Orlicz spaces.* In: M. Cwikel et al. Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics. Proceedings of the conference held in Lund (Sweden), August 17-22, 2001, in honour of Jaak Peetre on his 65th birthday (A. Kufner, , L. E. Persson, G. Sparr, M. Englis, eds.). de Gruyter, Berlin 2002, 389–401. Zbl. pre01857825, MR: CMP:2003 06.

[33] A. Fiorenza and M. Krbec: *On optimal decomposition in Zygmund spaces.* Georgian Math. J. 9(2002). Zbl. pre01804068, MR 2003e:46038.

[34] J. Jarušek, M. Krbec, M. Rao and J. Sokołowski: *Conical differentiability for evolution variational inequalities.* J. Differential Equations 193(2003), 131–146.

Články ve sbornících

[1] M. Krbec: *Interpolation in Sobolev-Orlicz spaces* (Russian). Sbornik 7. sovetskogo-čechoslovackogo seminara "Primenenija metodov teorii funkcij i funkcional'nogo analiza k zadačam matematičeskoj fiziki", Yerevan 1981, 147–180.

[2] M. Krbec: *An imbedding theorem for Sobolev-Orlicz spaces via interpolation.* In: Constructive Theory of Functions '81, Proc. Int. Conf. Varna '81, Publ House Bulg. Acad. Sci. (Bl. Sendov, ed.), Sofia 1983, 393–395. Zbl. 0591.46028, MR: 85d:46041.

[3] V. Kokilashvili and M. Krbec: *On the boundedness of Riesz potentials and fractional maximal functions in weighted Orlicz spaces.* In: Proceedings of the International Conference on Constructive Theory of Functions, Varna '84. Publ. House Bulg. Acad. Sci., Sofia 1984, 468–472. Zbl. 0592.46026

[4] M. Krbec: *A characterization of functions with zero traces.* In: Constructive Theory of Functions '87, Proc. Int. Conf. Varna '87, Publ House Bulg. Acad. Sci. Sofia 1988.

[5] M. Krbec: *Two-weight estimates for a maximal operator* (Russian). Functional and numerical methods in mathematical physics 268 "Naukova Dumka", Kiev, 1988, 110–113. MR: 90m:42029.

[6] M. Krbec and T. Schott: *On factorization of Fefferman's inequality.* In: Proceedings of Equadif 6 (Z. Došlá, ed.). Masaryk University, Brno 1998, 11 pp.

Připraveno nebo před dokončením:

[1] M. Krbec and H.-J. Schmeisser, On mixed norm imbeddings in the critical case. Submitted.

[2] M. Krbec, H.-J. Schmeisser and W. Sickel, Convergence of Whittaker-Shannon series in the uniform norm, manuscript, 23 pp.

[3] D. E. Edmunds and M. Krbec, Variations on Yano's extrapolation theorem. Research Report No.: 2004-01, University of Sussex, 2004. Submitted.

3 Současný stav studované problematiky

Nejprve podáme přehled problematiky studované v disertační práci a jejího zasazení do širšího kontextu současného výzkumu, včetně historických souvislostí. Budeme přitom sledovat členění práce do těsněji souvisejících celků, odpovídajícím jednotlivým kapitolám. Citace prací v tomto oddíle jsou označeny kombinací písmen a čísel a lze je nalézt v seznamu literatury počínaje str. 17.

První kapitola je jádrem orliczovské části monografie [KK91], která byla výsledkem zhruba šestileté spolupráce s V. Kokilashvilim, vedoucí osobností tbiliské školy reálných metod harmonické analýzy. (Tato spolupráce pokračuje dodnes a jejím nejdůležitějším výsledkem je další rozsáhlá společná monografie [GGKK] z roku 1998, která však není do této disertace zahrnuta.) Studium klasických operátorů harmonické analýzy (a jejich různých zobecnění) prostředky reálné analýzy (proto často užívaný název *reálné metody harmonické analýzy*) je jednou velice aktivních oblastí matematické analýzy. Systematické vyšetřování vlastností těchto operátorů v prostorech funkcí začíná ve dvacátých a třicátých létech fundamentálními výsledky Hardyho, Littlewooda, Soboleva a Wienera (viz [HL30], [HLP51]), [So38], [Wi39]), pokračovalo vytvořením hluboké teorie maximálních funkcí, singulárních integrálů, konvolučních integrálů, vycházejících z Poissonova integrálu a fourierovské analýzy – připomeňme zde práce [CZ56], [KnS69] a známé monografie Zygmund [Zy59], Stein [Ste70], Stein a Weiss [SW71]), Stein [Ste93]. Jeden z podstatných stimulů byl např. pokus o zobecnění Cauchyho-Riemannových podmínek do N dimenzí v padesátých létech, který posléze vedl k překvapivé teorii reálných Hardyho prostorů.

Teorie Fourierových multiplikátorů a související Littlewoodova-Paleyova teorie g_λ funkcí má zásadní význam pro dnešní teorii prostorů funkcí založenou na fourierovské analýze, neboť se zde používají právě podobné rozklady a zde je potřeba zmínit jména J. Peetreho a H. Triebela, jakožto duchovních otců současné fourierovské teorie prostorů funkcí. Seznam literatury obsahuje řadu jejich zásadních prací.

Dalším významným impulsem byl problém omezenosti operátorů ve váhových prostorech. Připomeňme fundamentální zásluhu Soboleva, který dokázal známou větu o vnoření prostorů, jež nesou jeho jméno. V řeči operátorů: uvažujme pro jednoduchost funkci f ze Sobolevova prostoru prvního řádu na nějaké konvexní oblasti, tedy $|f|$ je odhadnuta konvolucí $|\nabla f|$ a Rieszova jádra prvního řádu $1/|z|^{N-1}$. Sobolev dokázal, že pro $1 < p < N$ takový konvoluční operátor pracuje z L^p do L^q, kde $1/q = 1/p - 1/N$, rozšířil tím tedy jednodimensionální větu

Hardyho a Littlewooda na $\mathbb{R}^N$. Přirozenou otázkou bylo, co se stane, uvažujeme-li váhové L^p prostory. Přes velké úsilí přišla po několika částečných výsledcích (Walsh, Lizorkin a další) z let padesátých překvapivá odpověď až téměř půl století po pionýrských výsledcích Hardyho a Littlewooda. Muckenhouptovy práce [M72/1] a [M72/2] daly odpověď na analogickou otázku pro maximální operátor a v roce 1974 vyřešili Muckenhoupt a Wheeden v [MW74] problém Rieszových potenciálů ve váhových L^p prostorech. Tyto práce vyvolaly doslova lavinu stovek prací dalších (viz např. [M85], [MW74], [MuW76], [Sa82], [Sa84], [Sa88]). Jedna z prvních vynikajících monografií, věnovaná zejména singulárním integrálům a dvouváhovým nerovnostem je Kokilashviliho kniha [Ko85], která se však díky známým poměrům v tehdejším Sovětském svazu objevila pouze v ruštině. K základní literatuře tu patří monografie García-Cuerva a Rubio de Francia [GR85], Torchinsky [To86], a Stein [Ste93].

Společně s V. Kokilashvilim jsme studovali vlastnosti Rieszových potenciálů a maximálních funkcí neceléhořádu Orliczových a Morreyových-Orliczových prostorech. Orliczovy (a Lorentzovy) prostory nacházejí mnohé aplikace v analýze a jsou přirozenou nejbližší škálou prostorů, zahrnující Lebesgueovy L^p prostory. Známou a značně nepříjemnou vlastností Orliczových prostorů je však definice jejich normy. Zatímco v prostoru $L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ měřitelná, máme normu k dispozici přímo, danou formulí $\|f\|_p = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, norma v Orliczově prostoru je Minkowského funkcionál modulární jednotkové koule. To má obvykle za následek, že přenesení výsledků známých pro Lebesgueovy prostory není bezprostřední a pouze technickou záležitostí. Zároveň jsou tyto prostory v analýze značně důležité . Poznamenejme, že z historického hlediska se nejprve studovaly nereflexivní Orliczovy prostory exponenciálního typu a Zygmundovy prostory (např. známé a hluboké aplikace v teorii Fourierových řad, které lze nalézt v Zygmund [Zy59]). Vyšetřování klasických operátorů v neváhových Orliczových prostorech začíná zřejmě u Torchinskyho [To76] a průkopnickým výsledkem, charakterizujícím váhy, pro které je maximální operátor omezený ve váhovém Orliczově prostoru, je průkopnický článek Kermana a Torchinskyho [KeT82]. Na to jsme navázali společně s V. Kokilashvilim a nalezli nutné a postačující podmínky pro omezenost Rieszových potenciálů, Rieszových singulárních operátorů, maximální funkce neceléhořádu a anisotropních potenciálů v několika společných článcích, z nichž jsou do disertační převzaty [KK85], [KK86], [KK90].

Poslední část první kapitoly je věnována slabým dvouváhovým nerovnostem v Zygmundových prostorech. Dvouváhové nerovnosti se ukázaly být poměrně obtížnější – od první poloviny sedmdesátých let byla nalezena řada nutných a postačujících podmínek, jejichž společným problémem je to, že jsou vyjádřeny v termínech chování operátoru samotného (typicky např. na množině charakteristických funkcí), případně užívají velmi komplikovaných dekompozicí funkcí a jsou prakticky neverifikovatelné (viz např. Sawyer [Sa82], [Sa84], Carbery, Chang a Garnett [CCG85]); poněkud „příjemnější” podmínky nalezl Genebashvili [Ge89]. Mnohem schůdnější podmínky byly nalezeny v případě slabých nerovností, jak v L^p prostorech, tak v Orliczových prostorech. Limitní forma Muckenhouptovy podmínky pro $p \to 1_+$ je uvažována v autorově práci [K86] kde je nalezena nutná podmínka pro omezenost maximálního operátoru ze slabého Zygmundova prostoru do L^1.

Stav problematiky váhových nerovností v Orliczových a Lorentzových prostorech počátkem devadesátých let reflektuje naše monografie [KK91], obsahující rovněž obšírnou bibliografii.

V minulých létech pak značná část studia směřovala ke značně obecnější formulaci problémů v tzv. prostorech homogenního typu, zavedených a studovaných Coifmanem a Weissem v [CW71], později i řadou dalších autorů. Tomuto tématu v Orliczových a Lorentzových prostorech je věnována naše monografie [GGKK].

Druhá kapitola je věnována extrapolačním metodám. Typickým případem je chování klasických operátorů harmonické analýzy (jako je maximální funkce) v prostorech L^p, $p > 1$, když $p \to 1$. Podobným důležitým příkladem je chování sobolevských, resp. morreyovských vnoření Sobolevových prostorů H^s_p, když se součin sp blíží zleva kritickým hodnotám N, resp. $p + N$. Růst norem příslušných operátorů (divergují do ∞) se podařilo v takových případech odhadnout a pak je tedy možné získat dvojici prostorů, mezi kterými příslušný operátor v takovém limitním případě pracuje. Např. pro maximální operátor platí, že

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |Mf(x)|^p \, dx \le \frac{c^p p^p}{(p-1)^p} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p \, dx, \qquad 1 < p < \infty,$$

kde c nezávisí na p a f. Tuto situaci (a rovněž situaci k ní duální) pro nezáporné subaditivní operátory řeší slavná klasická Yanova extrapolační věta [Y51] z roku 1951. Podobně jako se v teorii interpolace staly klasické věty (Rieszova-Thorinova a Marcinkiewiczova) základem a inspirací k abstraktní teorii interpolace, vznikla i abstraktní teorie extrapolace (Milman a Jawerth [Mi94], Milman [JM91]). Vážným problémem je však popsat běžnými analytickými prostředky výsledek aplikace abstraktních metod. Do jisté míry uspokojivá situace v současné době se týká pouze logaritmických Lebesgueových prostorů $L^p(\log L)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^N$. Extrapolační charakterizaci v „klasických” termínech nalezli Edmunds a Triebel v [ET95] a [ET96]. Označme $\lambda_j = (2^j)' = (1-2^{-j})^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$. Jestliže $1 \le r < \infty$, potom funkcionál

$$\|g\|_{r,\alpha} = \inf_{|g|=\sum_{j=1}^{\infty} g_j} \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j\alpha} \|g_j\|_{r\lambda_j}^r \right)^{1/r} \tag{3.1}$$

definuje ekvivalentní normu v prostoru $L^r(\log L)^\alpha$. Tato charakterizace se opírá o netriviální vlastnosti Eulerovy gamma-funkce a zřejmě by bylo obtížné pokoušet se touto cestou jít dále. Normy v jistých Orliczových-Lorentzových prostorech je možno skutečně považovat za určitý druh zobecněných gamma-funkcí, to je ale technicky velmi obtížné a vede to jednak ke značně nepřehledným formulím, jednak k velice netriviálnímu problému asymptotického chování takových integrálů.

K prostorům $L^r(\log L)^\alpha$, $\alpha > 0$, se za chvíli vrátíme. V [EK00] jsme spolu s D. E. Edmundsem objevili značně překvapivý jev: uvažovali jsme prostory na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $|\Omega| = 1$, což po převedení do jazyka nerostoucích přerovnání znamená vyšetřovat funkce na intervalu $(0,1)$, dále pak jistou dekompozici intervalu $(0,1)$ na disjunktní intervaly $\{(t_k, t_{k-1})\}_{k\ge 1}$. Známá extrapolační charakterizace prostorů je tato: $f \in L_{\exp t^\alpha}$, kde $\alpha > 0$, tehdy a jen tehdy, když $\sup_k^{-1/\alpha} \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, což je je ekvivalentní podmínce $\sup k^{1/\alpha}\|f^*\|_{L^p(0,1)} < \infty$ pro nerostoucí přerovnání f^* funkce f. Ukázali jsme, že je nutné a stačí kontrolovat pouze růst norem $\|f^*\|_{L_k(t_k,t_{k-1})}$ stejnou mocninou $k^{-1/\alpha}$. V další práci [CUK01] jsme společně s Davidem Cruz-Uribem, SFO, rozšířili podobné charakterizace i na některé Lorentzovy-Orliczovy prostory (Brézisovy-Waingerovy prostory, které se vyskytují v jemných limitních vnořeních Sobolevových prostorů) a nedávno tuto dekompoziční ideu použil i J. Neves v několika článcích (např. [Nev]) k nalezení podobných charakterizací v prostorech, kde je logaritmická funkce nahrazena tzv. pomalu rostoucí funkcí.

Vraťme se zpět k prostorům $L^p(\log L)^\alpha$, $\alpha > 0$. V příslušné sekci druhé kapitoly je uvedena celá řada ekvivalentních norem v prostoru $L^1(\log L)^\alpha$, která svědčí o úsilí matematiků nalézt co nejvhodnější formuli pro různé speciální situace. Pro tyto prostory byla nalezena extrapolační dekompozice v pracích Edmundse a Triebela [ET95] a v [ET96] a Milmana [Mi94], kde se ovšem pracuje infimem přes všechny (přípustné) rozklady. Na základě naší charakterizace v [EK00] se nám spolu s A. Fiorenzou podařilo nalézt mimo jiné i konkrétní dekompozici funkcí z $L(\log L)^\alpha$, která je tomuto infimu ekvivalentní. Dostáváme se tak k následujícímu schématu: Označme symbolem *exp* uzávěr L^∞ v EXP $= L_{\exp t}$. Potom

$$\begin{array}{ccc} g \in exp & f \in L\log L & h \in \mathrm{EXP} \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ \dfrac{\|g\|_{k,I_k}}{k} \in c_0 & 2^j\|f^*\|_{(2^j)',J_j} \in \ell_1 & \dfrac{\|h\|_{k,I_k}}{k} \in \ell_\infty, \end{array}$$

kde $I_k = (e^{-k}, e^{-k+1})$, $k = 1, \dots$ a $J_j = (e^{-2^{j+1}+2}, e^{-2^j+2})$, $j = 1, \dots$. Povšimněme si, že prostory v první, resp. druhé řádce jsou preduály prostorů ve druhé, resp. ve třetí řádce.

Nyní se budeme věnovat problémovému okruhu, jemuž je věnována třetí kapitola. Jak jsme již konstatovali, jsou jednou z motivací pro studium dekompozičních a extrapolačních metod limitní věty o vnoření. Popišme si základní situaci. Jak je známo, Sobolevův prostor $W_0^{\ell,p}(\Omega)$, kde $\ell p = N$ a Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^N$, s dostatečně regulární hranicí, je vnořen do Orliczova exponenciálního prostoru $L_{\exp t^{N/(N-\ell)}}$ (Trudinger [Tru67] ($\ell = 1$), Moser [Mos71], ...). Častá metoda důkazu toho, že daná funkce je prvkem exponenciálního prostoru, spočívá v nalezení rychlosti divergence jejích L^q norem pro $q \to \infty$. Přesněji: Mějme oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ s Lebesgueovou mírou $|\Omega| = 1$. Potom $f \in L_{\exp t^\alpha}(\Omega)$ právě tehdy, když

$$\sup_k k^{-1/\alpha}\|f\|_{L_k(\Omega)} < \infty$$

. K odhadu růstu $\|f\|_{L_k(\Omega)}$ v případě prostorů Besselových potenciálů se často podaří použít konvolutorních nerovností, v obecnějších prostorech pak Nikol'ského nerovnosti pro funkce, jejichž Fourierův obraz má kompaktní nosič, v posledních několika létech pak i tzv. atomických rozkladů.

Limitní vnoření studovaná ve třetí kapitole se v posledních létech těší značnému zájmu. V české matematice se tato problematika objevila zřejmě poprvé v autorově práci [K85] z roku 1985 (původně preprint z roku 1983) a byla motivována Troisiho prácemi [Tro69] a [Tro71] z přelomu šedesátých a sedmdesátých let o vnoření anisotropních prostorů v sublimitním případě.

Během padesátých a šedesátých let byla vybudována i teorie anisotropních prostorů na základě reprezentačních formulí, teorie singulárních integrálů a aproximačních úvah (např. monografie Běsova, Il'jina a Nikol'ského [BIN75]). To se týká především anisotropie ve smyslu smíšených L^p norem pro derivace. Případ derivací, patřících do různých L^p prostorů tím není pokryt. Sublimitní vnoření pro tyto prostory odvodil právě Troisi v již zmíněných pracích. V [K85] se autor pokusil interpolačními metodami dokázat limitní vnoření Trudingerova typu. Výsledek však nedal přesné vnoření, jak dnes víme. Příčinou je patrně nedostatečná důkazová technika (později jsme s H.-J. Schmeisserem užili teorie prostorů s dominujícími smíšenými derivacemi, kterou on v této době rozvíjel). Článek [K85], resp. důkazový postup, byl použit a zobecněn R. A. Adamsem v [AdR88] pro důkaz vět pro sublimitní vnoření tzv. redukovaných Sobolevových prostorů. Podobná sublimitní vnoření studoval i Amanov (viz např. [Am76]), ale jak tomu často bývá, autoři o sobě evidentně nevěděli. Vysvětleme si pojem redukovaného Sobolevova prostoru na jednoduchém modelovém případu. Uvažujme prostor funkcí (na dostatečně hladké oblasti v $\mathbb{R}^N$), skládající se z těch funkcí, které jsou v L^p a jejichž slabé derivace $D^{\alpha_1,\dots,\alpha_N} f$, kde $\alpha_j = 0$ nebo $\alpha_j = 1$ pro všechna $j = 1, \dots, N$, a přitom $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = k$, patří do L^p. Předpokládejme, že $1 \le p < \infty$ a $kp < N$ (tedy i $k < N$). Mnoho parciálních derivací zde chybí, speciálně všechny takové, kde se opakuje derivování podle téže proměnné, což vedlo k termínu „dominující smíšené derivace " Je značně překvapující, že tento prostor je vnořen do téhož L^q prostoru jako „obvyklý" Sobolevův prostor W^k_p (t.j. $1/q = 1/p - k/N$). Jinými slovy: informace o L^p integrovatelnosti všech derivací do řádu k včetně je z hlediska sobolevské věty o vnoření do značné míry redundantní.

Během první poloviny osmdesátých let vybudoval Schmeisser (např. práce [Schm80], [Schm84], [Schm82], [Schm87] a monografie Schmeisserova a Triebelova [ScT87]) fourierovskou teorii prostorů s tzv. dominující smíšenou derivací, která do sebe zahrnuje velkou část prostorů redukovaného typu a to v mnohem obecnější situaci smíšených norem. Formální zavedení těchto prostorů je poměrně komplikované a proto odkazujeme přímo na disertační práci.

Společně s H.-J. Schmeisserem jsme ve dvou rozsáhlejších pracích [KSr96] a [KSr01] vyšetřovali extrapolační vlastnosti těchto prostorů v obou limitních případech a dokázali přesné limitní věty o vnoření. Důkazová technika je značně komplikovaná, avšak odpovídá zřejmě povaze problému. V případě limitních vnoření morreyovského typu (druhý limitní případ) bylo též potřeba nalézt vhodnou extrapolační charakterizaci logaritmických lipschitzovských prostorů pomocí prostorů hölderovských funkcí, což je vedle charakterizace BMO patrně jediný zatím známý případ extrapolace prostorů, které nejsou invariantní vůči přerovnání. Nalezli jsme značně překvapující rozdíl mezi limitními vnořeními prvního a druhého typu. Cenou za vynechání některých derivací je v prvním případě je zvětšení cílového prostoru pro extrapolovaná sublimitní vnoření, daná kvantifikovatelným větším růstem norem těchto vnoření, když se blížíme limitní situaci. V druhém případě pak limitní prostor není horší. Ukazuje se tak, že v blízkosti limitních situací tzv. „lifting property” nekopíruje situaci do cílových prostorů. Celou poměrně komplikovanou situaci ilustruje graf na straně 39. Posledně zmíněný jev byl vskutku překvapením, protože v případě logaritmických Sobolevových prostorů „lifting property” funguje. V práci Edmunds a Krbec [EK95], navazující na článek Fusca, P.-L. Lionse a Sbordoneho [FLS96], jsme ukázali, že v rámci vnoření těchto prostorů do Orliczových prostorů, je možné získat vnoření v druhém limitním případě pomocí Trudingerových vět o vnoření Orliczových prostorů v sublimitním případě. Zajímavým problémem je pravdivost opačného tvrzení. V současné době se podařilo Triebelovi takové tvrzení dokázat pro isotropní prostory. V obecnějším případě se zdá být jediným dostupným nástrojem inverzní formule pro Rieszův potenciál (Bagby [Ba80]). Jde však o teorii, používající značně komplikovaných hypersingulárních integrálů a problém zůstává otevřený, pokud je mi známo.

Poznamenejme ještě, že problém limitních vnoření vzniknul z potřeb diferenciálních rovnic, žije však již řadu let v rámci teorie prostorů funkcí. V této souvislosti existuje mnoho podstatných, otevřených a patrně i dosti obtížných problémů, týkajících se funkcí s předepsaným přerovnáním a Hamiltonovými-Jacobiho systémy (viz např. Alvino, Lions a Trombetti [ALT89]).

Teorie prostorů funkcí je dnes nesmírně rozsáhlou oblastí a není možné na tomto místě podat nějaké relevantní základní informace, zahrnující širší oblast. Pěkným přehledem prostorů Sobolevova typu (i mnoha dalších) v klasickém smyslu je monografie Kufnerova, Johnova a Fučíkova [KJF77], speciálně pak Sobolevovým prostorům je věnována monografie R. A. Adamse [AdA75], V. Maz'ji [Ma85], velmi známá je i pěkná kniha Ziemerova [Zi89]. Fourierovskou teorii prostorů funkcí je možné najít v řadě monografií Triebelových [Tr78], [Tr83], [Tri83], [Tri92], [Tri01] a v monografii Schmeissera a Triebela [ScT87]. V posledních Triebelových monografiích lze kromě toho nalézt i přehledné partie historického charakteru, velmi zajímavé i pro nespecialisty. Je potřeba zmínit fundamentální Steinovu knihu [Ste70]. Je zde dále klasická monografie Garnettova [Ga81]. Velice inspirující četbou je kniha Peetreho [Pe76]. Prostory invariantní vůči přerovnání jsou pěkně vyloženy v knize [BS88] Bennetta a Sharpleyho. Přístup založený na integrálních reprezentačních formulích, (speciálně na Calderónově a Steinově teorii singulárních integrálů) je použit v monografii Běsova, Il'jina a Nikol'ského [BIN75]. Orliczovy prostory se objevují v Zygmundových knihách [Zy59], u Zaanena [Za53], podrobně jsou studovány v klasické knize Krasnosel'ského a Rutického [KR61]. Obecnější modulární a Orliczovy-Musielakovy prostory lze nalézt v Musielakově monografii [Mus83], funkcionálním a geometrickým aspektům Orliczových prostorů je věnována kniha Raa a Rena [RR91].

Monografie zabývající se vlastnostmi integrálních operátorů v prostorech funkcí byly připomenuty již dříve. Konečně ještě připomeňme teorii interpolace, vyloženou např. v monografiích Triebela [Tr78] a Bergha a Löfströma [BL76].

Součástí disertační práce je také vybrané aplikace na problémy v teorii eliptických parciálních diferenciálních rovnic. Především je to jeden z velmi známých a obtížných problémů – silná vlastnost jednoznačného pokračování (dále SUCP). Autorova motivace pochází ze společného článku s S. Fučíkem [FuK77], který byl zobecňován v různých směrech různými autory, mimo jiné i Hessem v [H77], kde byl použit předpoklad vlastnosti jednoznačného pokračování pro důkaz silnějšího tvrzení.

Zmíněný problém SUCP má velmi zajímavou historii. Byl studován především pro stacionární Schrödingerův operátor $-\Delta + V$, kde V je nějaká váhová funkce (fyzikálně jde o potenciál), později pak různá jeho zobecnění. První výsledek je patrně Carlemanův [Car38] z r. 1938, který dokázal, že operátor $-\Delta + V$ má vlastnost SUCP, jestliže $V \in L^\infty_{\text{loc}}$. Tento výsledek byl mnohem později zobecněn Jerisonem a Kenigem [JK85] a Steinem [Ste85], kde SUCP je dokázána pro $V \in L^{N/2}_{\text{loc}}$ nebo pro V lokálně malé v Marcinkiewiczově prostoru $L^{N/2,\infty}$, $N \geq 3$, viz též Pan [Pan92] s podmínkou bodového odhadu $V(x) \leq M/|x|^2$, $N \geq 2$. Prominentní roli v teorii hraje nerovnost

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2(x)V(x)\,dx\right)^{1/2} \leq c\left(\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u(x))^2\,dx\right)^{1/2}, \qquad u \in W^{1,2}, \tag{3.2}$$

nazývaná někdy Feffermanova nerovnost (viz Fefferman [Fe83]) nebo též *princip neurčitosti* a dále tzv. *podmínkou stejnoměrné lokální malosti* (smallness condition, Stein [Ste85]): Nechť $T(V)$ označuje vnoření vyjádřené poslední nerovností, nechť $B(x,r)$ je koule se středem x a poloměrem r a nechť Ω je omezená, otevřená a souvislá podmnožina $\mathbb{R}^N$, $N = 2$ nebo $N = 3$. Jestliže

$$\limsup_{r\to 0_+} \|T(V\chi_{B(x,r)})\| \leq \varepsilon \tag{3.3}$$

s dostatečně malým $\varepsilon > 0$ pro všechna $x \in \Omega$, potom každé řešení $u \in W^{2,2}_{\text{loc}}$ nerovnosti $|\Delta u| \leq V|u|$ v Ω má SUCP; to je hluboký výsledek Chanilla a Sawyera [CS90].

Feffermanovu nerovnost lze interpretovat jako dvouváhovou nerovnost pro Rieszův potenciál. Potom máme k dispozici nutnou a postačující podmínku

Kermana a Sawyera [KeS86]. Zásadní problém ale je forma této podmínky: je to podmínka na jistý dvojný integrál, která je obtížně ověřitelná. Fourierovská teorie rovněž ve váhovém případě nedává odpověď, umožňuje pracovat jenom s vybranými speciálními případy (Littlewoodova a Paleyho teorie nemá obecnou váhovou variantu). Úsilí o získání nějaké rozumné, byť jenom postačující podmínky pro platnost hořejší váhové nerovnosti, vedl k hlubokým výsledkům v termínech Morreyových tříd, Feffermanových-Phongových tříd, Katoových-Stummelových tříd, orliczovských variant Morreyových tříd atd.; připomeňme alespoň práce Chiarenza a Frasca [ChF90], Chang, Wilson a Wolff [CWW85], Chanillo a Sawyer [CS90].

V práci dokazujeme splněni Steinovy podmínky pro váhové funkce V z Orliczových-Lorentzových prostorů (pro dimenzi $N = 2$ jsou to nereflexivní prostory „velice blízko" L^1), tím je zahrnut i výsledek Gosseze a Loulita [GL93].

Závěrečná sekce poslední kapitoly je věnována aplikaci našeho zobecnění Yanovy extrapolační věty v [FK01] na apriorní odhady pro eliptické rovnice s pravou stranou v Zygmundových prostorech. Obecný problém v takových případech spočívá v nemožnosti aplikovat standardní postupy založené např. na teorii singulárních integrálů (Agmon, Douglis a Nirenberg [ADN59] a další), a proto je v této oblasti poměrně málo podstatných výsledků. Uvažujeme zde okrajovou úlohu

$$\begin{cases} \operatorname{div} A(x)\nabla u = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

kde $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < N$ a $A = (a_{ij})_{i,j=1\dots n}$ je silně eliptický operátor s koeficienty $a_{ij} \in \mathrm{VMO} \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $a_{ij} = a_{ji}$. Dokazujeme apriorní odhad

$$\| |Du| \|_{L^{N/(N-1)}(\log L)^{-1+[N\alpha/(N-1)]}} \leq K \, \|f\|_{L(\log L)^\alpha},$$

pro všechna $\alpha > 1 - 1/N$, kde K je kladná konstanta nezávislá na f, čímž je rozšířen jak známý průkopnický výsledek Stampacchiův [Sta63] ($\alpha = N/(N-1)$), tak odhad, který nalezli Passarelli di Napoli a Sbordone [PNS95] ($0 < \alpha \leq 1$).

4 Základní použitá literatura

[AdR88] D. R. Adams, *A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives.* Ann. of Math. **128** (1988), 385–398.

[AdA75] R. A. Adams, *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York 1975.

[AdR88] R. A. Adams, *Reduced Sobolev inequalities.* Canad. Math. Bull. **31** (1988), 159–167.

[ADN59] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfyng general boundary coditions I.* Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 623–727.

[ALT89] A. Alvino, P.-L. Lions and G. Trombetti, *On optimization problems with prescribed rearrangements.* Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. **13** (1989), 185–220.

[Am76] T. I. Amanov, *Spaces of Differentiable Functions with Dominating Mixed Derivatives* (Russian). Nauka Kaz. SSR, Alma-Ata 1976.

[Ba80] R. J. Bagby. *A characterization of Riesz potentials, and an inversion formula.* Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), 581–595.

[BP61] A. Benedek and R. Panzone, *The spaces L^p with mixed norm.* Duke Math. J. **28** (1961), 301–324.

[BS88] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators.* Academic Press, Boston 1988.

[BL76] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces.* Springer-Verlag, Berlin 1976.

[BIN75] O. V. Besov, V. P. Il'in and S. M. Nikol'skii, *Integral Representation of Functions and Embedding Theorems* (Russian). Nauka, Moskva 1975, English transl.: Halsted Press, V. H. Winston & Sons, New York 1978/79).

[Boc77] L. Boccardo, *Problemi differenziali ellittici e parabolici con dati misure.* Boll. Un. Mat. Ital. **11-A (7)** (1977), 439–461.

[Boy69] D. W. Boyd, *Indices of function spaces and their relationship to interpolation.* Canad. J. Math. **21** (1969), 1245–1254.

[boy71] D. W. Boyd, *Indices for the Orlicz spaces.* Pacific J. Math. **38** (1971), 315–323.

[BW80] H. Brézis and S. Wainger, *A note on limiting cases of Sobolev embeddings and convolution inequalities.* Comm. Part. Diff. Equations **5** (1980), 773–789.

[CZ52] A. P. Calderón and A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals.* Acta Math. **88** (1952), 85–139.

[CZ56] A. P. Calderón and A. Zygmund, *On singular integrals.* Amer. J. Math. **18** (1956), 289–309.

[CCG85] A. Carbery, S. Y. Chang and J. Garnett, *Weights and $L \log L$.* Pacific J. Math. **120** (1985), 33–45.

[Car38] T. Carleman, *Sur un problème dúnicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes.* Ark. Mat. **26(B)** (1938), 1–9.

[Car62] L. Carleson, *Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem.* Ann. of Math. II. Ser. **76** (1962), 547–559.

[CWW85] S. Y. A. Chang, J. M. Wilson and T. H. Wolff, *Some weighted norm inequalities concerning the Schrödinger operator.* Comment. Math. Helvetici **60** (1985), 217–246.

[CS90] S. Chanillo and E. Sawyer, *Unique continuation for $\Delta + V$ and C. Fefferman-Phong class.* Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), 275–300.

[CW85] S. Chanillo and R. L. Wheeden, *L^p estimates for fractional integrals and Sobolev inequalities with applications to Schrödinger operator.* Comm. Partial Diff. Equations **10(9)** (1985), 1077–1116.

[ChF90] F. Chiarenza and M. Frasca, *A remark on a paper by C. Fefferman.* Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 407–409.

[CF74] Coifman R. R. and Fefferman C., *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals.* Studia Math. **51** (1974), 241–250.

[CW71] Coifman R. R. and Weiss G., *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes.* Lecture Notes in Math., Vol. 242, Springer-Verlag, Berlin 1971.

[CUK01] D. Cruz-Uribe SFO and M. Krbec, *Localization and extrapolation in Lorentz-Orlicz spaces.* In: Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics. Proceedings of the conference held in Lund (Sweden), August 17-22, 2001, in honour of Jaak Peetre on his 65th birthday (A. Kufner, , L. E. Persson, G. Sparr, M. Englis, eds.). de Gruyter, Berlin 2002, 389–401.

[EGO88] D. E. Edmunds, P. Gurka and B. Opic, *Norms of embeddings of logarithmic Bessel potential spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 2417–2425.

[EH99] D. E. Edmunds and D. Haroske, *Spaces of Lipschitz type, embeddings and entropy numbers.* Diss. Math. **380** (1999), 1–43.

[EK95] D. E. Edmunds and M. Krbec, *Two limiting cases of Sobolev imbeddings.* Houston J. Math. **21** (1995), 119–128.

[EK00] D. E. Edmunds and M. Krbec, *On decomposition in exponential Orlicz spaces.* Math. Nachr. **213** (2000), 77–88.

[EK01] D. E. Edmunds and M. Krbec, *Decomposition and Moser's lemma.* Rev. Mat. Complutense 9(2002), 1–18.

[ET92] D. E. Edmunds and H. Triebel, *Entropy numbers and approximation numbers in function spaces II.* Proc. London Math. Soc. **64** (1992), 153–169.

[ET95] D. E. Edmunds and H. Triebel, *Logarithmic Sobolev spaces and their applications to spectral theory.* Proc. London Math. Soc. **71** (1995), 333–371.

[ET96] D. E. Edmunds and H. Triebel, *Function spaces, entropy numbers and differential operators.* Cambridge Univ. Press, Cambridge 1996.

[DiF96] G. Di Fazio, *L^p estimates for divergence form elliptic equations with discontinuous coefficients.* Boll. Un. Mat. Ital. **10-A (7)** (1996), 409–420.

[Fe83] C. Fefferman, *The uncertainty principle.* Bull. Amer. Math. Soc. **9** (1983), 129–206.

[FeP82] C. Fefferman and D. H. Phong, *Lower bounds for Schrödinger operator.* Journées "Equations aux dérivées partielles" Saint-Jean-de Monts, 7-11 juin 1982.

[FeS71] C. Fefferman and E. M. Stein, *Some maximal inequalities.* Amer. J. Math. **93** (1971), 107–115.

[FeS72] C. Fefferman and E. M. Stein, *H^p spaces of several variables.* Acta Math. **129** (1972), 137–193.

[Fi01] A. Fiorenza, *Duality and reflexivity in grand L^p spaces.* To appear in Collect. Math.

[FK97] A. Fiorenza and M. Krbec, *Indices of Orlicz spaces and some applications.* Comment. Math. Univ. Carolinae **38** (1997), 433–451.

[FK98] A. Fiorenza and M. Krbec, *A formula for the Boyd indices in Orlicz spaces.* Funct. et Approximatio **26** (1998), 173–179.

[FK00] A. Fiorenza and M. Krbec, *On the domain and range of the maximal operator.* Nagoya Math. J. **158** (2000), 43–61.

[FK01] A. Fiorenza and M. Krbec, *On optimal decomposition in Zygmund spaces.* Georg. Math. J. 9(2002).

[FiS98] A. Fiorenza and C. Sbordone, *Existence and uniqueness results for solutions of nonlinear equations with right hand side in L^1.* Studia Math. **127** (1998), 223–231.

[Fu74] S. Fučík, *Nonlinear equations with noninvertible linear part.* Comment. Math. Univ. Carolinae **24** (1974), 467–495.

[Fu76] S. Fučík, *Remarks on some nonlinear boundary value problem.* Comment. Math. Univ. Carolinae **17** (1976), 721–730.

[FuK77] S. Fučík and M. Krbec, *Boundary value problem with bounded nonlinearity and general null-space of the linear part.* Math. Z. **155** (1977), 129–138.

[FLS96] N. Fusco, P. L. Lions and C. Sbordone, *Sobolev imbedding theorems in borderline case.* Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 562–565.

[GGKK] I. Genebashvili, A. Gogatishvili, V. Kokilashvili and M. Krbec, *Weight theory for integral transforms on spaces of homogeneous type.* Addison-Wesley, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 92, Harlow 1998.

[GR85] J. García-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North Holland, Amsterdam 1985.

[Ga81] J. Garnett, *Bounded Analytic Functions.* Academic Press, New-York 1981.

[Ge89] I. Genebashvili, *Two weight norm inequalities for fractional maximal functions in Lorentz spaces.* Bull. Georg. Acad. Sci. *136* (1989), 21–24.

[GT83] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag, Berlin 1983.

[GL93] J.-P. Gossez and A. Loulit, *A note on two notions of unique continuation.* Bull. Soc. Math. Belg. **Ser. B 45** (1993), 257–268.

[GP77] J. Gustavsson and J. Peetre, *Interpolation of Orlicz spaces.* Studia Math. **60** (1977), 33–59.

[Gu75] M. de Guzmán, *Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$. Lecture Notes in Math., Vol. 481, Springer-Verlag, Berlin 1975.

[HS94] Y. S. Han and E. T. Sawyer, *Littlewood–Paley Theory on Spaces of Homogeneous Type and Classical Function Spaces.* Mem. Amer. Math. Soc. 530, Providence, RI 1994.

[HL30] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *A maximal theorem with function-theoretic applications.* Acta Math. **54** (1930), 81–116.

[HLP51] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities.* Cambridge Univ. Press, Princeton 1951.

[HS] H. Helson and G. Szegő, *A problem in prediction theory.* Ann. Mat. Pura Appl. **51** (1960), 107–138.

[H77] P. Hess, *A remark on preceding paper of Fučík and Krbec.* Math. Z. **155** (1977), 139–141.

[HP48] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 31, New York 1948.

[IS98] T. Iwaniec and C. Sbordone, *Riesz transforms and elliptic PDEs with VMO coefficients.* J. Anal. Math. **74** (1998), 183–212.

[Ja86] B. Jawerth, *Weighted inequalities for maximal operators: linearization, localization and factorization.* Amer. J. Math. **108** (1986), 361–414.

[Ja77] B. Jawerth, *Some observations on Besov and Lizorkin–Triebel spaces.* Math. Scand. **40** (1977), 94–104.

[JM91] B. Jawerth and M. Milman, *Extrapolation theory with applications.* Mem. Am. Math. Soc. **440** (1991).

[JK85] D. Jerison and C. Kenig, *Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrödinger operator.* Ann. of Math. **121** (1985), 463–488.

[Jod72] M. Jodeit, Jr., *An inequality for the indefinite integral of a function in* L^q. Studia Math. **44** (1972), 545–554.

[Jou93] J.-L. Journé, *Calderón-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderón.* Lecture Notes in Math., Vol. 994, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[KW75] J. L. Kazdan and F. W. Warner, *Remarks on some quasilinear elliptic equations.* Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 375–394.

[KeS86] R. Kerman and E. Sawyer, *The trace inequality and eigenvalue estimates for Schrödinger operators.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **36** (1986), 207–228.

[KeT82] R. Kerman and A. Torchinsky, *Integral inequalities with weights for the Hardy maximal functions.* Studia Math. **71** (1982), 277–284.

[KnS69] A. Knapp and E. M. Stein, *Singular integrals and principal series.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **63** (1969), 281–284.

[Ko85] V. Kokilashvili, *Maximal Functions and Singular Integrals in Weighted Function Spaces* (Russian). Metsniereba, Tbilisi 1985.

[KK85] V. Kokilashvili and M. Krbec, *Weighted inequalities for Riesz potentials and fractional maximal functions in Orlicz spaces* (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR **283** (1985), 280–283. English transl.: Soviet Math. Dokl. **32** (1985), 70–73.

[KK86] V. Kokilashvili and M. Krbec, *On the boundedness of anisotropic fractional maximal functions and potentials in weighted Orlicz classes.* (Russian). Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR **82** (1986), 107–115.

[KK90] V. Kokilashvili and M. Krbec, *Carleson measures and A_p weights in Orlicz spaces.* Soobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR **137** (1990), 269–271.

[KK91] V. Kokilashvili and M. Krbec, *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces.* World Scientific, Singapore 1991.

[KL94] V. Kokilashvili and P. I. Lizorkin, *Two-weight estimates for multipliers and embedding theorems* (Russian). Dokl. Akad Nauk RAN **336 (4)** (1994), 439–441. English transl.: Russian Acad. Sci. Dokl. Math. **49** (1994), No. 3, 515–519.

[LL70] E. M. Landesman and A. C. Lazer, *Nonlinear perturbations of linear boundary value problem at resonance.* J. Math. Mech. **19** (1970), 609–623.

[KR61] M. A. Krasnosel'skii and Ya. B. Rutickii, *Convex Function and Orlicz Spaces* (Russian). Fizmatgiz, Moscow 1958; English transl.: Noordhoff 1961.

[K76] M. Krbec, *On L^p-estimates for solutions of elliptic boundary value problems.* Comment. Math. Univ. Carolinae **17** (1976), 363–375.

[K77] M. Krbec, *Modular interpolation spaces I.* Z. Anal. Anwendungen **1** (1982), 25–40.

[K85] M. Krbec, *On anisotropic imbeddings.* Comment. Math. Univ. Carolinae **25** (1985), 473–481.

[K86] M. Krbec, *Two weights weak type inequalities for the maximal function in the Zygmund class.* In: Function Spaces and Applications, Proc. Swedish-US Conf. Lund 1986. Lecture Notes in Math., Vol. 1302 (M. Cwikel et al., eds.). Springer-Verlag, Berlin 1988, 317–320.

[KP91] M. Krbec and L. Pick, *Imbeddings between weighted Orlicz spaces.* Z. Anal. Anwendungen **10** (1991), 107–117.

[KL97] M. Krbec and J. Lang, *Imbeddings between weighted Orlicz-Lorentz spaces.* Georg. Math. J. **4**(2) (1997), 117–128.

[KSr96] M. Krbec and H.-J. Schmeisser, *Limiting imbeddings. The case of missing derivatives.* Ricerche Mat. **XLV** (1996), 423–447.

[KSr00] M. Krbec and H.-J. Schmeisser, *On extrapolation of Sobolev and Morrey type imbeddings.* In: Function Spaces. The Fifth Conference: Proc. Conf. Poznań (H. Hudzik and L. Skrzypczak, eds.), M. Dekker, Inc., New York 2000, pp. 297–321.

[KSr01] M. Krbec and H.-J. Schmeisser, *Imbeddings of Brézis-Wainger type. The case of missing derivatives.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **131A** (2001), 1–34.

[KSt97] M. Krbec and T. Schott, *Embeddings of weighted Sobolev spaces in the borderline case.* Real Anal. Exchange **23**(2) (1997–98), 395–420.

[KSt99] M. Krbec and T. Schott, *Superposition of imbeddings and Fefferman's inequality.* Boll. Un. Mat. Ital., Sez. B, Artic. Ric. Mat. **8** (1999), 629–637.

[KJF77] A. Kufner, O. John and S. Fučík, *Function Spaces.* Academia, Prague 1977.

[L00] H.-G. Leopold, *Embeddings and entropy numbers in Besov spaces of generalized smoothness.* In: Function spaces. The fifth conference, Lecture notes in pure and applied math. 213 (H. Hudzik and L. Skrzypczak, eds.), Marcel Dekker, New York 2000, pp. 323–336.

[Mal85] L. Maligranda, *Indices and interpolation.* Dissertationes Mathematicae #234, 1–54. Polish Sci. Publ., Warsaw 1985.

[MO60] W. Matuszewska and W. Orlicz, *On certain properties of Φ functions.* Bull. Acad. Polon. Sci. **8** (1960), 439–443.

[Ma85] V. G. Maz'ya, *Sobolev Spaces.* Springer-Verlag, Berlin 1985.

[Mi94] M. Milman, *Extrapolation and Optimal Decompositions: with Applications to Analysis.* Lecture Notes in Math. No. 1580, Springer-Verlag, Berlin 1994.

[Mon92] S. J. Montgomery-Smith, *Comparison of Orlicz–Lorentz spaces.* Studia Math. **103 (2)** (1992), 161–189.

[Mos71] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger.* Indiana Univ. Math. J. **20** (1971), 1077–1092.

[M72/1] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function.* Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.

[M72/2] B. Muckenhoupt, *Hardy's inequalities with weight.* Studia Math. **44** (1972), 31–38.

[M85] B. Muckenhoupt, *Weighted reverse weak type inequalities for the Hardy–Littlewood maximal function.* Pacific J. Math. **117** (1985), 371–377.

[MW74] B. Muckenhoupt and R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals.* Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 261–274.

[MuW76] B. Muckenhoupt and R. L. Wheeden, *Two-weight function norm inequalities for the Hardy–Littlewood maximal function and the Hilbert transform.* Studia Math. **55** (1976), 279–294.

[Mus83] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces.* Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., Vol. 1034, Berlin 1983.

[Na50] H. Nakano, *Modulared Semi-Ordered Linear Spaces.* Tokyo Math. Book Series Vol. 1, Maruzen Co., Ltd., Tokyo 1950.

[N67/1] J. Nečas, *Les méthodes directes en équations elliptiques.* Academia, Prague 1967. **21** (1967), 427–457. **14** (1973), 63–72.

[Nev] J. S. Neves, *On decompositions in generalized Lorentz-Zygmund spaces.* Boll. Un. Mat. Ital. 4B(2001), 239–267.

[Pan92] Y. Pan, *Unique continuation for Schrödinger operators with singular potentials.* Comm. Partial Diff. Equations **17** (1992), 953–965.

[PNS95] A. Passarelli di Napoli and C. Sbordone, *Elliptic equations with right hand side in $L(\log L)^\alpha$.* Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli **62** (1995), 301–314.

[Pe76] J. Peetre, *New Thoughts on Besov Spaces.* Duke Univ. Math. Series I, Duke University, Durham 1976.

[RR91] M. M. Rao and Z. D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces.* M. Dekker, Inc., New York 1991.

[Sa82] E. T. Sawyer, *A characterization of a two-weight norm inequality for maximal operators.* Studia Math. **75** (1982), 1–11.

[Sa84] E. T. Sawyer, *A two-weight weak type inequality for fractional integrals.* Trans. Amer. Math. Soc. **281** (1984), 339–345.

[Sa86] E. T. Sawyer, *Weighted inequalities for the one–sided Hardy–Littlewood maximal function.* Trans. Amer. Math. Soc. **297** (1986), 53–61.

[Sa88] E. T. Sawyer, *A characterization of two weight norm inequalities for fractional and Poisson integrals.* Trans. Amer. Math. Soc. **308**(1988), 533–545.

[Schm80] H.-J. Schmeisser, *Über Räume von Funktionen und Distributionen mit dominierenden gemischten Glattheiteigenschaften vom Besov–Triebel–Lizorkin Typ.* Thesis, Jena 1980.

[Schm82] H.-J. Schmeisser, *Imbedding theorems for spaces of functions with dominating mixed smoothness properties of Besov–Triebel–Lizorkin type.* Wiss. Z. FSU Jena, Math.–Naturw. Reihe **31** (1982), 635–645.

[Schm84] H.-J. Schmeisser, *Maximal inequalities and Fourier multipliers for spaces with mixed quasinorms. Applications.* Z. Anal. Anwendungen **3** (1984), 153–166.

[Schm87] H.-J. Schmeisser, *Vector-valued Sobolev and Besov spaces*, Semin. Analysis, Berlin 1985/86, Teubner-Texte Math. **96** (1987), 4–44.

[ScT87] H.-J. Schmeisser and H. Triebel, *Topics in Fourier Analysis and Function Spaces.* Geest & Portig, Leipzig 1987; Wiley, Chichester 1987.

[So38] S. L. Sobolev, On a theorem in functional analysis (Russian). *Mat. Sb.* **4**, 471–479, 1938. English transl. in: *Amer. Math. Soc., Transl., II,* Ser. 34, 39–68, 1963.

[Sta63] G. Stampacchia, *Some limit cases of L^p estimates for solutions of second order elliptic equations.* Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963), 505–510.

[Ste69] E. M. Stein, *Note on the class $L \log L$.* Studia Math. **31** (1969), 305–310.

[Ste70] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton 1970.

[Ste85] E. M. Stein, *Appendix to "Unique continuation"*. Ann. of Math. **121** (1985), 489–494.

[Ste93] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1993.

[SW71] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1971.

[Stri72] R. S. Strichartz, *A note on Trudinger's extension of Sobolev's inequality.* Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), 841–842.

[StroT89] J. O. Strömberg and A. Torchinsky, *Weighted Hardy Spaces.* Lecture Notes in Math., Vol. 1381, Springer-Verlag, Berlin 1989.

[Ta94] G. Talenti, *Inequalities in rearrangement invariant function spaces.* In: Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Vol. 5 (M. Krbec et al., eds.), Prometheus Publ. House Prague, 1994, pp. 177–230.

[To76] A. Torchinsky, *Interpolation of operators and Orlicz classes.* Studia Math. **59** (1976), 177–207.

[To86] A. Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 123, Academic Press, San Diego 1986.

[Tr78] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* VEB Deutsch. Verl. Wissenschaften, Berlin 1978; sec. revised ed.: North–Holland, Amsterdam 1978.

[Tr83] H. Triebel, *Theory of Function Spaces* Geest & Portig K.-G., Leipzig, Birkhäuser, Basel 1983.

[Tri83] H. Triebel, *Theory of Function Spaces.* Birkhäuser, Basel 1983.

[Tri92] H. Triebel, *Theory of Function Spaces II.* Birkhäuser, Basel 1992.

[Tri01] H. Triebel, *The Structure of Functions.* Birkhäuser, Basel 2001.

[Tro69] M. Troisi, *Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi.* Ricerche Mat. **18** (1969), 3–24.

[Tro71] M. Troisi, *Additional contributions to the theory of non isotropic Sobolev spaces* (Italian). Ricerche Mat. **20** (1971), 90–117.

[Tru67] N. Trudinger, *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications.* J. Math. Mech. **17** (1967), 473–483.

[Wh93] R. L. Wheeden, *A characterization of some weighted norm inequalities for fractional maximal function.* Studia Math. **107** (1993), 257–272.

[Wh94] R. L. Wheeden, *Poincaré–Sobolev and isoperimetric inequalities, maximal functions and half-space estimates for the gradient.* In: Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Vol. 5. Proceedings (M. Krbec et al., eds.) Prometheus Publ. House, Prague 1994, 231–265.

[Wi39] N. Wiener, *The ergodic theorem.* Duke Math. J. **5** (1939), 1–18.

[Wo92] T. H. Wolff, *Note on counterexamples in strong unique continuation problems.* Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), 351–356.

[Y51] S. Yano, *Notes on Fourier analysis (XXIX): An extrapolation theorem.* J. Math. Soc. Japan **3** (1951), 296–305.

[Za53] A. C. Zaanen, *Linear Analysis.* North Holland, Amsterdam 1953.

[Zi89] W. P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions.* Springer-Verlag, New York 1989.

[Zy59] A. Zygmund, *Trigonometric Series, Vol. 1, 2.* Cambridge Univ. Press, 2nd edition, Cambridge 1959.

5 Cíl práce a metody zpracování

Práce sleduje dva související cíle: výsledky, týkající se omezenosti klasických operátorů (a některých jejich zobecnění), včetně operátoru vnoření v prostorech funkcí, využívající bohaté spektrum prostorů Orliczových, Lorentzových, případně i Orliczových-Lorentzových a s tím spojené aplikace na kvalitativní vlastnosti slabých řešení eliptických rovnic. Zároveň bylo záměrem autora poukázat na šíři dnes používaných prostředků a přirozenou potřebu interakce jednotlivých disciplín a specialistů pro další rozvoj oboru.

Při studiu problematiky, jíž je práce věnována, bylo použito velice širokého spektra prostředků, jak si to dnešní rozvoj oboru vyžaduje. Moderní důkazové techniky používají jak standardních postupů a nástrojů klasické matematické analýzy i funkcionální analýzy, tak prostředků typických pro reálné metody harmonické analýzy. Mezi jednotlivými nástroji a důkazovými postupy lze uvést především teorii interpolace, teorii Fourierových multiplikátorů, Littlewoodovu-Paleyho teorii, z konkrétních význačných nástrojů spojených se jmény jejich autorů potom Michlinovy-Hörmanderovy věty o multiplikátorech, Nikol'ského nerovnost a Calderónovu-Zygmundovu teorii singulárních integrálů.

6 Výsledky práce, nové poznatky

Budeme se nyní postupně zabývat obsahem jednotlivých kapitol a uvedeme nejdůležitější výsledky. Nejprve zavedeme některé důležité pojmy a domluvíme se na označení méně běžných objektů.

Symbolem Φ označíme množinu všech *Youngových funkcí*, to jest, funkcí $\mathit{\Phi} : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, nezáporných, sudých, rostoucích na $[0, \infty)$, a takových že $\mathit{\Phi}(0+) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \mathit{\Phi}(t) = \infty$.

Pro $\mathit{\Phi} \in \Phi$, definujeme *Orliczovu třídu* $\mathit{\Phi}(L)$ (někdy také označovanou symbolem $\widetilde{L}_{\mathit{\Phi}}$) jako množinu měřitelných funkcí $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$ takových, že

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathit{\Phi}(f(x))\, dx < \infty.$$

Je-li $\mathit{\Phi} \in \Phi$, definujeme *komplementární funkci* (vzhledem k $\mathit{\Phi}$) jako

$$\begin{aligned} &\Psi(s) = \sup\{\, st - \mathit{\Phi}(t)\,;\, t > 0\,\}, \qquad s \geq 0,\\ &\Psi(s) = \Psi(-s), \qquad s < 0. \end{aligned}$$

Klasický je pojem Orliczova prostoru: Youngova funkce $\mathit{\Phi} \in \Phi$ se nazývá N-*funkce* jestliže $\mathit{\Phi}$ je konvexní a taková, že $\lim\limits_{t\to 0_+} \mathit{\Phi}(t)/t = \lim\limits_{t\to\infty} t/\mathit{\Phi}(t) = 0$. V takovém případě lze na lineárním obalu $L_{\mathit{\Phi}}$ třídy $\mathit{\Phi}(L)$ definovat tzv. *Luxemburgovu normu*

$$\|f\|_{L_{\mathit{\Phi}}} = \inf\{\, \lambda > 0\,;\, \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathit{\Phi}(f(x)/\lambda)\, dx \leq 1\,\}.$$

Takto vzniklý normovaný lineární prostor se nazývá *Orliczův prostor* (lze dokázat, že je to Banachův prostor). Analogicky lze tyto prostory zavést pro Youngovy funkce (dostanou se obecně kvazinormy; viz např. Nakano [Na50] nebo Musielak [Mus83] pro pojem *modulárního prostoru*). Samozřejmě je vždy možné místo $\mathbb{R}^N$ uvažovat měřitelné podmnožiny $\mathbb{R}^N$ nebo obecněji prostor s mírou (např. σ-konečnou).

Můžeme zavést i obecnější třídy a prostory založené na Youngových funkcích. Nechť $\varPhi \in \Phi$, $0 \leq \lambda < n$. Potom definujeme *Orliczovu-Morreyovu třídu*

$$\varPhi_\lambda(L) = \left\{ f \text{ měřitelná}\,;\, |f|_{\varPhi,\lambda} = \sup_{\substack{r>0 \\ z\in\mathbb{R}^N}} r^{-\lambda} \int\limits_{B(z,r)} \varPhi(f(y))\,dy < \infty \right\}.$$

Analogicky lze uvažovat příslušný prostor a Luxemburgovu (kvazi)normu. Zřejmě $\varPhi_0(L) = \varPhi(L)$.

Lokálně integrovatelná s.v. kladná funkce $\varrho : \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ se nazývá *váha* (resp. *váhová funkce*). Nechť ϱ je váha v $\mathbb{R}^N$ a $\varPhi \in \Phi$. Potom *váhovou Orliczovu třídu*, *váhový Orliczův prostor váhovou Luxemburgovu normu* a *váhovou Orliczovu normu* zavádíme v analogii s výše uvedenou definicí, kde Lebesgueovu míru nahradíme mírou $w(x)\,dx$.

Následující pojem je jedním z klíčových v teorii Orliczových prostorů.

Definice 6.1. Funkce $\varPhi \in \Phi$ splňuje (*globální*) Δ_2 *podmínku*, jestliže existuje $c > 0$ takové, že $\varPhi(2t) \leq c\varPhi(t)$, $t > 0$.

Jestliže $\varPhi(2t) \leq c\varPhi(t)$ pro malá, resp. velká t, potom funkce $\varPhi$ splňuje Δ_2 podmínku u nuly, resp. u nekonečna.

Jestliže $\varPhi$ splňuje Δ_2 podmínku, budeme též psát $\varPhi \in \Delta_2$.

Předchozí (globální) podmínku lze podstatně zjemnit: Existují kladná čísla $i(\varPhi)$ a $I(\varPhi)$ tak, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ lze nalézt konstantu $C_\varepsilon > 0$ pro kterou

$$\varPhi(\lambda t) \leq C_\varepsilon \max\left(\lambda^{i(\varPhi)-\varepsilon}, \lambda^{I(\varPhi)+\varepsilon}\right) \varPhi(t), \qquad \lambda, t \geq 0,$$

a

$$\varPhi(\lambda t) \geq C_\varepsilon \min\left(\lambda^{i(\varPhi)-\varepsilon}, \lambda^{I(\varPhi)+\varepsilon}\right) \varPhi(t), \qquad \lambda, t \geq 0.$$

Zřejmě $\Phi \in \Delta_2$ tehdy a jen tehdy, když $I(\Phi) < \infty$. Existence čísel $i(\Phi)$ a $I(\Phi)$ je důsledkem silně netriviálních vlastností submultiplikativních funkcí. Odkažme např. na práce Matuszewské and Orlicze [MO60], Gustavssona a Peetreho [GP77], Boyda [Boy69], Maligrandy [Mal85]. Základní a hlubokou větu o submultiplikativních funkcích (subaditivní verze) lze nalézt v monografii Hilleho a* Phillipse [HP48].

Připomeňme dále (necentrovanou) *maximální funkci* (nebo též *maximální operátor*), definovaný jako

$$Mf(x) = \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

kde supremum se bere přes všechny krychle Q obsahující x. Zde i v celé práci se pod pojmem *krychle* rozumí krychle s hranami rovnoběžnými souřadným osám.

Dvojice váhových funkcí (ϱ, σ) patří do A_p *třídy* (nebo do *Muckenhouptovy třídy*, $1 < p < \infty$, jestliže

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varrho(x)\, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (\sigma(x))^{-1/(p-1)}\, dx \right)^{p-1} < \infty \qquad (A_p)$$

kde supremum se bere přes všechny krychle $Q \subset \mathbb{R}^N$ (s hranami rovnoběžnými se souřadnými osami). Pro $p = 1$ je příslušná třída definována podmínkou

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \varrho(x)\, dx \le c \operatorname*{inf\,ess}_{x \in Q} \sigma(x) \qquad (A_1)$$

a pro $p = \infty$ pak podmínkou: Pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$ existuje $\delta > 0$ tak, že kdykoliv Q je krychle v $\mathbb{R}^N$, $E \subset Q$ měřitelná a $|E| < \delta|Q|$, potom $\varrho(E) < \varepsilon\varrho(Q)$.

Jestliže $\varrho \equiv \sigma$, pak budeme jednoduše říkat, že ϱ patří do A_p třídy.

Je-li σ další váha v $\mathbb{R}^N$, potom *nerovnost slabého typu (vzhledem k ϱ a σ)*

$$\varrho(\{\, x \in \mathbb{R}^N \,;\, Mf(x) > \lambda \,\}) \le c\lambda^{-p} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p \sigma(x)\, dx$$

platí právě tehdy, když $(\varrho, \sigma) \in A_p$, $1 \le p < \infty$. Operátor M je spojitý v $L^p(\varrho)$ právě tehdy, když $\varrho \in A_p$ (Muckenhoupt [M72/1]).

V první kapitole se zabýváme klasickými operátory v Orliczových prostorech. Navazujeme na průkopnický výsledek Kermana a Torchinskyho [KeT82] o maximálních funkcích, zejména na jejich klíčové lemma o $A_{i(\Phi)}$ funkcích a nacházíme nutné a postačující podmínky pro spojitost *Rieszova potenciálního operátoru* T_γ $(0 < \gamma < N)$, tj. konvoluce s jádrem $|x|^{\gamma - N}$ a příslušné *maximální funkce necelého řádu* (*lomené maximální funkce*) M_γ.

Věta 6.1. *Nechť Φ_1 and Φ_2 jsou Youngovy funkce takové, že $1 < i(\Phi_1) = p \leq I(\Phi_1) < \infty$, $1 < i(\Phi_2) = q \leq I(\Phi_2) < \infty$, a $(\Phi_2)^{-1}(t) \sim t^{-\gamma/N}(\Phi_1)^{-1}(t)$, $0 < \gamma < N$. Nechť ϱ je váhová funkce. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *existuje $c_1 > 0$ tak, že*

$$\|T_\gamma(f(\varepsilon\varrho)^{\gamma/N})\|_{L_{\Phi_1}(\varepsilon\varrho)} \leq c_1 \|f\|_{L_{\Phi_2}(\varepsilon\varrho)}, \qquad f \in L_{\Phi_1}(\varepsilon\varrho), \quad \varepsilon > 0;$$

(ii) *existuje $c_2 > 0$ tak, že*

$$\|M_\gamma(f(\varepsilon\varrho)^{\gamma/N})\|_{L_{\Phi_1}(\varepsilon\varrho)} \leq c_2 \|f\|_{L_{\Phi_2}(\varepsilon\varrho)}, \qquad f \in L_{\Phi_1}(\varepsilon\varrho), \quad \varepsilon > 0;$$

(iii) $\varrho \in A_s$ *kde* $s = 1 + q/p'$ $\qquad (p' = p/(p-1))$.

Pro speciální singulární integrály s Calderónovými-Zygmundovými jádry, totiž pro *Rieszovy transformace* R_j a *Rieszův operátor* $Rf(x) = \sum_{j=1}^{N} R_j f(x)$ pak dokazujeme, že platí

Věta 6.2. *Nechť Φ je Youngova funkce, $1 < i(\Phi) \leq I(\Phi) < \infty$ a ϱ je váha na $\mathbb{R}^N$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *existuje $c_1 > 0$ tak, že*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(Rf(x))\varrho(x)\,dx \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(f(x))\varrho(x)\,dx$$

pro všechna $f \in L_\Phi(\varrho)$;

(ii) *existuje $c_2 > 0$ tak, že*

$$\|Rf\|_{L_\Phi(\delta\varrho)} \leq c_2 \|f\|_{L_\Phi(\delta\varrho)}$$

pro všechna $f \in L_\Phi(\delta\varrho)$ a všechna $\delta > 0$;

(iii) *existuje* $c_3 > 0$ *tak, že*

$$\Phi(\lambda) \int\limits_{|Rf(x)|>\lambda} \varrho(x)\,dx \le c \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Phi(f(x))\varrho(x)\,dx$$

pro všechna $f \in L_\Phi(\varrho)$ *a všechna* $\lambda > 0$;

(iv) $\varrho \in A_{i(\Phi)}$.

V dalším se zabýváme *zobecněnou maximální funkcí*

$$\widehat{M}f(x,t) = \sup \frac{1}{|B|} \int\limits_B |f(y)|\,dy\,, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^1_+\,,$$

kde supremum se bere přes všechny koule $B \subset \mathbb{R}^N$, $x \in B$ a $\operatorname{rad} B \ge 2^{-1}t$.

V práci je zobecněna Carlesonova věta [Car62]:

Věta 6.3. *Nechť* $0 \le \lambda < N$, $\Phi \in \Phi$ *a* Φ^α *je kvazikonvexní* (*tj. ekvivalentní nějaké konvexní funkci*) *pro nějaké* $\alpha \in (0,1)$. *Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *existuje* $c_1 > 0$ *tak, že*

$$\sup r^{-\lambda} \int\limits_{B_x(r)} \Phi(\widehat{M}f(y,t))\,d\beta \le c_1 |c_1 f|_{\Phi,\lambda}, \qquad f \in L^1_{\mathrm{loc}}; \tag{6.1}$$

(ii) *existuje* $c_2 > 0$ *tak, že*

$$\sup_{\substack{s>0\\ x\in\mathbb{R}^N\\ r>0}} r^{-\lambda}\Phi(s)\beta(\{\,(y,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1}_+\,; \widehat{M}f(y,\tau) > s\,\} \cup B_x(r)) \le c_2|c_2 f|_{\Phi,\lambda} \tag{6.2}$$

pro všechna $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$;

(iii) *existuje* $c_3 > 0$ *tak, že*

$$\beta\widehat{B}(x,r) \le c_3 r^n\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ r > 0.$$

Konečně je v práci prezentována věta o dvouváhových slabých odhadech v limitním případě

Jsou-li ϱ a σ váhy v $\mathbb{R}^N$ a $1 < p < \infty$, potom Muckenhouptovu nutnou a postačující podmínku pro

$$\varrho(\{Mf > \lambda\}) \le c\lambda^{-p} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p \sigma(x)\, dx$$

lze psát ve tvaru

$$\sup_Q \left(\int_Q \left(\frac{\varrho(Q)}{|Q|\sigma(x)} \right)^{p'} \frac{\sigma(x)}{\varrho(Q)}\, dx \right)^{1/p'} = A_p(\varrho, \sigma) \le C, \tag{6.3}$$

kde $\varrho(Q) = \int_Q \varrho(x)\, dx$ a $p' = p/(p-1)$. Pro nerovnost

$$\varrho(\{Mf > \lambda\}) \le \frac{C(\varrho, \sigma)}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| \left(1 + \log^+ \frac{|f(x)|}{\lambda} \right) \sigma(x)\, dx. \tag{6.4}$$

se tedy nabízí *limitní podmínka*

$$\sup_Q \int_Q \exp\left(\frac{\eta\varrho(Q)}{|Q|\sigma(x)} \right) \frac{\sigma(x)}{\varrho(Q)}\, dx = A_{\log}(\varrho, \sigma) < \infty. \tag{$A_{\log}$}$$

Jestliže tato podmínka platí, budeme psát $(\varrho, \sigma) \in A_{\log}$. Bylo překvapením, že tato heuristická úvaha skutečně projde:

Věta 6.4. *Nerovnost* (6.4) *platí pro každou funkci* $f \in L(1+\log^+ L)$ *právě tehdy, když* $(\varrho, \sigma) \in A_{\log}$.

Obrátíme nyní svoji pozornost na extrapolační postupy studované ve druhé kapitole.

Budeme pracovat s reálnými funkcemi definovanými na nějaké podmnožině Ω prostoru $\mathbb{R}^N$. Předpokládáme, že Ω má konečnou míru a bez újmy na obecnosti pak $|\Omega| = 1$. *Nerostoucí přerovnání* měřitelné funkce f na Ω je definováno jako

$$f^*(t) = \inf\{\lambda > 0;\, m(f, \lambda) \le t\}, \qquad t > 0,$$

kde $m(f,\lambda) = |\{x \in \Omega;\ |f(x)| > \lambda\}|$, nebo alternativně v termínech pouze funkce f jako

$$f^*(t) = \sup_{|E|=t} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} f(x), \qquad t \in (0,|\Omega|].$$

Pokud $|\Omega| = 1$, potom zřejmě $\operatorname{supp} f^* \subset [0,1]$. Z definice je zřejmé, že nezáleží na znaménku funkce f a je proto obyčejně možné předpokládat, že pracujeme pouze s nezápornými funkcemi. Nerostoucí přerovnání jsou znamenitým nástrojem pro studium řady vlastností funkcí i prostorů funkcí. Lze jednoduše dokázat, že Lebesgueovy, Orliczovy, Lorentzovy, Orliczovy-Lorentzovy prostory jsou invariantní vůči přerovnání, tj. norma f v takovém prostoru na Ω se rovná normě f^* v příslušném prostoru na $(0,|\Omega|)$. Odkazujeme např. na [BS88], [HLP51], [To86], [Zi89].

V dalším přehledu kapitoly budeme obvykle vynechávat symbol pro oblast, na které prostory funkcí uvažujeme. Rovněž budeme většinou používat stručnějšího symbolu $\|f\|_k$ místo $\|f\|_{L^k(\Omega)}$.

Základní věta o extrapolaci Lebesgueových prostorů k exponenciálním Orliczovým prostorům říká, že

$$\sup_{0<t<1} \frac{f^*(t)}{\log(e/t)} < \infty \quad \text{právě tehdy, když} \quad \sup_k \frac{\|f\|_k}{k} < \infty.$$

Ve společné práci s D. E. Edmundsem [EK00] se nám podařilo tuto charakterizaci dosti překvapivě zjemnit. Uvažujme dekompozici (až na množinu míry nula) intervalu $(0,1)$ na intervaly $\{(t_k,t_{k-1})\}_{k\geq 1}$, kde $t_k = e^{-k}$, $k \geq 1$, $t_0 = 1$. Potom platí

Věta 6.5. *Nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je měřitelná. Pak*

$$\sup_k \frac{\|f^*\|_k}{k} < \infty \quad \textit{právě tehdy, když} \quad \sup_k \frac{\|f^*\|_{L^k\ (t_k,t_{k-1})}}{k} < \infty.$$

Později se nám společně s D. Cruz-Uribem, SFO, podařilo tuto větu zobecnit na případ Orliczových-Lorentzových prostorů, které vystupují jako cílové prostory pro limitní vnoření BW-typu. Podrobný komentář k těmto prostorům je součástí práce (Section 2.1).

Po prostorech exponenciálního typu se budeme nyní chvíli zabývat prostory zhruba řečeno duálními, tedy nereflexivními Zygmundovými prostory. Jak bylo již řečeno, jednou ze značně nepříjemných vlastností velice užitečných Orliczových prostorů je definice jejich normy. Mnoho úsilí proto bylo vynaloženo pro nalezení alternativních formulí. V tomto světle je proto potřeba vidět důležitost extrapolačního výsledku Edmundse a Triebela [ET95] a [ET96], který nyní připomenutého na str. 12.

Nevýhodou formule (3.1) je její nekonstruktivní charakter (vyplývající z použité důkazové techniky – Banachova věta o rozšiřování funkcionálů a argumenty duality). To se nám společně s A. Fiorenzou podařilo odstranit v [FK01]:

Věta 6.6. *Nechť* $\alpha > 0$. *Potom*

$$\|f\|_{L(\log L)^\alpha} \approx \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j\alpha} \|f^*\|_{(2^j)',J_j}, \tag{6.5}$$

kde $(2^j)' = 2^j/(2^j-1)$, $J_j = (e^{-2^{j+1}+2}, e^{-2^j+2})$, $j = 1, \dots$.

Odkazujeme nyní na schéma na str. 13.

Extrapolační úvahy v téže práci [FK01] nám umožnily dokázat i jisté užitečné zobecnění Yanovy věty.

Aplikací našich dekompozičních metod se zabýváme především v Section 2.3. Těžiště je ve vyšetřování integrálních operátorů, které vznikají po formulaci problému limitních vnoření v termínech nerostoucích přerovnání, a to v Lorentzových prostorech.

Nechť f je nerostoucí a nezáporná funkce na $(0,\infty)$ s nosičem v $[0,1]$ a dále $\alpha, \beta > 0$. Potom položíme

$$g(\sigma) = f(\log(1/\sigma)), \qquad \sigma \in (0,1). \tag{6.6}$$

Poznamenejme, že tato substituce je jádrem „Moserova triku". Funkce f totiž odpovídá nerostoucímu přerovnání gradientu funkce ze Sobolevova prostoru a operátor J v následující větě potom vzetí primitivní funkce (po substituci, která vše převede na $(0,1)$).

Věta 6.7. *Nechť f a g jsou asociovány formulí* (6.6) *a předpokládejme, že* $f \in L^{q',p}(0,\infty)$ *s nějakým* $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, *a přitom* $p \neq q'$. *Nechť*

$$Tg(t) = \int_t^1 \frac{g(s)}{s}\, ds.$$

Potom existuje $c > 0$ tak, že $\sup_k k^{-1/q} \|Tg\|_{k,\infty,I_k} \leq c$ *pro všechna f taková, že* $\|f\|_{L^{q',p}} \leq 1$.

Tvrzení v poslední větě znamená příslušnou exponenciální integrovatelnost funkce Tg. Další tvrzení tohoto typu pro $p = 1$ a další postačující podmínky jsou podrobně rozebrány v disertační práci.

Obrátíme se nyní k limitním vnořením logaritmických prostorů. Je především formulována a dokázána věta, zobecňující limitní vnoření BW-typu (Brézis a Wainger [BW80]) pro logaritmické Sobolevovy prostory jako důsledek našeho zobecnění limitní věty Fusca, Lionse a Sbordoneho [FLS96].

Nechť J_s je Besselův potenciál řádu s, $s \in \mathbb{R}^1$, and Φ Youngova funkce. Pak definujeme potenciální Orliczův-Sobolevův prostor $H^s_\Phi(\mathbb{R}^N)$ jako isomorfní kopii $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ při zobrazení $g \mapsto J_s * g$; je-li $u = J_s * g$ pro nějaké $g \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, potom položíme $\|u\|_{H^s_\Phi(\mathbb{R}^N)} = \|g\|_{L_\Phi(\mathbb{R}^N)}$. Prostor $H^s_\Phi(\Omega)$ lze definujeme jako restrikci $H^s_\Phi(\mathbb{R}^N)$ na Ω s odpovídající faktornormou. Budeme psát H^s_Φ místo $H^s_\Phi(\Omega)$.

Pro $1 < p < \infty$ a $\sigma \geq 0$ položíme $M_\sigma(t) = t^p \log^{-\sigma}(e + t)$, $t \geq 0$. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že Ω je lipschitzovská oblast. Prostor E_Φ nechť označuje uzávěr $C(\overline{\Omega})$ v L_Φ.

Následující věta zobecňuje [FLS96]:

Věta 6.8. *Nechť $u \in H^{N/p}_{M_\sigma}$. Potom $u \in E_\Phi$ with $\Phi(t) = \exp t^\alpha - 1$, kde $\alpha = p/(p - 1 + \sigma)$ a existuje $c > 0$ nezávislé na u tak, že*

$$\|u\|_{E_\Phi} \leq c \|u\|_{H^{N/p}_{M_\sigma}}.$$

Dále je pak pro logaritmické Sobolevovy prostory zobecněna věta Brézise a Waingera [BW80] o limitním vnoření. Metoda důkazu byla použita v několika následujících pracích, které tuto větu zobecnily (např. [EGO88]).

Dostáváme se nyní k technicky značně komplikované části práce, používající fourierovských technik v teorii prostorů funkcí. Dokázaná tvrzení jsou však velmi obecná a silná. Původní motivací byla neúspěšná snaha autora dokázat přesné limitní věty o vnoření pro tzv. redukované Sobolevovy prostory pomocí klasických prostředků. O redukovaných Sobolevových prostorech a jejich vnořeních jsme se již zmínili na str. 14. Pro prostory anisotropní prostory, obvykle nazývané *prostory s dominující smíšenou derivací Běsovova*, resp. *Lizorkinova-Triebelova typu*

$S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{q}}B(\mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_m})$, resp. $S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{q}}F(\mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_m})$ (s definicemi odkazujeme vzhledem k jejich formální složitosti přímo na disertační práci) dokazujeme kritická vnoření, jejichž archetypem je

Věta 6.9. *Nechť $1 \le p_j < q_j < \infty$, $r_j = n_j/p_j \quad (j = 1, \ldots, m)$. Potom existuje konstanta c nezávislá na $\bar{q}$ a f tak, že*

$$\|f|L_{\bar{q}}(\mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_m})\| \le c \prod_{j=1}^{m} q_j^{1-1/p_j} \|f|S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{2}}F(\mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_m})\| \tag{6.7}$$

pro všechna $f \in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{2}}F(\mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_m})$.

Poznamenejme, že prostor vpravo v (6.7) je „klasický" Sobolevův prostor, když všechny složky vektoru $\bar{r}$ (parametr hladkosti) jsou celá kladná čísla. Pokud $n_1 = 1$ a $m = 2$, lze tento prostor chápat jako Sobolevův prostor vektorových funkcí s hodnotami ve vhodném anisotropním Sobolevově prostoru

Pro limitní vnoření BW-typu budeme potřebovat některé další označení a pojmy. Především je to *první diference funkce*, $\Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x)$. Dále pro $0 < t < 1$ nechť $\omega_1(f,t)$ je 4*modul spojitosti prvního řádu funkce f*.

Nechť C^μ je *prostor hölderovsky spojitých funkcí.* Pro $\alpha > 0$ definujeme *logaritmický Lipschitzův prostor* (*řádu* α) $\mathrm{Lip}(1,\alpha)$ jako

$$\mathrm{Lip}(1,\alpha) = \Bigg\{ f \in C : \|f|\,\mathrm{Lip}(1,\alpha)\| \\ = \|f|L_\infty\| + \sup_{|h|<1/2} \frac{\|\Delta_h f(x)|L_\infty\|}{|h|\left[\log\left(1+\frac{1}{|h|}\right)\right]^\alpha} < \infty \Bigg\}.$$

Pro $f \in \mathrm{Lip}(1,\alpha)$ hovoříme o *skoro lipschitzovsky spojitých funkcích*, pokud není potřeba specifikovat hodnotu α.

Jedním ze základních tvrzení je tu naše věta o extrapolaci Hölderových prostorů.

Fig. 1: **BW-vnoření**

$$
\begin{tikzcd}
W^{m+1}_{N/m} = (\Delta - E)^{-1/2} W^{m}_{N/m} \arrow[rr] \arrow[d] & & (\Delta - E)^{-1/2} W^{\mathcal{S}}_{N/m} = W^{\mathcal{S}+1}_{N/m} \arrow[d] \\
B^{1}_{\infty\ N/m} = (\Delta - E)^{-1/2} B^{0}_{\infty\ N/m} \arrow[d, "\alpha > \frac{N-m}{N}"'] \arrow[dr] & & (\Delta - E)^{-1/2} S^{\overline{0}}_{\infty\ N/m} B \arrow[dl] \arrow[d] \\
B^{(1,\alpha)}_{\infty\ 1} \arrow[dr] & \mathrm{Lip}(1, (N-m)/N) \arrow[d] & B^{(1,(N-m)/N)}_{\infty\ N/m} \arrow[d, "\beta > 2\cdot\frac{N-m}{N}"] \\
& \mathrm{Lip}(1, \alpha) \arrow[d, "\alpha < \beta"] & B^{(1,\beta)}_{\infty\ 1} \arrow[dl] \\
& \mathrm{Lip}(1, \beta) &
\end{tikzcd}
$$

Proposice 6.10. *Nechť* $0 < \alpha < \infty$. *Potom* $f \in \mathrm{Lip}(1, \alpha)$ *právě tehdy, když* f *patří do* $C(\mathbb{R}^1)$ *a existuje konstanta* c *tak, že*

$$\|f|C^{1-\lambda}\| \leq c\lambda^{-\alpha}$$

pro všechna λ, $0 < \lambda < 1$. *Navíc* $\sup\limits_{0<\lambda<1} \lambda^{\alpha}\|f|C^{1-\lambda}\|$ *je ekvivalentní norma v* $\mathrm{Lip}(1, \alpha)$.

Zformulujeme v tomto přehledu alespoň základní důsledek pro isotropní případ. Práce obsahuje řadu limitních vět pro prostory anisotropní a zde vzhledem k formální komplikovanosti definic a vět dáme přednost zjednodušenému schématu poměrně dosti složitých vztahů mezi jednotlivými zde vystupujícími prostory a jejich vnořeními (viz Fig. 1). Konkrétní extrapolační věta a příslušná limitní vnoření jsou studována v Subsection 3.3.4 disertační práce.

Věta 6.11. *Platí následující vnoření*

(i) *Jestliže* $0 < p \leq \infty$ *and* $1 < q \leq \infty$, *pak* $B_{p\,q}^{N/p+1} \hookrightarrow \mathrm{Lip}(1, 1/q')$.

(ii) *Jestliže* $1 < p < \infty$ *and* $0 < q \leq \infty$, *pak* $F_{p\,q}^{N/p+1} \hookrightarrow \mathrm{Lip}(1, 1/p')$.

Část „aplikační", tedy poslední kapitola je věnována vybraným kvalitativním vlastnostem eliptických rovnic.

Jsou presentovány výsledky aplikací vět o vnoření a o extrapolaci na silnou vlastnost jednoznačného pokračování pro stacionární Schrödingerův operátor a na apriorní odhady pro eliptický systém s VMO koeficienty a pravou stranou v Zygmundově prostoru. Historii těchto problémů jsme diskutovali v části věnované přehledu problematiky.

V první případě používáme Steinovy podmínky (3.3) pro jednoznačné pokračování (viz str. 16).

Potom užitím dekompozice vnoření v (3.2) (viz str. 16) dokazujeme, že za našich předpokladů platí podmínka dokonce silnější,

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{A\subset B\\ |A|<\delta}} \|T(V\chi_A)\| = 0. \tag{6.8}$$

Věta 6.12. *Nechť* $N \geq 3$.

(1) *Nechť* $V \in L^{N/2,r}$, $N/2 \leq r < \infty$. *Potom platí* (3.2) *a* (6.8).

(2) *Nechť* $V \in L^{N/2,\infty}$. *Potom platí* (3.2).

Speciální tvrzení v termínech Zygmundových prostorů dostáváme dále i pro případ $N = 2$.

Důsledkem je věta o silné vlastnosti jednoznačného pokračování (SUCP):

Korolár 6.13. (1) *Nechť* $N = 3$. *Předpokládejme, že* $V \in L^{3/2,r}$, *přičemž* $3/2 \leq r < \infty$. *Potom nerovnost* $|\Delta u| \leq V|u|$ *má* SUCP *v* $W^{2,2}_{\mathrm{loc}} \cap W^{1,2}_0$.

(2) *Nechť* $N = 2$. *Nechť* $u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}} \cap W^{1,2}_0$, *a nechť* $V \in L^{1,s}(\log L)^{\beta}$, *kde* s *a* β *splňují*

$$0 < s \leq 1, \quad \beta \geq 1,$$

nebo

$$1 < s < \infty, \quad \beta \geq 2 - 1/s,$$

nebo

$$s = \infty, \quad \beta > 2.$$

Potom nerovnost $|\Delta u| \leq V|u|$ *má* SUCP *v* $W^{2,2}_{\mathrm{loc}} \cap W^{1,2}_0$.

Nakonec studujeme problém

$$\begin{cases} \operatorname{div} A(x)\nabla u = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.9}$$

kde $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < n$, $A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ je samoadjungovaný silně eliptický operátor s koeficienty ve VMO$\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

S pomocí maximální nerovnosti a Di Faziových apriorních odhadů [DiF96] pak dokazujeme, že platí

Věta 6.14. *Nechť* $\alpha > 0$ *a* $f \in L(\log L)^\alpha$. *Nechť* u *je řešení* (6.9). *Potom apriorní odhad*

$$\| \, |Du| \, \|_{L^{N/(N-1)}(\log L)^{-1+[N\alpha/(N-1)]}} \leq K \, \|f\|_{L(\log L)^\alpha}$$

platí pro každé $\alpha \geq (N-1)/N$.

7 K dalšímu rozvoji teorie a aplikacím

Do disertační práce jsou zařazeny výsledky, které nějakým význačnějším způsobem posunuly naše znalosti v oboru a znamenaly i podnět k dalšímu jejich rozvíjení. Monografie [KK91] se stala vcelku standardní referencí. Téma limitních vnoření Sobolevových prostorů bylo do české matematické literatury přineseno poprvé zřejmě autorem v roce 1985 v [K85] (preprint vyšel v r. 1983). Pozdější práce s D. E. Edmundsem, zejména pak [EK95] a [EK00] se staly podnětem k dalšímu studiu jemných vlastností limitních vnoření a dekomposicí v obecnějších Lorentzových-Zygmundových prostorech nebo i prostorů, založených na prostorech Karamatových. Jak ukazují práce [EK00], [EK01] (společně s D. E. Edmundsem) a [FK01] (společně s A. Fiorenzou), nalezli jsme vhodný a velice silný nástroj ke studiu omezenosti různých integrálních operátorů, kdy cílovým prostorem jsou Zygmundovy a exponenciální Orliczovy (případně i některé Orliczovy-Lorentzovy) prostory.

Prostory, které jsou studovány pomocí prostředků fourierovské analýzy, jsou velice důležité v aplikacích. Speciálně pak prostory s dominující smíšenou derivací zahrnují i Sobolevovy (Běsovovy, atd.) prostory vektorových funkcí s hodnotami v jiném Sobolevově (Běsovově, atd.) prostoru nepostradatelné pro evoluční problémy. Samotná jejich teorie je poměrně komplikovaná, odpovídá to však zřejmě podstatě problémů. Problémy, které čekají na vyřešení, například obecnější věty o rozšiřování z oblastí na celý eukleidovský prostor, související interpolační vlastnosti nebo určení asymptotického chování čísel entropie jsou skutečnou výzvou. V posledních létech získávají na významu prostory vektorových funkcí s hodnotami v obecných Banachových prostorech. Jakmile však prostor hodnot není hilbertovský, přestávají platit podstatné vlastnosti Fourierovy transformace a to přináší zásadní problémy. Jistého významného pokroku bylo nicméně v posledních létech dosaženo.

Interakce teorie prostorů funkcí, operátorů na nich a problémů v diferenciálních rovnicích a systémech hraje dnes zásadní roli. Samozřejmě jsou dnes oba obory velmi rozsáhlé a specializované a nabízejí nesmírné množství otevřených zajímavých problémů, které snadno naplní celý matematikův profesionální život. V současné době existuje v mnoha směrech vysoce rozvinutá teorie prostorů funkcí, která však na straně druhé neumí uspokojivě zodpovědět některé základní otázky. Na straně druhé se v parciálních diferenciálních rovnicích setkáváme stále častěji s případy, kdy je potřeba použít obecnější aparát, než jsou klasické Lebesgueovy a Sobolevovy prostory. Obecná teorie, zejména pak fourierovská, je však značně komplikovaná a někdy neexistuje dostatečná komunikace mezi specialisty z obou oborů. Trvalou snahou autora je proto komunikace a spolupráce mezi matematiky pracujícími v příbuzných oborech.

Shrňme nyní několik velmi netriviálních problémů spojených s výše diskutovanou problematikou:

– schůdné extrapolační postupy používající Lebesgueovy prostory jako základní stavební bloky
– věty o rozšiřování a o stopách pro anisotropní Sobolevovy prostory a rovněž pro případ, kdy okrajové podmínky jsou předepsány pouze na části hranice
– obecnější teorie váhových prostorů; speciálně fourierovský přístup zde nefunguje, protože váhové Sobolevovy prostory (na $\mathbb{R}^N$) nejsou isomorfními kopiemi váhových Lebesgueových prostorů
– teorie prostorů diferencovatelných vektorových funkcí s hodnotami v Banachových prostorech

– vlastnost silného jednoznačného pokračování a vlastnost jednoznačného pokračování pro obecnější eliptické operátory a rovněž tak vlastnosti nodálních množin vlastních funkcí eliptických operátorů.

Summary

Generally, we present results on qualitative behaviour of integral operators and imbeddings in function spaces. Most of the results can be characterized as a contribution to the continuous endeavour of mathematicians to extend our knowledge about the topics considered beyond the scale of Lebesgue spaces. The main emphasis is put on the boundedness of classical operators of harmonic analysis in Orlicz spaces, on extrapolation methods and limiting imbedding theorems of Trudinger and Brézis-Wainger type for fairly general spaces. Several selected applications to qualitative properties of elliptic operators, namely to apriori estimates for elliptic operators, and to the strong unique continuation property for the stationary Schrödinger operator, demonstrate the power of the theory, even though it is rather difficult to draw a line between the theory and the applications.

The thesis consists of a part of a monograph and further seven research papers, published in various journals (the list can be found in this booklet at the beginning of the Czech text).