NOVÝ ŽIVOT RIEMANNOVSKÉHO PŘÍSTUPU K INTEGRACI

(A) $\mathscr{HK}$- integrace v $\mathbb{R}$, motivace

(B) Elementární vlastnosti

(C) Integrace v $\mathbb{R}^n$

(D) Další vlastnosti $\mathscr{HK}$- integrace v $\mathbb{R}$

(E) Zúžení $\mathscr{HK}$- integrace

(F) Rozšíření $\mathscr{HK}$- integrace

(A) $\mathscr{HK}$ - integrace v $\mathbb{R}$

$I = [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad Iv = \{[c, d] \subset I\},$

$|E| =$ *Leb. míra* množiny $E \subset \mathbb{R}$,

$\Delta = \{(t_i, T_i);\ i = 1, 2, \ldots, k\}$, kde

$$t \in T \in Iv,\ (t, T) \neq (t', T') \Longrightarrow |T \cap T'| = 0.$$

Δ se nazývá *systém*.

$\mathrm{Del}\,\mathscr{HK} = \{\Delta\}$

$\delta\colon I \to (0, \infty)$, Δ je δ - jemné, jestliže

$$T \subset [t - \delta(t), t + \delta(t)] \quad \text{pro } (t, T) \in \Delta.$$

Δ je dělení intervalu $[c, d] \subset I$, jestliže

$$\bigcup_{\Delta} = [c, d].$$

Definice ($\mathscr{HK}$ - integrál, 1957).
Funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ je $\mathscr{HK}$ - integrovatelná na I, jestliže

$$\exists\, J \in \mathbb{R}:\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta\colon I \to (0, \infty),\ \text{že}$$

(1) $$\Big| J - \sum_{\Delta} f(t)\,|T| \Big| \leq \varepsilon$$

pro $\Delta \in \mathrm{Del}\,\mathscr{HK}$, δ-jemné dělení I.

$$\boxed{J = (\mathscr{HK}) \int_I f \,\mathrm{d}t}$$

<u>Poznámka</u>.
Δ můžeme psát ve tvaru

$$\begin{gathered}\{(t_i, [x_{i-1}, x_i]);\; i = 1, 2, \dots k\},\\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b,\\ t_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]\end{gathered}$$

a (1) dostává známý tvar

$$\Big| J - \sum_{i=1}^{k} f(t_i)\,(x_i - x_{i-1}) \Big| \le \varepsilon. \tag{2}$$

$\boxed{\textbf{Lemma}}$ (Existence Δ).

$$\begin{aligned}&\forall\, \delta\colon I \to (0, \infty),\ K \in Iv\\ &\qquad \exists\, \Delta \in \mathrm{Del}\,\mathscr{HK}, \quad \delta - \text{jemné dělení} \quad K.\end{aligned}$$

(A) Motivace z teorie ODR

Problém :

$$\dot{x} = f(x,t) \quad \text{řešení} \quad u, \quad u(0) = 0,$$
$$\dot{x} = g(x,t) \quad \text{řešení} \quad v, \quad v(0) = 0,$$

$\varepsilon > 0$, má být $\|u(t) - v(t)\| \le \varepsilon$ pro $t \in [-1,1]$.

Klasicky :

$$\|f(x,t) - g(x,t)\| \quad \text{dosti malé (někde)}$$

a doplňující podmínky.

Neklasicky :

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,\mathrm{d}s, \quad G(x,t) = \int_0^t g(x,s)\,\mathrm{d}s,$$
$$\|F(x,t) - G(x,t)\| \quad \text{dosti malé (někde)},$$

doplňující podmínky formulovány jen pomocí F, G.

$$u(t) = \int_0^t f(u(s),s)\,\mathrm{d}s \quad \doteq \sum_{\Delta} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(u(t_i),s)\,\mathrm{d}s$$
$$= \sum_{\Delta} [F(u(t_i),x_i) - F(u(t_i),x_{i-1})]$$

$$0 = x_0 < \ldots < x_k = t,\ t_i \in [x_{i-1},x_i],\ \delta\colon\ I \to (0,\infty).$$

Zahrnuta i lok. AC řešení.

(B) Elementární vlastnosti

(i) Primitivní funkce

$$f \text{ je } \mathscr{HK}\text{-integr. na } I, [c,d] \subset I \Rightarrow f \text{ je } \mathscr{HK}\text{-integr. na } [c,d].$$

$F\colon I \to \mathbb{R}$ je primit. funkce k f, jestliže

$$F(d) - F(c) = (\mathscr{HK}) \int_{[c,d]} f \, \mathrm{d}t \qquad \forall\, [c,d] \subset I.$$

(ii) Diff. F je primitivní k $f \Rightarrow \dot{F}(t) = f(t)$ s.v.

(iii) Nula.

$$f = 0 \text{ s.v. } \Rightarrow (\mathscr{HK}) \int_{[c,d]} f \, \mathrm{d}t = 0 \qquad \forall\, [c,d] \subset I.$$

(iv) Vzorec. $G\colon I \to \mathbb{R}$, $\dot{G}(t) \in \mathbb{R} \ \forall\, t \Rightarrow$

$$(\mathscr{HK}) \int_I \dot{G} \, \mathrm{d}t = G(b) - G(a).$$

(v) Transf.
Platí transformační vzorec pro diffeomorfismy.

(C) Integrace v $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$

$m = 2$

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2],\ T = [x_1, y_1] \times [x_2, y_2],\ t = (t_1, t_2)$$

$$\Delta = \{(t, T)\},\ \mathrm{card}(\Delta) < \infty,\ t \in T,\ \bigcup_{\Delta} T = I$$

$$(t, T), (t', T') \in \Delta,\ (t, T) \neq (t', T') \Rightarrow |T \cap T'| = 0$$

Obdoba (v) Transf. Nelze očekávat.

Obdoba (iv) Vzorec. Co to je?

Pro $m = 2, 3, \ldots$ položme

$$\mathrm{reg}\, T = \frac{\lambda_m(T)}{\mathrm{diam} T \cdot \lambda_{m-1}(\partial T)},$$

kde λ_m, λ_{m-1} je Leb. míra příslušné dimenze.

<u>Mezivýsledek</u> (Mawhin 1981).
$\zeta > 0$, $\mathrm{reg}\, T \geq \zeta$ pro $(t, T) \in \Delta$, $F : I \to \mathbb{R}^m$,
$DF(t)$ $\forall\, t \in I$
Potom:

$$\int_I \mathrm{div}\, F \, \mathrm{d}\lambda_m = \int_{\partial I} (F, n) \, \mathrm{d}\lambda_{m-1},$$

n - vnější normála.

$A \subset \mathbb{R}^m$,

$\partial_e A = \{x \in \partial A; \quad x$ není disperzní bod množiny $A\}$,

tj. $\exists \rho_k > 0,\ \rho_k \searrow 0,\ \limsup_{k\to\infty} \frac{\lambda_m(A\cap B(x,\rho_k))}{\lambda_m(B(x,\rho_k))} > 0$,

tzv. essenciální hranice.

A je BV-množina, tj. A je omez., $H_{m-1}(\partial_e A) < \infty$, kde H_{m-1} je $(m-1)$-rozměrná Hausdorffova míra.

$\underline{BV - \text{integrál}}$: intervaly se nahradí BV-množinami.

Pro BV-množinu I platí:

$$(\mathrm{BV}) \int_I \operatorname{div} F\, \partial\lambda_m = \int_{\partial_e I} (F, n)\, \mathrm{d}\, H_{m-1}.$$

Obdoba (v) Transf. vzorec platí.

- Pfeffer, 1986-1993
- Bongiorno and Pfeffer, 1992
- Jurkat, 1993
- Bongiorno, Di Piazza and Pfeffer, 1993-1994
- Jurkat and Nonnenmacher 1994
- Nonnenmacher, 1994-1996

(D) Další vlastnosti $\mathscr{HK}$ - integrace

$$D = \{\delta;\ \delta:\ I \to (0,\infty)\},\ \ Iv = \{[c,d] \subset I\},$$

$G:\ I \to \mathbb{R},\ \ E \subset I,\ \ \delta \in D,\ \ G([c,d]) = G(d) - G(c),$

$$\operatorname{var}(G,E,\delta) = \sup\{\sum_{\Theta} |G(T)|\},$$

kde

$\Theta = \{(t,T)\} \in \mathrm{Del}\mathscr{HK}$, δ-jemné, $t \in E$ pro $(t,T) \in \Theta$,

$$\operatorname{var}(G,E) = \inf_{D} \operatorname{var}(G,E,\delta).$$

Lemma $\operatorname{var}(G,\cdot)$ je metrická vnější míra.

$P_{\mathscr{HK}} = \{F:\ I \to \mathbb{R};\ F$ je primit. k $\mathscr{HK}$- int.funkci$\}$

$\boxed{\textbf{Věta}}$ (charakteristika diferencováním).

f je $\mathscr{HK}$- integr. a F je její primitivní funkce $\iff$
$\dot{F}(t) = f(t)$ na $I \setminus M$, kde $|M| = 0, \mathrm{var}(F, M) = 0$.

$\boxed{\textbf{Věta}}$ (charakteristika variační).

$F \in P_{\mathscr{HK}} \iff \mathrm{var}(F, E) = 0$ pro $E \subset I, |E| = 0$.

$\boxed{\textbf{Věta}}$ $P_{\mathscr{HK}} = ACG_*$.

$\boxed{\textbf{Definice}}$ $G : I \to \mathbb{R}$ je funkce ACG_*, jestliže

$$\exists\, E_k,\ k \in \mathbb{N} : \bigcup_{\mathbb{N}} E_k = I \text{ a } \forall \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}\ \exists\, \eta > 0,$$

že

$$\sum_i \mathrm{osc}\,(F, [c_i, d_i]) \le \varepsilon, \tag{3}$$

kde $[c_i, d_i]$ je posl. intervalů, které se nepřekrývají,

$$\sum_i (d_i - c_i) \le \eta, \quad c_i, d_i \in E_k.$$

(E) Zúžení $\mathscr{HK}$ - integrace

Zvětšíme množinu Del $\mathscr{HK}$.

$$\Delta = \{(t,T),\ t \in I,\ T \in Iv,\ (t,T), (t',T') \in \Delta,$$
$$(t,T) \neq (t',T') \Rightarrow |T \cap T'| = 0\}$$

Δ se nazývá *systém*.

Je-li $K \in Iv$, $\bigcup_\Delta T = K$, pak Δ je dělení K.

$\delta :\ I \to (0,\infty)$, Δ je δ-jemné, když

$$T \subset [t - \delta(t), t + \delta(t)] \text{ pro } (t,T) \in \Delta.$$

$\mathrm{Del}\,\mathscr{L} = \{\Delta\}$,

$\mathrm{Del}\,\mathscr{HK} = \{\Delta \in \mathrm{Del}\,\mathscr{L};\ t \in T \in Iv \text{ pro } (t,T) \in \Delta\}$

$$\mathrm{Del}\,\mathscr{HK} \subset \mathrm{Del}\,\mathscr{X} \subset \mathrm{Del}\,\mathscr{L}$$

$\boxed{\textbf{Definice}}$ $\quad f : I \to \mathbb{R}$ je $\mathscr{X}$- integr., jestliže

$$\exists\, J \in \mathbb{R} :\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta :\ I \to (0,\infty), \quad \text{že}$$

$$\Big| J - \sum_{\Delta} f(t)\, |T| \Big| \le \varepsilon$$

pro $\Delta \in \operatorname{Del} \mathscr{X}$, δ-jemné dělení I.

$$J = (\mathscr{X}\,) \int_I f \, \mathrm{d}t.$$

$\boxed{\textbf{Lemma}}$ $\quad f$ je $\mathscr{X}$- integr. $\Rightarrow$ f je $\mathscr{HK}$- integr.,

$$(\mathscr{X}\,) \int_I f \, \mathrm{d}t = (\mathscr{HK}\,) \int_I f \, \mathrm{d}t.$$

$\boxed{\textbf{Věta}}$ $\quad f$ je $\mathscr{L}$-integr. $\Leftrightarrow$ f je Leb. integr.,

$$(\mathscr{L}\,) \int_I f \, \mathrm{d}t = (\mathrm{Leb}) \int_I f \, \mathrm{d}t$$

(McShane 1969).

<u>Příklady</u>:

$$\mathscr{X} \in \{\mathscr{L},\ \mathscr{M}(b),\ \mathrm{Sum}(\Psi),\ \mathscr{HK}\}$$

$\big(\Psi$ je neklesající, $\Psi(s) > 0$ pro $s > 0$, $\Psi(0) = 0\big)$.

$$\mathrm{Del}\,\mathscr{L} = \{\Delta\}.$$

$$\mathrm{Del}\,\mathscr{M}(b) = \{\Delta = \{(t,T)\} \in \mathrm{Del}\,\mathscr{L};\ t = b \Rightarrow t \in T\}.$$

$$\mathrm{Del}\,\mathrm{Sum}(\Psi) = \{\Delta \in \mathrm{Del}\,\mathscr{L} :\ T \in Iv \ \text{ pro } \ (t,T) \in \Delta, \\ \sum_{\Delta} \Psi(\mathrm{dist}(t,T)) \le 1\}.$$

$$\mathrm{Del}\,\mathscr{HK} = \{\Delta \in \mathscr{L} :\ t \in T \in Iv\}.$$

$P_{\mathscr{X}}$ množ. primit. funkcí k $\mathscr{X}$- integr. funkcím.

$F \in P_{\mathscr{X}}$; $\|F\|_{\sup} = \sup\{|F(d) - F(c)|;\ [c,d] \subset I\}$.

$$P_{\mathscr{L}} = AC. \tag{4}$$

(5) $F \in P_{\mathscr{M}(b)} \Longleftrightarrow$
F je AC na $[a,c]\ \forall\, c \in (a,b)$, F je spoj. v b.

(6) $F \in \bigcap_{\mathbb{N}} P_{\mathrm{Sum}(\Psi(k,\cdot))} \Leftrightarrow F = G + H$,

kde $G \in P_{\mathscr{L}}$, $\dot{H}(t)$ vlast. $\exists\forall\, t$,
$\Psi(k,s) = \frac{s}{k}$ pro $s > 0$.
(C-integrál:Bongiorno, DiPiazza, Preiss, 2000)

(7) Nechť $\Psi_1(s)/\Psi_2(s) \to 0$ pro $s \to 0+$.
Pak $P_{\mathrm{Sum}(\Psi_2)} \setminus P_{\mathrm{Sum}(\Psi_1)} \neq \emptyset$.

$$\bigcap_{\Psi} P_{\mathrm{Sum}(\Psi)} = P_{\mathscr{L}}. \tag{8}$$

STRUKTURY V $P_{\mathscr{X}}$

Věta (o konvergenci) $f_k, f : I \to \mathbb{R}, J_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

(10) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta : I \to (0, \infty)$, že $\left| J_k - \sum_{\Delta} f_k(t)\, |T| \right| \leq \varepsilon$

pro $k \in \mathbb{N}$, $\Delta \in \mathrm{Del}\mathscr{X}$, δ-jemné dělení I

(STEJNÁ INTEGROVATELNOST),

(11) $$f_k(t) \to f(t) \quad \forall t.$$

POTOM
f je $\mathscr{X}$-integr. a $\|F_k - F\|_{\sup} \to 0$, kde F_k, F jsou primit. funkce k f_k, f.

Definice F_k, $F \in P_{\mathscr{X}}$. Říkáme, že $F_k \xrightarrow{\mathbb{E}\mathscr{X}} F$, jestliže $\exists$ f_k, $f : I \to \mathbb{R}$, že platí (10), (11).

Věta $F_k \xrightarrow{\mathbb{E}\mathscr{L}} F \Leftrightarrow \mathrm{var}(F_k - F) \to 0$ a $\dot{F}_k \to \dot{F}$ s.v.

► $\boxed{?}$ $P_{\mathscr{L}}$ je Banach. pr. - odpovídající topol. struktury na $P_{\mathscr{X}}$ ◄

Definice $\mathbb{U}_{LC}(\mathscr{X})$ je množina lok. konv. topologií τ na $P_{\mathscr{X}}$, že

$$F_k \xrightarrow{\mathbb{E}\mathscr{X}} F \Longrightarrow F_k \to F \text{ v topol. } \tau.$$

Definice
$\mathcal{U}_{LC}(\mathscr{X})$ nejjemnější lok. konv. topologie v $\mathbb{U}_{LC}(\mathscr{X})$.

► $\boxed{?}$ Pro která $\mathscr{X}$ je $(P_{\mathscr{X}}, \mathcal{U}_{LC}(\mathscr{X}))$ úplný a lok. konv. ? ◄

(F) Rozšíření $\mathscr{HK}$ - integrace

$$\{\Delta :\ \Delta \in \mathrm{Del}\mathscr{HK},\ \delta\text{-jemné}\} = \omega(\mathscr{HK}, \delta),$$

$$\Omega(\mathscr{HK}) = \{\omega(\mathscr{HK}, \delta), \delta \in D\}.$$

f je $\mathscr{HK}$ - integr. jestliže

$\exists\ J \in \mathbb{R}$ a $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \omega \in \Omega(\mathscr{HK})$, že

$$\Bigl| J - \sum_{\Delta} f(t)\,|T| \Bigr| \le \varepsilon \quad \text{pro}\ \ \Delta \in \omega,\ \ \text{dělení}\ \ I.$$

PROSTŘEDEK k rozšíření $\mathscr{HK}$ - integrace:

užívat menší množiny ω.

$\mathscr{X}$ - název integrace

$$\Omega(\mathscr{X}) = \{\omega\},\ \text{kde}\ \omega = \{\Delta\},\ \Delta \in \mathrm{Del}\,\mathscr{HK}$$

(12) $\qquad \forall\,\omega \in \Omega(\mathscr{X})\quad \exists\,\Delta \in \omega,$ dělení I

(13) $\quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega(\mathscr{X}) \Longrightarrow \exists\,\omega_3 \in \Omega(\mathscr{X}),\ \omega_3 \subset \omega_1 \cap \omega_2$

(14) $\qquad \forall\,\delta \in D\ \exists\,\omega \in \Omega(\mathscr{X}),\ \omega \subset \omega(\mathscr{HK}, \delta)$

SCHÉMA.

f je $\mathscr{X}$- integr., jestliže

$$\exists\, J \in \mathbb{R} \text{ a } \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \omega \in \Omega(\mathscr{X}), \text{ že}$$

$$\Big| J - \sum_{\Delta} f(t)\, |T| \Big| \leq \varepsilon \quad \text{pro} \quad \Delta \in \omega, \text{ dělení } I,$$

$$J = (\mathscr{X})\int_I f\, \mathrm{d}t.$$

Platí

(15) $\qquad J$ je určeno jednoznačně,

(16) $\qquad f,\ g\ \mathscr{X}$- integr., $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

$$(\mathscr{X})\int_I (\alpha f + \beta g)\, \mathrm{d}t = \alpha \,.\, (\mathscr{X})\int_I f\, \mathrm{d}t + \beta \,.\, (\mathscr{X})\int_I f\, \mathrm{d}t,$$

(17) $\quad f\ \mathscr{HK}$- integr. $\Rightarrow (\mathscr{X})\displaystyle\int_I f\, \mathrm{d}t = (\mathscr{HK})\int_I f\, \mathrm{d}t.$

$$A \subset I^2;\ t \in I,\ A(t,\cdot) = \{x \in I : (t,x) \in A\}$$

$$(t,t) \in A,\ \operatorname{dens}_t(A(t,\cdot)) = 1 \text{ pro } t \in I,$$

$$A \longmapsto \omega = \{\Delta = \{(t,[x,y])\} : x \leq t \leq y, (t,x), (t,y) \in A\},$$

$$\Omega(\mathcal{A}p) = \{\omega\} \longmapsto (\mathcal{A}p)\int_I f\, \mathrm{d}t$$

$\boxed{\textbf{Lemma}}$

$\forall\,\omega \in \Omega(\mathcal{A}p)$, $[c,d] \in Iv$ $\exists\,\Delta \in \omega$ dělení $[c,d]$.

Elementární vlastnosti

Nechť je f je $\mathcal{A}p$-integr. Potom

$$\exists \text{ primit. funkce } F, \tag{18}$$

$$F \text{ je měřit., } (\mathcal{A}p) \text{ - spojitá,} \tag{19}$$

$$F'_{\mathcal{A}p} = f \text{ sk. vš.,} \tag{20}$$

$$f \text{ je měřit.} \tag{21}$$

$\boxed{\textbf{Věta}}$ (charakteristika diferencováním).

f je $\mathcal{A}p$-integr. a F je její primit. funkce $\Longleftrightarrow$
$\dot{F}_{\mathcal{A}p}(t) = f(t)$ pro $t \in I \setminus M$, kde $|M| = 0$, $\mathrm{var}_{\mathcal{A}p}(F, M) = 0$.

Definice $F : I \to \mathbb{R}$ měřit, $E \subset I$ měřit.

F je AC_Δ na E, jestliže $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists \eta > 0,\ \omega \in \Omega(\mathcal{A}p)$, že

$$\Big|\sum_\Delta F(T)\Big| \leq \varepsilon$$

pro $\Delta = \{(t,T)\} \in \Omega$, $t \in E$ pro $(t,T) \in \Delta$, $|\bigcup_\Delta T| \leq \eta$.

F je ACG_Δ na E, jestliže $E = \bigcup E_i$, E_i měřit. a F je AC_Δ na E_i pro $i \in \mathbb{N}$.

Věta f je $\mathcal{A}p$-integr. a F je její primitivní funkce $\iff F \in ACG_\Delta$, $\dot{F}_{\mathcal{A}p} = f$ sk. vš.

Definice f je integr. podle Denjoye a Chinčina, jestliže $\exists\ F \in ACG$, $\dot{F}_{\mathcal{A}p} = f$ sk. vš.

Věta $\exists$ funkce f a g :

f je int. podle Denjoye a Chinčina a není $\mathcal{A}p$-int.,
g je $\mathcal{A}p$-int. a není int. podle Denjoye a Chinčina.

ODBOČKA. $\int_I f\,\mathrm{d}g$

$G(a,b)$ prostor *regulovaných* funkcí na $[a,b]$, tj.
$g(a+)=g(a)$, $g(b-)=g(b)$ a $g(t+)$, $g(t-)$ ex. pro $t\in(a,b)$.

NESPOJITÉ PROCESY: tření, hystereze, plasticita, regulace - variační nerovnosti, play operátor, dif. rovnice s malým parametrem u derivace.

$$\mathcal{N}\subset 2^I, E\in\mathcal{N}\Longrightarrow cl(I\setminus E)=I$$
$$E_1,E_2\in\mathcal{N}\Longrightarrow E_1\cup E_2\in\mathcal{N}$$

$\boxed{\textbf{Definice}}$ (KREJČÍ, 2003)

f je $\mathcal{N}$-integr. na I vzhl. ke g, jestliže $\exists\ J\in\mathbb{R}$ a $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\ \delta\in D$ a $E\in\mathcal{N}$, že

$$\Big|J-\sum_\Delta f(t_i)\,(g(x_i)-g(x_{i-1}))\Big|\le\varepsilon$$

pro $\Delta=\{(t_i,[x_{i-1},x_i]\}:\ i=1,2,\dots k\}$ δ-jemné

$$a=x_0<x_1<\dots<x_k=b,\quad t_i\in[x_{x-1},x_i],$$
$$x_i\in I\setminus E \text{ pro } i=1,2,\dots,k-1,$$
$$J=(\mathcal{N})\int_I f\,\mathrm{d}g.$$

(22) existuje primitivní funkce

(23) g spoj. $\Longrightarrow(\mathcal{N})\int_I f\,\mathrm{d}g=(\mathscr{HK})\int_I f\,\mathrm{d}g$

(24) $\mathcal{N}$ je systém spočetných množin, $g\in G(a,b)$,

(Young) $\int_I f\,\mathrm{d}g$ ex. $\Longrightarrow(\mathcal{N})\int_I f\,\mathrm{d}g=$ (Young) $\int_I f\,\mathrm{d}g$

$(\mathcal{A}ps)$ Integrace

$\Omega(\mathcal{A}ps) \subset \Omega(Ap)$ (Preiss a Thomson, 1989)

(25) $(t,[x,y]) \in \Delta \in \omega \in \Omega(\mathcal{A}ps) \Longrightarrow t = \dfrac{1}{2}(x+y)$

$(\mathcal{A}ps)\displaystyle\int_K f\,\mathrm{d}t$ je definován jen pro některé $K \in Iv$.

$\boxed{\textbf{Lemma}}$ $\forall\,\omega \in \Omega(\mathcal{A}ps)\ \exists\, Q \subset I$, že $|Q| = 0$ a

$\forall\,[c,d] \subset (a,b),\ c,d,\in I \setminus Q$

$\exists\Delta = \{(t_i,[x_{i-1},x_i]),\ i = 1,2,\dots k\} \in \omega,$

$c = t_i \le x_1 < x_2 < x_{k-1} \le t_k = b.$

(26) primit. funkce ex., je definována sk. vš.

$\boxed{\textbf{Věta}}$ (charakteristika diferencováním).

f je $\mathcal{A}ps$-integr. a F je její primitivní funkce $\Longleftrightarrow$

F je měřit. a $\mathcal{A}ps$-spojitá

f je $\mathcal{A}ps$-derivace funkce F sk. vš.,

variační míra F^* je σ-konečná a $F^*(E) = 0$ pro $E \subset I$, $|E| = 0$.

(Preiss a Thomson, 1989)

$\boxed{\textbf{Věta}}$ (Denjoy, 1941-1949)

$$b_k \searrow 0, \sum_{\mathbb{N}} \frac{b_k}{k} = \infty \Rightarrow f(t) = \sum_{\mathbb{N}} b_k \sin kt$$

není integr. podle Denjoye a Chinčina

$\boxed{\textbf{Věta}}$ Nechť je

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \, \cos kt + b_k \, \sin k \; t),$$

kde řada konv. $\forall\, t$.
POTOM

$$\pi\, a_k = (\mathcal{A}ps) \int_0^{2\pi} f(t) \, \cos kt \, \mathrm{d}t, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\pi\, b_k = (\mathcal{A}ps) \int_0^{2\pi} f(t) \, \sin kt \, \mathrm{d}t, \quad k = 1, 2, \dots \; .$$

POZNÁMKA.

$$G(t) = \frac{1}{4}\, t^2 - \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \, \cos kt - b_k \, \sin kt)\, k^{-2}$$

stejnoměrná konvergence

$$f(t) = \lim_{k \to 0} \frac{G(t+k) - 2G(t) + G(t-k)}{k^2}.$$

Perronovy integrály druhého řádu:
v definici se pracuje s výrazy

$$\frac{G(t+k) - 2\,G(t) + G(t+k)}{k^2}$$

(Burkill, 1951, a další autoři).