



Akademie věd České republiky

Teze disertace
k získání vědeckého titulu „doktor věd“
ve skupině věd fyzikálně-matematických

Kombinatorické metody v teoretické informatice

Obor: informatika a kybernetika

Daniel Král

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

Praha, květen 2011

Resumé

Tato práce je soubor osmi původních vědeckých článků, na kterých se autorsky podílel Daniel Král. Soubor je doplněn krátkým shrnutím hlavních dosažených výsledků společně s jejich zasazením do současného stavu poznání. Tento soubor prací byl předložen jako teze k získání titulu „doktor věd“ udělovaného Akademií věd České republiky.

Články v souboru tvořícím tuto práci se zabývají aplikacemi kombinatorických metod v oblasti teoretické informatiky. Tři oblasti takových aplikací jsou blíže studovány: algebraické odstraňovací lemmata související s tzv. testováním vlastností, strukturální výsledky o grafech velkého obvodu a algoritmy pro matroidy s rozklady malé šířky.

Grafové odstraňovací lemma a jeho zobecnění jsou jádrem mnoha algoritmů v nedávno rozvinuté oblasti testování vlastností. Historicky, taková tvrzení byla odvozována ze Szemerédiho regularity lemmatu nebo některé z jeho variant. Teprve nedávno byl nalezen přímý kombinatorický důkaz grafového odstraňovacího lemmatu. Green, inspirován aplikacemi v důkazech o existenci dlouhých aritmetických posloupností v hustých množinách celých čísel, dokázal analogii Szemerédiho regularity lemmatu pro abelovské grupy a odvodil odpovídající odstraňovací lemma. Ve dvou článcích předloženého souboru, podáme kombinatorický důkaz tohoto odstraňovacího lemmatu, který umožňuje rozšířit tento výsledek i na neabelovské grupy. Také dokážeme odstraňovací lemma pro systémy rovnic nad celými čísly v podobě, v jaké bylo vysloveno jako domněnka Greenem. Toto lemma mimo jiné implikuje Szemerédiho větu o existenci dlouhých aritmetických posloupností v hustých množinách celých čísel.

Grafy bez krátkých kružnic lokálně připomínají stromy a je přirozené studovat do jaké míry tato podoba způsobuje, že některé jejich vlastnosti odpovídají stromům. Ve čtyřech článcích předloženého souboru studuje chování takových grafů vzhledem k barevnosti. Snarky jsou kubické grafy bez mostů, jejichž hrany nelze obarvit třemi barvami. Pro řadu slavných otevřených problémů v teorii grafů, včetně Cycle Double Cover Conjecture a Berge Fulkerson Conjecture, se ví, že je stačí dokázat pro snarky. Je známo, že existují snarky libovolně velkého obvodu (Jaeger a Swart vyslovili domněnku, že takové snarky neexistují), ale my na druhou stranu dokážeme, že snarky velkého obvodu jsou cirkulárně hranově skoro tří-obarvitelné. Tento výsledek pak zobecníme na grafy s libovolným maxi-

málním stupněm. Významným problémem v oblasti barevnosti grafů je domněnka Behzada a Vizinga o totálním barvení grafů, která byla dokázána ve zlomkové verzi Kilakosem a Reedem. Reed vyslovil domněnku, že zlomková totální barevnost grafů velkého obvodu je asymptoticky rovná triviálnímu dolnímu odhadu $\Delta + 1$. Jedním z našich výsledků je důkaz této domněnky a jejího zesílení pro grafy se sudým maximálním stupněm.

Také studujeme, do jaké míry lze přenést známé algoritmy pro omezené třídy grafů na třídy matroidů. Matroidy jsou kombinatorické struktury, které zobecňují pojem grafu a pojem lineární nezávislosti vektorů. Je známo, že platí analogie slavné Courcellovy věty o existenci lineárního algoritmu pro testování grafových vlastností vyjádřitelných v monadické logice druhého řádu pro třídy grafů omezené stromové šířky pro matroidy reprezentované nad konečnými tělesy s omezenou větvicí šířkou. My zavedeme pojem rozkladové šířky, který nám umožní tyto výsledky rozšířit i na matroidy, které nejsou reprezentované nad konečnými tělesy. Také studujeme rozhodování a hledání reprezentací takových matroidů nad různými konečnými tělesy.

Summary

This work is a collection of eight research papers (co)authored by Daniel Král' equipped with a short summary of the main results together with introduction to the state of the art. This collection of the papers has been submitted to fulfil requirements for obtaining the degree Doctor of Sciences given by the Academy of Sciences of the Czech Republic.

The papers in the collection deal with applications of combinatorial methods in theoretical computer science. Three areas of such applications are presented: algebraic removal lemmas related to property testing, structural results on graphs with large girth and algorithms for matroids admitting small-width decompositions.

The Graph Removal Lemma and its generalizations form cores of algorithms in the recently developed area of property testing. Traditionally, removal lemmas have been derived from the Szemerédi Regularity Lemma or one of its variants. Only recently, a direct proof of the Graph Removal Lemma has been obtained. Green, inspired by applications in proofs of the existence of long arithmetic progressions in dense subsets of integers, developed a version of the Szemerédi Regularity Lemma for abelian groups and obtained an analogue of the Graph Removal Lemma for such groups. In two of the papers in the collection, we provide a combinatorial proof of his analogue of the Graph Removal Lemma which allows us to extend the result to all groups and we prove a statement of the removal lemma for systems of equations over integers in the form conjectured by Green. This lemma, in particular, implies Szemerédi theorem on the existence of long arithmetic progressions in dense subsets of integers.

Graphs with no cycles of short length locally resemble trees and it is natural to ask to which extent this resemblances causes their behavior to be similar to that of trees. In four of the papers in the collection, we study behavior of such graphs with respect to coloring parameters. Snarks are cubic bridgeless graphs that do not admit a coloring of their edges with three colors. Several important conjecture in the area of structural graph theory, such as Cycle Double Cover Conjecture or Berge Fulkerson Conjecture, are known to be enough to be proved for snarks. It is also known that there exist snarks of arbitrary large girth (contrary to the conjecture of Jaeger and Swart assuming that they do not exist) but we prove that snarks with large girth are circularly almost three-edge-colorable. We also

establish an analogue of this result for graphs with arbitrary maximum degree. An important problem in the area of graph colorings is the Total Coloring Conjecture of Behzad and Vizing which has been proved in the fractional version by Kilakos and Reed. Reed conjectured that the fractional total chromatic number of graphs with large girth asymptotically achieves the trivial lower $\Delta+1$. One of our results is a proof of this conjecture and its strengthening for graphs with maximum even degree.

Finally, we also study the extent to which the known algorithms for restricted classes of graphs translate to matroids. Matroids are combinatorial structures that generalize the concept of graphs and the concept of linear independence of vectors. A celebrated result of Courcelle on linear testability of monadic second order logic properties of graphs with bounded tree-width is known to hold for matroids represented over finite fields with bounded branch-width. We introduce a notion of the decomposition width of matroids that allows us to further extend this results to matroid not necessarily representable over finite fields. We also discuss deciding and computing representations of such matroids over various finite fields.

Seznam článků tvořících práci

- [I] D. Král, O. Serra, L. Vena: A combinatorial proof of the Removal Lemma for groups, *Journal of Combinatorial Theory Series A* 116 (2009), 971–978, doi:10.1016/j.jcta.2008.12.003.
- [II] D. Král, O. Serra, L. Vena: A Removal Lemma for systems of linear equations over finite fields, *Israel Journal of Mathematics* (2012), in press, doi:10.1007/s11856-011-0080-y.
- [III] T. Kaiser, D. Král, R. Škrekovski: A revival of the Girth Conjecture, *Journal of Combinatorial Theory Series B* 92 (2004), 41–53, doi:10.1016/j.jctb.2004.04.003.
- [IV] T. Kaiser, D. Král, R. Škrekovski, X. Zhu: The circular chromatic index of graphs of high girth, *Journal of Combinatorial Theory Series B* 97 (2007), 1–13, doi:10.1016/j.jctb.2006.03.002.
- [V] T. Kaiser, A. King, D. Král: Fractional total colourings of graphs of high girth, *Journal of Combinatorial Theory Series B* (2011), in press, doi:10.1016/j.jctb.2010.12.005.
- [VI] F. Kardoš, D. Král, J.-S. Sereni: The last fraction of a fractional conjecture, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 24 (2010), 699–707, doi:10.1137/090779097.
- [VII] D. Král: Computing representations of matroids of bounded branch-width, *Proceedings 24th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'07)*, *Lecture Notes in Computer Science* vol. 4393, pp. 224–235, Springer-Verlag, 2007.
- [VIII] D. Král: Decomposition width of matroids, *Discrete Applied Mathematics* (2011), in press, doi:10.1016/j.dam.2011.03.016.

Rozšířený abstrakt článku [VIII] lze nalézt v *Proceedings 37st International Colloquium Automata, Languages and Programming (ICALP'10)*, *Lecture Notes in Computer Science* vol. 6198, pp. 55–66, Springer-Verlag, 2010.

Obsah

Resumé	iii
Summary	v
Seznam článků tvořících práci	vii
Obsah	viii
1 Úvod	1
1.1 Vymezení vědeckého přínosu	1
1.2 Základní pojmy teorie grafů	2
2 Regularita kombinatorických struktur	3
2.1 Regularity lemma	3
2.2 Odstraňovací vlastnosti	4
2.3 Aplikace odstraňovacího lemmatu	5
2.3.1 Teorie čísel	6
2.3.2 Testování vlastností velkých struktur	6
2.4 Algebraické odstraňovací vlastnosti	6
3 Barevnost grafů velkého obvodu	9
3.1 Barevnost grafů	9
3.2 Grafy velkého obvodu	11
3.3 Hranová barevnost grafů	13
3.4 Totální barevnost grafů	15
4 Algoritmická teorie matroidů	17
4.1 Matroidy	17
4.1.1 Příklady matroidů	18
4.1.2 Algoritmy pro matroidy	19
4.2 Šířkové parametry	20
4.3 Algoritmické metavěty pro grafy	22
4.4 Algoritmické metavěty pro matroidy	23

Literatura

27

Kapitola 1

Úvod

Předložená doktorská práce je tvořena souborem osmi článků ze tří oblastí teoretické informatiky, které patří mezi hlavní obory vědeckého zájmu autora. Tento soubor je opatřen krátkým komentovaným shrnutím, které by mělo umožnit čtenáři zařazení předložených vědeckých poznatků do kontextu současné informatiky a matematiky. Stručně též zmíníme další směry budoucí vědecké práce autora stejně tak jako i jeho další výsledky, které sice nejsou obsahem předloženého souboru prací, ale na předkládané výsledky navazují.

1.1 Vymezení vědeckého přínosu

Stručně pojmenujme hlavní vědecký přínos poznatků obsažených v článcích, které tvoří tuto práci.

- kombinatorický důkaz Greenova odstraňovacího lemmatu pro grupové rovnice, který umožnil zobecnění lemmatu na neabelovské grupy [I]
- důkaz Greenovy domněnky o existenci odstraňovacího lemmatu pro systémy rovnic [II]
- důkaz cirkulární relaxace tzv. Girth conjecture [III] a její zobecnění pro nekubické grafy [IV]
- důkaz Reedovy domněnky o zlomkovém totálním barvení grafů velkého obvodu [VI] a její zesílení pro grafy sudého maximálního stupně [V]
- algoritmus pro počítání reprezentací matroidů omezené větvící šířky reprezentovaných nad konečnými tělesy [VII]
- zavedení pojmu rozkladové šířky matroidu, který umožnil zobecnit algoritmické výsledky o matroidech omezené větvící šířky reprezentovaných nad konečnými tělesy na nereprezentovatelné matroidy [VIII]

1.2 Základní pojmy teorie grafů

Předkládaná práce je tvořena souborem článků, z nichž část patří do oblasti teorie grafů. Ačkoliv předpokládáme, že většina čtenářů bude obeznámena se základními pojmy teorie grafů, přesto si dovolíme zařadit velmi stručné představení této oblasti. Podrobnější úvod do problematiky lze najít např. v monografii [11] a českou terminologii pak v učebnici [66].

Grafem rozumíme dvojici (V, E) , kde E je podmnožina neuspořádaných dvojic prvků z množiny V ; prvky množiny V nazýváme vrcholy a prvky množiny E hrany. Pokud jsou dvojice v množině E uspořádané, hovoříme o orientovaném grafu, a pokud E je multimnožina, hovoříme o multigrafu. Pokud dva vrcholy u a v tvoří dvojici e z množiny E , nazýváme je sousedy a hovoříme též o tom, že jsou spojeny hranou e . Počet sousedů daného vrcholu nazýváme jeho stupněm. Graf G je k -regulární, pokud každý vrchol má stupeň přesně k . Grafy, které jsou 3-regulární, se nazývají kubické.

Příkladem grafu může být úplný graf K_n , který je tvořen n vrcholy, z nichž každá dvojice tvoří hranu. Jiným příkladem grafu je kružnice C_n tvořená n vrcholy v_1, \dots, v_n a hranami $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ a v_nv_1 .

Podgrafem grafu $G = (V, E)$ je graf $G' = (V', E')$, kde $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$. Podgraf grafu G indukovaný množinou vrcholů V' je podgraf, který obsahuje V' a všechny hrany, jejichž oba koncové vrcholy leží ve V' . Množina vrcholů A je nezávislá, pokud indukuje podgraf, který neobsahuje žádné hrany, tj. každá hrana obsahuje nejvýše jeden vrchol z množiny A . Graf, jehož vrcholy lze rozdělit do dvou disjunktích nezávislých množin, se nazývá bipartitní.

Cestou P v grafu G je posloupnost vrcholů v_1, \dots, v_k takových, že G obsahuje hrany $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k$; budeme též říkat, že cesta P spojuje vrcholy v_1 a v_k . Graf je souvislý, pokud každé dva jeho vrcholy jsou spojeny cestou. Pokud graf není souvislý, lze ukázat, že vlastnost „být spojen cestou“ je ekvivalence na množině vrcholů. Podgrafy indukované jejich třídami se nazývají komponenty grafu. Strom je souvislý graf, který neobsahuje kružnici jako podgraf, a les je graf, jehož každá komponenta souvislosti je strom. Hrana, jejíž odebrání zvýší počet komponent, se nazývá most.

Některé grafy lze nakreslit do roviny tak, že vrcholy grafu odpovídají bodům roviny a hrany, které je spojují, jsou křivky v rovině, které se kromě bodů odpovídajícím jejím koncovým vrcholům nikde nekříží. Stěna v takovém nakreslení je část roviny, kde lze každé dva body spojit křivkou neprotínající nakreslení grafu. Grafy, které mají takové nakreslení, se nazývají rovinné grafy.

V této práci se též budeme zabývat hypergrafy, které jsou zobecněním grafů. Hypergraf H je uspořádaná dvojice (V, E) , kde množina E je tvořena některými z neprázdných podmnožin množiny vrcholů V . Tyto podmnožiny se nazývají, podobně jako v případě grafů, hrany. Pokud každá hrana obsahuje právě k vrcholů, řekneme, že hypergraf H je k -uniformní.

Kapitola 2

Regularita kombinatorických struktur

V této kapitole představíme výsledky o regularitě grafů a jejich použití v algoritmech pro testování vlastností velkých kombinatorických objektů. Následně pak zformulujeme poznatky z článků [I] a [II] o analogických výsledcích pro algebraické struktury, které tvoří soubor článků předložených jako součást této práce.

2.1 Regularity lemma

Szemerédi v sedmdesátých letech dvacátého století zformuloval lemma, které se stalo jedním z nejvýznamnějších nástrojů pro práci s hustými grafy. Hustým grafem zde míníme n -vrcholový graf, který obsahuje alespoň $\Omega(n^2)$ hran. Toto lemma je v literatuře běžně označováno jako Szemerédiho regularity lemma (SRL).

Před precizním vyslovením lemmatu si stručně popišme jeho znění na abstraktní úrovni. Szemerédiho regularity lemma garantuje, že vrcholy každého grafu lze rozdělit do konečně mnoha množin stejné velikosti tak, že hrany rozkládaného grafu budou mezi většinou dvojic těchto množin rozloženy pseudonáhodně. Nyní jednotlivé pojmy zadefinujeme formálně.

Nechť X a Y jsou dvě disjunktní podmnožiny vrcholů grafu G . Jako $e(X, Y)$ si označme počet hran mezi množinami X a Y ; hustota dvojice X a Y , kterou budeme značit $d(X, Y)$ je $e(X, Y)/|X||Y|$. Dvojici X a Y nazveme ε -regulární pro $\varepsilon \in (0, 1)$, pokud pro každou podmnožinu X' množiny X s alespoň $\varepsilon|X|$ prvky a každou podmnožinu Y' množiny Y s alespoň $\varepsilon|Y|$ prvky platí následující:

$$|(d(X', Y') - d(X, Y))| \leq \varepsilon.$$

Méně formálně – dvojice X a Y je ε -regulární, pokud hustota hran mezi libovolnými dvěma podmnožinami X a Y , které nejsou příliš malé, je zhruba stejná jako hustota hran mezi X a Y . Parametr ε pak kontroluje význam „příliš malé“ a „zhruba stejná“.

Nechť G je graf. Rozklad množiny $V(G)$ jeho vrcholů do disjunktních podmnožin V_1, \dots, V_k nazveme rovnoměrný, pokud se velikost každých dvou z těchto množin liší nejvýše o jedna, tj. platí $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ pro každou dvojici i a j s $1 \leq i < j \leq k$. Vyslovme nyní Szemerédiho regularity lemma.

Lemma 2.1 (Szemerédiho regularity lemma [96]) *Pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$ a každé přirozené číslo k_0 , existuje přirozené číslo K_0 takové, že každý graf G má rovnoměrný rozklad množiny svých vrcholů na podmnožiny V_1, \dots, V_k , kde $k_0 \leq k \leq K_0$, takový, že alespoň $\binom{k}{2} - \varepsilon k^2$ dvojic množin V_i a V_j , $1 \leq i < j \leq k$, je ε -regulárních.*

Szemerédiho regularity lemma se stalo významným nástrojem používaným pro studium hustých grafů. V oblasti hypergrafů se ukázalo, že formulace a důkaz dostatečně silné varianty regularity lemmatu není jednoduchý a dostatečně silné tvrzení se podařilo dokázat až v [84]. Formulace verze lemmatu pro hypergrafy je však značně složitá a přesahuje rámec této práce.

2.2 Odstraňovací vlastnosti

Nyní si popíšeme jednu z prvních aplikací Szemerédiho regularity lemmatu. Jedná se o tzv. odstraňovací lemma (removal lemma). Nejdříve vyslovíme a jeho nejjednodušší verzi pro trojúhelníky, dokázanou Ruzsou a Szemerédím. Jako ilustraci metod používaných v této oblasti podáme i krátký důkaz.

Lemma 2.2 (Odstraňovací lemma pro trojúhelníky [85]) *Pro každé reálné číslo $\varepsilon_0 > 0$, existuje reálné číslo $\delta_0 > 0$ takové, že pro každý graf G na n vrcholech platí alespoň jedno z následujících tvrzení:*

- Graf G obsahuje alespoň $\delta_0 n^3$ trojúhelníků.
- Graf G obsahuje množinu hran F , $|F| \leq \varepsilon_0 n^2$, takovou, že každý trojúhelník v G obsahuje alespoň jednu hranu z množiny F , tj., graf $G \setminus F$ nemá žádné trojúhelníky.

Stručně si vysvětleme význam tohoto tvrzení: Lemma říká, že buď každý graf G obsahuje hodně trojúhelníků, kde hodně znamená konstantní část jejich maximálního možného počtu $\binom{n}{3}$, nebo graf G obsahuje malou množinu hran (konstantní část jejich maximálního počtu, který je $\binom{n}{2}$), jejímž odebráním vznikne graf bez trojúhelníků.

Zamysleme se, jak by mělo znít odstraňovací lemma pro obecný graf H jako podgraf. Druhý závěr by měl zůstat zachován – pokud má graf G málo podgrafů H , pak existuje malá množina hran F , že graf $G \setminus F$ neobsahuje H jako podgraf. Zbývá tedy definovat, co znamená „málo“ podgrafů H . Pokud podgraf H má k

vrcholů, je maximální možný počet podgrafů grafu na n vrcholech $k! \binom{n}{k}$, tedy polynom stupně k , pokud je k pevné. Takovéto tvrzení skutečně platí a je známo jako obecné odstraňovací lemma pro grafy (removal lemma for graphs).

Lemma 2.3 (Odstraňovací lemma [85]) *Pro každé reálné číslo $\varepsilon_0 > 0$ a pro každý graf H na k vrcholech, existuje reálné číslo $\delta_0 > 0$ takové, že pro každý graf G na n vrcholech platí alespoň jedno z následujících tvrzení:*

- Graf G obsahuje alespoň $\delta_0 n^k$ různých podgrafů izomorfních grafu H .
- Graf G obsahuje množinu hran F , $|F| \leq \varepsilon_0 n^2$, takovou, že každý každý podgraf grafu G , který je izomorfní grafu H , obsahuje alespoň jednu hranu z množiny F , tj., graf $G \setminus F$ nemá žádný podgraf izomorfní grafu H .

Odstraňovací lemma bylo zobecněno na orientované grafy, hypergrafy [37, 70] a obecné relační struktury [97]. Nyní zformulujeme odstraňovací lemma pro hypergrafy, které tvoří jeden z našich nástrojů. Všimněme si následujícího: Protože maximální počet hyperhran ℓ -uniformního hypergrafu je $\binom{n}{\ell} = \Theta(n^\ell)$, počet hran v množině F je nyní omezen polynomem stupně ℓ .

Lemma 2.4 (Odstraňovací lemma pro hypergrafy [70]) *Pro každé reálné číslo $\varepsilon_0 > 0$ a pro každý ℓ -uniformní hypergraf H na k vrcholech, existuje reálné číslo $\delta_0 > 0$ takové, že pro každý ℓ -uniformní hypergraf G na n vrcholech platí alespoň jedno z následujících tvrzení:*

- Hypergraf G obsahuje alespoň $\delta_0 n^k$ různých podhypergrafů izomorfních hypergrafu H .
- Hypergraf G obsahuje množinu hran F , $|F| \leq \varepsilon_0 n^\ell$, takovou, že každý každý podhypergraf grafu G , který je izomorfní hypergrafu H , obsahuje alespoň jednu hranu z množiny F , tj., hypergraf $G \setminus F$ nemá žádný podhypergraf izomorfní hypergrafu H .

Všechny známé důkazy odstraňovacích lemmat využívaly Szemerédiho regularity lemma nebo některé z jeho zobecnění. V tomto směru bylo dosaženo před dvěma lety velkého pokroku, kdy Fox [22] dokázal odstraňovací lemma pro trojúhelníky přímo a později svůj důkaz zobecnil pro obecné grafy. Jeho postup vedl k výraznému zlepšení závislosti δ_0 na ε_0 v odstraňovacím lemmatu.

2.3 Aplikace odstraňovacího lemmatu

V této sekci bychom rádi předvedli dvě aplikace odstraňovacího lemmatu. První z nich má vztah k teorii čísel a známé Szemerédiho větě o existenci aritmetických posloupností v hustých množinách celých čísel. Druhou je pak algoritmus pro pravděpodobnostní testování vlastností velkých struktur (property testing).

2.3.1 Teorie čísel

Zformulujme Szemerédiho větu o existenci aritmetických posloupností v hustých množinách celých čísel:

Věta 2.5 (Szemerédiho věta [95]) *Pro každé přirozené číslo k a každé reálné číslo $\varepsilon > 0$, existuje n_0 , že každá podmnožina $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ pro $n \geq n_0$ a $|X| \geq \varepsilon n$ obsahuje aritmetickou posloupnost délky k .*

Speciálním případem této věty pro $k = 3$ je Rothovova věta.

Věta 2.6 (Rothova věta [83]) *Pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$, existuje n_0 , že každá podmnožina $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ pro $n \geq n_0$ a $|X| \geq \varepsilon n$ obsahuje tříprvkovou aritmetickou posloupnost.*

2.3.2 Testování vlastností velkých struktur

Významné jsou aplikace odstraňovacích lemmat v informatice v oblasti testování vlastností (property testing) [20, 35]. V našem výkladu se omezíme na vlastnosti grafů. Uvažme, nějakou vlastnost \mathcal{P} grafů; na \mathcal{P} se dívejme jako na množinu grafů, které mají danou vlastnost. Řekněme, že graf G na n vrcholech je ε -daleko od vlastnosti \mathcal{P} , pokud neexistuje množina hran F , $|F| \leq \varepsilon n^2$, taková, že $G \Delta F \in \mathcal{P}$. Graf $G \Delta F$ je graf, který získáme z G odebráním hran z $F \cap E(G)$ a přidáním hran z $F \setminus E(G)$.

Odstraňovací lemmata umožňují navrhnout pravděpodobnostní algoritmy, které s velkou pravděpodobností přijmou graf G , pokud má vlastnost \mathcal{P} , a s velkou pravděpodobností graf G odmítnou, pokud je ε -daleko od vlastnosti \mathcal{P} . Například pro vlastnost „nemít trojúhelník“, Lemma 2.2 zaručuje, že pokud n -vrcholový graf G je ε -daleko od této vlastnosti, pak G obsahuje $\Omega(n^3)$ trojúhelníků. Lze tedy navrhnout takový pravděpodobnostní algoritmus, který po přečtení náhodně vybrané konstantně velké části grafu G přijme, pokud nemá trojúhelníky, a s vysokou pravděpodobností odmítne, pokud G je ε -daleko od vlastnosti „nemít trojúhelník“.

2.4 Algebraické odstraňovací vlastnosti

Green, inspirován použitím odstraňovacího lemmatu v oblasti teorie čísel, zformuloval regularity lemma pro abelovské grupy [36]. Ze své verze regularity lemmatu pak vyvodil následující odstraňovací lemma pro grupové rovnosti.

Lemma 2.7 (Odstraňovací lemma pro abelovské grupy [36]) *Pro každé celé číslo k a každé reálné číslo $\varepsilon_0 > 0$, existuje reálné číslo $\delta_0 > 0$ takové, že pro každou abelovskou grupu G řádu N a každé podmnožiny X_1, \dots, X_k jejich prvků platí alespoň jedno z následujících tvrzení:*

- Existuje alespoň $\delta_0 N^{k-1}$ k -tic $x_1 \in X_1, \dots, x_k \in X_k$ takových, že $x_1 + \dots + x_k = 0$ (kde 0 značí neutrální prvek grupy G).
- Existují podmnožiny $X'_1 \subseteq X_1, \dots, X'_k \subseteq X_k$ takové, že $|X_i \setminus X'_i| \leq \varepsilon_0 N$, $i = 1, \dots, k$, a pro každou k -tici $x_1 \in X'_1, \dots, x_k \in X'_k$ platí $x_1 + \dots + x_k \neq 0$.

Povšimněme si, že Lemma 2.7 je analogií odstraňovacích lemmat pro grafy: maximální počet řešení rovnosti je nejvýše N^{k-1} (zachováváme tedy stupeň polynomu, analogicky k počtu podgrafů) a množiny, ze kterých vybíráme hodnoty neznámých, mají maximální velikost N (tedy opět zachováváme stupeň polynomu). Poznamenejme, že Lemma 2.7 implikuje Rothovu větu (Věta 2.6).

V práci [I], která je předmětem předkládaného souboru prací, jsme společně s Serrou a Venou, odvodili Lemma 2.7 z grafového odstraňovacího lemmatu pro obecné (tedy ne nutně abelovské) grupy. Poznamenejme, že metody použité Greenem k důkazu jeho výsledkem jsou založeny na Fourierovské analýze a je tedy nepravděpodobné, že by je bylo možné využít k důkazu tohoto zesílení. Zformulujeme naše zesílení.

Lemma 2.8 (Odstraňovací lemma pro grupy [I]) *Pro každé celé číslo k a každé reálné číslo $\varepsilon_0 > 0$, existuje reálné číslo $\delta_0 > 0$ takové, že pro každou grupu G řádu N a každé podmnožiny X_1, \dots, X_k jejích prvků platí alespoň jedno z následujících tvrzení:*

- Existuje alespoň $\delta_0 N^{k-1}$ k -tic $x_1 \in X_1, \dots, x_k \in X_k$ takových, že $x_1 + \dots + x_k = 0$ (kde 0 značí neutrální prvek grupy G).
- Existují podmnožiny $X'_1 \subseteq X_1, \dots, X'_k \subseteq X_k$ takové, že $|X_i \setminus X'_i| \leq \varepsilon_0 N$, $i = 1, \dots, k$, a pro každou k -tici $x_1 \in X'_1, \dots, x_k \in X'_k$ platí $x_1 + \dots + x_k \neq 0$.

Green ve svém článku [36] vyslovil jako domněnku tvrzení, které by bylo zobecněním Lemmatu 2.7 na systémy rovnic nad celými čísly. Tato domněnka implikuje Szemerédiho větu o aritmetických posloupnostech (Větu 2.5).

Domněnka 2.1 *Pro každou regulární celočíselnou $\ell \times k$ -matici A a každé reálné číslo $\varepsilon_0 > 0$, existuje reálné číslo $\delta_0 > 0$ takové, že pro každých k podmnožin X_1, \dots, X_k množiny $\{1, \dots, n\}$, platí alespoň jedno z následujících tvrzení:*

- Existuje alespoň $\delta_0 n^{k-\ell}$ k -tic $x_1 \in X_1, \dots, x_k \in X_k$, které leží v jádru matice A .
- Existují podmnožiny $X'_1 \subseteq X_1, \dots, X'_k \subseteq X_k$ takové, že $|X_i \setminus X'_i| \leq \varepsilon_0 n$, $i = 1, \dots, k$, a žádná k -tice $x_1 \in X'_1, \dots, x_k \in X'_k$ neleží v jádru matice A .

Částečné výsledky směřující k důkazu Domněnky 2.1 byly oznámeny Candelou [7]. Plný důkaz Greenovi domněnky jsme pak podali společně s Serrou a Venou v článku [II], který je rovněž obsažen v souboru předložených prací. Důkaz je založen na redukci Domněnky 2.1 na hypergrafově odstraňovací lemma (Lemma 2.4). Nezávisle na nás, jinou redukcí na hypergrafově odstraňovací lemma, dokázal Greenovu domněnku také Shapira [91, 92]. Zformulujme hlavní výsledek článku [II], který implikuje Domněnku 2.1.

Věta 2.9 *Pro každá dvě celá čísla k a ℓ a každé reálné číslo $\varepsilon_0 > 0$, existuje reálné číslo $\delta_0 > 0$ takové, že pro každé konečné těleso F řádu q , každou regulární $\ell \times k$ -matici A nad F a každé podmnožiny X_1, \dots, X_k jeho prvků, platí alespoň jedno z následujících tvrzení:*

- *Existuje alespoň $\delta_0 q^{k-\ell}$ k -tic $x_1 \in X_1, \dots, x_k \in X_k$, které leží v jádru matice A .*
- *Existují podmnožiny $X'_1 \subseteq X_1, \dots, X'_k \subseteq X_k$ takové, že $|X_i \setminus X'_i| \leq \varepsilon_0 q$, $i = 1, \dots, k$, a žádná k -tice $x_1 \in X'_1, \dots, x_k \in X'_k$ neleží v jádru matice A .*

Ve Větě 2.9 vidíme stejné dvě možnosti jako v předchozích případech: jádro matice A je tvořeno $q^{k-\ell}$ k -ticemi prvků tělesa F (a tedy opět hledáme počet řešení homogenní rovnice dané maticí A asymptoticky shodný s jejím maximálním počtem řešení) nebo množiny X_1, \dots, X_k umíme lineárně zmenšit tak, aby žádná k -tice jejích prvků neležela v jádru matice A .

Ve své současné vědecké práci se snažím na zkušenosti a poznatky z této oblasti navázat a usiluji o získání zobecnění Věty 2.9 na systémy polynomů; bohužel se nám však zatím nepodařilo dosáhnout dostatečně silných výsledků, které by zde bylo možné zmínit.

Kapitola 3

Barevnost grafů velkého obvodu

Velmi živou oblastí teorie grafů je oblast barevnosti grafů. Otázky studované v této oblasti jsou motivovány jak praktickými problémy souvisejícími s aplikacemi v oblasti přidělování frekvencí tak i základními problémy matematiky souvisejícími s rozklady kombinatorických struktur a jejich extrémními vlastnostmi (např. Ramseyova teorie). Barevnost grafů patří stěžejní oblasti výzkumu autora předkládané práce a byla též hlavním tématem jeho habilitační práce. V souboru článků, které tvoří tuto práci, je oblast barevnosti grafů zastoupena čtyřmi články studujícími barevnost grafů velkého obvodu (žádný z těchto článků nebyl součástí habilitační práce autora).

V této kapitole nejprve podáme stručný úvod do oblasti barevnosti grafů a představíme základní vlastnosti grafů velkého obvodu. Poté představíme výsledky z článků [III], [IV], [V] a [VI], které tvoří soubor článků obsažených v této práci. Rovněž zmíníme i další výsledky autora práce v této oblasti a naznačíme možné budoucí směry výzkumu.

3.1 Barevnost grafů

Funkci $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ nazveme k -obarvení grafu G , pokud každá z množin $c^{-1}(i)$, $i = 1, \dots, k$, je nezávislá. Nejmenší číslo k , pro které existuje k -obarvení grafu G , se nazývá barevnost grafu G a značí $\chi(G)$. Pokud číslo k je zřejmé z kontextu, mluvíme o c jako obarvení, popř. jako o obarvení pomocí k barev.

Jeden z nejstarších a nejslavnějších problémů teorie grafů je Problém čtyř barev, který se ptal, zda lze každý rovinný graf obarvit pomocí čtyř. Tento problém zformuloval kartograf Francis Guthrie v roce 1852. V průběhu 19. století se objevilo několik chybných důkazů tohoto tvrzení, z nichž zmiňme zejména Kempeho důkaz [55] a Taitův důkaz [98]. Kempeho metoda změny obarvení pomocí řetězců se ale stala jedním ze základů dnes známých důkazů tohoto problému [2, 80], které se opírají o analýzu konfigurací pomocí počítače. Taitův důkaz spočíval v přeformulaci problému do duální verze, které je ekvivalentní neexistenci snarků,

kubických grafů bez mostů, které nejsou hranově tříbarevné. Tyto grafy budeme blíže studovat v části 3.3.

Je zřejmé, že barevnost grafu G je nejvýše maximální stupeň $\Delta(G)$ grafu G zvětšený o jedna. Brooksova věta charakterizuje souvislé grafy, pro které je tento jednoduchý odhad nejlepší možný.

Věta 3.1 (Brooksova věta [6]) *Pokud G je souvislý graf s maximálním stupněm $\Delta(G)$, který není ani úplný graf ani kružnice liché délky, pak barevnost grafu G je nejvýše $\chi(G)$.*

Elegantní důkaz Brooksovy věty podal Lovász [64]. Brooksova věta byla úspěšně rozšířena na obecnější typy barvení, z nichž jmenujme zejména barevnost hypergrafů [59], tzv. seznamové barvení [18] nebo problém přidělování frekvencí [61].

Barevnost grafu je celočíselný parametr a proto se jeví příliš hrubý na měření barevnosti některých grafů. Jako motivační příklad zmiňme kružnice liché délky $2\ell+1$, které mají barevnost tři. Přesto intuitivně cítíme, že kružnice C_{1001} je bližší grafu s barevností dva než kružnice C_7 nebo dokonce C_3 . Tento jev pomáhají formálně zachytit neceločíselné relaxace barevnosti. Dvě nejvíce studované jsou cirkulární a zlomková barevnost, které si nyní zavedeme.

Cirkulární barevnost byla zavedena Vincem [101] pod pojmem hvězdová barevnost. Nyní je pojem cirkulární barevnosti již ustálen pod tímto názvem a tento koncept je velmi studován v teorii grafů, o čemž svědčí několik přehledových článků [106, 107]. Cirkulární barevnost lze definovat několika navzájem různými způsoby, z nichž tři si nyní uvedeme.

První definice vychází z představy barev na kružnici v rovině. Cirkulární barevnost grafu G je nejmenší ℓ takové, že existuje zobrazení $c : V(G) \rightarrow S$, kde S je kružnice s obvodem ℓ , takové, že pro každou hranu $uv \in E(G)$ mají oba dva oblouky kružnice S určené body u a v délku alespoň jedna. Lze ukázat, že takové nejmenší ℓ vždy existuje (nabývá se minima).

Druhá definice vychází z představy barev jako čísel modulo nějaké větší číslo. Cirkulární barevnost grafu G je infimum hodnot p/q , $p, q \in \mathbb{N}$, takových, že existuje zobrazení $c : V(G) \rightarrow \{0, \dots, p-1\}$ takové, že pro každou hranu $uv \in E(G)$ platí $q \leq |c(u) - c(v)| \leq p - q$, tj. hodnoty $c(u)$ a $c(v)$ se liší alespoň o q modulo p . Není těžké ukázat, že i v této definici se infimum nabývá.

Třetí definice je přeformulací druhé definice do řeči grafových homomorfismů. Zobrazení $f : V(G) \rightarrow V(H)$ z vrcholů grafu G do vrcholů grafu H nazveme homomorfismem, pokud pro každou hranu $uv \in E(G)$ platí $f(u)f(v) \in E(H)$. Pokud takové zobrazení existuje, říkáme též, že graf G je homomorfní grafu H . Nechť graf $K_{p,q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, je graf, jehož vrcholy jsou čísla $0, \dots, p-1$ a dva jsou spojeny hranou, pokud $q \leq |c(u) - c(v)| \leq p - q$. Cirkulární barevnost grafu G je infimum hodnot p/q , $p, q \in \mathbb{N}$, takových, že graf G má homomorfismus do grafu $K_{p,q}$. I v této definici se infimum vždy nabývá.

Cirkulární barevnost grafu G se značí $\chi_c(G)$ a platí, že $\chi(G) = \lceil \chi_c(G) \rceil$, tj., $\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leq \chi(G)$.

Druhou relaxací barevnosti grafů je zlomková barevnost. Tato relaxace vychází z formulace problému barvení grafů jako celočíselného programu a následně lineární relaxace tohoto programu. I zlomková barevnost patří mezi velmi studované a rozšířené koncepty v teorii grafů, viz např. monografie o zlomkových parametrech v teorii grafů [86].

Nechť G je graf. Barevnost grafu G je řešením celočíselného programu s proměnnými $x_I \in \{0, 1\}$ indexovanými nezávislými množinami grafu G , s podmínkami $\sum_{I \ni v} x_I \geq 1$ pro každý vrchol v a s cílovou funkcí $\min \sum_I x_I$. Uvažme nyní lineární relaxaci tohoto programu, tj., podmínky $x_I \in \{0, 1\}$ nahradíme $0 \leq x_I \leq 1$. Optimální řešení tohoto lineárního programu nazveme zlomkovou barevností grafu G a budeme značit $\chi_f(G)$.

Opět platí, že zlomková barevnost grafu je vždy omezena jeho barevností, ale narozdíl od cirkulární barevnost, zlomková barevnost může být libovolně menší. Jako příklad si uveďme známé Kneserovy grafy. Kneserův graf $K(a, b)$, $a \geq 2b$, je graf, jehož vrcholy jsou všechny b -prvkové podmnožiny množiny $\{1, \dots, a\}$ a dva vrcholy jsou sousední, pokud jim odpovídající množiny jsou disjunktní. Lovász [63] ukázal, že barevnost grafu $K(a, b)$ je rovna $a - 2b + 2$. Na druhou stranu, pokud jako I_j , $j = 1, \dots, a$, označíme nezávislou množinu tvořenou těmi vrcholy, které odpovídají množinám obsahujícím j , pak $x_{I_j} = 1/b$ a $x_I = 0$ pro $I \notin \{I_1, \dots, I_a\}$, je řešení výše uvedeného lineárního programu. Platí tedy $\chi_f(G) \leq a/b$. Pomocí Erdő-Ko-Radovy věty [17] lze ukázat, že $y_X = \binom{a-1}{b-1}^{-1}$, $X \in \binom{\{1, \dots, a\}}{b}$, je řešení duálního programu a tedy platí $\chi_f(G) = a/b$. Volbou b dostatečně velkého, pak získáme grafy se zlomkovou barevností libovolně blízkou dvěma a barevností libovolně vysokou.

3.2 Grafy velkého obvodu

V člancích, které tvoří tuto práci, se zabýváme barevností grafů velkého obvodu. Připomeňme, že obvod grafu je délka jeho nejkratší kružnice. Grafy velkého obvodu tedy vypadají lokálně jako stromy a bylo by proto možné se domnívat, že jejich barevnost bude omezená. Tomu však tak není, jak ukázal Erdős [16], který pravděpodobnostním argumentem ukázal, že pro každá přirozená čísla g a k existuje graf s obvodem g a barevností k . Později byly nalezeny i explicitní konstrukce takových grafů. Nejznámější konstrukcí v této oblasti je Mycielského rekurzivní konstrukce [69] grafů velké barevnosti, které neobsahují trojúhelník jako podgraf.

Vidíme, že barevnost grafů velkého obvodu není omezena žádnou konstantou. Nabízí se otázka, jak se chová barevnost takových grafů, pokud omezíme jejich maximální stupeň. Nejjednodušším případem jsou kubické grafy. Podle Brooksovy věty (Věta 3.1) je barevnost kubických grafů bez trojúhelníků nejvýše tři a pokud takový graf obsahuje lichou kružnici, což není ve sporu s požadavkem na libovolně

velký obvod, tak je barevnost rovna třem. Podívejme se blíže, jak se barevnost takových grafů chová vzhledem k neceločíslným relaxacím barevnosti, které jsme představili v minulé sekci.

Zaměříme se nejdříve na ty grafy, kde zakážeme kružnice nejkratší možné délky, tedy kubické grafy bez trojúhelníků. Heckman a Thomas [40, 41] vyslovili domněnku, že zlomková barevnost rovinných kubických grafů bez trojúhelníků je nejvýše $8/3$ a zlomková barevnost obecných kubických grafů je pak nejvýše $14/5$. Obě hodnoty by byly nejlepší možné, protože jsou známy konstrukce n -vrcholových rovinných kubických grafů bez trojúhelníků s maximální nezávislou množinou velikosti $3n/8$ a takových obecných grafů s maximální nezávislou množinou velikosti $5n/14$. Naopak, se ví [40, 53, 93], že každý kubický graf bez trojúhelníků s n vrcholy obsahuje nezávislou množinu velikosti alespoň $5n/14$ a rovinné kubické grafy dokonce velikosti $3n/8$ [41].

První netriviální horní odhad $3 - 3/64$ na zlomkovou barevnost kubických grafů bez trojúhelníků lze nalézt v práci Hatamiho a Zhua [39]. Tento odhad byl později vylepšen postupně na $3 - 3/43$ [65] a na $3 - 1/11$ [19]. Pro grafy s maximálním stupněm Δ , které neobsahují trojúhelník, Johanson [52], že jejich barevnost je omezena funkcí $O(\Delta/\log \Delta)$.

Zaměříme se nyní na kubické grafy velkého obvodu. V oblasti cirkulární barevnosti takových grafů je centrální Nešetřilova domněnka známá jako Pentagon Conjecture [71]. V řeči barevnosti grafů tato domněnka říká, že existuje přirozené číslo g takové, že každý kubický graf obvodu alespoň g má cirkulární barevnost nejvýše $5/2$. V sérii prací [38, 58, 104] se podařilo ukázat, že v této domněnce nelze $5/2$ nahradit $7/3$.

Ve své práci [39] Hatami a Zhu ukázali odhady na zlomkovou barevnost kubických grafů s obvodem g , které mají pravděpodobně limitu $8/3$ (jejich odhad je řešením algebraické rovnice a nepodařilo se jim v jejich práci tuto limitu určit). Současný nejlepší známý horní odhad lze nalézt v článku [54]: existuje obvod g , že každý kubický graf s obvodem alespoň g má zlomkovou barevnost nejvýše 2.2978 . V článku [54] lze též najít velmi krátký důkaz zesílení zmiňovaného výsledku Hatamiho a Zhua na grafy, které neobsahují krátké liché kružnice. Tento důkaz používá souvislost zlomkové barevnosti a pravděpodobnostních distribucí, kterou vysvětlíme v následujícím odstavci.

Zlomková barevnost úzce souvisí s existencí vrcholově uniformních pravděpodobnostních distribucí na nezávislých množinách v grafu a pro kubické grafy velkého obvodu též s existencí velkých nezávislých množin v náhodných kubických grafech. Z definice zlomkové barevnosti lze snadno nahlédnout, že graf G má zlomkovou barevnost nejvýše k právě tehdy, když existuje pravděpodobnostní distribuce na nezávislých množinách grafu G taková, že každý vrchol je v nezávislé množině náhodně zvolené dle této distribuce s pravděpodobností alespoň $1/k$. Je také známo, že náhodný kubický graf obsahuje jen omezeně mnoho kružnic délky nejvýše ℓ . Lze tedy po odstranění konstantně malé části takového grafu aplikovat výsledky o zlomkové barevnosti kubických grafů velkého obvodu a získat (velkou)

nezávislou množinu v náhodném kubickém grafu.

3.3 Hranová barevnost grafů

V této části práce se budeme zabývat tzv. hranovým barvením grafů. Pokud G je graf, pak jeho hranový graf je graf $L(G)$, jehož vrcholy jsou hrany grafu G a dva jeho vrcholy jsou sousedé, pokud odpovídající hrany mají společný vrchol v G . Obarvení grafu $L(G)$ dává obarvení hran grafu G takové, že hrany se společným vrcholem v G mají různou barvu. Nejmenší možný počet barev nutný k takovému obarvení hran grafu G se nazývá hranová barevnost grafu G a označuje se $\chi'(G)$.

Pokud G je graf s maximálním stupněm Δ , jeho hranová barevnost je alespoň Δ , neboť hrany u vrcholu stupně Δ musí dostat vesměs různé barvy. Vizingova věta [102] říká, že barevnost grafu (bez násobných hran) se od tohoto triviálního odhadu nemůže příliš lišit.

Věta 3.2 (Vizingova věta [102]) *Nechť G je jednoduchý graf s maximálním stupněm Δ . Pak hranová barevnost grafu G je rovna Δ nebo $\Delta + 1$.*

Pro $\Delta = 1$ je takový graf G nutně tvořen izolovanými vrcholy a hranami a jeho hranová barevnost je tedy vždy jedna. Pro $\Delta = 2$ jsou takové grafy sjednocením vrcholově disjunktních cest a kružnic a jejich hranová barevnost je dva právě tehdy, když jedna z jejich komponent není lichá kružnice. Z algoritmického hlediska je tedy jednoduché (polynomiální) rozhodnout, zda hranová barevnost grafu G s $\Delta = 2$ je dva. Pro $\Delta = 3$ je však situace jiná. Holyer [49] dokázal, že rozhodnout, zda daný graf maximálního stupně tři má hranovou barevnost tři, je NP-úplný problém. Analogické tvrzení platí i pro grafy vyššího maximálního stupně.

Je tedy zřejmé, že struktura kubických grafů, jejichž hranová barevnost je čtyři, bude velmi obtížně popsitelná. Takové grafy nazveme snarky. Formálně, snark je hranově 3-souvislý kubický graf, pokud jeho hranová barevnost je čtyři. Poznamenejme, že v literatuře se různí definice snarku s ohledem na podmínku netriviality jeho souvislosti a lze nalézt jak definice vyžadující jen neexistenci mostů tak i požadující hranovou cyklickou 4-souvislost. Snarky se ve strukturální teorii grafů často vyskytují jako těžké instance známých problémů. Například je známo, že slavné otevřené problémy jako Cycle Double Cover Conjecture, Tutteho hypotézu o 5-toku nebo Berge-Fulkersonovu hypotézu stačí dokázat jen pro snarky. Problém čtyř barev, který jsme dříve zmínili, je ekvivalentní tvrzení, že neexistuje snark, který by bylo možné nakreslit do roviny [98].

Ačkoliv snarky tvoří „jádro“ mnoha známých těžkých problémů, je jich mezi všemi kubickými grafy relativně málo. Například je známo, že náhodný kubický graf není skoro jistě snark, tj. náhodně vybraný hranově 3-souvislý kubický graf na n vrcholech je snark s pravděpodobností p_n , kde $p_n \rightarrow 0$ s $n \rightarrow \infty$. V roce

1980 vyslovili Jaeger a Swart [51] domněnku, že každý snark nutně musí obsahovat krátkou kružnici, tj. existuje konstanta g_0 taková, že každý snark obsahuje kružnici délky nejvýše g_0 . Tuto domněnku vyvrátil Kochol [57], který zkonstruoval snarky libovolně velkého obvodu.

Dle Vizingovy věty (Věta 3.2) hranová barevnost kubických grafů bez mostů může nabývat jen dvou hodnot: tři a čtyři. Zaměříme se nyní na hranovou barevnost grafu vůči jedné z relaxací barevnosti, které jsme dříve zavedli. Hranová cirkulární barevnost $\chi'_c(G)$ grafu G je cirkulární barevnost grafu $L(G)$; cirkulární obarvení grafu $L(G)$ přirozeně odpovídají cirkulárním obarvením hran grafu G . Afshani a kol. [1] ukázali, že cirkulární hranová barevnost kubických grafů bez mostů je vždy nejvýše $11/3$. Petersenův graf, který je Kneserův graf $K(5, 2)$, je příkladem kubického grafu bez mostů, jehož cirkulární hranová barevnost je $11/3$ a tedy tento výsledek je obecně nejlepší možný.

Cirkulární hranová barevnost je známa pro některé třídy snarků [32–34, 67] a Petersenův graf je jediným známým snarkem, jehož hranová barevnost je větší než $7/2$. Ve společném článku s Máčajovou, Mazákem a Serenim [60] jsme ukázali, že cirkulární hranová barevnost kubického grafu bez mostů obvodu šest je nejvýše $7/2$ a vyslovili domněnku, že Petersen je jediným kubickým grafem bez mostů, jehož cirkulární hranová barevnost je větší než $7/2$.

V článcích, které tvoří předloženou práci studujeme cirkulární hranovou barevnost grafů velkého obvodu. V [III] jsme ukázali, že již zmiňovaná domněnka Jaegera a Swarta, která se ukázala nepravdivou, asymptoticky platí pro hranovou barevnost kubických grafů.

Věta 3.3 *Pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$, existuje přirozené číslo g takové, že každý kubický graf bez mostů obvodu alespoň g má cirkulární hranovou barevnost nejvýše $3 + \varepsilon$.*

V článku [IV] jsme pak rozšířili Větu 3.3 na grafy libovolně velkého maximálního stupně.

Věta 3.4 *Pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$ a každé přirozené číslo Δ , existuje přirozené číslo g takové, že každý graf s maximálním stupněm Δ a obvodu alespoň g má cirkulární hranovou barevnost nejvýše $\Delta + \varepsilon$.*

Zajímavým problémem v této oblasti je zobecnění výsledku od Afshani a kol., který podává horní odhad na cirkulární barevnost kubických grafů bez mostů na grafy vyššího maximálního stupně. V článku [III] jsme formulovali jako problém, zda platí, že každý k -regulární hranově k -souvislý graf má cirkulární hranovou barevnost nejvýše $k + 1 - 1/k$ pro $k \geq 3$. Podmínka na souvislost takových grafů je zvolena tak, aby zaručovala, že tyto grafy mají vždy tzv. perfektní párování, jehož existence úzce souvisí s existencí hranových obarvení pomocí málo barev.

3.4 Totální barevnost grafů

Na konci této kapitoly se budeme zabývat typem barvení, které je kombinací barvení vrcholů a hran grafu, tzv. totální barevností. Totální barevnost grafů je podrobně studována v monografii [105], kde čtenář může nalézt podrobný úvod do této oblasti. Totálním grafem $T(G)$ grafu G je graf, jehož vrcholy odpovídají vrcholům a hranám grafu G a který obsahuje následující hrany:

- dva vrcholy $T(G)$ odpovídající vrcholům u a v grafu G jsou sousední, pokud uv je hrana v grafu G ,
- dva vrcholy $T(G)$ odpovídající hranám e a f grafu G jsou sousední, pokud hrany e a f mají společný vrchol v grafu G , a
- dva vrcholy $T(G)$ odpovídající vrcholu u a hraně e jsou sousední, pokud vrchol u je koncovým vrcholem hrany e .

Obarvení totálního grafu $T(G)$ dává obarvení vrcholů a hran grafu G , které omezeno na vrcholy G je dobré obarvení vrcholů a omezeno na hrany G je dobré obarvení hran. Totální barevnost $\chi''(G)$ grafu G je barevnost grafu $T(G)$.

Podobně jako u hranové barevnosti, totální barevnost grafu G s maximálním stupněm Δ je alespoň $\Delta + 1$: pokud v je vrchol stupně Δ , pak vrchol v a Δ hran, které jej obsahují, musí dostat vesměs různé barvy. Behzad [3] a Vizing [103] vyslovili domněnku, že totální barevnost grafu G s maximálním stupněm Δ je, analogicky k hranové barevnosti, nejvýše $\Delta + 2$. Tato domněnka dosud nebyla rozřešena.

Z Brooksovy věty plyne, že totální barevnost grafu s maximálním stupněm Δ je nejvýše 2Δ . Odhad s multiplikativním faktorem jedna u Δ byl nalezen Molloyem a Reedem [68], kteří ukázali, že totální barevnost grafu s maximálním stupněm Δ je nejvýše $\Delta + 10^{26}$.

Kilakos a Reed [56] ukázali, že výše uvedená domněnka o totální barevnosti grafů platí ve zlomkové verzi, tj. zlomková totální barevnost grafu G s maximálním stupněm Δ je nejvýše $\Delta + 2$. Grafy, pro které je tento odhad nejlepší možný, pak byly popsány Item, Kennedym a Reedem [50]: takové grafy jsou pouze úplné grafy se sudým počtem vrcholů a úplné bipartitní grafy s partitami shodné velikosti. Tento výsledek vedl Reeda k vyslovení následující domněnky:

Domněnka 3.1 (Reed [79]) *Pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$ a každé přirozené číslo Δ , existuje přirozené číslo g takové, že každý graf s maximálním stupněm Δ a obvodu alespoň g má zlomkovou totální barevnost nejvýše $\Delta + 1 + \varepsilon$.*

V pracích [V] a [VI], které jsou součástí souboru předložených prací, jsme tuto domněnku dokázali. Pro grafy s maximálním stupněm Δ , kde Δ je sudé číslo jsme dokonce dokázali silnější tvrzení. Vyslovme nyní hlavní výsledky našich prací [V] a [VI].

Věta 3.5 *Pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$ a každé přirozené číslo Δ , existuje přirozené číslo g takové, že každý graf s maximálním stupněm Δ a obvodu alespoň g má zlomkovou totální barevnost nejvýše $\Delta + 1 + \varepsilon$.*

Věta 3.6 *Pro každé sudé číslo $\Delta \geq 4$, existuje přirozené číslo g takové, že každý graf s maximálním stupněm Δ a obvodu alespoň g má zlomkovou totální barevnost $\Delta + 1$.*

Důkaz Věty 3.5 byl podán pro $\Delta = 3$ v [V] a pro zbylé liché hodnoty Δ v [VI]; Věta 3.6, která implikuje Větu 3.5 pro sudé hodnoty Δ , byla dokázána v [V]. Zajímavým otevřeným problémem v této oblasti zůstává, zda lze dokázat Větu 3.5 v uniformní verzi, tj. zda platí, že pro každé $\varepsilon > 0$, existuje přirozené číslo g takové, že každý graf s maximálním stupněm Δ a obvodu alespoň g má zlomkovou totální barevnost nejvýše $\Delta + 1 + \varepsilon$.

Kapitola 4

Algoritmická teorie matroidů

V této kapitole nejprve stručně představíme matroidy. Poté zmíníme šířkové parametry pro grafy a jejich analogie pro matroidy a uvedeme tyto parametry do souvislosti s existencí efektivních algoritmů. V závěru kapitoly pak představíme výsledky, které jsou obsaženy v článcích [VII] a [VIII] a také některé další nově dosažené výsledky autora v této oblasti.

4.1 Matroidy

Matroidy jsou kombinatorické struktury, které zobecňují a zahrnují řadu vlastností hran grafů a lineární nezávislosti vektorů. Podrobný úvod do teorie matroidů lze nalézt v monografii [77], popř. více specializovanější úvod v [100]. Zde se omezíme pouze na představení základních definic a pojmů, které budeme potřebovat ve zbytku kapitoly.

Uspořádanou dvojici $M = (E, \mathcal{I})$, kde $\mathcal{I} \subseteq 2^E$, nazveme matroidem, pokud množiny v \mathcal{I} splňují:

- \mathcal{I} obsahuje prázdnou množinu,
- pokud množina I leží v \mathcal{I} , pak každá podmnožina $I' \subseteq I$ je také obsažena v \mathcal{I} , a
- pro každé dvě množiny $I, I' \in \mathcal{I}$ s $|I'| < |I|$ platí, že existuje prvek $x \in I \setminus I'$ takový, že $I' \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Prvky množiny E nazýváme prvky matroidu a množiny, které jsou obsaženy v \mathcal{I} se nazývají nezávislé. Lze ukázat, že všechny v inkluzi maximální nezávislé množiny matroidu mají stejnou velikost. Takové množiny jsou báze matroidu M . Kružnice matroidu je množina prvků, která není nezávislá, ale každá její podmnožina je, tj. kružnice jsou minimální (v inkluzi) závislé množiny matroidu.

Rank množiny $F \subseteq E$ je velikost maximální nezávislé podmnožiny F , tj. $\max_{F' \subseteq F, F' \in \mathcal{I}} |F'|$; rank množiny F označujeme $r_M(F)$, popř. $r(F)$, pokud

matroid M je zřejmý z kontextu. Rankem matroidu M je $r_M(E)$. Lze ukázat, že pro funkci $r : 2^E \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje matroid takový, že r je jeho ranková funkce, právě tehdy, když r splňuje následující:

- $r(F) \leq |F|$ pro každou množinu $F \subseteq E$, a
- $r(F_1 \cup F_2) + r(F_1 \cap F_2) \leq r(F_1) + r(F_2)$ pro každé dvě množiny $F_1, F_2 \subseteq E$.

Prvek $x \in E$ matroidu se nazývá smyčka, pokud $r(\{x\}) = 0$, a nazývá se mostem, pokud $r(E \setminus \{x\}) = r(E) - 1$.

Nechť M je matroid a F je podmnožina jeho prvků. Matroid $M \setminus F$ je matroid, jehož prvky tvoří množinu $E \setminus F$ a podmnožina $F' \subseteq E \setminus F$ je nezávislá v $M \setminus F$, pokud F' je nezávislá v M . Budeme říkat, že matroid $M \setminus F$ byl získán z M smazáním prvků v množině F . Restrikce matroidu M na podmnožinu F jeho prvků je matroid, který získáme z M smazáním prvků, které nejsou v F . Matroid M/F je matroid, jehož prvky tvoří množinu $E \setminus F$ a podmnožina $F' \subseteq E \setminus F$ je nezávislá v M/F , pokud splňuje $r_M(F \cup F') = r_M(F) + r_M(F')$. Matroid M/F je matroid získaný z matroidu M kontrakcí množiny F . Lze ukázat, že $r_{M/F}(F') = r_M(F \cup F') - r_M(F)$ pro každou množinu $F' \subseteq E \setminus F$. Matroid M' je minorem matroidu M , pokud matroid M' lze získat postupným mazáním a kontrahováním prvků matroidu M .

4.1.1 Příklady matroidů

Nejjednodušším příkladem matroidu je uniformní matroid $U_{n,k}$; tento matroid obsahuje n prvků a podmnožina jeho prvků je nezávislá právě tehdy, když má velikost nejvýše k .

Matroidy lze též získat z grafů. Pokud G je graf, pak matroid $M(G)$ je matroid, jehož prvky jsou hrany grafu G a množina F hran grafu G je nezávislá, pokud G neobsahuje kružnici tvořenou hranami jen z množinami F . Rank matroidu $M(G)$ je tedy $n - k$, kde n je počet vrcholů grafu G a k je počet jeho komponent. Neizomorfní grafy mohou být asociovány se stejným matroidem, např. pokud G je libovolný strom na n vrcholech, pak matroid $M(G)$ je izomorfní matroidu $U_{n-1, n-1}$. Pokud pro matroid M existuje graf G takový, že matroidy M a $M(G)$ jsou izomorfní, pak budeme říkat, že M je grafový matroid.

Dalším příkladem matroidů jsou vektorové matroidy. Nechť \mathbb{F} je těleso a $W \subseteq \mathbb{F}^d$ je množina d -dimenzionálních vektorů nad \mathbb{F} . Definujme matroid $M(W)$ následujícím způsobem: Prvky matroidu M jsou vektory z množiny W a množina $W' \subseteq W$ je nezávislá, pokud vektory v množině W' jsou lineárně nezávislé. Lze ukázat, že rank množiny $W' \subseteq W$ je roven dimenzi lineárního obalu vektorů z W' . Pokud je matroid M izomorfní matroidu $M(W)$ pro množinu vektorů W nad tělesem \mathbb{F} , pak řekneme, že matroid M je reprezentovatelný nad tělesem \mathbb{F} . Bijekci mezi prvky M a vektory z $M(W)$ budeme nazývat reprezentací matroidu M nad \mathbb{F} .

Matroidy, které jsou reprezentovatelné nad konečným tělesem řádu dva, jsou binární matroidy. Matroid je binární právě tehdy, pokud neobsahuje matroid izomorfní matroidu $M_{4,2}$ jako minor [99]. Matroidy, které jsou reprezentovatelné nad libovolným tělesem, se nazývají regulární. Lze ukázat, že každý grafový matroid je regulární.

Velkým otevřeným problémem v oblasti reprezentovatelnosti matroidů je Rotova domněnka [82].

Domněnka 4.1 (Rotova domněnka) *Pro každé konečné těleso \mathbb{F} , existuje konečná množina matroidů \mathcal{M} taková, že matroid M je reprezentovatelný nad \mathbb{F} právě tehdy, když M neobsahuje jako minor matroid M' izomorfní některému z matroidů v množině \mathcal{M} .*

Pro těleso \mathbb{F} řádu dva, tato domněnka platí dle výše zmiňovaného Tutteho výsledku [99]. Pro těleso řádu tři byla domněnka nezávisle potvrzena v článcích [4, 88] a nedávno byla tato domněnka též potvrzena pro konečné těleso řádu čtyři [26].

4.1.2 Algoritmy pro matroidy

Prvním problémem, který je třeba vyřešit, při studiu algoritmů pro matroidy, je zadání vstupního matroidu. Protože by při zadání matroidu výčtem jeho nezávislých množin mohla být velikost vstupu exponenciální v počtu jeho prvků, je třeba vstupní matroid zadat jiným způsobem.

Nejobecnější model je zadání matroidu pomocí černé skříňky (oracle). V takovém modelu je matroid zadán pomocí funkce, které pro zadanou množinu jeho prvků vrátí, zda je či není nezávislá. Méně obecným způsobem zadání matroidu, je jeho zadání reprezentací nad tělesem F , nad kterým je matroid reprezentovatelný. Tímto způsobem však lze samozřejmě zadat jen matroidy reprezentovatelné nad tělesem F .

Časovou složitost algoritmů pro matroidy obvykle měříme jako funkci počtu prvků vstupního matroidu. Rozhodnout, zda je matroid zadaný černou skříňkou reprezentovatelný nad nějakým tělesem, je obecně těžké. Například pro problém rozhodování, zda je matroid binární, Seymour [90] ukázal, že neexistuje algoritmus subexponenciální v počtu prvků matroidu. Tato skutečnost je v protikladu ke známé charakterizaci binárního matroidů pomocí zakázaných minorů [99] nebo ke skutečnosti, že nalezení binární rezenace matroidu zadaného černou skříňkou za předpokladu, že matroid je opravdu binární, je snadno polynomiálně řešitelný problém.

Nejnámějším polynomiálním algoritmem pro matroidy je hladový algoritmus na hledání nejlehčí báze: v tomto problému má každý prvek přiřazenu váhu a cílem je nalézt bázi matroidu takovou, že součet vah jejích prvků je co nejmenší. Problém průniku matroidů (matroid intersection problem) je jedním z velmi studovaných problémů v oblasti kombinatorické optimalizace. Polynomiální algorit-

mus pro řešení tohoto problému nalezl uplatnění v mnoha oblastech optimalizace (viz monografie [87]). V tomto problému jsou zadány dva matroidy M_1 a M_2 na stejné množině prvků E a cílem je nalézt největší množinu $F \subseteq E$, která je nezávislá v obou matroidech M_1 a M_2 . Tento problém lze polynomiálně vyřešit jak v nevážené verzi (hledáme takovou F s největším počtem prvků) tak i ve vážené verzi v modelu, kdy je matroid zadán černou skříňkou.

4.2 Šířkové parametry

Řada algoritmických problémů, které jsou obecně těžké pro grafy, je polynomiálně řešitelná pro speciální třídy grafů. Takové třídy grafů mohou být třída rovinných grafů, třída grafů s omezenou velikostí dominující množiny apod. Jedním z nejrozsáhlejších parametrů v této oblasti je stromová šířka, která měří, jak je daný graf blízký stromu.

Stromovým rozkladem grafu G je strom T s funkcí $\varphi : V(T) \rightarrow 2^{V(G)}$, která splňuje následující:

- pro každou hranu vv' grafu G , existuje vrchol u ve stromě T s $\{v, v'\} \subseteq \varphi(u)$,
a
- pro každé dva vrcholy u a u' stromu T a každý vrchol u'' , který leží na cestě z u do u' ve stromě T platí, že $\varphi(u'') \subseteq \varphi(u) \cap \varphi(u')$.

Druhá podmínka říká, že pro každý vrchol v grafu G vrcholy u stromu T s $v \in \varphi(u)$ indukují souvislý podstrom. Šířka stromového rozkladu je $\max_{u \in V(T)} |\varphi(u)| - 1$. Stromová šířka grafu je pak nejmenší šířka jeho stromového rozkladu. Lze ukázat, že graf má stromovou šířku jedna právě tehdy, když je les.

Ačkoliv je NP-úplné rozhodnout, zda daný graf G má stromovou šířku nejvýše k , pokud k je na vstupu, pro každé pevné k existuje lineární algoritmus [5], který rozhodne, zda stromová šířka grafu na vstupu je nejvýše k a v kladném případě nalezne optimální stromový rozklad.

Přestože stromovou šířku lze definovat i pro matroidy [47, 48], přirozenějším rozkladovým parametrem pro matroidy je pojem větví šířky. Šířka rozkladu množiny prvků matroidu na dvě disjunktní množiny A a B je $r(A) + r(B) - r(A \cup B) + 1$. Větví rozklad matroidu je ternární strom T , jehož listy odpovídají prvkům matroidu. Každá hrana e stromu T rozděljuje strom na dva podstromy, které přirozeným způsobem indukují rozklad prvků matroidu na dvě množiny A_e a B_e – prvky matroidu matroidu přiřazené listům těchto dvou podstromů. Šířka hrany e rozkladu T je šířka rozkladu A_e a B_e . Šířka rozkladu je pak maximální šířka jeho hrany. Konečně, větví šířka matroidu je nejmenší šířka jeho větvího rozkladu.

Větví šířka matroidu $M(G)$ odpovídajícího grafu G a stromová šířka grafu G jsou úzce svázány [81]: větví šířka $M(G)$ je nejvýše stromová šířka grafu G

a naopak stromová šířka grafu G je omezena lineární funkcí větvení šířky $M(G)$. Algoritmické výsledky pro matroidy s omezenou větvení šířkou tedy odpovídají analogickým výsledkům pro grafy s omezenou stromovou šířkou.

Pro matroidy reprezentovatelné nad konečným tělesem navrhl Hliněný [43] kubický algoritmus, který pro matroid M daný svou reprezentací nad pevným konečným tělesem buď určí, že větvení šířka daného matroidu je větší než pevné číslo k , nebo nalezne větvení rozklad matroidu M šířky nejvýše $3k$. Později Hliněný a Oum [46] navrhli kubický algoritmus, který rozhodne, zda má matroid větvení šířku nejvýše k (číslo k je pevné) a v kladném případě zkonstruuje větvení rozklad této šířky.

Oba výše uvedené algoritmy požadují, aby byl matroid zadaný svou reprezentací nad pevným konečným tělesem; tedy vstupní matroid musí být reprezentovatelný nad konečným tělesem. Algoritmus pro hledání větveního rozkladu obecných matroidů zadaných černou skříňkou byl navržen Oumem a Seymourem [78]. Časová složitost tohoto algoritmu je však odhadnuta polynomem stupně $3k + O(1)$, kde k je šířka hledaného větveního rozkladu, a tento algoritmus tedy není tzv. FPT algoritmus. Existence takového algoritmu je otevřeným problémem.

Pro některé typy algoritmů je omezení stromové šířky vstupních grafů příliš hrubé. Zavedeme nyní jemnější pojem lokálně omezené stromové šířky. Řekneme, že třída grafů \mathcal{G} má lokálně omezenou stromovou šířku, jestliže existuje funkce $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že stromová šířka podgrafu grafu G indukovaná vrcholy $N_d(v)$ je nejvýše $f(d)$ pro každý graf $G \in \mathcal{G}$, každý vrchol $v \in V(G)$ a každé přirozené číslo d . Jako $N_d(v)$ označujeme d -té okolí vrcholu v , tj. množinu vrcholů v grafu G , které lze spojit s v cestou délky nejvýše d . Příkladem třídy grafů, která nemá omezenou stromovou šířku, ale má lokálně omezenou stromovou šířku, jsou např. rovinné grafy.

Definování pojmu analogického k lokálně omezené stromové šířce pro matroidy je komplikované neexistencí pojmu vzdálenosti (cesty) v matroidu. V článku [25] jsme navrhli následující definici, pro kterou se nám podařilo dokázat analogické algoritmické výsledky k výsledkům o třídách grafů s lokálně omezenou stromovou šířkou. Řekneme, že třída matroidů \mathcal{M} má lokálně omezenou větvení šířku, jestliže existuje funkce $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že větvení šířka restrikce matroidu M na prvky $N_d(e)$ je nejvýše $f(d)$ pro každý matroid $M \in \mathcal{M}$, každý prvek e matroidu M a každé přirozené číslo d . Množinu $N_d(e)$ definujeme jako množinu těch prvků matroidu M , které leží s prvkem e na kružnici velikosti nejvýše d . Platí, že pokud třída grafů \mathcal{G} má lokálně omezenou stromovou šířku, pak třída matroidů $\mathcal{M} = \{M(G), G \in \mathcal{G}\}$ má lokálně omezenou větvení šířku [25].

Posledním typem tříd grafů, které zde chceme zmínit, jsou třídy grafů s omezenou expanzí. Tyto třídy grafů byly zavedeny a podrobně studovány v sérii prací Nešetřila a Ossony de Mendeze [72–74]. Minorem grafu rozumíme graf, který lze získat smazáním některých jeho vrcholů a hran a následnou kontrakcí některých jeho souvislých podgrafů. Kontrakcí rozumíme nahrazení podgrafu jedním vrcholem, který spojíme hranou s těmi vrcholy, které sousedily v původním grafu

alespoň s jedním vrcholem kontrahovaného podgrafu. Minor je ℓ -mělký, pokud každý kontrahovaný podgraf má poloměr nejvýše ℓ , tzn. obsahuje vrchol v , který je spojený cestou délky nejvýše ℓ s každým vrcholem podgrafu.

Pro třídu grafů \mathcal{G} označíme jako $\mathcal{G}\nabla\ell$ třídu grafů, které lze získat jako ℓ -mělký minor některého z grafů ve třídě \mathcal{G} . Řekneme, že třída grafů \mathcal{G} má omezenou expanzi, pokud existuje funkce $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že počet hran libovolného grafu $G \in \mathcal{G}\nabla\ell$ s n vrcholy je nejvýše $f(\ell)n$ pro každé přirozené číslo ℓ . Příklady různých tříd grafů s omezenou expanzí lze nalézt v [75]. Konečně, třída grafů \mathcal{G} má lokálně omezenou expanzi, pokud pro každé číslo d třída grafů $\mathcal{G}_d = \{G[N_d(v)], v \in V(G), G \in \mathcal{G}\}$ má omezenou expanzi. Třídy grafů s lokálně omezenou expanzí zahrnují třídy grafů s omezenou stromovou šířkou, třídy grafů s lokálně omezenou stromovou šířkou nebo třídy grafů s omezeným maximálním stupněm.

4.3 Algoritmické metavěty pro grafy

Algoritmické metavěty jsou výsledky z oblasti návrhu algoritmů takové, které zaručují existenci efektivního algoritmu pro určité typu problémů pro určitou třídu vstupů (grafů). Úvod do této oblasti lze nalézt v přehledovém článku [62].

Grafová vlastnost je vyjádřitelná v monadické logice druhého řádu, pokud existuje sentence φ složená ze základních logických spojek, z kvantifikátorů přes proměnné pro vrcholy a hrany vstupního grafu a jejich množiny a z relačních symbolů $\in, =$ a \sim_G , kde symbol \sim_G reprezentuje binární relaci „být sousedé“ na množině vrcholů vstupního grafu G , taková, že $G \models \varphi$ právě tehdy, když G má uvažovanou vlastnost. Grafová vlastnost je vyjádřitelná v logice prvního řádu, pokud existuje takováto formule neobsahující kvantifikátory přes proměnné pro množiny vrcholů a hran.

Jedním z prvních a nejslavnějších výsledků, který lze označit za algoritmickou metavětu, je Courcellova věta [8]. Poznamenejme, že prvním krokem algoritmu v důkazu následující věty je aplikace již zmiňovaného Bodlaenderova lineárního algoritmu [5] pro konstrukci optimálních stromových rozkladů.

Věta 4.1 (Courcellova věta [8]) *Pro každou grafovou vlastnost vyjádřitelnou v monadické logice druhého řádu a každou třídu grafů \mathcal{G} s omezenou stromovou šířkou, existuje lineární algoritmus, který rozhodne, zda vstupní graf ze třídy \mathcal{G} má tuto vlastnost.*

Ačkoliv třídy grafů s omezenou stromovou šířkou jsou relativně obecné, některé významné třídy grafů, např. rovinné grafy nemají omezenou stromovou šířku. Na druhou stranu je například známo, že testování existence pevného grafu jako podgrafu je řešitelné v lineárním čase [13,14] pro rovinné grafy a obecně grafy vnořitelné na pevnou plochu. Na druhou stranu nelze očekávat, že by bylo možné Větu 4.1 zobecnit na třídy grafů, které zahrnují rovinné grafy, neboť například

problém 3-barevnosti rovinných grafů, který je vyjádřitelný v monadické logice druhého řádu, je NP-úplný pro rovinné grafy [24].

Zobecnění Věty 4.1 pro rovinné grafy tedy nutně musí znamenat omezení množiny uvažovaných grafových vlastností. Frick a Grohe [21] využili Gaifmanovu větu [23] o lokálnosti sentencí prvního řádu a dokázali takové zobecnění, když ukázali, že každou grafovou vlastnost vyjádřitelnou v logice prvního řádu lze rozhodovat ve třídě rovinných grafů v lineárním čase. Ve své práci [21], též ukázali, že grafové vlastnosti vyjádřitelné v logice prvního řádu lze ve třídách grafů s lokálně omezenou stromovou šířkou testovat ve skoro lineárním čase. Algoritmus nazveme skoro lineární, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ je jeho časová složitost omezena funkcí $O(n^{1+\varepsilon})$. Tento výsledek zobecňuje Eppsteinův lineární algoritmus [15] pro testování existence pevného podgrafu v minorově uzavřených třídách grafů s lokálně omezenou stromovou šířkou.

Tyto výsledky o rozhodování vlastností prvního řádu byly dále zobecněny v [9] a v [73]. Nejobecnějším výsledkem je pak lineární algoritmus pro rozhodování vlastností prvního řádu pro třídy grafů s omezenou expanzí a skoro lineární algoritmus pro třídy grafů s lokálně omezenou expanzí [12]. Analogické výsledky byly též oznámeny v [10], ale prvotní verze důkazu v [10] nebyla úplná.

4.4 Algoritmické metavěty pro matroidy

Nyní se zaměříme na to, jak lze právě představené výsledky pro grafy zobecnit na matroidy. Matroidy v plné obecnosti jsou z algoritmického hlediska poměrně složité, viz např. již zmiňovaný Seymourův výsledek [90] o neexistenci subexponenciálního algoritmu pro testování, zda je matroid zadaný černou skříňkou binární. Strukturální výsledky o matroidech, zejména [27–31], naznačují, že struktura matroidů reprezentovatelných nad konečnými tělesy je blízká grafům, a proto se nabízí při studiu algoritmů pro matroidy omezit na takové matroidy.

V sentencích popisujících matroidové vlastnosti se místo symbolu \sim_G , který popisuje vstupní graf, vyskytuje symbol $I_M(X)$, který reprezentuje predikát určující, zda množina X prvků matroidu je nezávislá ve vstupním matroidu M . Hliněný [42, 44] dokázal následující analogii Courcellovy věty (Věta 4.1) pro matroidy.

Věta 4.2 *Pro každou matroidovou vlastnost vyjádřitelnou v monadické logice druhého řádu a každou třídu matroidů \mathcal{M} s omezenou větvící šířkou, které jsou reprezentovatelné nad pevným konečným tělesem, existuje kubický algoritmus, který rozhodne, zda vstupní matroid ze třídy \mathcal{M} zadaný svou reprezentací má tuto vlastnost.*

Již zmiňované výsledky o algoritmech pro nalezení větvícího rozkladu takového matroidu z [43, 46] implikují, že algoritmus z Věty 4.2 může jako svůj první krok spočítat větvící rozklad omezené šířky pro vstupní matroid v kubickém čase.

Zaměřme se nyní na algoritmy pro rozhodování reprezentovatelnosti matroidů. Jak jsme již zmínili, nelze v subexponenciálním čase rozhodnout, zda matroid zadaný černou skříňkou je binární [90]. Na druhou stranu, pokud je matroid zadaný svou reprezentací nad racionálními čísly, existuje polynomiální algoritmus, který rozhodne, zda je binární [89]. Tento výsledek se však nezobecňuje pro reprezentovatelnost matroidů na konečných tělesech vyššího řádu: Hliněný [45] ukázal, že je NP-úplné rozhodnout, zda matroid reprezentovaný nad reálnými čísly větvicí šířky nejvýše tři je reprezentovatelný nad konečným tělesem pevného řádu q , $q \geq 4$.

Nabízí se tedy otázka, zda lze rozhodovat reprezentovatelnost nad konečnými tělesy matroidů, které už jsou reprezentovány nad jiným konečným tělesem a mají omezenou větvicí šířku. Pro ty případy, pro které platí Rotova domněnka (Domněnka 4.1), Věta 4.2 implikuje existenci kubického algoritmu, který rozhodne, zda matroid omezené stromové šířky zadaný reprezentací nad konečným tělesem je reprezentovatelný nad konečným tělesem, pro které je známo, že Rotova domněnka platí. Tedy takový algoritmus existuje pro rozhodování reprezentovatelnosti nad konečnými tělesy řádu dva, tři a čtyři. Pro tělesa ostatních řádů by bylo možné takový algoritmus získat použitím výsledku o dobrém uspořádání matroidů omezené stromové šířky reprezentovatelných nad konečným tělesem pomocí minorové relace [31].

Článek [VII], který je obsažen v souboru článků tvořících tuto práci, obsahuje explicitní algoritmus, který reprezentovatelnost takových matroidů rozhodne pro konečná tělesa všech řádů a navíc v kladném případě nalezne i reprezentaci. Nalezení reprezentace nad jiným tělesem je důležité z algoritmického hlediska, neboť, jak jsme již viděli, řada algoritmů pro matroidy předpokládá zadání matroidu jeho reprezentací. Zformulujeme nyní hlavní výsledek tohoto článku:

Věta 4.3 *Pro každé mocniny prvočísel q a q' a každé přirozené číslo k , existuje polynomiální algoritmus, jehož stupeň polynomu nezávisí na q , q' ani k , který rozhodne, zda vstupní matroid větvicí šířky k zadaný svou reprezentací nad konečným tělesem řádu q je reprezentovatelný nad konečným tělesem řádu q' a v kladném případě najde takovou jeho reprezentaci a určí celkový počet jeho neizomorfních reprezentací nad tělesem řádu q' .*

Postupy použité v článku [VII] vedly k zavedení pojmu rozkladové šířky pro matroidy v článku [VIII], který je také obsažen v souboru článků tvořících tuto práci. Výsledky článku [VIII] umožnily zobecnění Věty 4.2 pro matroidy ne nutně reprezentovatelné nad konečným tělesem.

Zavedme si nyní pojem rozkladové šířky formálně. K -rozklad matroidu M s množinou prvků E , $K \geq 1$, je zakořeněný binární strom T , jehož listy vzájemně jednoznačně odpovídají prvkům matroidu M , společně s funkcemi φ_v a φ_v^r , kde $\varphi_v : \{0, \dots, K\}^2 \rightarrow \{0, \dots, K\}$ a $\varphi_v^r : \{0, \dots, K\}^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, které jsou definovány pro každý vnitřní vrchol v stromu T (kořen stromu T považujeme také

za vnitřní vrchol). Některé listy stromu T jsou navíc označeny jako „speciální“. Funkce φ_v a φ_v^r navíc splňují:

- $\varphi_v(0, 0) = 0$ pro každý vnitřní vrchol v stromu T ,
- φ_v je identicky rovné nule pro kořen stromu T a
- $\varphi_v^r(0, x) = \varphi_v^r(x, 0) = 0$ pro každý vnitřní vrchol v stromu T a každé $x \in \{0, \dots, K\}$.

Pro K -rozklad T definujeme funkci $r_T : 2^E \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ následujícím způsobem. Nechť F je podmnožina E . Každý vrchol v stromu T má na základě množiny F přiřazenu barvu:

- pokud v je list odpovídající prvku $e \in E$, pak v má barvu 1, pokud $e \in F$ a v není speciální,
- pokud v je list odpovídající prvku $e \in E$ takovému, že $e \notin F$, pak v má barvu 0,
- pokud v je speciální list, pak v má barvu 0 a
- pokud v je vnitřní vrchol stromu T s potomky barev b a b' , pak barva v je $\varphi_v(b, b')$.

Dále každý vrchol v stromu T má přiřazeno jedno celé nezáporné číslo a to následujícím způsobem:

- každý list má přiřazeno takové číslo jako je jeho barva a
- pokud v je vnitřní vrchol stromu T s potomky barev b a b' , které mají přiřazeny čísla c a c' , pak vrchol v má přiřazeno číslo $c + c' - \varphi_v^r(b, b')$.

Hodnota $r_T(F)$ je pak definována jako číslo přiřazené kořenu stromu T . Povšimněte si, že pokud F je prázdná množina, pak všechny vrcholu stromu T mají barvu 0 a mají přiřazeno číslo 0.

Řekneme, že K -rozklad reprezentuje matroid M , pokud platí $r_M = r_T$. Nejmenší číslo K , pro které existuje K -rozklad reprezentující matroid M , se nazývá rozkladová šířka matroidu M . Lze ukázat, že rozkladová šířka matroidu s n prvky je nejvýše 2^n , tedy tento pojem je dobře definovaný. Existuje lineární algoritmus [VIII], který pro pevné číslo K rozhodne, zda zadaný K -rozklad reprezentuje nějaký matroid.

Následující věta z [VIII] ukazuje, že pojem rozkladové šířky zobecňuje větvící rozklady malé šířky matroidů reprezentovaných nad konečnými tělesy.

Věta 4.4 *Pro každou mocninu prvočísla q a každé přirozené číslo k , existuje přirozené číslo K takové, že každý matroid reprezentovatelný nad konečným tělesem řádu q , jehož větvící šířka je nejvýše k , má rozkladovou šířku nejvýše K . Navíc existuje polynomiální algoritmus, jehož stupeň polynomu nezávisí na q ani k , který pro matroid větvící šířky nejvýše k zadaný svou reprezentací nad tělesem řádu q nalezne K -rozklad, který jej reprezentuje.*

Věta 4.4 společně s následující větou z [VIII] implikuje Větu 4.2, kterou jsme již dříve vyslovili.

Věta 4.5 *Pro každou matroidovou vlastnost vyjádřitelnou v monadické logice druhého řádu a každou třídu matroidů \mathcal{M} s rozkladovou šířkou nejvýše K , existuje lineární algoritmus, který rozhodne, zda vstupní matroid ze třídy \mathcal{M} zadaný svým K -rozkladem má tuto vlastnost.*

Jiné zobecnění Věty 4.2 lze nalézt v článku [94], kde jsou představeny dekompozici vzniklé lepením reprezentovatelným a omezeně velkých matroidů přes separace šířky nejvýše 2. Společné zobecnění Věty 4.5 a výsledků z [94] pak bylo nedávno dosaženo studentem Tomášem Toufarem pod vedením autora této práce. Tyto výsledky v současné době připravujeme k publikaci.

V článku [VIII] lze také nalézt následující zobecnění výsledků pro výpočet a evaluaci Tutteho polynomu [44, 76].

Věta 4.6 *Pro každou třídu matroidů \mathcal{M} s rozkladovou šířkou nejvýše K , existuje lineární algoritmus pro výpočet hodnoty Tutteho polynomu v zadaném bodě pro vstupní matroid ze třídy \mathcal{M} zadaný svým K -rozkladem. Dále existuje polynomiální algoritmus, jehož stupeň nezávisí na \mathcal{M} ani K , který spočítá hodnoty všech koeficientů Tutteho polynomu pro takový matroid.*

Na závěr této kapitoly zmiňme nový výsledek o testování vlastností prvního řádu v matroidech, které jsou analogické k již zmiňovaným výsledkům z článku [21]. V [25] jsme dokázali následující větu:

Věta 4.7 *Pro každou matroidovou vlastnost vyjádřitelnou v logice prvního řádu a každou třídu regulárních matroidů \mathcal{M} s lokálně omezenou větvící šířkou, existuje polynomiální algoritmus, jehož stupeň polynomu nezávisí na uvažované vlastnosti ani na třídě \mathcal{M} , který rozhodne, zda vstupní matroid ze třídy \mathcal{M} má uvažovanou vlastnost.*

Literatura

- [1] P. Afshani, M. Ghandehari, M. Ghandehari, H. Hatami, R. Tusserkani, X. Zhu: Circular chromatic index of graphs of maximum degree 3, *J. Graph Theory* 49 (2005), 325–335.
- [2] K. Appel, W. Haken: Every planar map is four colorable, *Bull. Am. Math. Soc.* 82 (1976), 449–456.
- [3] M. Behzad: Graphs and their chromatic numbers, Doctoral thesis, Michigan State University, 1965.
- [4] R. E. Bixby: On Reid’s characterization of the ternary matroids, *J. Combin. Theory Ser. B* 26 (1979), 174–204.
- [5] H. L. Bodlaender: A linear time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth, *SIAM J. Computing* 25 (1996), 1305–1317.
- [6] R. L. Brooks: On colouring the nodes of a network, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 37 (1941), 194–197.
- [7] P. Candela: On systems of linear equations and uniform hypergraphs, manuscript, 2008.
- [8] B. Courcelle: The monadic second-order logic of graph I. Recognizable sets of finite graphs, *Inform. and Comput.* 85 (1990), 12–75.
- [9] A. Dawar, M. Grohe, S. Kreutzer: Locally excluding a minor, v *Proc. LICS’07*, IEEE Computer Society Press, 270–279.
- [10] A. Dawar, S. Kreutzer: Parameterized Complexity of First-Order Logic, *Electronic Colloquium on Computational Complexity*, TR09-131 (2009).
- [11] R. Diestel: *Graph theory*, Springer, 2005.
- [12] Z. Dvořák, D. Král, R. Thomas: Deciding first-order properties for sparse graphs, v *Proc. FOCS’10*, IEEE, 133–142.
- [13] D. Eppstein: Subgraph isomorphism in planar graphs and related problems, v *Proc. SODA’95*, ACM&SIAM, 632–640.

- [14] D. Eppstein: Subgraph isomorphism in planar graphs and related problems, *J. Graph Algorithms Appl.* 3 (1999), 1–27.
- [15] D. Eppstein: Diameter and treewidth in minor-closed graph families, *Algorithmica* 27 (2000), 275–291.
- [16] P. Erdős: Graph theory and probability, *Canad. J. Math.* 11 (1959), 34–38.
- [17] P. Erdős, C. Ko, R. Rado: Intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Math. Oxford Ser. 12* (1961), 313–320.
- [18] P. Erdős, A. L. Rubin, H. Taylor: Choosability in graphs, *Proc. West Coast Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congr. Numer.* XXVI (1979), 125–157.
- [19] D. Ferguson, T. Kaiser, D. Král', J. Mazák, E. Rollová: The fractional chromatic number of triangle-free subcubic graphs, v přípravě.
- [20] E. Fischer: The art of uninformed decisions: A primer to property testing, *Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci. EATCS* 75(2001), 97–126.
- [21] M. Frick, M. Grohe: Deciding first-order properties of locally tree-decomposable structures, *J. ACM* 48 (2001), 1184–1206.
- [22] J. Fox: A new proof of the graph removal lemma, *Ann. of Math.*, to appear.
- [23] H. Gaifman: On local and non-local properties, v *Proc. Herbrand Symposium, Logic Colloquium'81*, North-Holland, 1982.
- [24] M. Garey, D. Johnson, L. Stockmeyer: Some simplified NP-complete graph problems, *Theoret. Comput. Sci.* 1 (1976), 237–267.
- [25] T. Gavenčiak, D. Král', S. Oum: Deciding first-order logic properties for matroids, v přípravě.
- [26] J. F. Geelen, A. M. H. Gerards, A. Kapoor: The excluded minors for $\text{GF}(4)$ -representable matroids, *J. Combin. Theory Ser. B* 79 (2000), 247–299.
- [27] J. Geelen, B. Gerards, G. Whittle: Tangles, tree decomposition and grids in matroids, rukopis.
- [28] J. Geelen, B. Gerards, G. Whittle: On Rota's Conjecture and excluded minors containing large projective geometries, *J. Combin. Theory Ser. B* 96(3) (2006), 405–425.
- [29] J. Geelen, B. Gerards, G. Whittle: Excluding a planar graph from $\text{GF}(q)$ -representable matroids, rukopis.

- [30] J. Geelen, B. Gerards, G. Whittle: Inequivalent representations of matroids I: An overview, in preparation.
- [31] J. Geelen, B. Gerards, G. Whittle: Branch-width and well-quasi-ordering in matroids and graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 84 (2002), 270–290.
- [32] M. Ghebleh, D. Král', S. Norine, R. Thomas: The circular chromatic index of flower snarks, *Electron. J. Combin.* 13 (2006), #N20, 7pp.
- [33] M. Ghebleh: The circular chromatic index of Goldberg snarks, *Discrete Math.* 307 (2007), 3220–3225.
- [34] M. Ghebleh: The circular chromatic index of generalized Blanuša snarks, *Electron. J. Combin.* 15 (2008), #R44, 9pp.
- [35] O. Goldreich: Combinatorial property testing (a survey), v *Randomized methods in algorithm design*, AMS, 1998, 45–60.
- [36] B. Green: A Szemerédi-type regularity lemma in abelian groups, with applications, *Geom. Funct. Anal.* 15 (2005), 340–376.
- [37] W. T. Gowers: Hypergraph regularity and the multidimensional Szemerédi theorem, *Ann. of Math.* 166 (2007), 897–946.
- [38] H. Hatami: Random cubic graphs are not homomorphic to the cycle of size 7, *J. Combin. Theory Ser. B* 93 (2005), 319–325.
- [39] H. Hatami, X. Zhu: The fractional chromatic number of graphs of maximum degree at most three, *SIAM J. Discrete Math.* 23 (2009), 1762–1775.
- [40] C. C. Heckman, R. Thomas: A new proof of the independence ratio of triangle-free cubic graphs, *Discrete Math.* 233 (2001), 233–237.
- [41] C. C. Heckman, R. Thomas: Independent sets in triangle-free cubic planar graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 96 (2006), 253–275.
- [42] P. Hliněný: On matroid properties definable in the MSO logic, v *Proc. MFCS'03*, LNCS vol. 2747, 2003, 470–479.
- [43] P. Hliněný: A parametrized algorithm for matroid branch-width, *SIAM J. Computing* 35 (2005), 259–277.
- [44] P. Hliněný: Branch-width, parse trees and monadic second-order logic for matroids, *J. Combin. Theory Ser. B* 96 (2006), 325–351.
- [45] P. Hliněný: On matroid representability and minor problems, in: *Proc. MFCS'06*, LNCS vol. 4192, 2006, 505–516.

- [46] P. Hliněný, S. Oum: Finding branch-decomposition and rank-decomposition, *SIAM J. Computing* 38 (2008), 1012–1032.
- [47] P. Hliněný, G. Whittle: Matroid tree-width, *Europ. J. Combin.* 27 (2006), 1117–1128.
- [48] P. Hliněný, G. Whittle: Addendum to Matroid tree-Width, *Europ. J. Combin.* 30 (2009), 1036–1044.
- [49] I. Holyer: The NP-completeness of edge-coloring, *SIAM J. Comp.* 10 (1981), 718–720.
- [50] T. Ito, W. S. Kennedy, B. Reed: A characterization of graphs with fractional total chromatic number equal to $\Delta + 2$, *Electron. Notes Discrete Math.* 39 (2009), 235–240.
- [51] F. Jaeger, T. Swart: Conjecture 1, v *Combinatorics* 79 (M. Deza, I. G. Rosenberg, eds.), *Ann. Discrete Math.* Vol. 9, 1980, 305.
- [52] A. Johansson, Asymptotic choice number for triangle free graphs, DIMACS Technical Report 91-95, 1996.
- [53] K. F. Jones: Size and independence in triangle-free graphs with maximum degree three, *J. Graph Theory* 14 (1990), 525–535.
- [54] F. Kardoš, D. Král, J. Volec: Fractional colorings of cubic graphs with large girth, arXiv:1010.3415.
- [55] A. B. Kempe: On the geographical problem of the four colors, *Amer. J. Math.* 2 (1879), 193–200.
- [56] K. Kilakos, B. Reed: Fractionally colouring total graphs. *Combinatorica* 13 (1993), 435–440.
- [57] M. Kochol: Snarks without small cycles, *J. Combin. Theory Ser. B* 67 (1996), 34–47.
- [58] A. V. Kostochka, J. Nešetřil, P. Smolíková: Colorings and homomorphisms of degenerate and bounded degree graphs, *Discrete Math.* 233 (2001), 257–276.
- [59] A. V. Kostochka, M. Stiebitz, B. Wirth: The colour theorems of Brooks and Gallai extended, *Discrete Math.* 162 (1996), 299–303.
- [60] D. Král, E. Máčajová, J. Mazák, J.-S. Sereni: Circular edge-colorings of cubic graphs with girth six, *J. Combin. Theory Ser. B* 100 (2010), 351–358.

- [61] D. Král, R. Škrekovski: A theorem about channel assignment problem, *SIAM J. Discrete Math.* 16 (2003), 426–437.
- [62] S. Kreutzer: Algorithmic meta-theorems, přijato do sborníku workshopu konaného v Durhamu 2006 v rámci Newton institute special programme on Logic and Algorithms.
- [63] L. Lovász: Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy, *J. Combin. Theory Ser. A* 25 (1978), 319–324.
- [64] L. Lovász: Three short proofs in graph theory, *J. Combin. Theory Ser. B* 19 (1975), 269–271.
- [65] L. Lu, X. Peng: The fractional chromatic number of triangle-free graphs with $\Delta \leq 3$, arXiv:1011.2005.
- [66] J. Matoušek, J. Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum, 2007.
- [67] J. Mazák: Circular chromatic index of type 1 Blanuša snarks, *J. Graph Theory* 59 (2008), 89–96.
- [68] M. Molloy, B. Reed: A bound on the total chromatic number, *Combinatorica* 18 (1998), 241–280.
- [69] J. Mycielski: Sur le coloriage des graphes, *Colloq. Math.* 3 (1955), 161–162.
- [70] B. Nagle, V. Rödl, M. Schacht: The counting lemma for regular k -uniform hypergraphs, *Random Structures Algorithms* 28 (2006), 113–179.
- [71] J. Nešetřil: Aspects of structural combinatorics (graph homomorphisms and their use), *Taiwanese J. Math.* 3 (1999), 381–423.
- [72] J. Nešetřil, P. Ossona de Mendez: Grad and classes with bounded expansion I. Decompositions, *Eur. J. Comb.* 29 (2008), 760–776.
- [73] J. Nešetřil, P. Ossona de Mendez: Grad and classes with bounded expansion II. Algorithmic aspects, *Eur. J. Comb.* 29 (2008), 777–791.
- [74] J. Nešetřil, P. Ossona de Mendez: Grad and classes with bounded expansion III. Restricted graph homomorphism dualities, *Eur. J. Comb.* 29 (2008), 1012–1024.
- [75] J. Nešetřil, P. Ossona de Mendez, D. Wood: Characterisations and examples of graph classes with bounded expansion, arXiv:0902.3265v2.
- [76] S. D. Noble: Evaluating the Tutte polynomial for graphs of bounded tree-width, *Combin. Probab. Computing* 7 (1998), 307–321.

- [77] J. G. Oxley: *Matroid theory*, Oxford Graduate Texts in Mathematics 3, Oxford University Press, 1992.
- [78] S. Oum, P. Seymour: Approximating clique-width and branch-width, *J. Combin. Theory Ser. B.*, in press.
- [79] B. Reed: Fractional total colouring, presentation at the DIMACS Workshop on Graph Coloring and Structure, Princeton, May 2009.
- [80] N. Robertson, D. Sanders, D. Seymour, R. Thomas: The four color theorem, *J. Combin. Theory Ser. B* 70 (1997), 2–44.
- [81] N. Robertson, P. D. Seymour: Graph minors X. Obstructions to tree-decompositions, *J. Combin. Theory Ser. B* 52 (1991), 153–190.
- [82] G.-C. Rota: Combinatorial theory, old and new, v *Actes du Congrès International de Mathématiciens*, vol. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1970, 229–233.
- [83] K. F. Roth: On certain sets of integers, *J. London Math. Soc.* 28 (1953), 104–109.
- [84] V. Rödl, J. Skokan: Regularity lemma for uniform hypergraphs, *Random Structures Algorithms* 25 (2004), 1–42.
- [85] I. Z. Ruzsa, E. Szemerédi: Triple systems with no six points carrying three triangles, *Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976)*, vol. II, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 18, North-Holland, 1978, 939–945.
- [86] E. R. Scheinerman, D. H. Ullman: *Fractional Graph Theory*, Wiley, 1997.
- [87] A. Schrijver: *Combinatorial optimization*, Springer, 2003.
- [88] P. Seymour: Matroid representation over $GF(3)$, *J. Combin. Theory Ser. B* 26 (1979), 159–173.
- [89] P. Seymour: Decomposition of regular matroids, *J. Combin. Theory Ser. B* 28 (1980), 305–359.
- [90] P. Seymour: Recognizing graphic matroids, *Combinatorica* 1 (1981), 75–78.
- [91] A. Shapira: Green’s conjecture and testing linear-invariant properties, v *Proc. STOC’09*, 159–166.
- [92] A. Shapira: A proof of Green’s conjecture regarding the removal properties of sets of linear equations, *J. London Math. Soc.*, to appear.
- [93] W. Staton: Some Ramsey-type numbers and the independence ratio, *Trans. Amer. Math. Soc.* 256 (1979), 353–370.

- [94] Y. Strozecki: A logical approach to decomposable matroids, arXiv 0908.4499.
- [95] E. Szemerédi: On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, *Acta Arith.* 27 (1975), 299–345.
- [96] E. Szemerédi: Regular partitions of graphs, v *Problemes combinatoires et théorie des graphes*, Colloq. Internat. CNRS, vol. 260 Univ. Orsay, Orsay 1976, 339–401.
- [97] T. Tao: A variant of the hypergraph removal lemma, *J. Combin. Theory Ser. A* 113 (2006), 1257–1280.
- [98] P. G. Tait: Note on a theorem in geometry of position, *Trans. Roy. Soc. Edinburgh* 29 (1880), 657–660.
- [99] W. T. Tutte: A homotopy theorem for matroids, *Trans. Amer. Math Soc.* 88 (1958), 144–174.
- [100] K. Truemper: *Matroid decomposition*, Academic Press, 1992.
- [101] A. Vince: Star chromatic number, *J. Graph Theory* 12 (1988), 551–559.
- [102] V. G. Vizing: On an estimate of the chromatic class of a p -graph (in Russian), *Diskret. Analiz.* 3 (1964), 24–30.
- [103] V. G. Vizing: Some unsolved problems in graph theory. *Uspehi Mat. Nauk* 24 (1968), 117–134.
- [104] I. M. Wanless, N. C. Wormald: Regular graphs with no homomorphisms onto cycles, *J. Combin. Theory Ser. B* 82 (2001), 155–160.
- [105] H. P. Yap: *Total colourings of graphs*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1623, Springer, 1996.
- [106] X. Zhu: Circular chromatic number: a survey, *Discrete Math.* 229 (2001), 371–410.
- [107] X. Zhu: Recent developments in circular colorings of graphs, in M. Klazar, J. Kratochvíl, J. Matoušek, R. Thomas, P. Valtr (eds.): *Topics in Discrete Mathematics*, Springer, 2006, 497–550.