Fregovo pojetí aplikace aritmetiky

Prokop Sousedík, David Svoboda
Katolická teologická fakulta Univerzity Karlovy, Praha

Každou vědní disciplínu lze vymezit pomocí pojmů, jichž užívá.[1] V zoologii pracujeme s pojmem zvíře, savec, ovce, v botanice s pojmem květina, sedmikráska atd. Tyto pojmy byly vytvořeny na základě pozorování určité empirické oblasti, a lze je proto aplikovat jedině na tuto oblast. Pojem „ovce" se používá v zoologii či v agronomii, nikoli ve strojírenství; pojem „sedmikráska" v botanice, a nikoli v technologii. Běžné empirické pojmy jsou tedy obecné, nicméně aplikovat je lze pouze na určitou oblast.

I matematika má své vlastní pojmy a postupy, ty však na rozdíl od pojmů speciálních věd užíváme v téměř každé vědě či lidské činnosti. Potřebuje je nejenom fyzik, technik, sociolog, ekonom, ale aplikujeme je, byť s určitými rozpaky, i na výsledky vědecké práce jako takové. Matematické pojmy tak naším jazykem takřka prorůstají, můžeme tedy dát za pravdu C. F. Gaussovi, když říká, že matematika je *královnou věd*. Nevládne totiž pouze ve svém vlastním „království", ale setkáváme se s ní a musíme ji respektovat i mimo jeho hranice.[2]

Čím si však matematika toto své výlučné panství zasloužila? Proč tak zásadně pronikla do běžných i vědeckých úvah o světě kolem nás? Záhadné je, že se sice tento „empirický svět" stal zdrojem mnoha matematických pojmů a teorií, nicméně jakmile byly tyto pojmy a teorie jednou vytvořeny, vyvíje-

---

1 Tato práce vznikla v rámci projektu „Scholastické teorie vztahu jako možný zdroj strukturalistické koncepce čísla" GAČR 13-08512S.
Děkujeme anonymním recenzentům Filosofického časopisu za jejich kritický komentář, který významným způsobem vylepšil a obohatil původní verzi článku.

2 Toto výlučné postavení však matematika vždy neměla. V antice či středověku sice hrála více či méně důležitou roli, nicméně ono výlučné postavení začala získávat až s rozvojem vědy v moderním slova smyslu, tj. od počátku novověku. V dřívějších dobách (především v období scholastiky) sehrávala její roli logika. Ta byla většinou považována za umění všech umění, vědu věd, která v sobě skrývá principy všech metod a má z těchto důvodů před ostatními vědami určitou přednost.

ly se zcela nezávisle na svém počátečním zdroji. V tomto evolučním procesu vznikaly nové pojmy a teorie, které měly zpětně často *zázračný* a rozhodující vliv na vědecký pokrok mimo oblast vlastní matematiky.[3] Čím to tedy je, že matematikovy úvahy, ačkoli se smyslovým světem v podstatě nezabývají, lze tak „zázračně“ na tuto realitu aplikovat?

Odpovědi na tuto otázku lze podle našeho soudu rozdělit (až do konce 19. století) do dvou skupin: první budeme nazývat *aposteriorní*, druhou *apriorní*. Podle aposteriorního přístupu, za jehož zakladatele budeme považovat Aristotela, je zdrojem matematických pojmů empirický svět, a matematika proto zachycuje realitu obdobným způsobem jako jiné empirické disciplíny. Úspěšnost či „zázračnost“ její aplikovatelnosti lze vysvětlit tím, že je založena na pojmech, které jsou nad jiné obecné. Výhodou této koncepce je nepochybně to, že přímočaře vysvětlí aplikovatelnost, nevýhodou naopak to, že svým způsobem odporuje duchu matematické praxe. Matematika by totiž podle aposteriorní koncepce měla postupovat v podstatě týmž způsobem jako ostatní empirické vědy. Tuto nevýhodu odstraňuje koncepce apriorní, za jejíhož otce budeme považovat Platóna, která tvrdí, že velká míra aplikovatelnosti matematiky není dána obecností jejích pojmů, ale tím, že tyto pojmy mají svůj základ v oblasti, která svým způsobem sféru zkušenosti transcenduje. Výhodou těchto dvou přístupů nepochybně je, že konvenuje intuicím převážné části matematiků, protože adekvátním způsobem vysvětluje specifika jejich praxe. Nevýhodou naopak je, že vztah mezi neempirickými pojmy matematiky a zkušenostním světem (tj. aplikovatelnost matematických pojmů na svět) se začne jevit jako obtížně řešitelný problém.

Dvojího přístupu filosofů k založení matematiky si byl zřejmě vědom i Gottlob Frege. Jeho pojetí, které se zaměřuje pouze na aritmetiku, lze totiž chápat jako určitou snahu o skloubení výhod aposteriorismu s výhodami apriorismu. Představiteli těchto dvou proudů však nejsou ani Aristotelés, ani Platón, ale Fregovi dobově bližší John Stuart Mill a formalisté.[4] Právě kritikou těchto dvou proudů si náš autor vytvoří prostor k tomu, aby nejen předložil vlastní pojetí aplikace aritmetiky, ale současně i položil základy této disciplíny. Hlavním cílem našeho příspěvku je ukázat, že originalitě Fregova přístupu k matematice lze porozumět jako snaze vypořádat se s napětím mezi apriorním a aposteriorním přístupem.

V první části svého příspěvku (§ 1-2) se zabýváme aposteriorním přístupem (Aristotelés, někteří scholastikové a J. S. Mill) a jeho kritikou ze strany

3 Kac, M. – Ulam, S. M., *Mathematics and Logic – Retrospect and Prospect*. Harmondsworth, Penguin Pelican 1971, s. 161.

4 S kritikou aposteriorní koncepce, tj. Milla, se setkáváme v *Základech aritmetiky*, s kritikou apriorní koncepce, tj. formalismu, v *Základních zákonech aritmetiky*.

Frega. Ve druhé části (§ 3-4) zkoumáme analogickým způsobem apriorní přístup (Platón, nominalisté, formalisté). Ve třetí části (§ 5) ukazujeme, jak se Frege na pozadí své kritiky staví k problému aplikace a základů aritmetiky.

§ 1. Aposteriorní přístup – Aristotelés, scholastika, Mill

Posuďme nejprve názor, že matematika podobně jako ostatní vědy vychází z empirické zkušenosti. Zastáncem tohoto pojetí je v prvé řadě Aristotelés a jím inspirovaná scholastika.[5] Později se k podobné koncepci přiklonil i anglický pozitivista J. S. Mill, dnes hájí určitou modifikaci Millovy koncepce především americký filosof Glenn Kessler. Kesslerovo pojetí, jež dále rozvíjejí někteří představitelé soudobé metafyziky, však v našich úvahách necháváme stranou.[6]

Podle Aristotela a jeho scholastických stoupenců pojednává každá věda o tom, co je obecné a nutné. Předmět vědy tak na rozdíl od konkrétních věcí neexistuje sám o sobě, ale dospíváme k němu abstrakcí. V závislosti na stupni abstrakce se pak rozlišují tři teoretické vědy: fyzika, která abstrahuje pouze od individuální látky, matematika, která abstrahuje nejen od individuální látky, ale i od smyslových kvalit, a konečně teologie, či jak budeme říkat, metafyzika, která abstrahuje od veškeré tělesnosti.[7]

S uvedeným uspořádáním teoretických věd souvisí i míra jejich aplikovatelnosti. Přinejmenším abstraktní fyziku lze aplikovat na všechna fyzická jsoucna, která mají příslušné kvality a jsou bytostně spojená s látkou. Fyzika tak pracuje s obecnými pojmy, které lze vypovídat či aplikovat pouze na proměnlivý svět kolem nás. Abstraktnější matematika, která nechává stranou nejenom individuální látku, ale i smyslové kvality, zkoumá výhradně kvantitativní povahu jsoucen. Díky tomu lze její pojmy aplikovat nejen při popisu světa kolem nás (na louce je pět ovcí), ale i při popisu reality, kterou jsme abstrakcí zbavili všech smyslových kvalit (3 + 2 = 5).[8] Matematické pojmy

5 Srov. Klein, J., *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. New York, Dover Publications 1968; Svoboda, D. – Sousedík, P., Mathematical One and Many: Aquinas on Number. *The Thomist*, 78, 2014, s. 1-17.

6 Srov. Kessler, G., Frege, Mill and the Foundations of Arithmetic. *The Journal of Philosophy*, 77, 1980, 2, s. 65-79; Armstrong, D. – Forrest, P., The Nature of Number. *Philosophical Papers*, 16, 1987, 3, s. 165-186; Svoboda, D. – Sousedík, P., Millovo pojetí čísla. *Organon* F, 20, 2013, 2, s. 201-221.

7 Aristotelés, *Metafyzika*, VI. Přel. A. Kříž. Praha, Petr Rezek 2003 (dále jen *Metafyzika*); srov. Apostle, H. G., *Aristotle's Philosophy of Mathematics*. Chicago, Chicago University Press 1952.

8 *Metafyzika*, XI, 3 1061a 29-34: „Matematik předmětem svého zkoumáni činí to, co získal ubráním znaků. Zkoumá totiž svůj předmět, když jej zbavil všeho smyslového, jako těžkosti a lehkosti, tvrdosti a jejího opaku a rovněž teplosti a studenosti a ostatních protiv, jež spadají do oblasti smyslového poznání, ponechává jenom množství a to, co jest nepřetržité v jednom nebo

se proto užívají jednak ve vědách (fyzika)[9] či uměních (astronomie, hudba), jednak při čistě kvantitativním popisu světa. Je třeba zdůraznit, že pro aposteriorní přístup je charakteristické, že onen čistě kvantitativní popis světa se od fyzikálního liší pouze mírou abstrakce; v principu je však realita zachycena stejným způsobem jako ve fyzice. Nejabstraktnější je metafyzika, která tematizuje jsoucno jakožto jsoucno, její závěry jsou proto aplikovatelné na každou oblast skutečnosti. Přestože jsou mezi uvedenými vědními disciplínami důležité rozdíly, společně vytvářejí svým způsobem souvislý celek. Každý poznatek, ať už jakkoli abstraktní, je založen zkušeností, takže jej lze zcela přirozeně aplikovat na náš svět. To se přirozeně týká nejenom fyziky, ale i matematiky a metafyziky.[10]

Podobnou koncepci jako Aristotelés a scholastikové zastával, alespoň v určitém ohledu, i Mill. Také on byl přesvědčen, že naše poznání vytváří homogenní celek a že do něho náleží i matematika. I matematika má, podobně jako ostatní vědy, svůj reálně existující předmět – kvantitu, a právě to z ní činí rovnocenného člena rodiny „reálných věd". Od ostatních věd se tedy neliší svým specifickým předmětem, ale svou obecností. Podle Milla jsou totiž „všechny věci … kvantitativní, skládají se z částí, které lze počítat, a díky tomu mají všechny vlastnosti, které se nazývají vlastnostmi čísel".[11] Zkoumá-li matematika (v uvedeném textu jde zřejmě pouze o aritmetiku) kvantitu jakožto určitý velmi obecný rys empirické reality, vysvětlení aplikovatelnosti nečiní obtíže. S kvantitativním množstvím se totiž setkáváme takřka na každém kroku, a tak lze jeho zákony použít téměř na cokoli. „To, že čtyři děleno dvěma, jsou dvě, musí být pravda, ať už čtyřka reprezentuje cokoli:

(*Pokrač. pozn. č. 8*) ve třech směrech a zkoumá vlastnosti toho, pokud jest kvantitativní a nepřetržité, o ostatní se nestará."

9 Aplikace matematiky ve staré fyzice působí určité rozpaky. Aristotelova fyzika totiž rozhodně není matematizovaná vědní disciplína, ale „pouhá" filosofická disciplína. Matematika se tak v pravém slova smyslu aplikovala pouze v uměních.

10 Uvedené rozlišení poskytuje důležitou informaci o vzájemné souvislosti mezi vědními obory. Fyzika vychází nejenom ze svých vlastních principů, ale i z principů, jež jsou zřejmé ve světle nadřazených věd, tj. matematiky či metafyziky (srov. Thomas Aquinas, *Summa Theologica*, I, 1, a. 1-7, Opera Omnia IV–XII. Ed. Leonina. Romae 1888-1906 (český překlad: Tomáš Akvinský, *Theologická suma*. Olomouc, Krystal, 1937-1940). Jsou tak do ní včleněny i premisy, které mají čistě matematickou či metafyzickou povahu. Podobně je tomu také s matematikou. I ta kromě svých vlastních principů obsahuje principy, jež jsou zřejmé ve světle jiné vědy. Tímto způsobem jsou však do ní začleněny pouze principy metafyzické. Na vrcholu našeho poznání stojí metafyzika. Protože je nejabstraktnější, obsahuje pouze své vlastní principy a lze ji aplikovat ve všech podřízených oblastech. Z hlediska, které zde sledujeme, je třeba zdůraznit, že matematika čerpá z principů metafyziky a sama je zdrojem principů pro fyziku. Díky tomu ji lze v pravém slova smyslu aplikovat výhradně v oblasti kvantitativního jsoucna.

11 Mill, J. S., *A System of Logic*. In: *Collected Works of J. S. Mill*. 33 vol. Ed. J. M. Robson et al. Toronto, University of Toronto Press 1963–1991, kniha II, kap. VI, § 2; Svoboda, D. – Sousedík, P., Millovo pojetí čísla, c. d., s. 211.

čtyři hodiny, čtyři míle či čtyři libry váhy. Je si třeba pouze představit, že je věc rozdělena na čtyři stejné části (a všechny věci si lze tímto způsobem představit), abychom o ní byli s to predikovat každou vlastnost, jíž spojujeme s číslem čtyři, tj. každou aritmetickou propozici, v níž číslo čtyři stojí na jedné straně rovnice."[12]

Je tedy patrné, že Mill zastává podobné stanovisko jako Aristotelés, oba autoři se shodují v názoru, že matematika má stejně jako ostatní vědy svůj předmět, a tím je právě kvantita. To, že se cesty obou filosofů nakonec přece jen začnou rozcházet, souvisí s odlišnými názory na metafyziku. Aristotelés ji, jak jsme již uvedli, umístil na sám vrchol vědeckého bádání, Mill naopak v duchu osvícenského pozitivizmu metafyziku radikálně odmítl.

Dáme-li ve sporu o metafyziku za pravdu Aristotelovi, zavazujeme se tím k tomu, že uznáme nejenom smysly postižitelné fyzické předměty, ale i skutečnosti smysly nepostižitelné („metafyzické"), které lze poznat pouze rozumem. Mezi ně přirozeně řadíme i čísla. Upřednostníme-li naopak Milla, pak se nám takováto možnost uzavře. Čísla, ale i všechny ostatní abstraktní předměty, musíme velmi intimně spojit se smysly postižitelným světem. Abychom hlouběji porozuměli tomu, jak se Mill s tímto nelehkým úkolem vyrovnal, je třeba nejprve vysvětlit jeho pojetí obecných termínů, mezi něž patří i číslovky.[13]

Obecné termíny mají podle Milla dvě základní sémantické vlastnosti – denotaci a konotaci.[14] Denotují předměty, o kterých je můžeme pravdivě vypovídat, konotují určitý atribut, který všechny tyto předměty sdílejí. Číslovky se od běžných obecných termínů liší tím, že nedenotují individua, ale agregáty individuí a konotovaný atribut se nevztahuje k individuu, ale opět k agregátu. S takovýmto pojetím by v principu mohl souhlasit i Aristotelés a scholastikové. Jejich nedůvěru by nicméně vzbudily pasáže, do nichž se promítá Millovo odmítnutí metafyziky a současně jeho pozitivistický postoj. Sémantické vlastnosti číslovek totiž shrnuje takto: „Každé z čísel dva, tři, čtyři atd. denotuje fyzický jev a konotuje fyzickou vlastnost těchto jevů. Dvě např. de-

12 Mill, J. S., *A System of Logic*, c. d., II, VI, 2.

13 Srov. Svoboda, D. – Sousedík, P., Millovo pojetí čísla, c. d., s. 213.

14 Denotace je vlastnost, díky níž se termín vztahuje právě k těm individuím, o kterých ho můžeme pravdivě vypovídat (dnes bychom proto hovořili o rozsahu obecného termínu). Konotace naopak spočívá v tom, že termín navíc spoluoznačuje (konotuje) určitý atribut, který je denotovaným individuím společný a jehož povahu vyjadřuje příslušná definice. Takže např. obecné jméno „ctnostný je jméno, které se aplikuje na ctnostná individua díky tomu, že tato individua jsou nositeli příslušného atributu… Aplikuje se na všechny entity, pro něž platí, že mají tento atribut, a na žádné, které tento atribut nemají." Mill, J. S., *A System of Logic*, c. d., kniha I, kap. 2, § 5.

notuje všechny dvojice věcí, dvanáct všechny tucty věcí, konotuje pak to, co je činí dvojicemi nebo tucty…“[15]

Rozdíl mezi Aristotelem a Millem spočívá v tom, že první by patrně s konotací číslovky spojil metafyzickou obecninu, druhý výslovně hovoří o fyzickém jevu. O jaký druh fyzického jevu se však jedná? Podle Milla číslovka konotuje vlastnost, která je „totožná s charakteristickým způsobem, jímž je agregát složen z částí a může být na ně opět rozložen“.[16] Tak např. číslovka tři konotuje vlastnost trojčlenných agregátů, které „když působí na naše smysly takto ˚˳˚, lze je rozdělit na dvě části takto ◦◦ ◦“.[17] V uvedené definici trojky se tak neskrývá nic jiného než to, co můžeme smyslově pozorovat při manipulaci s příslušným agregátem.

Takovýto radikální závěr však právem vzbuzuje vážné pochybnosti, není proto divu, že se objevily filosofické argumenty, které jej odmítají. Ty pak samozřejmě zpochybňují nejenom Millovu koncepci, ale i celé aposteriorní vysvětlení aplikovatelnosti, čímž otevírají cestu k přístupu apriornímu.

§ 2. Problémy aposteriorního přístupu

Podívejme se nyní, jaké námitky proti aposteriornímu přístupu vznesl Frege. Hlavní chyba, jíž se stoupenci aposteriorního přístupu (především Mill) dopustili, spočívá podle Fregova mínění v tom, že „stále zaměňují aplikace nějaké aritmetické věty, které jsou často fyzikální a mají za předpoklad pozorované skutečnosti, s čistě matematickou větou samou“.[18] Podle Frega totiž sama aritmetická věta nemá empirický obsah, její aplikace však ano. Nedostatek Aristotela, ale především Milla, spočívá v tom, že toto rozlišení v podstatě ignorovali a že význam aritmetických vět i termínů odvodili právě z jejich aplikací.

Takovou kritiku by však Mill jistě nepřijal. Jako pozitivista se domnívá, že existuje jediný (a to aposteriorní) zdroj našeho poznání, a z něj čerpají nejenom běžné vědy, ale i matematika. Fregovi by odpověděl, že rozlišení mezi matematickou větou samou a její aplikací právě tomuto základnímu východisku odporuje. Pokud bychom přijali Fregovo rozlišení, museli bychom uznat, že vedle běžných vět, jejichž pravdivost poznáváme *a posteriori* (patří mezi ně věty aplikované matematiky), by existovaly i věty, jejichž pravdivost ověřujeme *a priori* (patří mezi ně věty čisté matematiky). Vedle běžného aposteriorního poznání, jímž postihujeme náš neustále proměnlivý svět, by

15 Tamtéž, kniha III, kap. XXIV, § 5.
16 Tamtéž.
17 Tamtéž.
18 Frege, G., Základy aritmetiky. Přel. J. Fiala. In: týž, *Logická zkoumání. Základy aritmetiky*. Praha, OIKOYMENH 2012, s. 174.

tak muselo existovat i jakési poznání apriorní, jímž postihujeme oblast věčných a neproměnných entit, které se nacházejí zcela mimo náš běžný svět. Takovýto závěr by však znovu otevřel dveře metafyzice, a proto je ho třeba odmítnout. Mill by proto neschválil Fregovo rozlišení mezi matematickou větou samou a její aplikací a nadále by trval na tom, že i věty čisté matematiky[19] je třeba zakotvit v pozorované skutečnosti. Matematická věta sama má v jeho pojetí reálný obsah stejně tak jako její aplikace, a jejich striktní rozlišování může způsobit vážnou konfúzi.

Frege však nezůstal u pouhého deklarování, že je třeba rozlišovat mezi aritmetickou větou samou a její aplikací, tím by se pouze dogmaticky přihlásil k aprioristickému přístupu. Povšiml si, že Mill by mohl obhájit nevhodnost zavedení distinkce mezi aritmetickou větou samou a její aplikací tím, že by poukázal na svoji definici čísla. Ta, jak víme, vychází z fyzického jevu, který příslušná číslovka konotuje. Přijmeme-li však tuto Millovu definici, dostaneme se do značných obtíží. Čísla budeme totiž s to aplikovat výhradně na takové agregáty, jejichž působení na naše smysly přesně odpovídá předložené definici. Je však zřejmé, že různé stejnopočetné agregáty na naše smysly tímtéž způsobem nepůsobí. Definuje-li Mill např. trojku jako něco, co „působí na naše smysly takto ˚∘˚“ a co „lze rozdělit na dvě části takto ∘∘ ∘“, pak číslo tři můžeme aplikovat pouze a jen na ty agregáty, které na naše smysly působí právě uvedeným způsobem.[20] Číslo tři bychom snad mohli aplikovat na tři lidi v místnosti či tři koule na kulečníkovém stole, ale rozhodně by nebylo správné „hovořit o třech úderech zvonu, když hodiny odbíjejí třetí, nebo nazývat sladkost, kyselost a hořkost třemi chuťovými vjemy…, neboť žádná z těchto trojic nepůsobí na naše smysly jako ˚∘˚“.[21]

Uvedená kritika jistě problematizuje Millův pokus o empirické založení aritmetiky, Aristotela či jeho scholastických stoupenců se však bezprostředně netýká. Představitelé této tradice sice také vycházejí ze smyslového poznání, nicméně na rozdíl od Milla se domnívají, že se jím naše poznání nevyčerpává, nýbrž že nadto můžeme rozumem postihnout metafyzické předměty. Tím je dána nejenom možnost pěstovat metafyziku, ale i definovat jednotlivá čísla neempirickým způsobem. K obsahu definice čísla tři pro-

19 Věty čisté matematiky patří podle Millovy terminologie mezi reálné propozice stejně jako věty ostatních věd. V tomto ohledu připomeňme, že náš autor vedle reálných propozic hovoří i o propozicích verbálních. Pravdivost reálné propozice je založena empirickou realitou, pravdivost verbální propozice pak jazykovým užitím. S reálnými propozicemi se setkáváme nejenom v běžných empirických vědách, ale i v matematice a logice. Verbální propozice naproti tomu zachycují pouze povahu našich jazykových konvencí a mají okrajový význam. Srov. Svoboda, D. – Sousedík, P., Millovo pojetí čísla, c. d.

20 Mill, J. S., *A System of Logic*, c. d., kniha III, kap. XXIV, § 5.

21 Frege, G., Základy aritmetiky, c. d., s. 171.

to Aristotelés a scholastikové nemusejí připojovat ono Millovo problematické „to, co působí na naše smysly takto °˳°“.[22]

Abychom porozuměli tomu, že se Fregova kritika přesto vztahuje i na aristotelsko-scholastické myslitele, je třeba dodat, že tito autoři chápali jednotlivá čísla jako druhy diskrétní kvantity. Vypovídáme-li tedy o nějakém agregátu individuí určité číslo, přisuzujeme mu přirozeně celý obsah tohoto pojmu, tj. i diskrétní kvantitu. Diskrétní kvantitu však naši myslitelé chápali jako soubor materiálně oddělených jednotek. Tvrdíme-li například, že evangelisté jsou čtyři, pak tím samozřejmě říkáme, že Matouš, Marek, Lukáš a Jan jsou materiálně oddělená individua, tj. říkáme, že hranice těla jednoho evangelisty není totožná s hranicí těla toho druhého. Čísla však nevypovídáme pouze o hmotných agregátech, jejichž prvky jsou materiálně oddělené, ale i o agregátech nehmotných. Běžně totiž mluvíme nejenom o počtu evangelistů, ale i o počtu prvočísel, Aristotelových kategorií, myšlenek atd.

Scholastikové, jako např. Tomáš Akvinský, si tohoto problému byli vědomi. Souhlasí s tím, že vlastnosti abstrahované z vnějších věcí nelze beze změny smyslu vypovídat o nemateriálních entitách. Proto musí mít věty, v nichž vypovídáme čísla o nemateriálních agregátech, jiný smysl než ty, v nichž je vypovídáme o hmotných agregátech. O materiálních agregátech vypovídáme čísla jednoznačně, naopak nemateriálním agregátům připisujeme čísla analogicky či metaforicky.[23] I takovéto řešení by však Frege odmítl. Uvedený posun smyslu by totiž považoval za *reductio ad absurdum* celé aristotelsko-scholastické koncepce čísla.[24]

Pokusme se nyní shrnout hlavní nesnáze aposteriorního přístupu. První vyplývá z toho, že matematika nachází svůj předmět v tomto empirickém světě. Z toho je zřejmé, že okruh aplikace čísla je právě tímto předmětem vymezen. V případě pozitivisticky orientovaného Milla je tento okruh zcela nepatrný; u metafyzicky zaměřeného Aristotela a scholastiků je sice oblast aplikace podstatně širší, nicméně i oni se nadále potýkají s problémem, jak přesvědčivě vysvětlit aplikaci čísel na neempirické agregáty. Druhý problém úzce souvisí s prvním. Nachází-li matematika svůj předmět v tomto empirickém světě, stává se z ní disciplína, která se podstatně neodlišuje od ostatních věd. Tím ji však, jak se zdá, *de facto* sesadíme z jejího pomyslného trůnu a přestane být onou „královnou věd“.

22 Mill, J. S., *A System of Logic*, c. d., kniha III, kap. XXIV, § 5.

23 Thomas Aquinas, *Summa Theologica*, c. d., I, 30, 3.

24 Srov. Frege, G., Základy aritmetiky, c. d., s. 192: „… bylo skutečně podivuhodné, kdybychom vlastnost, jíž jsme vyabstrahovali z vnějších věcí, mohli beze změny smyslu přenést na události, představy, pojmy. Výsledek by byl stejný, jako kdybychom chtěli hovořit o tavitelné události, modré představě, slaném pojmu či o tuhém soudu.“

§ 3. Apriorní přístup – Platón, nominalisté a formalisté

Výše uvedená kritika aposteriorního přístupu snad může svádět k závěru, že Frege byl zastáncem přístupu zcela opačného (striktně apriorního) a že se domníval, že matematika nevychází z empirických aplikací, ale pojednává o oblasti, která je od našeho světa zcela oddělená. Uvidíme později, že takovýto striktně aprioristický přístup Frege nepřijal, nýbrž zaujal k problematice aplikability vlastní originální stanovisko. To však nyní necháme stranou a pohovoříme o základních rysech onoho čistě aprioristického přístupu, k němuž Fregovo odmítnutí Milla přímo svádí.

Otcem apriorního přístupu je nepochybně Platón. Jeho nauka sice dodnes vzbuzuje celou řadu otázek a vzájemně odlišných interpretací, nicméně podle jednoho vlivného výkladu mají matematické entity obdobný status jako ideje a jsou oddělené od našeho empirického světa.[25] Ideje se odlišují od matematických předmětů tím, že jsou obecné, matematické předměty naopak jednotlivé. Realita je tedy podle Platóna „roztržena" do dvou nesourodých oblastí: na jedné straně je náš proměnlivý empirický svět, na straně druhé neproměnné ideje a matematické předměty.[26]

S takovýmto rozštěpem reality je však spojena vážná nesnáz, na niž upozornil již Aristotelés.[27] Není totiž vůbec jednoduché vysvětlit vztah mezi těmito dvěma nesourodými oblastmi. Jestliže ho však uspokojivě nevysvětlíme, uzavře se tím přirozeně i cesta k tomu, abychom aplikovali čísla na empirický svět. Problém s aplikací by se tak stal ještě palčivější než v případě Aristotela či Milla. Zatímco tito filosofové nedokázali přesvědčivě vysvětlit aplikaci jen v některých případech, Platón by ji nedokázal vysvětlit vůbec. I přes tuto stinnou stránku, nebo snad právě pro ni, nepřestal být platonismus především pro teoretické matematiky stále atraktivní. Dokáže totiž, na rozdíl od aristotelismu, obhájit apriorní status matematiky, a tím i zajistit její titul „královny věd".

Přednosti a nedostatky platonismu a aristotelismu se tak zdají být v podstatě vyrovnané. První vítězí u čistého matematika, druhý spíše u vědce, který výsledky matematiky aplikuje na empirickou realitu. Za těchto okolností bychom jistě očekávali, že představitelé obou proudů začnou své koncepce vyztužovat, aby případné vítězství definitivně strhli na svoji stranu. K tomuto vcelku logickému vyústění však nedošlo. Jak filosofové, kteří navazovali na Platónův apriorní přístup, tak stoupenci Aristotelova aposterior-

25 Karfík, F., Čísla a ideje ve staré akademii. In: Karfíková, L. – Šír, Z. (eds.), *Číslo a jeho symbolika od antiky po renesanci*. Brno, CDK 2003, s. 9-24.

26 Tato intepretace nachází oporu především ve výkladu Aristotela (*Metafyzika* I). Její standardní interpretaci viz in: Ross, W. D., *Plato's Theory Of Ideas*. Oxford, Clanderon Press 1951.

27 *Metafyzika* I, 6.

ního přístupu totiž spíše cítili potřebu vypořádat se s metafyzikou, jíž byly koncepce jejich velkých předchůdců infikovány. Mill si proto, jak jsme viděli, nedělal těžkou hlavu s tím, že matematiku v podstatě sesadil z jejího královského trůnu, ale zaměřil se na to, jak „ne-metafyzicky" definovat číslo. Obdobně si počínali i novověcí představitelé apriorního přístupu, kteří si nedělali mnoho starostí s tím, jak vysvětlit aplikabilitu, ale usilovali zejména o to, aby matematiku zbavili robustní platónské metafyziky. Jejich snahy sehrály v dějinách filosofie matematiky poměrně významnou úlohu a daly podnět ke vzniku koncepcí, které mají význam i v dnešních diskusích. V dalším proto v krátkosti naznačíme, jakým způsobem se novověcí filosofové zbavili nežádoucí metafyzické zátěže, přitom si však podrželi apriorní přístup k povaze matematiky.[28]

Abychom našemu problému dobře porozuměli, připomeňme nejprve Hegelovo dělení dějin filosofie do dvou etap: v první – „tradičně" metafyzické – vítězí zájem o problematiku bytí, ve druhé – více či méně anti-metafyzické – dochází k obratu k vědomí či subjektu.[29] I přes tuto zásadní protichůdnost však zůstala ve druhém období některá starší myšlenková schémata v podstatě netknutá. Z našeho hlediska je významné především to, že i ve „filosofii vědomí" zůstává realita, tak jako u Platóna, nadále „roztržena" vedví. Na jedné straně je tu subjektivně založená apriorní oblast (tj. ideje v novověkém, nikoli v Platónově, smyslu), na straně druhé extramentální objekty, které poznáváme *a posteriori*. S jasným rozlišením mezi subjektem a objektem (předmětem) dále souvisí i novověké rozdělení věd do dvou oblastí. Zatímco základy matematiky spadají do oblasti subjektu, ostatní empirické vědy čerpají poznatky z vnější předmětné skutečnosti. Doklad tohoto rozlišení nacházíme např. u Davida Huma, podle něhož lze „[v]šechny předměty lidského rozumu či zkoumání přirozeně rozdělit na dva druhy, totiž na vztahy idejí a faktické okolnosti. Prvnímu druhu přísluší vědy jako geometrie, algebra a aritmetika a krátce všechna tvrzení, jež jsou jistá na základě nahlédnutí nebo důkazu. (…) K větám tohoto druhu lze dospět pouhým myšlenkovým úkonem bez ohledu na to, zda cokoli ve vesmíru vůbec existuje. (…) O faktic-

28 Mancosu, P., *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. Oxford, Oxford University Press 1999.

29 Sám Hegel rozlišuje obě etapy pomocí pojmu „idea" a „duch" či „sebepoznávající idea". „Idea či o sobě a pro sebe existující věc je principem řeckého světa; tato věčná idea se pomocí myšlenek přivádí k vědomí." Podle řecké filosofie vytváří myšlení intelektuální obraz světa, nicméně dosud ještě nereflektuje, že tento obraz vytváří myslící subjekt. „Subjektivita se objevuje pouze nahodile." Tento přístup se radikálně změní ve druhé etapě. „Já pozná samo sebe v ideji, vědění se pojme jako nekonečná forma…, a tato musí být pojata jako Já, jako vědoucí princip." Srov. Hegel, G. W. F., Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie. In: týž, *Vorlesungen. Ausgewählte Manuskripte und Nachschriften*. Bd. 2. Hamburg, Meiner Verlag 1983, s. 74; citováno podle Jaeschke, W., *Hegel Handbuch*. Stuttgart – Weimar, J. B. Metzler Verlag 2003, s. 486-487.

kých okolnostech, které jsou druhým předmětem lidského rozumu, se nepřesvědčujeme stejným způsobem a ani evidence jejich pravdivosti … není stejné povahy jako v předchozím případě. Opak každé faktické okolnosti je vždy možný; nemůže totiž nikdy být logicky sporný a mysl si jej může představit stejně snadně a zřetelně, jako by odpovídal skutečnosti."[30]

Z uvedeného citátu je patrné, že v matematice, na rozdíl od ostatních věd, zkoumáme vztahy mezi idejemi v novověkém pojetí. V geometrii jsou tedy ideje ztotožňovány s příslušnými tvary (čtverce, trojúhelníky atd.), v aritmetice s příslušnými čísly. Tedy např. v rovnici 7 + 5 = 12 vyjadřujeme vztah mezi čísly-idejemi 7, 5, 12. V diskusi o založení matematiky tak dochází k významnému obratu. Zatímco celá novověku předcházející tradice chápala matematiku jako vědu, která je založena reálnou mimo-subjektivní oblastí, novověcí myslitelé se domnívají, že základy matematiky je třeba hledat kdesi hluboko v lidském vědomí.

Velká nevýhoda právě popsané koncepce nepochybně spočívá v jejím snad až příliš striktním subjektivismu. Matematik totiž bude stěží akceptovat myšlenku, že v základech jeho vědy stojí jakési obsahy naší mysli, jež je obtížné, ba přímo nemožné odlišit od představ, pocitů či jiných čistě subjektivních prožitků. Z hlediska dějin filosofie matematiky proto sehrálo důležitější roli pojetí, v němž zájem o subjektivní založení matematiky sice nadále sehrával určitou roli, nicméně v poněkud oslabené podobě. Začal se prosazovat náhled, že matematika je sice subjektivně založená, nicméně že oblast jejího zájmu lze přesto podrobit objektivnímu bádání. Touto oblastí je náš jazyk. A problematické matematické entity představují objektivně přístupné jazykové výrazy. V rovnici 7 + 5 = 12 tak nepracujeme se subjektivními ideami, ale s „objektivními" číslovkami 7, 5 a 12. Chápeme-li však číslovky jako pouhá jména, můžeme pojetí, které ztotožňuje čísla s číslovkami, výstižně nazvat *nominalismem*.[31] Naopak koncepci, která považuje čísla za ideje v novověkém smyslu, můžeme nazvat *konceptualismem*. A konečně aristotelovsko-millovskou myšlenku, podle níž jsou čísla vlastnosti vnějších věcí, lze označit jako *realismus.*

Z uvedených tří směrů se v 19. století prosadila vedle Millova realismu především koncepce nominalismu, jíž se však začalo říkat *formalismus*. Po-

30 Hume, D., *Zkoumání o lidském rozumu*. Přel. J. Moural. Praha, Svoboda 1996, s. 48-49.

31 Významnými nominalisty byli např. Thomas Hobbes a Étienne Bonnot de Condillac. Novověcí nominalisté odmítli tradiční představu, podle níž jednou zavedená jména mají nutné spojení se světem. Díky tomu se z jazyka stala svým způsobem hra. Právě tato myšlenka se však stala základním pilířem Hobbesovy filosofie jazyka a matematiky. K tomu srov. Sepkoski, D., *Nominalism and Constructivism in Seventeenth-Century Mathematical Philosophy*. London, Routledge 2007, s. 55. Později uvidíme, jak se pojetí, podle nějž je jazyk a matematika určitou hrou, znovu objevilo v rámci tzv. herního formalismu.

sun v terminologii souvisel s tím, že propagátory tohoto směru již nebyli filosofové, ale sami matematici.[32] Ti se v první řadě nezajímali ani tak o tradiční filosofické problémy, motivovaly je spíše proměny uvnitř matematické praxe. Povšimli si, že dříve geometr či aritmetik vždy pracoval s určitou názornou představou množství – ať už kontinuálního, nebo diskrétního. Toto východisko přirozeně vedlo k závěru, že předmětem geometrie je kontinuální kvantita a předmětem aritmetiky diskrétní kvantita. Význam matematických termínů byl tedy určen podobně jako význam termínů jiných věd a měl podobně jako ony i příslušný obsah. Matematická praxe se tak podstatně neodlišovala od praxe jiných věd: tak jako jsou třeba pro zoologa předmětem zkoumání zvířata, přemýšlí aritmetik o agregátech věcí a geometr o určitých tvarech. Tato praxe se však v průběhu staletí značně proměnila. Matematik přestal spojovat se svými termíny příslušné obsahy a místo toho s termíny pouze manipuloval. Význam termínů tak již nebyl určen obsahem, ale čistě jejich formou.[33] Právě z těchto důvodů došlo k uvedenému posunu v terminologii a odsud také označení formalismus.

První významnější filosofickou reflexi přechodu „od obsahu k formě“ nacházíme u německých matematiků Eduarda Heineho a Carla Johannese Thomaeho. Precizní filosofické vymezení formalismu však tito matematikové ještě nepodali. S ním se setkáváme paradoxně až u jejich odpůrce G. Frega, který formalismu věnoval kritickou pozornost především v *Základních zákonech aritmetiky*.[34] Z Fregových úvah je patrné, že se v pracích svých kolegů setkal s dvojím pojetím formalismu. Prvnímu se později začalo říkat *termínový,* druhému *herní*.[35] Podle termínového formalismu se matematika zabývá pouhými značkami nebo symboly. Heine v tomto ohledu říká: „Čísly nazývám jisté smyslově postižitelné znaky, takže existence takovýchto čísel je zcela

32 Jako první použil termín „formalismus“ v roce 1911 L. E. J. Brouwer, a to jako označení pro ty tendence soudobé matematiky, proti nimž chtěl postavit svůj vlastní intuicionismus. Srov. Simons, P., Formalism. In: Irvine, A. D. (ed.), *Philosophy of Mathematics*. Vancouver, Elsevier B. V. 2009, s. 291-310.

33 Zajímavým dokladem této proměny je zavedení imaginárních čísel. Došlo k němu v 16. století, když Rafael Bombelli hledal kořen pro dosud nevyřešenou kvadratickou rovnici $x^2 = -1$. Tato rovnice neměla běžné číselné řešení, a proto Bombelli musel zavést nový symbol, se kterým (na rozdíl od běžných číslovek) nespojil žádný obsah či představu. Se zavedeným symbolem nicméně manipuloval podle běžných algebraických pravidel jako se symboly běžnými. Bombelli měl samozřejmě pochybnosti ohledně přípustnosti tohoto kroku, a proto tato nová čísla nazval *imaginární*. Srov. Resnik, M., *Frege and the Philosophy of Mathematics*. Ithaca – New York, Cornell University Press 1980, s. 55.

34 Frege, G., *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffschriftlich abgeleitet*. Bd. II. Jena, Verlag Hermann Pohle 1903, § 86, s. 137.

35 Shapiro, S., *Thinking about mathematics. The philosophy of mathematics*. New York, Oxford University Press 2000, s. 142-145.

neproblematická.“[36] Vlastnosti jednotlivých čísel jsou proto určeny výhradně smyslově postižitelným tvarem (či formou) příslušného znaku.[37] Je nasnadě, že s takovýmto přímočarým pojetím souvisí řada obtížně řešitelných problémů. Těchto námitek si byli představitelé formalismu do jisté míry vědomi, a tak se v jejich textech setkáváme i s pojetím, které „primitivní“ termínový formalismus svým způsobem prohlubuje. Forma, kterou příslušný znak má, již není určena jeho fyzickou podobou, ale tím, jakou roli znak hraje v rámci matematických operací. Podnět k tomuto posunu pravděpodobně nezavdaly pouze nedostatky termínového formalismu, ale i snaha konfrontovat se s Fregovým logicismem. Thomae ve druhém vydání své učebnice totiž uvádí, že „formální pojetí čísel má o sobě umírněnější požadavky než pojetí logické. Neptá se, co čísla jsou a budou, ale táže se, co od čísel v aritmetice požadujeme. Podle formálního pojetí je aritmetika hra se znaky, jež bychom mohli považovat za bezobsažné; tím chceme říci, že (ve hře kalkulování) nemají jiný obsah než ten, který se jim připisuje s ohledem na jejich chování podle určitých pravidel kombinace (pravidel hry). Podobně užívá hráč šachů své figurky, připisuje jim jisté vlastnosti, které podmiňují jejich chováním ve hře, a tyto figurky samy jsou pouze externími znaky tohoto chování. Samozřejmě existuje důležitý rozdíl mezi hrou v šachy a aritmetikou. Pravidla šachu jsou arbitrární; systém pravidel aritmetiky je takový, že pomocí jednoduchých axiomů lze čísla vztáhnout k nazíraným množstvím, takže podstatně slouží při poznání přírody. – Formální pojetí nás zbavuje všech metafyzických obtíží, což je výhoda, kterou nám nabízí.“[38] Podle Thomaeho se tedy jazyk aritmetiky skládá ze znaků, které samy o sobě nemají žádný význam. Tyto znaky se používají v matematické praxi podobným způsobem jako používáme figurky, hrajeme-li šachy. Z toho je již zřejmé, jak se liší herní a termínový formalismus. Tak jako za formální vlastnost nějaké šachové figurky nepovažujeme její tvar, ale to, jak jí lze táhnout, tak nepovažujeme za formální vlastnost nějakého čísla (či jiného matematického termínu) jeho tvar, ale to, jak jím můžeme manipulovat. Při hře v šach můžeme pěšcem ve výchozím postavení přejít o dvě políčka vpřed, v aritmetice od výrazu $x = 7 + 5$ k $x = 12$. Analogie mezi šachem a aritmetikou může ještě posloužit k objasnění další myšlenky spojované s formalismem. Je zřejmé, že pozice figurek na šachovnici samy o sobě nevyjadřují žádnou myšlenku. Podobně je tomu i s matema-

36 Heine, E., Die Elemente der Funktionslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 74, 1872, s. 173.

37 Tento typ formalismu je podobný staršímu nominalismu. Stoupenci termínového formalismu se totiž podobně jako nominalisté domnívají, že předmětem matematiky jsou matematické značky a jejich vzájemné vztahy.

38 Thomae, C. J., *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen*. Halle a.S., L. Nebert 1898, s. 1-11.

tickými formulemi. Význam matematických výrazů je totiž (podobně jako význam šachových figurek) výhradně určen pravidly, jimiž je stanoveno, jak s nimi lze manipulovat.

§ 4. Problémy apriorního přístupu

Z předchozích úvah je patrné, že nominalismus a formalismus jsou dva směry, které mají mnoho společného. To se přirozeně týká nejen hlavních tezí, s nimiž jejich představitelé vystoupili, ale i problematických stránek, jichž si povšimli jejich odpůrci. Zamyslíme se proto nad tím, jakým způsobem tyto dvě spřízněné koncepce kritizovali Mill a Frege. První z nich napadl nominalismus z pozic pozitivismu, který jsme výše nazvali realismem, druhý odmítl formalismus z pozic platónsky zabarveného logicismu. Zajímavé je, že i přes známou Fregovu nechuť k Millovi se argumenty obou filosofů v mnohém shodují a že je lze interpretovat právě na pozadí problémů, které se vážou na aplikabilitu.

Motivy Millovy kritiky nominalismu v matematice jsou vcelku zřejmé. Chtěl se vypořádat s novověkou filosofií, a proto se musel vyrovnat i s novověkým přístupem k matematice (nominalismem i konceptualismem). Jeho úvahy proto často vykazují nechuť k základnímu východisku novověké filosofie, podle nějž je realita „roztržena" na subjekt a objekt, což vede k rozlišování apriorního a aposteriorního poznání. Takovýmto „rozštěpem" jsme prý předcházející metafyzickou tradici podstatným způsobem nepřekonali, odmítli jsme ji pouze verbálně. Novověcí filosofové podle Milla vlastně pouze převlékli metafyzické entity (platónské ideje a matematické předměty) do jiného hávu, jedni[39] z nich udělali abstraktní entity, druzí entity jazykové. Staré dogma, že „rody a druhy jsou zvláštním typem substancí, které jsou jako jediné stálými věcmi, zatímco jim podřazené individuální substance jsou v neustálém toku, že se tedy vědění, které nutně vyžaduje stálost, může týkat pouze těchto obecných substancí či univerzálií, a nikoli faktů či jednotlivin jim podřazených",[40] tak bude nadále otravovat filosofické ovzduší.

Přijmeme-li tedy novověký „rozštěp" reality a s ním související „roztržení" poznání na apriorní a aposteriorní, vrátíme se tím k Platónově či scholastické „absurdní" metafyzice. Tomuto návratu pak napomáhá novověké pojetí ma-

39 Mill nehovoří o Humovi, ale o Lockovi, který však rovněž rozdělil veškeré obsahy našeho myšlení do dvou skupin: první se týká vnějších předmětů, druhá vnitřní činnosti naší mysli. Srov. Mill, J. S., *A System of Logic*, c. d., kniha II, kap. I, § 2. V perspektivě tohoto dělení říká: „matematické pravdy nejsou pouze jisté, ale vyjadřují reálné poznatky; nejsou pouhou prázdnou představou – nevýznamnou chimérou našeho mozku: a přesto, když se zamyslíme, zjistíme, že se týkají pouze našich vlastních idejí". Tamtéž, kniha IV, kap. IV, § 6.

40 Tamtéž, kniha II, kap. I, § 2.

tematiky, která je *par excellence* příkladem poznání, jež je *a priori*. I podle novověkých autorů se totiž tato disciplína zabývá právě stálými věcmi, nechává však přitom zcela stranou onen herakleitovský tok věcí kolem nás.

Takovéto kritice bychom mohli vytknout, že je ideologicky podbarvená a snad až příliš obecná. Vždyť se do ní pouze promítl spor mezi pozitivismem a dřívější novověkou filosofií. Tohoto nedostatku si byl Mill zřejmě vědom, a proto předložil i takový argument, který je na novověkém „rozštěpu" reality na subjekt a objekt nezávislý. Jeho kritika se týká výhradně nominalistického pojetí, konceptualismus ponechává zcela stranou. To však z našeho hlediska představuje určitou výhodu, neboť nominalismus (a nikoli konceptualismus) má velmi blízko k formalismu.

Hlavní myšlenkou nominalistické koncepce je, jak již víme, ztotožnění čísel s číslovkami. Čísla již nejsou problematické entity nacházející se kdesi mimo čas a prostor, ale určité, smysly vnímané znaky. Cena, kterou však nominalisté za toto přímočaré řešení zaplatí, je podle Milla neúměrně vysoká. Pokud totiž připustíme, že čísla jsou pouhé skvrny na papíře, musíme také uznat, že „propozice vědy, která pojednává o číslech, jsou čistě verbální a její postupy jsou pouhé transformace jazyka spočívající v substituci jednoho výrazu za druhý. Propozice ‚Dvě a jedna jsou tři' není podle těchto autorů pravdivá, není to tvrzení skutečně existujícího faktu, ale jedná se o definici slova tři; jde o výrok, který vyjadřuje dohodu užívat jméno tři jako znak, jenž je přesně ekvivalentní znaku dva plus jedna. (…) Podle tohoto pojetí není nejdelší algebraický postup nic jiného než řada změn v terminologii, pomocí níž se ekvivalentní výrazy substituují jeden za druhý; je to tedy řada překladů téhož faktu z jednoho jazyka do druhého…"[41]

Podstata uvedené kritiky spočívá v tom, že nominalismus vede ke ztotožnění propozice matematiky s verbálními propozicemi. Verbální propozice se však podle Milla „nevztahují k žádné faktické okolnosti, ale pouze k významu jmen".[42] Jména a jejich význam pak závisí na jazykové konvenci, a proto verbální propozice zachycují jenom jazykovou dohodu, ale k poznání světa nikterak nepřispívají. Matematické propozice by nás tak neinformovaly o ničem jiném než o čistě terminologických záležitostech. Aritmetická rovnice 2 + 1 = 3 by tak vyjadřovala pouze to, že se lidé dohodli používat znak 2 + 1 stejným způsobem jako znak 3.

Přijmeme-li tedy nominalistickou koncepci matematiky, pak matematiku absurdním způsobem degradujeme. Sesadíme ji nejenom z jejího královského trůnu, ale učiníme z ní pomocnou disciplínu, která se zabývá pouhými terminologickými otázkami. Pokud by snad někdo chtěl takovou degradaci

41 Tamtéž, kniha II, kap. V, § 188.
42 Tamtéž, kniha I, kap. VI, § 1.

obhajovat, bylo by možné Millovu úvahu bez problémů prohloubit tím, že bychom připomněli právě problém aplikability. Z pozic nominalismu bychom totiž nebyli s to vysvětlit, proč lze matematiku velmi úspěšně využít v ostatních vědách a proč tak podivuhodným způsobem přispívá k rozvoji našeho poznání.

Přejděme nyní od Millovy kritiky nominalismu k Fregově polemice s formalismem. Je poměrně obsáhlá a setkáváme se v ní s celou řadou různých argumentů.[43] Z našeho hlediska je klíčová námitka, která se opírá o (nám již známé Thomaeho) připodobnění aritmetiky k šachům. Z něj vyplývá, že pravdivost matematických propozic nezávisí na realitě, ale na pravidlech určených konvencí. Mohli bychom tedy namítnout, že matematika je podle tohoto pojetí jakási podřadná disciplína, která se nezabývá ničím jiným než pravidly, jak manipulovat určitými znaky. Takovéto námitky si však byl Thomae vědom, neboť upozorňuje, že mezi pravidly šachu a pravidly aritmetiky je podstatný rozdíl. Zatímco první jsou zcela arbitrární, druhá umožňují vztáhnout čísla „pomocí jednoduchých axiomů … k nazíraným množstvím, takže slouží při poznávání přírody".[44] Podle Thomaeho je tedy vedle pravidel pro manipulaci s matematickými symboly třeba zavést i jednoduché axiomy, které umožní aplikaci čísel. Tímto krokem však podle Frega ničeho podstatného nedosáhneme, neboť zde není vůbec nikdo, kdo by se tohoto úkolu ujal: „Formalistický aritmetik ho přesouvá na bedra svých kolegů, geometra, fyzika a astronoma, ti jej však s díky odmítnou, a tak padá do prázdna kamsi mezi vědy. Jasné rozlišení vědních oblastí může být dobrá věc; nelze jej však vytvořit tak, že zbude jedna oblast, za niž nikdo nechce převzít zodpovědnost."[45]

Na první pohled působí Fregova argumentace málo přesvědčivě. Asi každý s ním sice bude souhlasit v tom, že „aplikační axiomy aritmetiky" nestanovuje geometrie, fyzika, astronomie či jiné vědy. Tyto vědy totiž předpokládají, že aritmetika není pouhou hrou se symboly, a že tudíž mohou její výsledky s úspěchem využít. Asi každý si však položí otázku, proč by se tohoto úkolu

43 Zhruba řečeno existují tři typy námitek. Za prvé, přestává být zřejmý smysl běžných matematických výrazů. Pojednáváme-li např. v jednoduché rovnici 7 + 5 = 12 o číslovkách, které vidíme před sebou na papíře, musíme dát znaku „=" zcela jiný význam než ten, na nějž jsme byli až doposud zvyklí: posloupnost skvrn „7 + 5" totiž není podobná, a tím méně identická se skvrnou „12". Druhý okruh problémů souvisí s existencí iracionálních čísel. Ty totiž mají nekonečný rozvoj, a tak ani neexistuje typografická značka, kterou bychom mohli v pravém slova smyslu ztotožnit s nějakým iracionálním číslem. Konečně podle Michaela Dummetta se představitelé formalismu proviňují tím, že konfundují matematickou teorii s její metateorií. Srov. Dummett, M., *Frege: Philosophy of Mathematics*. Cambridge, Mass., Harvard University Press 1991, s. 253-255.

44 Thomae, C. J., *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen*, c. d., s. 11.

45 Frege, G., *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffschriftlich abgeleitet*, c. d., § 92, s. 101.

nemohl zhostit formalistický aritmetik, a proč by tedy řešení tohoto problému mělo spadnout „do prázdna kamsi mezi vědy“? Co je tedy problematické na tom, aby právě formalistický matematik stanovil i axiomy, pomocí nichž by čísla bylo možné vztáhnout na nazíraná množství? Překvapující je, že by Frege, jak vzápětí uvidíme, takovouto odpověď svým způsobem přivítal. Upozornil by nicméně na to, že formalista by tímto krokem přestal být v pravém slova smyslu formalistou. Významy aritmetických symbolů by totiž nebyly výhradně určeny pravidly manipulace, ale závisely by i na tom, jak se aplikují.

Přehlédneme-li nyní Fregovu a Millovu kritiku, musíme konstatovat pozoruhodnou shodu. Argumenty obou autorů totiž poukazují na paradoxní důsledky „konvencionalistického“ založení významu aritmetických výrazů. K těm patří především to, že se aritmetika promění v pouhou nauku o „transformacích jazyka“ (nominalismus) či že se připodobní ke hře (formalismus). Frege však jde ve své kritice přece jenom o krok dále než jeho předchůdce. Ukazuje totiž, že nezdarem musí skončit zcela každý pokus o „vylepšení“ formalismu.

Za shodou mezi Millem a Fregem nepochybně stojí společné myšlenkové východisko, oba autoři se svorně domnívají, že propozice aritmetiky mají určitý obsah, a díky tomu je můžeme zcela neproblematicky zařadit do příslušného řetězce inferencí. Právě tím se však podstatně odlišují od nominalistů i formalistů, podle nichž jsou propozice aritmetiky (v Millově terminologii) čistě verbální.

§ 5. Fregovo pojetí aplikace

V předcházejícím paragrafu jsme došli k závěru, že se Fregova kritika formalismu v důležitých ohledech blíží k Millově kritice nominalismu. Tato podobnost však vyvolává vzhledem k předcházejícímu výkladu určité rozpaky. O Fregovi jsme totiž dříve řekli, že kritizoval Milla, jenž odvodil význam číselných výrazů z jejich aplikace (srov. výše § 2), nyní ale ukazujeme, že odmítá i aprioristický formalismus, podle nějž je význam těchto výrazů na aplikaci zcela nezávislý. Zdá se tedy, že Frege posuzoval své protivníky účelově, a jeho vlastní názory jsou tudíž nekonzistentní. Takovýto soud by však rozhodně spravedlivý nebyl. Řešení tohoto autora ve skutečnosti obratně proplouvá mezi Scyllou pozitivismu a Charybdou formalismu. Je to pokus zbavit aritmetiku těžko přijatelného empirického faktoru a současně prokázat, že její propozice mají obsah a lze je aplikovat.

Jak však spojit výhody a potlačit nevýhody obou kritizovaných koncepcí? Při hledání odpovědi nejprve připomeňme sled událostí. V *Základech aritmetiky* Frege nejprve Millovi vytýká, že nerozlišuje mezi aritmetickou větou samou a její aplikací, později však v *Základních zákonech aritmetiky*, když kritizuje formalismus, prohlásí, že je to právě „aplikabilita, která vyzdvihuje aritmetiku z oblasti her do oblasti vědy".[46] Správné řešení by tedy mělo spojit aplikabilitu s aritmetikou (kvůli nesnázím nominalismu), přitom však zachovat rozlišení mezi čistými aritmetickými větami a jejich aplikacemi (kvůli Millovi). Abychom tohoto cíle dosáhli, nesmíme se podle Frega především dopustit Millova omylu. Mill sice správně aplikabilitu s aritmetikou spojil, nesprávně se však přitom zaměřil na omezenou oblast. To aritmetiku infikovalo nepřípustným empirickým faktorem a znemožnilo její užití mimo okruh, z nějž Mill při definování čísla vyšel. Právě tento nedostatek však byl pro Frega svým způsobem inspirativní. Přestal se tak zajímat o všechny tolik různorodé aplikace a místo toho se zaměřil na samotný princip, který je řídí.[47]

Jak však tento princip nalézt, či lépe řečeno, k čemu bychom měli při jeho hledání obrátit pozornost? Východiskem Fregova řešení je běžná početní praxe.[48] V ní obvykle začínáme otázkami jako „Kolik ovcí je na louce?", „Kolik je prvočísel menších než deset?" a končíme odpověďmi „Počet ovcí na louce je deset", „Počet prvočísel menších než deset je čtyři". Odpovědi tohoto druhu, jak známo, Frege nazývá číselné údaje. Různé číselné údaje se liší co do obsahu (počítáme ovce, prvočísla atd.), shodují se nicméně co do logické formy. Ta není podle Frega subjekt-predikátová, ale je to identita. Termín *počet ovcí na louce* označuje tentýž předmět jako termín *deset;* termín *počet prvočísel menších než deset* označuje tentýž předmět jako termín *čtyři*. Mají-li však číselné údaje skutečně formu identitních výroků, musíme již nyní korigovat názory předchozí tradice (Aristotelés, Mill). Číslovky nejsou obecné termíny, ale termíny singulární, a čísla nejsou vlastnosti, ale předměty.

S čím však tyto předměty (čísla) spojujeme, či jinak řečeno, na co je aplikujeme? Abychom nalezli správnou odpověď, zastavme se nejprve u empirických identitních výroků, jako např. „Objevitel Ameriky je Kolumbus". Ty se od číselných údajů neliší co do formy, ale pouze co do obsahu. Nejsou odpovědí na otázku „Kolik (je ovcí na louce)?", ale „Kdo (je objevitel Ameriky)?"; neodpovídáme na ně uvedením abstraktního předmětu (deset), ale konkrétním předmětem (Kolumbus). Z logického hlediska však mezi číselnými údaji a běžnými empirickými identitami podstatný rozdíl není. Otázkou *Kdo?* i *Kolik?* se totiž ptáme, jaký předmět je spojen s daným identifikačním pojmem (*objevitel Ameriky, ovce na louce*). V odpovědi pak s tímto pojmem spojujeme příslušný konkrétní nebo abstraktní předmět.

46 Frege, G., *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffschriftlich abgeleitet*, c. d., § 91, s. 100.
47 Dummett, M., *Frege: Philosophy of Mathematics*, c. d., s. 258.
48 Frege, G., Základy aritmetiky, c. d., s. 206.

Další významné zjištění tedy spočívá v tom, že se čísla nespojují s agregáty, nýbrž s pojmy.[49] Obrat od agregátů k pojmům pak odstraňuje obtíž, s níž jsme se setkali u Aristotela i u Milla. Ta spočívala v tom, že ani jeden z nich nedokázal přesvědčivě vysvětlit, jak je možné jedno a totéž číslo spojovat s agregáty ontologicky zcela odlišných druhů. Jak je tedy např. možné desítku spojit ve stejném smyslu s empirickým agregátem ovcí i s nemateriálním agregátem Aristotelových kategorií. Právě tuto obtíž lze obratně vyřešit, začneme-li čísla spojovat nikoli s agregáty, ale s pojmy. Existují totiž agregáty různých druhů (materiální, nemateriální), pojmy naopak vytvářejí zcela homogenní a apriorní oblast. Obtíže tedy působí spojit desítku v témže smyslu s agregátem ovcí na louce a s agregátem Aristotelových kategorií, v případě příslušných pojmů to však problematické není.

Spojením čísel s pojmy jsme sice dosáhli významného pokroku, problém aplikability jsme však vysvětlili pouze částečně. Tím, že jsme nalezli oblast, s níž se čísla neproblematicky spojují, jsme ještě nevysvětlili, jak může být jeden a tentýž abstraktní předmět, jímž číslo bezpochyby je, spojen se zcela různorodými pojmy. Jak tedy poznám, že např. Aristotelových kategorií je stejný počet jako prstů na mých rukou? Právě tyto úvahy pomohou nejenom prohloubit Fregovo pojetí aplikace, ale stanou se současně přirozeným východiskem pro jeho definici čísla.

Postup našeho autora budeme sledovat opět v určité konfrontaci s Millem. Pro oba je totiž charakteristické, že při definici čísla vyjdou z jeho aplikace. Mill, jak již víme, vychází ze spojení čísla se smyslově vnímatelnými agregáty. Určitá číslovka tak podle něj denotuje stejnopočetné agregáty a současně konotuje smyslově vnímatelný atribut, jejž všechny tyto agregáty sdílejí. To, že s agregátem prstů na pravé ruce spojujeme tutéž číslovku jako s agregátem prstů na ruce levé, je dáno tím, že oba sdílejí kvantitativní atribut, který působí na mé smysly tímtéž způsobem. Smyslový atribut, který s agregátem spojujeme, lze následně využít při definici čísla.

Pokud bychom Millovi položili otázku, proč je aritmetika tak pozoruhodně aplikovatelná, patrně by odpověděl, že přece všechny agregáty mají určitý kvantitativní atribut, a lze jim proto připsat příslušné číslo. Aritmetika pomocí definic tyto atributy zachycuje a zkoumá pak jejich vztahy. Stává se tak z ní jedna z nejobecnějších reálných věd, a tak není divu, že ji lze velmi plodně aplikovat. Nicméně, jak již víme, mluvit o tom, že třeba Aristotelovy kategorie na nás působí nějakým smyslovým dojmem, se zdá být zcela nepřijatelné,

49 Pojmy, s nimiž spojujeme čísla, musí splňovat dvě podmínky. Za prvé, jednoznačně identifikují příslušný agregát, tj. jsou jeho jednoznačnou deskripcí. Za druhé, mají tzv. „sjednocující sílu", díky níž vzájemně odlišné entity (množství) vytváří určitý druh jednoty. Těmto pojmům se později začalo říkat *sortálními pojmy*. Srov. Frege, G., Základy aritmetiky, c. d., s. 210; Strawson, P. F., *Individuals. An Essay in Descriptive Metaphysics*. London, Routledge 1964, s. 168.

a tudíž by bylo i nemožné rozhodnout, zda prstů na mých rukou je stejný počet jako Aristotelových kategorií.

Právě s touto námitkou se elegantně vypořádává Frege, když číslo nespojuje s konkrétními agregáty, ale s abstraktními pojmy a když je nepovažuje za atribut, ale za předmět. Nejde tedy o definici smyslově vnímatelného atributu, ale o definici rozumem postihnutelného abstraktního předmětu. Jak si však máme při definování takovýchto předmětů počínat? Kde a jak jsou nám takovéto abstraktní předměty dány, nemáme-li o nich žádný smyslový názor?[50] V odpovědi na tyto otázky užívá náš autor, jak sám říká, poněkud nezvyklý myšlenkový postup. Vychází z předpokladu, že každý předmět musí mít předem (implicitně nebo explicitně) daná identifikační kritéria.[51] Frege v tomto kontextu říká, že musíme být s to příslušný předmět vždy znovu rozpoznat.[52] Známe-li, dejme tomu, Alenu, pak ji rozpoznáme jako tutéž v různých situacích (poznáme ji na Václavském náměstí, v restauraci, v různých šatech atd.). Totéž v principu platí i o běžných abstraktních předmětech. Známe-li nějaký zvířecí druh, dejme tomu káně lesní, pak jej rozpoznáváme jako týž, ať už jeho instance (tj. konkrétní pták) sedí na poli, nebo se vznáší na obloze. Z našeho hlediska je důležité, že tuto úvahu lze rozšířit i na čísla. Víme-li, co je např. desítka, pak ji opět – podobně jako Alenu či káně – musíme rozpoznat jako jeden a tentýž předmět v různých kontextech či situacích. Mezi těmito předměty (Alena, druh káně, číslo) však existuje důležitý rozdíl. Alena je konkrétní předmět, druh káně je abstraktní předmět, který se spojuje s konkrétními předměty, a číslo je abstraktní předmět, který se spojuje s pojmy. Alenu můžeme potkat na různých místech oblečenou do různých šatů (večerní róba, bílý kostým, tepláky) a rozpoznat ji jako tutéž ženu; druh káně můžeme rozpoznat jako tentýž v jeho různých instancích (káně na poli nebo na nebi); a konečně jedno a totéž číslo můžeme rozpoznat jako totéž, ať už je „přestrojeno“ za jakýkoli pojem (*ovce na louce*, *prsty obou rukou*, *Aristotelovy kategorie*). Znalost těchto předmětů proto implikuje naši schopnost verifikovat výroky jako „Žena přestrojená do večerní róby je táž jako žena oblečená do bílého kostýmu“; „Druh ptáka na nebi je týž jako druh ptáka na zemi“; „Ovcí na louce je týž počet jako prstů na mých rukou“. Všechny tyto výroky mají formu identity, již lze v případě číselných údajů vyjádřit obecně jako *počet F = počet G* (*F* i *G* jsou proměnné za pojmy).[53]

50 Frege, G., Základy aritmetiky, c. d., s. 219.
51 Tento požadavek později vyjádřil Quine pomocí slavného sloganu: „no entity without identity“. Srov. Quine, W. V. O., *Ontological Relativity and Other Essays.* New York, Columbia University Press 1969.
52 Frege, G., Základy aritmetiky, c. d., s. 219.
53 Dummett, M., *Frege: Philosophy of Mathematics*, c. d., s. 260.

S číselnými údaji však souvisí vážná obtíž. Výraz nalevo i napravo od rovnosti totiž označuje číslo, a to jsme dosud nedefinovali. Jestliže však prozatím nevíme, co číslo je, nedokážeme ani rozhodnout, zda jsou číselné údaje pravdivé, či nepravdivé. Podle Frega lze naznačenou obtíž vyřešit jedině tak, že nalezneme nějaké vnější kritérium, pomocí nějž budeme s to pravdivostní hodnotu číselných údajů jednoznačně určit. Musíme tedy nalézt výrok, který po obsahové stránce odpovídá číselnému údaji, nicméně se v něm nevyskytuje problematický výraz „číslo, které náleží pojmu F“. Při jeho hledání nám pomůže, vrátíme-li se k Fregově poeticky zabarvené myšlence, že lze jedno a totéž číslo převléknout za různé pojmy. Jedna a táž desítka se tak jednou „převlékne“ za *ovce na louce*, podruhé za *prsty na mých rukou*. Desítka, ale i každé jiné číslo, tak trochu připomíná rozmarnou Alenu, která každou chvíli mění svůj úbor, ale kterou pozorovatel bez tohoto úboru vidět nemůže. To, že se jedná neustále o tutéž osobu, pozná tak, že mezi Alenou oblečenou do různých druhů šatů nastává vztah podobnosti. Výrok „Žena v černé večerní robě je táž jako žena v bílém kostýmu“ tedy nemůžeme (pokud budeme respektovat běžné zvyklosti) verifikovat tím, že bychom krásku vysvlékli, ale tím, že srovnáme, dejme tomu, tvář ženy ve večerních šatech s tváří ženy v kostýmu. Podobně je tomu i v případě čísla, i to se rádo převléká, jeho „oděvem“ však nejsou drahé róby, ale pojmy. Ty se liší od šatů tím, že je z čísel nelze ani v principu „svléknout“. Potřebujeme tedy nezbytně kritérium, pomocí nějž rozhodneme, že desítka „převlečená“ za pojem *ovce na louce* je tentýž předmět jako desítka převlečená za pojem *prsty na mých rukou*. Prostředek k rozpoznání této podobnosti nalezl podle Frega již Hume, který říká: „Jsou-li dvě čísla spojená v celek takovým způsobem, že každé jednotce jednoho čísla odpovídá vždy jedna jednotka druhého čísla, pak tvrdím, že jsou stejná.“[54] K tomuto názoru se podle Frega v poslední době přiklánějí i matematici, kteří definují „totožnost čísel … prostřednictvím jedno-jednoznačného přiřazení.“[55] Výrok *Počet F = Počet G* je tedy pravdivý právě tehdy, odpovídá-li každé jednotce, která spadá pod pojem *F,* právě jedna jednotka, která spadá pod pojem *G*.

Zdá se, že tímto krokem jsme již dosáhli našeho cíle a máme konečně k dispozici definici čísla. Význam výrazu *počet F* jsme vysvětlili tak, že jsme stanovili prostředek, s jehož pomocí rozpoznáme určité číslo, ať už vystoupí v jakémkoli převleku, či ať už jej aplikujeme na jakýkoli pojem. Díky tomu jsme s to aplikovat i Leibnizovo kritérium identity, podle něhož lze mezi

54 Hume, D., *A Treatise of Human Nature*. Oxford, Oxford University Press 2000, kniha I, část III, sekce 1.

55 Frege, G., Základy aritmetiky, c. d., s. 232.

dvěma výrazy psát znaménko rovnosti jen tehdy, lze-li je *salva veritate* zaměňovat.[56]

Frege přesto spokojen není. Povšiml si totiž obtíže, které se v odborné literatuře později začalo říkat „Caesarův problém“.[57] O co jde? Kritérium stejnopočetnosti, které jsme zavedli k tomu, abychom s jeho pomocí rozpoznali identitu jednoho předmětu s druhým, v některých kontextech bohužel selhává. Jedná se o případy, v nichž do číselných údajů nedosadíme čísla, ale předměty jiného druhu, např. Caesara. Takovýmto dosazením vznikají paradoxně znějící výroky jako „Počet ovcí na louce je Caesar“. Pokoušet se na ně aplikovat kritérium stejnopočetnosti a ptát se, zda jsou ovce na louce stejnopočetné s Caesarem, prostě nedává žádný rozumný smysl.

Na první pohled vypadá tato námitka jako uměle vykonstruovaná. Asi stěží bychom nalezli rozumně uvažujícího člověka, který by považoval Caesara za číslo a dosadil by jej do číselného údaje. Každý přece dokáže rozlišit mezi konkrétním Caesarem a abstraktní desítkou. Každý jistě předem ví, co jsou empirické předměty a co čísla! Z těchto naprosto přirozených úvah však vyplývá zcela nežádoucí závěr. Chceme-li pro verifikaci číselných údajů použít kritérium stejnopočetnosti, musíme do nich nejprve dosadit náležité předměty. Abychom to však provedli správně, je třeba předem vědět, co je číslo. Tím jsme se však vrátili na úplný začátek našich úvah. Problém povahy čísla stojí před námi stejně problematický jako dříve! Klademe-li si tedy otázku, co je číslo, a vycházíme-li při tom z číselných údajů, odpověď přirozeně nenajdeme.

Frege však, jak se z jeho dalších úvah zdá, příliš v rozpacích není. Úsečně konstatuje neúspěch a zkouší novou cestu. Ta vede opačným směrem než cesta právě popsaná. Na jejím začátku totiž nestojí analýza číselných údajů, nýbrž kritérium stejnopočetnosti. Jeho aplikací můžeme rozhodnout, zda mezi pojmy nastává či nenastává vztah podobnosti (co do stejno-početnosti). Vzájemně podobné pojmy pak lze shrnout pod pojem, mezi jehož prvky právě tento vztah nastává. A právě rozsah takového pojmu nazývá náš autor číslem. Číslo, které náleží pojmu *F*, je proto rozsah pojmu „být stejnopočetný s pojmem *F*“.[58] Číslo je tedy – moderně řečeno – třída, jejímiž prvky nejsou běžné empirické předměty, ale předměty abstraktní (stejno-početné pojmy).[59]

Tím jsme se však již dostali ke skutečnému vrcholu Fregových úvah. Číslo je podle dnešní terminologie množinově teoretický předmět, s nímž se se-

56 K tomu srov. Rodriguez-Pereyra, G., *Leibniz‘s Principle of Identity of Indiscernibles*. Oxford, Oxford University Press 2014, s. 20-34.

57 Srov. Shapiro, S., *Thinking about mathematics. The philosophy of mathematics*, c. d., s. 186.

58 Frege, G., Základy aritmetiky, c. d., s. 238.

59 Srov. Dummett, M., *Frege Philosophy of Mathematics*, c. d., s. 288.

tkáváme v apriorní oblasti, jíž náš autor nazývá „třetí říše. To, co (do ní) náleží, se shoduje se [subjektivními] myšlenkami v tom, že to rovněž není vnímatelné smysly, ale shoduje se to i s [vnějšími] věcmi v tom, že to nepotřebuje žádného nositele, k jehož vědomí by to patřilo.“[60] Třetí říše se tak vyskytuje někde mezi empirickým světem a světem našeho vědomí, a není proto divu, že ji někteří interpreti ztotožňují s platónskou říší idejí.[61] Její zákony mají přirozeně jinou povahu než zákony přírodní, nevyžadují „praktické ověření, aby byly použitelné ve vnějším světě; … [v něm totiž] neexistují žádné pojmy, žádné vlastnosti pojmů, žádná čísla“.[62] Tyto zákony jsou vyššího druhu, protože je nelze aplikovat přímo na vnější svět, ale jsou „použitelné až na soudy, které platí o věcech vnějšího světa: jsou to zákony přírodních zákonů. Netvrdí žádnou souvislost mezi přírodními jevy, ale souvislost mezi soudy; a k těm patří také přírodní zákony.“[63] Širokou aplikaci aritmetických zákonů na empirický svět tedy podle Frega nelze vysvětlit tak, jak to činili Aristotelés nebo Mill, kteří předmět aritmetiky ztotožnili s kvantitativní stránkou skutečnosti, ale je třeba obrátit pozornost k objektivně daným myšlenkám, jejichž pomocí tento svět popisujeme. Právě tímto obratem však Frege zachraňuje zvláštní apriorní status matematiky.

Z těchto úvah je patrné, jakým způsobem se Frege snaží dát za pravdu celé dřívější aprioristické tradici, podle níž mezi větami matematiky a ostatních věd existuje podstatný rozdíl. Současně je ale i patrné, že na rozdíl od této tradice vychází při definování čísla z jeho aplikace. Tím však tradiční apriorismus překonává a dává v určitém smyslu za pravdu aposteriornímu přístupu.

SUMMARY

Frege’s conception of the application of arithmetic

The authors believe that the problem of applicability can be approached in two ways. One approach derives from the fact that the empirical world has been the source of many mathematical concepts, and claims that arithmetic captures reality in the same way as common empirical disciplines. Its miraculous applicability can then be explained by the greater universality of the concepts used. Such an approach is designated *a posteriori*. The other approach to the problem of applicability, designated *a priori*, assumes that arithmetic is not grounded empirically, in fact it is already there before all experience. Upon analysis, both approaches have merits as well as shortcomings. On the

60 Frege, G., Myšlenka. Logické zkoumání. In: týž, *Logická zkoumání. Základy aritmetiky*, c. d., s. 115.

61 Srov. např. Burge, T., *Truth, Thought, Reason. Essays on Frege*. Oxford, Clanderon Press 2005. Sám Frege (Základy aritmetiky, c. d., s. 183) říká: „Tato oblast toho zahrnuje nejvíce, neboť do této oblasti patří nejen to, co je skutečné, nejen to, co je názorné, nýbrž vše, co je myslitelné.“

62 Frege, G., Základy aritmetiky, c. d., s. 256.

63 Tamtéž.

authors' view, these merits and shortcomings were already noticed by Frege. Though his conception is to be classified as an *a priori* approach, he – unlike his predecessors – also learned much from proponents of *a posteriori* conceptions.

Keywords: arithmetic, problem of application, Frege, formalism, number