Vznik formalismu a nové pojetí vědy[1]

Prokop Sousedík, David Svoboda
Katolická teologická fakulta Univerzity Karlovy, Praha

Podstata i provokativnost formalismu vyjde najevo, připomeneme-li slova německého matematika a filosofa Davida Hilberta: „… předměty teorie čísel [jsou] … – v přesném protikladu k Fregovi a Dedekindovi – samy znaky… V této myšlence tkví pevný filosofický postoj, který by … měl být vyžadován jak pro základy čisté matematiky, tak i pro veškeré vědecké myšlení, chápání a komunikaci: na počátku – jak by se zde mohlo říci – je znak.“[2] Podle Hilberta se tedy v matematice a obecně v každé vědě zabýváme znaky jako takovými, a nikoli tím, co označují. Díky tomuto obratu přestanou být matematické předměty záhadné metafyzické entity a stanou se z nich smyslově postižitelné znaky, formule či celé formální systémy.[3] Cena, kterou za toto „vyprázdnění“ zaplatíme, je však, alespoň na první pohled, příliš vysoká. Matematika, kterou dnes považujeme za „královnu věd“, se totiž promění v pouhou bezobsažnou hru, jejímiž hracími kameny jsou symboly. Takováto dehonestace se však zdá být absurdní a sám argument, že se obratem od označeného k označujícímu zbavíme metafyzických obtíží, jen stěží obstojí. Na první pohled je nám proto bližší protikladná koncepce, jíž podle Hilberta zastávali Gottlob Frege a Richard Dedekind, podle níž je na počátku znakem označená entita a znak je zde jenom proto, aby na ni poukázal.

---

1 Tato práce vznikla v rámci projektu „Scholastické teorie vztahu jako možný zdroj strukturalistické koncepce čísla“ GAČR 13-08512S.
Děkujeme anonymním recenzentům Filosofického časopisu za jejich kritický komentář, který významným způsobem vylepšil a obohatil původní verzi článku.

2 Hilbert, D., Neubegründung der Mathematik. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 1, 1922, s. 163.

3 Hilbertův předchůdce Heine, kterého známe především díky Fregově kritice, v tomto ohledu říká: „Otázku, „Co je číslo“ neřeším pojmovým vymezením čísla… Vymezuji je z hlediska čistého formalisty a čísly nazývám jisté smyslově postižitelné znaky, takže existence takovýchto čísel je zcela neproblematická.“ Srov. Heine, E., Die Elemente der Funktion Lehre. *Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 74, 1872, s. 173.

Uvedené odmítnutí formalismu je však přece jen příliš přímočaré a brání nám pochopit, v čem spočívá myšlenková přitažlivost tohoto proudu. Podle našeho soudu je proto třeba položit si otázku: Co kromě metafyzických obtíží vedlo některé matematiky k tomu, že zpochybnili intuitivní předpoklad, podle nějž na počátku stojí znakem označená entita? Co tedy vedlo k tomu, že někteří myslitelé přijali názor, že výrazy jazyka matematiky v pravém slova smyslu k ničemu nereferují, a v důsledku toho nemají matematické věty žádný reálný obsah?

Chceme-li nalézt odpovědi na tyto otázky, musíme se podle našeho soudu zaměřit především na nesoulad mezi tradičním platónsko-aristotelským pojetím vědy (k němuž se v důležitém ohledu klonili Frege i Dedekind) a samou matematickou praxí. Právě rozpory mezi tím, jak by věda měla vypadat, a tím, jak si matematici ve skutečnosti počínali, totiž nakonec vyústily ve vznik nejenom formalismu, ale i nového pojetí vědy. Cílem našeho příspěvku samozřejmě nemůže být tento proces zevrubně zachytit, chceme spíše vyzdvihnout některé významné myšlenky a zlomové okamžiky, které umožní porozumět tomu, proč může být i dnes formalismus atraktivní.

V souladu s tím rozdělujeme náš příspěvek do pěti myšlenkových oddílů. V prvním načrtneme tradiční pojetí vědy a ukážeme, že mu matematická praxe odporuje. V dalším ukážeme, že tento rozpor lze (od antiky až po novověk) chápat jako kořen dvojího přístupu k matematice a že algebra představovala určitou naději na překonání tohoto rozporu. Ve třetím oddíle vysvětlíme, proč je i algebraická praxe z hlediska tradičního pojetí vědy problematická. Dále ukážeme, že právě tato problematičnost dala klíčový podnět ke vzniku formalismu. Na závěr pojednáme o tom, jak vznik formalismu inspiroval nové paradigma vědění.

§ 1. Tradiční pojetí vědy a matematika

Matematika se tradičně řadila mezi teoretické vědy, na něž jsou podle Aristotela kladeny celkem tři požadavky.[4] (i) Mají svůj předmět, který nedokazují, ale předpokládají.[5] (ii) Tento předmět uchopují z hlediska jeho obecných a nutných charakteristik. (iii) Vědění obecných a nutných charakteristik musí být navíc zdůvodněné. Nestačí například vědět, že všechna tělesa nutně

4 V závislosti na stupni abstrakce se rozlišují tři teoretické vědy: (1) fyzika, která abstrahuje pouze od individuální látky, (2) matematika, která nadto abstrahuje od smyslových kvalit, (3) metafyzika, která abstrahuje od veškeré tělesnosti. Srov. Aristotelés, *Metafyzika*, VI. Přel. A. Kříž. Praha, Petr Rezek 2003 (dále jen *Metafyzika*).

5 Existence předmětu, k němuž referuje subjektový termín, je tak díky tomuto požadavku zajištěna a aristotelici se nemusejí zabývat známými námitkami, které později proti peripatetické sylogistice vznesl např. B. Russell.

padají či že součet vnitřních úhlů trojúhelníka je nutně roven dvěma pravým, ale musíme navíc vědět, proč tomu tak je, tj. musíme znát příčiny uvažovaných faktů.[6]

Uvedené požadavky v podstatě určují, jaké nároky klademe na skutečného vědce. Z pohledu dnešní analytické filosofie bychom mohli říci, že jej poznáme především podle toho, jakým způsobem mluví, či řečeno s Wittgensteinem, jakou řečovou hru hraje. Ve shodě s (i) je jasné, že jeho výroky musí mít reálný obsah, s čímž souvisí, že užité termíny (především na místě subjektu) musí referovat ke zkoumanému předmětu. Tento předmět však není konkrétní, ale abstraktní, a tak ve shodě s (ii) jeho výroky platí obecně a nutně. Navíc je třeba, aby je byl vědec s to v souladu s (iii) náležitě zdůvodnit. To pak po jazykové stránce znamená, že pomocí jiných (rovněž obecných a nutných výroků) náležitě odpoví na otázku „proč?". Konstatováním nutných a obecných výroků a jejich zdůvodněním vzniká jazykový celek, který se skládá ze dvou podstatně odlišných částí. Ze dvou výroků (premisy) a zdůvodňované teze (závěr), jež z premis vyplývá. Takovýto jazykový celek se nazývá důkaz či apodiktický sylogismus a pravé vědění spočívá v nahlédnutí pravdivosti jeho závěru.[7] Aristotelská tradice dále vychází z toho, že v dokazování nějaké teze nemůžeme postupovat do nekonečna, ale musíme se zastavit u tezí, které jsou zřejmé samy sebou a kterým se říká principy.[8] Samozřejmost principů je zárukou jistoty poznání každé vědy. Vědecké výroky jsou díky tomuto základu jistě pravdivé a ve svém celku bezrozporné.[9]

Doposud jsme se zabývali charakteristikami, které má matematika s ostatními vědami společné. Podívejme se nyní naopak na to, čím se liší. Vědy se odlišují v prvé řadě svým předmětem, a tím je pro matematiku kvantita. Ta se dělí na kontinuální a diskrétní, čemuž odpovídají dvě tradiční matematické

6 Podle Aristotela tedy „… jednu každou věc víme naprosto … kdykoli známe příčinu, pro kterou věc jest, kdykoli víme, že je příčinou této věci a že to nemůže být jinak". Srov. Aristotelés, *Druhé analytiky.* Přel. A. Kříž, úvodní studii a pozn. napsal K. Berka. Praha, Nakladatelství Československé akademie věd 1962, s. 30.

7 Aristotelés definuje důkaz těmito slovy: „Jde-li totiž o důkaz, ten, kdo neví ‚proč', nemůže být vědoucím, a je-li to tak, že A nutně náleží C, ale střední termín B, kterým se to má dokázat, nenáleží nutně C, pak neví, proč to je. Neboť že A náleží nutně C, nepochází pak od středního termínu. Střední termín totiž může nebýt, závěr pak platí nutně." Tamtéž, s. 31. Srov. též Tomáš Akvinský, *In I Posteriorum Analyticorum*, lect. 4: „… cum scire nihil aliud esse videatur quam intelligere veritatem alicuius conclusionis per demonstrationem."

8 Aristotelés říká, že principy jsou nutně „… pravdivé, první, bezprostřední, známější a dřívější a jsou příčinou závěru". Aristotelés, *Druhé analytiky*, c. d., s. 31.

9 Problémem bezrozpornosti vědy se Aristotelés explicitně nezabýval. Bezrozpornost vědy se totiž vždy vposled opírá o její reálný předmět, pro nějž jako pro každé reálné jsoucno platí princip sporu – nemůže v témže ohledu zároveň být a nebýt. Formulujeme-li tedy o reálném předmětu vědy pravdivé výroky, nemohou být rozporné. Později však uvidíme, že podle formalistů matematika jako věda v pravém slova smyslu žádný předmět nemá, a tak zastánci tohoto směru (především D. Hilbert) museli problém bezrozpornosti formálních systémů řešit.

disciplíny – geometrie a aritmetika. Za základnější se ve starověku většinou považovala geometrie[10] axiomatizovaná v Eukleidových *Základech.*[11] V tomto spise se sice vyskytují i důkazy, které se týkají teorie přirozených čísel, nejsou pro ně však uvedeny speciální axiomy, ale jsou redukovány na axiomy geometrické.[12] Závislost aritmetiky na geometrii měla za následek, že geometrie získala výsadní postavení a její postupy se staly určitým paradigmatem matematických zkoumání.

Další rozdíl mezi matematikou a jinými vědami souvisí s tím, jakým způsobem dokazujeme příslušné věty. Z Aristotelovy koncepce vyplývá, že lze rozlišit čtyři způsoby dokazování, neboť existují čtyři typy příčin: formální, materiální, účinná a účelová.[13] V matematice zkoumáme výhradně formální příčiny, tj. zajímá nás pouze esence uvažovaného předmětu jako jeho forma. Tu vyjádříme nejlépe definicí daného předmětu, kterou získáme, když vyčerpávajícím způsobem zodpovíme otázku: „Co je to?“ Z toho je zřejmé, že v matematice se otázka „proč? … vztahuje k [otázce] co?“ (tj. k definici přímky, nesouměřitelnosti atd.).[14] Souhrnně lze tedy říci, že v matematice máme pravé vědění jedině tehdy, chápeme-li esenci příslušného předmětu, kterou vyjadřujeme jeho definicí.[15]

Přijmeme-li právě načrtnuté pojetí matematiky jako vědy, musíme se vyrovnat se dvěma obtížně slučitelnými důsledky. Za prvé, matematik nahlížející esenci reálně existující kvantity by neměl nic vytvářet, ale měl by pouze kontemplovat její obecné a nutné rysy. Jeho činnost tedy rozhodně není umě-

10 Závislost aritmetiky na geometrii byla po věcné stránce zdůvodněna tím, že přímky plochy a různé druhy tvarů jsou na rozdíl od čísel vždy intuitivní. Tuto závislost dále podporoval fakt, že všechna čísla bylo možno reprezentovat úsečkou příslušné délky, zatímco např. úhlopříčce čtverce (tj. iracionálním číslům) neodpovídá žádné přirozené číslo či jejich poměr. Srov. Detlefsen, M., Formalism. In: Shapiro, S. (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford, Oxford University Press 2005, s. 236-238.

11 Užívali jsme anglický překlad T. L. Heatha: Euclid, *The Thirteen Books of the Elements*. New York, Dover Publications 1956. Vybrané části *Základů* lze v českém překladu nalézt in: *Šír, Z., Řecké matematické texty. Přel. R. Mašek a A. Šmíd. Praha, OIKOYMENH 2011.*

12 Každé číslo je nakonec redukováno na úsečku o příslušné délce. To, že každé číslo má svého následníka, je odvozeno z druhého Eukleidova postulátu, podle nějž lze každou přímku prodloužit. První axiomatickou teorii přirozených čísel předložil až Dedekind. Dedekind, R., *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig, Vieweg 1888.

13 *Metafyzika*, IV, 983a25-31.

14 Aristotelés, *Fyzika*, II, 198a16-18. Přel. A. Kříž. Praha, Petr Rezek 2010.

15 Tyto myšlenky lze promítnout do zjednodušené interpretace Eukleidových *Základů.* Geometrie vychází tak jako ostatní vědy z prvních principů (Eukleides hovoří o postulátech), které jsou evidentně pravdivé, a které se tudíž nedokazují. V těchto prvních principech se vyskytují základní geometrické pojmy jako bod, přímka, kružnice atd. Ty musíme předem vymezit v definicích, protože jinak by principy (postuláty) geometrie neměly význam. Z principů pak pomocí aristotelské sylogistiky dokazujeme další matematické věty. V esenci příslušného geometrického předmětu tedy hledáme příčinu spojení subjektu s predikátem ve větě, která je závěrem apodiktického sylogismu.

ním (ve smyslu slov *techné, ars*), neboť nic nevytváří a výsledky, k nimž dospívá, nejsou svobodnými kreacemi ducha, ale jsou determinovány předmětem jeho úvah. Matematik by tedy měl postupovat či mluvit v podstatě stejně jako jiní vědci. Druhý důsledek souvisí s nadřazením geometrie nad aritmetiku. V geometrii, jak známo, mají důkazy velmi často konstruktivní povahu a k jejich provedení potřebujeme určité nástroje (kružítko a pravítko). Z toho je však zřejmé, že celá matematika by měla mít konstruktivní povahu.

Již Platón si povšiml, že tyto dva důsledky jsou obtížně slučitelné.[16] Není totiž možné, aby matematika jako teoretická věda pojednávala o věčném a neměnném jsoucnu a současně používala konstruktivní metody důkazu.[17] Konstruktivní přístup totiž vede geometry k tomu, že nemluví, jako by něco nahlíželi (jako teoretikové), ale „jako by něco dělali a jako by jejich slova byla zaměřena k vytváření, … a tak se vyjadřují takovými obrazy jako sestrojit čtyřúhelník, vést rovnoběžku, připojit něco …“.[18] Platón tedy poukazuje na to, že matematická praxe, přesněji řečeno řeč geometrů, je v rozporu s ideálem teoretického vědění. Matematik nemluví, jako by kontemploval věčné a neměnné jsoucno, ale spíš jako technik, který konstruuje nějaký stroj. Zdá se totiž, že znaky, jež užívá, v podstatě nemají onu výše požadovanou referenční funkci, ale navádějí nás pouze k tomu, abychom provedli určitou operaci.

Platónovy rozpaky mohou vést ke dvěma podstatně odlišným reakcím. Podle první je matematika nadále věda a je třeba vysvětlit, proč se sami matematikové ve své praxi vědeckému způsobu vyjadřování tak vzdalují. Podle druhé je matematika spíše než věda jakýmsi uměním či technikou, neboť odporuje teoretickému ideálu vědy. V této disciplíně totiž nic nenahlížíme, ale především vytváříme určité obrazce.

Je třeba podotknout, že přítomnost oné technické či konstrukční složky v matematice je z hlediska našich dalších úvah zásadní. Má-li totiž naše disciplína v určitém smyslu konstruktivní povahu, pak zde musí být (tak jako je tomu v technice) díly či materiál, s nímž se následně pracuje. Zájmem o „smyslový materiál“ se však vzdalujeme požadavku, podle nějž v matematice máme kontemplovat jakési věčné a neměnné jsoucno, a přibližujeme se k základní tezi formalismu, že se matematik zabývá něčím „hmatatelným“, totiž samotnými znaky, a ne tím, k čemu tyto znaky referují (srov. úvod naší

16 Je jistě poněkud paradoxní, že si obtížnosti slučitelnosti těchto požadavků nepovšiml sám Aristotelés, ale jeho předchůdce Platón. Souvisí to jistě s tím, že se na rozdíl od svého žáka matematikou intenzivně zabýval, a že měl tedy doslova před očima neslučitelnost postupů v této disciplíně s tím, jak podle jeho soudu postupuje věda. Platón však svoje názory na pojetí vědy nikdy soustavně nevyložil. V dalších dějinách se proto Platónova námitka vztahovala spíše k Aristotelovu (systematicky vyloženému) pojetí vědy.

17 Platón, *Ústava*, 527b. Přel. R. Hošek. Praha, Svoboda–Libertas 1993.

18 Tamtéž, 527a.

statě). V dalším výkladu budeme proto sledovat, jak onen technický aspekt, jenž je přítomen v matematické praxi, dal podnět ke vzniku formalismu.

§ 2. Dvojí přístup k matematice od antiky až po raný novověk

V antice spíše převládal první názor a rozpaky nad matematickou praxí posloužily jako inspirace k dalším úvahám o povaze této disciplíny.[19] Ve středověku vedle sebe svým způsobem existovaly oba názory. Na jedné straně se matematika studovala v rámci sedmera svobodných umění, což přinejmenším naznačuje, že byla chápána jako technika. Na straně druhé však mělo velký vliv Aristotelovo pojetí, jež matematiku spolu s teologií (tj. metafyzikou – řečeno pozdější terminologií) a fyzikou řadilo mezi teoretické vědy. To, zda matematika patří mezi teoretické vědy nebo spíše mezi umění (techniky), nebylo zcela jednoznačně rozhodnuto, což patrně souviselo s tím, že pro středověké učence mělo pěstování této disciplíny přinejlepším druhořadý význam. Problém jejího vědeckého statusu se v období, v němž dominoval důraz na posvátné vědy, nikdy neocitl v centru zájmu.[20]

S příchodem novověku a se vznikem vědy v moderním slova smyslu se ovšem názory na význam matematiky proměnily a zájem o ni pronikl i do prostředí scholastických učilišť. Právě tato změna důrazu měla zcela přirozeně za následek, že se, alespoň mezi scholastiky, začala pociťovat potřeba rozhodnout dříve odložené dilema. K velmi zajímavému sporu o povaze matematiky pak došlo mezi jezuity. Příslušníci tohoto řádu totiž postupně vytvořili dva tábory, jejichž názory odpovídají dvěma výše zmíněným přístupům. Konzervativnější, tvořený většinou teology a filosofy, hájil oprávněnost středověkého zařazení matematiky mezi svobodná umění a zpochybňoval její vědecký status. Významný je v tomto ohledu především názor Benedicta Pereria, podle něhož „matematické disciplíny nejsou vědami ve vlastním slova smyslu… Mít vědění znamená poznat věc skrze příčinu, díky níž tato věc existuje; a vědění je účinkem důkazu: ten … musí vycházet z takových věcí, které existují o sobě a jsou vlastní tomu, co se dokazuje. Matematik však nezkoumá ani esenci kvantity, ani její nutné vlastnosti, nakolik z ní vyplýva-

19 O jednom z takovýchto pokusů referuje Proklos, když popisuje názory Speusippa a Amphinomia. Tito filosofové vycházejí podle jeho soudu z předpokladu, že předmětem matematiky je oblast věčného, tj. že všechny matematické předměty existují, přičemž „na jejich konstrukce je třeba pohlížet ne jako na jejich vytváření, ale jako na snahu těmto věcem porozumět…“. Konstrukce či ona praktická činnost tedy hraje pouze pomocnou či heuristickou roli. Srov. Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Transl. G. E. Morrow. Princeton, Princeton University Press 1970, s. 64. Srov. též Klein, J., *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. New York, Dover Publications 1968.

20 Wagner, D. L. (ed.), *The Seven Liberal Arts in the Middle Ages*. Bloomington, *Indiana University* Press 1983, s. 205.

jí …“[21] To, že matematika není věda, ilustruje Pererius na Eukleidově „důkazu“ toho, že součet úhlů trojúhelníka je roven dvěma pravým.[22] V tomto důkazu nejde o nalezení příčiny, tj. stanovení důvodu spojení subjektu („součet úhlů trojúhelníka“) s predikátem („sto osmdesát stupňů“) v závěru apodiktického sylogismu, ale o konstrukci, která nám umožní dokazovanou skutečnost nahlédnout.[23]

Pererius tak – podobně jako Platón – poukazuje na neslučitelnost matematické mluvy či praxe s tradičním pojetím vědy. Jeho argumentace je však poučená znalostí Aristotelových nároků na důkaz. Ukazuje totiž, že konstruktivní důkaz má zcela jinou povahu než důkaz kauzální. Matematika proto není věda ve vlastním slova smyslu, ale patří spíše mezi svobodná umění. Je zajímavé dodat, že tento závěr má i určité politické konsekvence. Pererius se totiž zasazoval o to, aby matematika hrála v rámci univerzitních studií podřadnou úlohu.

Takovouto argumentací se samozřejmě jezuitští matematici cítili být ohroženi a začali požadovat, „aby se učitelé filosofie vyvarovali řešení takových otázek, které nepřispívají vyřešení přirozených věcí a snižují autoritu matematických disciplín v očích studentů…“.[24] To, že tyto disciplíny mají hrát důležitou roli při formování studenta, se snažili jezuitští matematici prosadit jednak svou autoritou[25] a jednak tím, že se pokusili emancipaci matematiky filosoficky zdůvodnit. Známá je v tomto ohledu především Blancanova snaha ukázat, že matematické důkazy nemají, jak se domníval Pererius, konstruktivní, ale kauzální charakter. V této disciplíně totiž pracujeme, podobně jako v jiných vědách, s předměty, které jsou složeny z látky a formy. Ty se však od běžných předmětů liší tím, že jejich látka není smyslová, ale inteligibilní. Díky tomu lze definovat esence takovýchto předmětů a tyto definice lze následně užít jako střední termíny v kauzálních důkazech.[26]

Podívejme se nyní podrobněji, jakým způsobem umožní složenost matematických předmětů z inteligibilní látky a formy Blancanovi uchopit vlastní předmět matematiky. Již předcházející scholastická tradice ztotožňovala inteligibilní látku s kvantitou, která může být následně vymezena buď jako

---

21 Pererius, B., *De communibus omnium rerum naturalium principiis et affectionibus*. Vol. 2. Venetiis, A. Maschium, 1576, s. 24.

22 Euclid, *The Thirteen Books of the Elements*, book I, prop. 32.

23 Ta spočívá v tom, že se prodlouží základna trojúhelníka a současně se vede rovnoběžka s jednou jeho odvěsnou.

24 Clavius, Ch., Modus quo disciplinae mathematicae in scholis Societatis possent promoveri. *Monumenta Paedagogica Societatis Jesu*. Romae 1588-1616, s. 115-116.

25 Christopher Clavius (1538-1612) byl německý jezuitský matematik a astronom, člen osmičlenné komise, kterou sestavil papež Řehož XIII. kvůli reformě kalendáře.

26 O Blancanových názorech v tomto ohledu referuje Wallace, W., *Galileo and His Sources*. Princeton, Princeton University Press 1984, s. 142-143.

kontinuální, nebo jako diskrétní. Geometrie se zabývá kontinuální látkou, tj. kvantitou vymezenou tvary, aritmetika naopak diskrétní látkou, tj. kvantitou vymezenou počtem. Na Blancanových úvahách je pak podle našeho soudu významné především to, že vlastní předmět matematiky klade nad aritmetiku či geometrii. Nepovažuje za něj ani kvantitu vymezenou tvarem, ani kvantitu vymezenou počtem, ale prostě „kvantitu vymezenou, nakolik je vymezená. Neboť z tohoto vymezení vznikají různé tvary a čísla, které matematik definuje, jichž se týkají důkazy různých teorémů."[27] Vlastním předmětem matematiky je tedy kvantita, nakolik je vymezená, a ta je ztotožněna s inteligibilní látkou. Tato inteligibilní látka je oddělena od smyslové látky a je „vnímána samotným rozumem".[28]

Z našeho hlediska je významné, že úvahy o existenci jakési matematiky, která je nadřazena geometrii i aritmetice, nenacházíme pouze mezi jezuity, ale i mezi učenci, kterým nešlo o pouhou reformu dosavadní scholastiky, ale spíše o její překonání. V 16. i 17. století totiž získávaly vliv znovuobjevené klasické matematické texty a mezi nimi i Proklův komentář k první knize Eukleidových *Základů* (první novověká edice – Grynaeova – vyšla r. 1533). Autor tohoto komentáře se inspiruje Aristotelovou koncepcí, podle níž i matematik „užívá obecných vět (ta koina), ale se zřetelem ke svému oboru …, a vychází tak z principů, které nejsou vlastní jeho vědě, ale jež se zkoumají ve vědě nadřazené, jíž je první filosofie".[29] Analogicky argumentuje i Proklos ve svém „Komentáři". Všímá si např. toho, že věta, podle níž „záměna [středních termínů] vytváří opět úměru", je platná nejenom pro spojité velikosti, ale i pro čísla,[30] a že tedy existují obecné věty, které jsou platné jak v geometrii, tak v aritmetice. Do jaké vědy však takovéto obecné věty náleží, či Proklovými slovy řečeno: „Kdo má znát záměny [tj. ony obecné věty], které se týkají velikostí i čísel…?" Zkoumání těchto záměn (vět) nenáleží ani geometrii, ani aritmetice, ale vědě, která je těmto disciplínám „velmi nadřazená a postupuje od méně obecného k obecnějšímu poznání".[31]

Proklova myšlenka, že existuje jakási obecná věda, či jak se v novověku začalo říkat: *mathesis universalis*, jež stojí nad aritmetikou i geometrií, vzbudila v 16. a 17. století velký zájem. V úvahách o tom, s čím tuto obecnou vědu ztotožnit, však došlo k významnému posunu. Tato věda totiž přestala být ztotožňována s Aristotelovou *první filosofií* a začala být ztotožňována s alge-

27 *Giuseppe Blancani's De Mathematicarum Natura.* Apendix k *Aristotelis Loca Mathematica*. In: Mancosu, P., *Philosophy of Mathematics and Mathematical Praxis in the Seventeenth Century*. New York, Oxford University Press 1996, s. 179.

28 Tamtéž, s. 180.

29 *Metafyzika*, XI, 1061 b 17.

30 Srov. Klein, J., *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, c. d., s. 180.

31 Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, c. d., s. 181.

brou,[32] která vešla ve známost díky Arabům a která právě v 16. a 17. století prodělala nebývalý rozvoj.[33]

V 16. i 17. století tedy scholastičtí i novověcí matematikové zpochybňují myšlenku nadřazení geometrie nad aritmetiku a kloní se k závěru, že zde musí existovat věda, která obě tyto tradiční disciplíny zastřešuje. Oba tyto, byť kulturně poněkud odlišné, proudy znal R. Descartes a zřejmě jako první je začal propojovat.[34] Doklad o tom nacházíme v *Pravidlech pro vedení rozumu*, kde říká: „Když mě tyto úvahy odvedly od výlučného pěstování aritmetiky a geometrie k jakémusi všeobecnému zkoumání matematiky, položil jsem si nejdříve otázku, co přesně všichni tímto názvem chápou a proč se za její součásti označují nejen ty dva obory už uvedené, ale i astronomie, hudba, optika, mechanika a mnoho dalších. (…) Kdo o tom uvažuje hlouběji, nakonec si uvědomí, že k matematice se vztahují pouze ty věci, u nichž lze zkoumat uspořádání či míru, a nezáleží na tom, zda onu míru určujeme na číslech, obrazcích, hvězdách, zvucích, nebo jakýchkoli jiných objektech. Proto musí existovat nějaká obecná věda, která by vysvětlovala všechny otázky týkající se uspořádání a míry bez spojení s určitou materií; ta se označuje nikoli přejatým slovem, nýbrž už starobylým a užívaným pojmem obecná matematika, protože obsahuje všechno, proč se jiné vědy nazývají částmi matematiky."[35]

Z textu je zřejmé, že Descartes podobně jako Proklovi následovníci v 16. a 17. století nadřazuje nad tradiční matematické disciplíny algebru, byť se terminologicky přiklání k termínu *obecná matematika*, a nikoli k výrazu přejatému. Dále je zřejmé, že podobně jako Blancanus zbavuje vlastní předmět matematiky spojení s určitou materií, čímž jej de facto chápe jako kvantitu o sobě či inteligibilní látku.[36] Tím, jak říká na jiném místě, přestane být věcí zraku a představivosti a stane se (opět podobně jako u Blancana) výhradně záležitostí intelektu.[37]

32 Algebru Gosselin nazval „regina scientiarum" či „divina ars". Podobně jako se vyjadřoval Gosselin o algebře, se však vyjadřoval o *mathesis universalis* Barocius, když ji nazval *scientia divina.* Srov. Klein, J., *Greek Mathematical Thought and the Origins of Algebra*, c. d., s. 181.

33 U zrodu algebry v novověku stálo více učenců, v četné sekundární literatuře věnující se tomuto tématu bývají nejčastěji uváděna jména jako F. Viete, S. Stevin, J. Wallis, G. Cardano, R. Descartes a jiní. Není zde možno a ani není naším cílem o tomto zajímavém tématu pojednat šířeji. Srov. Klein, J., *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, c. d.

34 Mahoney, M. S., The Beginnings of Algebraic Thought in the Seventeenth Century. In: Gaukroger, S. (ed.), *Descartes: Philosophy, Mathematics and Physics*. Sussex, The Harvester Press – Totowa, NJ, Barnes and Noble Books 1980, s. 141-155.

35 Descartes, R., *Pravidla pro vedení rozumu*. Přel. V. Balík. Praha, OIKOYMENH 2000, s. 377.

36 Na základě těchto skutečností se někteří interpreti dokonce domnívají, že Descartova *res extensa* je v podstatě scholastická inteligibilní látka. Srov. Hettab, H., *Descartes on Forms and Mechanism*. Cambridge, Cambridge University Press 2009, s. 107.

37 Podobně se vyjadřuje další významný matematik 17. století J. Wallis. Říká totiž: „… vedle předpokládané konstrukce přímky či obrazce existuje něco v povaze konstruovaného, o čemž lze uvažovat nezávisle na takové konstrukci a co je doprovází, ať už je to konstruováno jakkoli…"

S tím, že ztotožníme předmět matematiky s čistě inteligibilními předměty, však souvisí určitá obtíž. Ukazuje se totiž, že přirozený jazyk či jazyk tradiční matematiky není k vyjádření velmi abstraktních vztahů, s nimiž by algebra měla pracovat, dostatečný. Podle Descarta je proto třeba vytvořit nový způsob zápisu,[38] jehož pomocí „ukážeme jednotlivé členy úlohy v tak čisté a holé podobě, že sice nebude pominuto nic užitečného, a přece se v nich nikdy nenalezne nic, co by bylo nadbytečné a co by zbytečně zaměstnávalo schopnost rozumu, když bude třeba myslí postihnout více věcí současně".[39] Hlavním cílem nově vytvořeného jazyka tedy je zachytit podstatu řešeného problému v jeho nenázorné abstraktní podobě.

§ 3. Problémy algebraické metody

Na základě předcházejícího paragrafu by se mohlo zdát, že nesoulad mezi matematickou praxí a tradičním pojetím vědy je dán tím, že matematika nebyla pěstována na dostatečně abstraktní úrovni a nepříznivou situaci by mohl vyřešit objev algebry. V ní byl nalezen teoretický obor, který lze dosavadním matematickým disciplínám nadřadit. Na rozdíl od geometrie či aritmetiky totiž popisuje (pomocí nového způsobu zápisu) předměty, které jsou čistě inteligibilní, tj. jsou zbaveny jakéhokoli spojení se smyslovým světem. To v sobě samozřejmě skrývalo naději, že se zbavíme nešťastného konstruktivismu (ať už v Platónově či Pereriově smyslu) a ukážeme, že matematika po právu patří do rodiny teoretických věd.

Abychom porozuměli tomu, že i obrat k algebře v sobě skrývá určité obtíže, bude užitečné porovnat algebraický způsob vyjadřování s geometrickým.[40] Podívejme se nejprve na tradiční geometrii. V ní, jelikož není dostatečně abstraktní, vždy popisujeme určitou „figuru, na niž nikdy nepřestaneme hledět, přičemž vždy uvažujeme o kvantitách a formách, které jsou reálné a existující, a nikdy nemůžeme dospět k závěrům, které si nelze představit

(Pokrač. pozn. č. 37) Pomocí matematické abstrakce totiž podle Wallise „oddělíme to, co je vlastním předmětem matematických zkoumání … od nepatřičností látky, jež jsou mu akcidentální a jež náleží pouze zkoumanému případu či příslušné konstrukci". Srov. Wallis, J., *Treatise on Algebra.* London, Printed by John Playford, for Richard Davis 1685, s. 291.

38 Jedná se o tzv. operační symbolismus, jehož pravým tvůrcem však nebyl Descartes, ale spíše Vieta (i když Descartes v úvodu ke *Geometrii* opakovaně zdůrazňuje, že Vietu četl až po sepsání tohoto spisu). Descartův význam spočívá v tom, že Vietův symbolismus zbavil posledních stop spojení s geometrií. Místo aby psal, jako Vieta, *2A cubus* , píše $2x^3$, což zdůvodňuje tím, že x a x^3 jsou kvantity, které se k sobě a vposled k jednotce vztahují prostřednictvím určitých vztahů, tj. $1/x = x/x^2 = x^2/x^3$.

39 Descartes, R., *Pravidla pro vedení rozumu*, c. d., II, 165.

40 Budeme tedy postupovat podobně jako Platón, když kritizoval způsob, jímž se vyjadřují geometři.

nebo znázornit pomocí smyslově vnímatelných předmětů“.[41] Díky tomu je podle Johna Playfaira[42] i geometrický jazyk vytvořen tak, aby byl v neustálém kontaktu se smyslově vnímatelnými předměty. V této disciplíně proto nikdy nemyslíme „naslepo“, neboť „každá veličina je reprezentována veličinou stejného druhu; přímky přímkami, úhly pomocí úhlu, rod je vždy signifikován individuem a obecná idea ideou partikulární, která pod ni spadá“.[43] To však pro algebru neplatí! Jejím předmětem totiž nejsou entity, které si lze představit, ale (podle Blancana i Descarta) entity čistě rozumové. Ty přirozeně nemůžeme reprezentovat pomocí znaku, který by se nějak podobal označené kvantitě, ale volíme „uměle zavedený symbol, s nímž nemá žádnou podobnost“. Na označenou veličinu proto „můžeme za určitých okolností zapomenout, a jediným předmětem našich úvah se pak stane samotný symbol“.[44]

Všimněme si především, že v algebře na rozdíl od geometrie za určitých okolností zapomínáme na předmět svých úvah (tj. označenou kvantitu) a na místo toho se zaměříme na sám symbol. To, že opravdu tímto způsobem mnohdy postupujeme, dosvědčují naše běžné zkušenosti s elementární matematikou. Zaměňujeme například pořadí symbolů (podle komutativního zákona), vytváříme jejich různé skupiny (podle asociativního zákona) atd., a tak se nám může zdát, že úlohy v algebře spočívají v mechanickém přeskupování symbolů a naše aktivity se podobají dejme tomu hře v šach. V šachách i v algebře se totiž soustřeďujeme na vztahy smyslově vnímatelných entit (figurek, symbolů) a svým způsobem zapomínáme na reálný svět. Vyzdvihneme-li právě tento aspekt matematické praxe, pak se tím zcela přirozeně vzdálíme aristotelskému pojetí vědy. Nenazíráme či nekontemplujeme totiž nějaký věčný a neměnný předmět, k němuž užité symboly referují, ale pouze operujeme se symboly.

Toto zpochybnění teoretického statusu algebry však nemusí být ještě fatální. Stačí připomenout, že algebraické symboly jsou obecnější a abstraktnější než symboly aritmetické či geometrické, což může mít za následek, že někdy ztratíme kontakt s předmětem našich úvah. K tomu jistě nedochází pouze v algebře, ale i v jiných abstraktnějších disciplínách, v nichž rovněž mnohdy ulpíme v suchopáru slov. Výše uvedené přirovnání algebry k šachům tedy nemusí nutně obstát. V šachách dochází ke ztrátě kontaktu s okolním světem, protože si od něj chceme odpočinout, v algebře díky abstraktnosti předmětu, s nímž pracujeme.

41 Poncelet, J.-V., *Traité des propriétés projectives des figures*. Paris, Bachelier 1822, s. 265.
42 John Playfair (1748-1819) byl skotský matematik a duchovní.
43 Playfair, J., On the Arithmetic of Impossible Quantities. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 68, 1778, s. 318.
44 Tamtéž.

S algebraickou praxí se však pojil další problém, který souvisel se zaváděním nových čísel a který podpořil podezření, že v této disciplíně jde skutečně o pouhou manipulaci se symboly. Abychom mu porozuměli, je třeba připomenout, že vědec podle tradičního pojetí „hraje“ řečovou hru, jejíž výroky musí obsahovat termíny, které referují k reálně existujícím entitám (srov. § 1). V tomto požadavku je skryt předpoklad, že zde nejprve existují předměty, a ty následně pojmenováváme či vymezujeme pomocí definic.[45] Tato jazyková praxe však v algebře neplatí. To vyjde najevo, uvědomíme-li si, že tato disciplína byla ve svých počátcích chápána jako teorie rovnic a díky tomu se při zavádění nových předmětů postupovalo poněkud jinak. Není zde nějaký předem daný předmět a potřeba dát tomuto předmětu jméno, ale nutnost řešit určité rovnice.[46] Máme-li např. vyřešit rovnice typu $x + 1 = 0$, musíme zavést čísla záporná (*−1*); pro řešení rovnice typu $2x = 1$, zavedeme čísla racionální (*1/2*); pro rovnice typu $x^2 = 2$ čísla iracionální ($\sqrt{2}$) a rovnice typu $x^2 = -1$ vedou k zavedení čísel imaginárních (*i*).[47]

Proč by však mělo zavádění nových čísel působit nějaké obtíže? Nejprve je potřeba objasnit, co míníme obratem *zavést číslo*. Zpočátku pravděpodobně „podlehneme svodu“ běžné řečové praxe a budeme předpokládat, že s číslem se to má podobně jako s běžným empirickým předmětem. Ten zavádíme, jak jsme již naznačili, tak, že si ho předem prostě pojmenujeme příslušným jménem. A i v případě zavádění nových čísel máme sklon postupovat podobně. I čísla přece zavádíme tak, že existující předmět předem označíme číslovkou.

V této analogii se však skrývá určitá nesnáz, jež souvisí s tím, že běžný předmět je konkrétní a lze na něj bez problémů ukázat, kdežto číslo je abstraktní a je mnohdy obtížné nalézt předmět, který by zaváděným číslovkám odpovídal. Budeme si snad vědět rady v případě přirozených čísel, když např. trojku ukážeme zvednutím tří prstů. Co ale v případě čísel záporných, racionálních, iracionálních, či dokonce imaginárních? Největší rozpaky, jak již na-

45 Běžný způsob zavádění nových jmen, z nějž implicitně vychází aristotelské pojetí vědy, výstižně popisuje S. Kripke. Srov. Kripke, S., *Naming and Necessity.* Harvard, Harvard University Press 1980.

46 Hilbert později považuje tuto potřebu za zcela přirozenou a říká: „Je zde problém. Hledej jeho řešení. Můžeš jej nalézt čistým rozumem, neboť v matematice není žádné ignorabimus.“ Srov. Hilbert, D., Mathematische Probleme. *Archiv der Mathematik und Physik*, 1, 1901, s. 44-63.

47 Myšlenka, že různé typy čísel byly zavedeny proto, abychom měli řešení uvedených rovnic, pochází od Peana. Srov. Peano, G., Fundations of Analysis. In: Kennedy, H. (ed.), *Selected Works of G. Peano.* Toronto, University of Toronto Press 1973, s. 224. Peanův výklad však není věrným popisem vzniku jednotlivých typů čísel, historicky přesnější je popis Gaussův. Srov. Gauss, C. F., Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda. *Göttingische Gelehrte Anzeigen*, 23. 4. 1831. Také in: *Carl Friedrich Gauss Werke.* Vol. II. Göttingen, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften 1873, s. 173-178. Srov. též Detlefsen, M., Formalism, c. d., s. 279.

povídá samo jméno, pak vzbuzovala imaginární čísla.[48] Matematici je sice zavedli, nicméně po dlouhou dobu nikdo z nich nebyl s to vůbec říci, k čemu by se tyto nové výrazy měly vztahovat.

Jestliže však v matematice pracujeme skutečně s číslovkami, jejichž referenci nedokážeme určit, pak obratem *zavést číslo* musíme myslet něco jiného než obratem *zavést empirický předmět*. Když zavádíme nové číslo, pak zde nemusí být nejprve předmět, který následně pojmenujeme, ale je zde pouze nový termín (nový druh číslovek). Pod pojmem *zavedení čísla* bychom proto měli rozumět čistě zavedení nové číslovky. Je-li tomu skutečně tak, pak nové termíny nemají referenci a práce s nimi, tj. matematické myšlení, spočívá tak jako v případě šachů v pouhé manipulaci. To samozřejmě podporuje závěr, že v matematice nezapomínáme na předmět našich úvah kvůli abstraktnosti termínu, ale kvůli tomu, že termíny, s nimiž pracujeme, k žádnému předmětu prostě nereferují. Nemají-li matematické termíny skutečně žádnou referenci, pak se tím opět dostáváme do sporu s tradičním ideálem vědy (konkrétně s prvním požadavkem).

Výše uvedené problémy (nová notace, zavádění nových čísel) vedly k tomu, že se u Descarta i v myšlení jeho doby setkáváme s určitým napětím.[49] Na jedné straně je zde snaha ukázat, že matematika je věda, protože se zabývá velmi abstraktním předmětem, na straně druhé reflexe nad matematickou praxí (podobně jako v antice) se tomuto požadavku neustále vzpírá. Někdy se sice zdá (tak jako v geometrii či v aritmetice přirozených čísel), že matematika má ve shodě s Aristotelovými požadavky předmět, jindy je však patrné, že naše myšlení tento předmět opouští a ulpívá v pouhé manipulaci se symboly. Významné je, že právě toto napětí či „diskurzivní dvojznačnost“ nakonec neuniklo inspirativní filosofické reflexi. Podle G. Berkeleyho není třeba, „aby při každém kroku každé písmeno vyvolávalo v naší mysli kvantitu, pro niž bylo ustanoveno“,[50] protože pravý účel řeči nespočívá pouze ve sdílení či získání idejí, „ale má i aktivní operativní povahu, díky níž se dosahuje zamýšleného

48 Imaginární čísla zavedl v 16. století Rafael Bombelli, když hledal kořen pro dosud nevyřešenou kvadratickou rovnici $x^2 = -1$. Tato rovnice neměla běžné číselné řešení, a proto Bombelli musel zavést nový symbol, s kterým (na rozdíl od běžných číslovek) nespojil žádný obsah či představu. Se zavedeným symbolem nicméně manipuloval podle běžných algebraických pravidel tak jako se symboly běžnými. Bombelli měl samozřejmě pochybnosti ohledně přípustnosti tohoto kroku, a proto tato nová čísla nazval *imaginárními*. Srov. Resnik, M., *Frege and the Philosophy of Mathematics*. Ithaca, New York, Cornell University Press 1980, s. 55.

49 Srov. Mahoney, M. S., The Beginnings of Algebraic Thought in the Seventeenth Century, c. d., s. 141-155.

50 Berkeley, G., *Esej o nové teorii vědění. Pojednání o principech lidského poznání*. Přel. M. Hubová a M. Tomeček. Praha, OIKOYMENH 2004, s. 52-53.

dobra. … [diskurs], … který usměrňuje naše činy … je užitečný a významný, a to přesto, že slova, z nichž je složen, nevyvolávají v naší mysli žádnou ideu“.[51]

Podle Berkeleyho se tedy lze výše uvedenému napětí vyhnout tak, že rozlišíme dvojí užití symbolů. První můžeme buď podle vzoru novověkých filosofů nazývat *komunikativní* (symbol či písmeno užíváme k tomu, abychom sdíleli či zprostředkovali určité ideje), nebo podle vzoru starší tradice *teoretické* (symbol užíváme k tomu, abychom nahlédli příslušnou kvantitu). Druhé, protože má operativní povahu, můžeme nazývat buď *instrumentální* (písmeno užíváme jako nástroj k dosažení zamýšleného dobra či cíle), nebo *symbolické* (pozornost obracíme k symbolům).

Pro vznik formalismu je podle našeho soudu klíčové, že se toto původně čistě filosofické rozlišení nakonec zabydlelo i mezi matematiky a logiky. Ti jej sice zpočátku v podstatě nerespektovali[52] a ve své praxi konfuzně užívali jak názorné geometrické metody, tak symbolické metody algebraické,[53] nicméně později začali právě díky Berkeleymu uvedenou konfúzi odstraňovat.[54]

§ 4. Cambridgeští algebraici – vznik formalismu

Nejvýznačnějším způsobem začali s Berkeleyho rozlišením různých způsobů užití jazyka pracovat v první polovině 19. století tzv. *cambridgeští al-*

51 Berkeley, G., Alciphron: Or the Minute Philosopher. In: Luce, A. – Jessop, T. (eds.), *The Works of George Berkeley, Bishop of Cloyne*. Edinburgh, Thomas Nelson 1948-1957, s. 307.

52 Na to, že se v novověké matematice používal jazyk komunikativně i instrumentálně, existovaly (nezávisle na Berkeleyho rozlišení) v podstatě dva názory. Jejich stoupenci se shodují v tom, že se pokoušejí matematický způsob vyjadřování sjednotit, liší se tím, jak toho chtějí dosáhnout. Podle prvního názoru, jehož zastánci se dovolávali autority J. Wallise, je třeba ve všech oblastech matematiky propagovat algebraický či symbolický způsob užití termínů. Srov. Wallis, J., *Arithmetica infinitorum* (1656). In: *Opera mathematica*, sv. I., reprint Georg Olms, Hildesheim 1968. Opačného názoru byli F. Maseres a W. Frend, kteří užití algebraických metod potírali. Srov. Maseres, F., *A Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra.* London, S. Richardson 1758; Frend, W., *The Principles of Algebra*. London, J. Davis 1796. Toho se snažili dosáhnout restrikcemi, jež měly zamezit užití problematických termínů (především imaginárních číslovek). K tomuto druhému směru svým způsobem patří i matematikové, kteří rovněž nesouhlasili se zaváděním algebraických metod, nicméně problematické případy neřešili restrikcemi, ale snahou nalézt vhodnou interpretaci příslušného symbolu. Známá je v tomto ohledu zejména Gaussova geometrická interpretace těchto čísel. Srov. Gauss, C. F., Theoria residuorum biquadraticorum, c. d.

53 Např. MacLaurin, C., *A Treatise of Fluxions*. Edinburgh, Ruddimans 1742. Srov. Mancosu, P., *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, c. d., s. 145.

54 Dílo tohoto filosofa proniklo do povědomí širší matematické veřejnosti díky jeho kritice infinitezimálního počtu obsažené v jeho knize *The Analyst*. Srov. Berkeley, G., *De Motu and the Analyst*. Ed. D.-M. Jesseph. Dordrecht, Springer 1992. O tom, že se myšlenky tohoto filosofa staly akceptovaným zdrojem pro úvahy o založení matematiky na britských ostrovech, svědčí mimo jiné i názor G. Boola, podle nějž „jazyk je nástroj lidského rozumu a nikoli pouhé médium sloužící k vyjádření myšlení“. Srov. Boole, G., *An Investigation of the Laws of Thought*. London, Walton and Maberly 1854, s. 24.

gebraici. Jejich ústřední představitel George Peacock[55] je podle našeho soudu významný právě tím, že v matematice důsledně oddělil komunikativní (obsahové) užití jazyka od instrumentálního (symbolického). V aritmetice a ve vědách, které jsou na stejné úrovni jako ona,[56] prý užíváme jazyk komunikativně, v (symbolické) algebře naopak čistě instrumentálně či symbolicky. Rozdíl mezi algebrou a ostatními matematickými disciplínami (aritmetikou, geometrii) tak není dán stupněm abstrakce, ale odlišným způsobem užití jazyka.[57]

Podívejme se nyní podrobněji na to, jakým způsobem se užívá jazyk v aritmetice. Peacock vychází z tradiční představy, že tato disciplína stojí na nutných a evidentních pravdách. Tyto pravdy musí vyjadřovat určitý obsah, který není arbitrárně zvolen, ale závisí na předem daném předmětu, jímž se tato disciplína zabývá. Ve větách aritmetiky se tak musí vyskytovat pouze takové termíny, jejichž význam je předem vyjádřen pomocí definic. „Definovat znamená předem přiřadit termínu či operaci význam nebo podmínky [jeho užití]…“[58] Předem vymezené významy pak určují pravidla, jakým způsobem se mají příslušné termíny či operace v aritmetice používat. Jejich užití tak není svobodné či arbitrární, ale nakonec v podstatě vždy závisí na příslušném významu či předmětu. Význam (či předmět) je tedy primárně uchopen definicí, která sekundárně určuje povahu zákonů, s nimiž se v aritmetice setkáváme.[59] Dodejme, že na této představě o aritmetice není nic nového a že v podstatě odpovídá tradičnímu (aristotelskému) pojetí vědy.

Algebra má naproti tomu podle Peacocka zcela jinou povahu. Užití jejích termínů se neřídí předem definovaným předmětem, ale je dáno arbitrárně.

55 George Peacock (1791-1858) byl prvním matematikem, který se zabýval základními principy algebry. Srov. Peacock, G., *Treatise on Algebra*. Cambridge, Deighton 1842-1845. Ve svém spise se Peacock pokusil systematizovat nauku této disciplíny podobným způsobem jako Eukleides geometrii. Bývá proto někdy nazýván „Eukleidem algebry“. K podobnému závěru dospěl, nicméně méně přímočaře, také další významný ostrovní matematik W. R. Hamilton (1805-1865). Ten zpočátku zastával idealistický názor, že algebra je syntetická apriorní věda a je založena čistým názorem času. Pravděpodobně objev kvaternionu jej ale vedl k tomu, aby svůj původní postoj přehodnotil a v podstatě se přiklonil k pojetí cambridgeských algebraiků. Srov. Bloor, D., Hamilton and Peacock on the Essence of Algebra. In: Mehrtens, H. – Bos, H. – Schneider I. (eds.), *Social History of Nineteenth Century Mathematics*. Dordrecht, Springer 1981, s. 202-232.

56 Peacock zmiňuje vedle aritmetiky i geometrii, mechaniku a dynamiku. Srov. Peacock, *Treatise on Algebra*, c. d., s. 21.

57 V tomto ohledu se formalismus odlišuje od logicismu i intuicionismu. V těchto koncepcích má totiž jazyk stejnou funkci jako v ostatních vědách. Revoluce, kterou formalisté provedli, tedy spočívá v tom, že výlučnost matematiky nevysvětlili předmětem jejího zájmu, ale jiným způsobem užití jazyka.

58 Peacock, G., Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis. In: Murray, J. (ed.), *Report of the Annual Meeting of the British Association for the Advancement of Science*. London 1834, s. 197.

59 Tamtéž, s. 200-201.

Nejprve tedy podobně jako v nějaké hře „svobodně" zavedeme pravidla manipulací se znaky. Tato pravidla následně určují, jaký druh idejí (významů) lze s tímto symbolem spojit a jaký nikoli. Ideje (významy), které uvedená pravidla splňují, nazýváme interpretace či (moderně řečeno) modely. Interpretovat znak totiž neznamená nic jiného než „určit význam termínu či operace [tj. připojit k němu příslušnou ideu] ve shodě s definicemi či podmínkami, které s ním byly původně spojeny. (…) v … algebře interpretujeme [znaky, tj. termíny či operace] ve shodě se symbolickými podmínkami, jimž jsou podřízeny".[60] V této disciplíně tak postupujeme opačně než v aritmetice. Nezačínáme definicemi, které následně určí pravidla užití příslušného termínu, ale nejprve určíme pravidla, jak se symboly, které prozatím nemají žádný význam, manipulovat. Až poté hledáme význam (interpretaci, model), který těmto pravidlům odpovídá. Algebra díky tomu nemá v pravém slova smyslu předmět a odporuje aristotelskému pojetí vědy. Jazyk této disciplíny je čistě symbolický a její věty i termíny nemají žádný obsah. Právě v tomto ohledu se Peacock podstatně odlišuje od předcházející tradice (tj. např. od Descarta), která algebru (v duchu tradičního pojetí vědy) považovala za obecnější disciplínu než aritmetiku či geometrii.

Problém uvedeného přístupu spočívá v tom, že výběr pravidel pro manipulaci se symboly se zdá být, alespoň na první pohled, zcela nahodilý. Algebra by tak mohla přispět k rozšíření našeho poznání pouze bezděky. Tuto námitku si Peacock uvědomil, a proto upozornil, že pravidla pro manipulaci se symboly ve skutečnosti nestanovujeme zcela nahodile, ale vždy prý musíme mít na mysli cíl, k němuž je algebra zaměřena. Tím je snaha ukázat, že odlišné oblasti – aritmetika, geometrie, mechanika, dynamika – si jsou v určitém ohledu velmi blízké. Tato blízkost spočívá v tom, že v těchto disciplínách manipulujeme se znaky podobným způsobem a algebra nemá jiný cíl než systematizovat tyto vzájemně podobné manipulace. Při stanovování pravidel pro kalkulaci se tedy neřídíme příslušným předmětem, tak jako v aritmetice, geometrii atd., nýbrž se inspirujeme vědami, jejichž manipulaci se symboly chceme systematizovat. Peacock nazývá tyto disciplíny motivující vědy (*sciences of suggestion*). O aritmetice říká, že „… je to pouze motivující věda, jíž jsou principy a operace algebry přizpůsobeny, jíž však nejsou ani limitovány, ani vymezeny".[61] Mluvit však o inspiraci či motivaci se zdá být nedostatečné, a proto Peacock dále formuluje určité principy, jichž bychom se při vytváření pravidel kalkulu měli držet. V prvé řadě, a to se rozumí samo sebou, by si vytvářená pravidla neměla vzájemně odporovat. Větší důraz než na tento samozřejmý požadavek však klade náš autor na tzv. *zákon či princip permanen-*

60 Tamtéž, s. 197.
61 Peacock, G., *Treatise on Algebra*, c. d., s. 8.

ce ekvivalentních forem. Podle něj by algebra měla zachovávat pravidla, která platí v aritmetice. Při symbolické extenzi motivujících věd bychom tedy měli zachovat ta pravidla, která určují jejich užitečnost při výpočtech.[62]

Peacockovy myšlenky tedy vedou k rozdělení matematiky do dvou podstatně odlišných částí. Jednak je zde aritmetika, geometrie, mechanika, dynamika, které ještě zůstávají „v zajetí" obsahového užití jazyka a v podstatném slova smyslu neodporují aristotelskému pojetí vědy; a jednak algebra, v níž se jazyk používá symbolicky či instrumentálně, a ta se tradičnímu pojetí vědy vzpírá.[63] Algebra totiž nemá žádný předmět, její věty žádný obsah, její důkazy neodpovídají na otázku *proč*, ale jsou to pouhé manipulace se symboly. Protože jsou algebraické formule čistě formální entity, nelze jim ani přiřadit pravdivostní hodnotu.

Právě díky tomu, že se Peacock „nebál" algebru naznačeným způsobem vyprázdnit, stává se hlavním iniciátorem formalismu. Je však třeba zdůraznit, že by tento smělý krok byl s to jen stěží učinit bez Berkeleyho rozlišení komunikativního a instrumentálního užití jazyka.

§ 5. Naznačení dalšího vývoje a nová koncepce vědy

Podrobné dějiny formalismu v 19. a 20. století zde nemůžeme sledovat do všech detailů. V tomto paragrafu se soustředíme pouze na ty aspekty, které umožnily odmítnout tradiční pojetí vědy a nahradit jej pojetím novým. Zaměříme se tedy na to, jak se Peacockova myšlenka, že v algebře stojí na počátku znak, přenesla dále do celé matematiky a odtud do celého vědeckého myšlení a komunikace.

Abychom tomuto procesu porozuměli, bude užitečné se nejprve zamyslet, jak by na Peacockovo pojetí algebry pohlížel Aristotelés. Podle našeho soudu by poukázal na to, že instrumentální či symbolické užití jazyka tuto disciplínu nepozvedá nad disciplíny ostatní, ale *de facto* ji deklasuje. Nemluvíme v ní totiž tak, jako bychom něco pozorovali, ale (slovy Platónovými) jako bychom něco dělali a jako by naše slova byla zaměřena k vytváření. Takovýto posun však naznačuje, že v algebře nemáme co do činění s kontemplací věčných entit, ale máme znalost či umění, jak něco vytvářet. Algebru bychom proto ne-

62 Srov. Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*. Stanford, Cengage Learning, Thomson, 1990, s. 502-504; Detlefsen, M., Formalism, c. d., s. 275-277.

63 V návaznosti na M. Dummeta bychom Peacocka a cambridgeské algebraiky mohli zařadit mezi tzv. lokální formalisty. Ti totiž oproti globálním formalistům vyznávají myšlenku, že formalistický přístup je relevantní pouze v některé oblasti matematiky. Srov. Dummett, M., *Frege's Philosophy of Mathematics*. Cambridge, Mass., Harvard University Press 1991, s. 252.

měli ztotožnit s věděním ve vlastním slova smyslu (*epistémé*), ale s pouhým uměním (*techné*).[64]

Naznačená příbuznost algebry a techniky (umění) nás může znovu vtáhnout do diskuse, kterou v 17. století vedli jezuité (srov. § 2). Připomeňme, že její konzervativní účastníci (Pererius) matematiku nepovažovali za skutečnou vědu, ale chtěli ji zařadit mezi svobodná umění. Naopak její progresivní aktéři (Clavius, Blancanus) ji chápali jako skutečnou vědu. Přehlédneme-li nyní diskuse o povaze matematiky, které vedli někteří významní filosofové a matematikové v 19. a 20. století, s překvapením zjistíme, že se po určité stránce podobají těm jezuitským. V jejich průběhu totiž opět vykrystalizovaly dva podstatně odlišné názory. Podle stoupenců prvního (paradoxně tentokrát konzervativnějšího) je třeba teoretický status matematiky obhájit. Tito filosofové (Hilbert mluví o Fregovi a Dedekindovi) navazují – byť patrně nevědomky – na tradici, která vznikla již v antice a kterou na počátku novověku rozvíjela skupina progresivně smýšlejících jezuitů. Podobně jako oni se totiž snaží předložit důvody, na jejichž základě obhajují vědecko-teoretický status matematiky, a je jim proto naprosto cizí myšlenka, že by matematika či některá její část byla pouhou technikou, ve které manipulujeme se symboly. Jedním z nejvýznamnějších představitelů tohoto trendu je patrně G. Frege, jehož názory na toto téma se zřetelně ukazují právě v diskusích s formalisty (Heine, Thomae, Hilbert).[65] V nich se sice explicitně nedovolává tradičního pojetí vědy, ale je mu přinejmenším věrný v tom, že za její cíl považuje v prvé řadě pravdu.[66] Má-li však matematika skutečně takový úkol, je podle Frega třeba, aby její věty vyjadřovaly určité myšlenky a měly pravdivostní hodnotu, tj. aby to nebyly čistě formální entity.[67]

Zastánci druhého názoru jsou z hlediska našeho výkladu důležitější. Ztotožnění algebry s určitou technikou totiž nechápou jako překážku při prosazování teoretického ideálu vědění, ale jako podnět k jeho revizi. Je-li totiž jedna z klíčových matematických disciplín pouhým instrumentem, pak se nabízí otázka, zda není třeba přehodnotit i ostatní oblasti našeho vědění.

64 Umění totiž Aristotelovi stoupenci později vymezili jako *poznání toho, jak správně vytvářet dílo*. Srov. Tomáš Akvinský, *Summa Theologiae*, I-II, 57, 4, Opera Omnia IV–XII. Ed. Leonina. Romae 1888-1906 (český překlad: *Theologická suma.* Olomouc, Krystal 1937-1940). Ve prospěch této interpretace hovoří dále to, že při výběru pravidel nejsme v algebře determinováni předmětem, ale jsme svým způsobem „svobodní“. Tato „svoboda“ se podobá právě svobodě technika či umělce, který kreativně volí prostředky k dosažení určitého cíle.

65 Srov. Fregova korespondence s Hilbertem. Přel. V. Kolman. *Filosofický časopis*, 48, 2000, 4, s. 601-622.

66 G. Frege říká: „Odhalit pravdy je úkolem všech věd, odhalit zákony pravdy přináleží logice.“ Viz Frege, G., Myšlenka. Logické zkoumání. In: týž, *Logická zkoumání, Základy aritmetiky.* Přel. J. Fiala. Praha, OIKOYMENH 2012, s. 95.

67 Srov. Dummett, M., *Frege's Philosophy of Mathematics*, c. d., s. 256.

Neměli bychom od celku vědění očekávat, že nám bude sloužit jako nástroj, který přináší určitý užitek spíše než kontemplaci věčného jsoucna? Není tedy nakonec každá teorie pouhým pojmovým prostředkem, jímž dosahujeme příslušných cílů? Odpovíme-li na tyto otázky kladně, připojíme se k stoupencům instrumentálního pojetí vědy, jež dnes rozhodně patří k těm respektovaným. Z historického hlediska je ale možná zajímavější, že tímto krokem znovu oživíme konzervativní scholastický názor, podle nějž jsou disciplíny obsažené v kvadriviu (aritmetika, geometrie, astronomie a muzika) pouhými uměními či technikami.

Podívejme se nyní v krátkosti na to, jak Peacockův „lokální formalismus", který byl omezen pouze na algebru, přerostl v instrumentální pojetí vědy, tj. v to, co bychom mohli nazvat „globálním formalismem".[68] S prvním stupněm tohoto přesahu se setkáváme v díle D. Hilberta.[69] I on se domnívá, byť nikoli v reakci na Aristotelovo pojetí vědy, ale na restriktivní přístupy intuicionismu,[70] že bychom v matematice neměli být ničím vázáni a při vytváření nových pojmových celků bychom měli postupovat naprosto svobodně. Tak jako v technice, tak i v matematice bychom měli připustit „princip kreativity, který … nás opravňuje k zavádění stále nových pojmových tvarů, přičemž jediným omezením je, že se vyhneme kontradikci".[71]

Tato slova (a v úvodu uvedená myšlenka o znaku jako principu) by nás mohla svést k závěru, že již Hilbert rozšířil Peacockův lokální formalismus na celou vědu. Takto velký krok však ještě Hilbert neučinil a ve skutečnosti zůstal – byť z poněkud jiných důvodů než Peacock – v zajetí obsahového způsobu užití jazyka. V době, v níž svou koncepci vytvářel, byl totiž aktuální spor o základy matematiky a Hilbert se domníval, že čistě instrumentální užití jazyka neumožňuje zajistit bezrozpornost matematiky.[72] Rozhodl se proto, že v jedné její části obsahové užití jazyka připustí, což nakonec zajistí požadovanou bezrozpornost. Tento jazyk má v podstatě podobnou povahu jako jazyk, s nímž se pracuje v geometrii, tj. reprezentuje všechny veličiny veličinami stejného druhu a nevyskytuje se v něm uměle zavedená symbolika, s níž se

68 Výraz „globální formalismus" je převzat z Dummett, M., *Frege's Philosophy of Mathematics*, c. d., s. 256, kde je nicméně použit v poněkud jiném smyslu.

69 Srov. Simons, P., Formalism. In: Irvine, A. D. (ed.), *Philosophy of Mathematics*. Vancouver, Elsevier 2009, s. 291-310.

70 Srov. Hilbert, D., Probleme der mathematischen Logik. In: Ewald, W. – Sieg, W. – Hallett, M. (eds.), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Logic and Arithmetic*. Berlin, Springer 2013, s. 19-20.

71 Hilbert, D., Über die Grunlagen der Logik und der Arithmetik. *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker – Kongress in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*. Leipzig, Teubner 1905. Citováno podle Van Heijenoort, J., *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic* (1879–1931). Cambridge, Mass., Harvard University Press 1967, s. 136.

72 Srov. Hilbert, D., Über das Unendliche. Citováno podle Van Heijenoort, J., *From Frege to Gödel*, c. d., s. 184.

setkáváme např. v algebře. Jazyk, který Hilbert k tomuto účelu sestrojil, má povahu „čárkového kódu“.[73] Jeho použití (podobně jako užití geometrického jazyka) nikdy nevyústí ve slepou manipulaci se symboly a díky tomu se nedostaneme (opět podobně jako v geometrii) do rozporů. Rozdíl mezi operacemi s čárkovým kódem a geometrií spočívá jen v tom, že jednotlivé operace neprovádíme pravítkem a kružítkem, ale názorným přeskupováním čárek.[74]

Je samozřejmé, že oblast, v níž lze operovat s čárkovými číslovkami, je velmi chudá a zdaleka nemůže vyčerpat pole celé matematiky. Pomocí logických pravidel lze však z názorné a konečné oblasti vystoupit do „vyšších pater matematické budovy“. Výroky, k nimž takto dospíváme, nemají „samy o sobě žádný význam, ale … jsou určeny našimi pravidly a musí být považovány za ideální předměty naší teorie…“[75] Matematika je tak „zásobárnou dvojího druhu formulí, za prvé těch, které odpovídají smysluplnému vyjádření finitistických výroků, a za druhé ostatních formulí, které nesignifikují nic a které jsou ideálními strukturami naší teorie“.[76]

Jak známo, kamenem úrazu tohoto „descartovsky“ laděného projektu hledání pevných a jistých základů vědění byly dva Gödelovy teorémy z r. 1931. Ty však podle našeho soudu nezpochybnily samotný formalismus, ale spíše ono přesvědčení, že matematiku je možno založit na jakýchsi pevných a nezpochybnitelných základech. Není proto divu, že hlavní myšlenka formalistického přístupu, podle níž se jazyk v matematice nepoužívá obsahově, ale instrumentálně, díky Gödelovi spíše získala, než ztratila na významu. Je-li totiž pochybné hledat jakési pevné základy, pak tím zanikne i onen „ostrov pravdy“, na jehož území je dovoleno mluvit obsahově, a celou matematiku pronikne skrz naskrz jediný – instrumentalistický – způsob mluvy.

Ovšem ani u rozšíření instrumentalismu na celou matematiku cesta nemusí skončit. Můžeme si totiž zcela přirozeně položit otázku, zda má v celku našeho poznání vůbec místo dříve zdůrazňované obsahové (teoretické či komunikativní) užití jazyka. Nemá tedy skutečná věda právě opačnou povahu, než se domnívali Aristotelés a Platón? Není tedy spíše než kontemplací věčně existujících jsoucen jen nástrojem, jehož pomocí dosahujeme svých cílů? Není proto třeba se definitivně rozloučit s lokálním formalismem a nahradit jej formalismem globálním?

73 Např. rovnicí 2 + 3 = 5 myslíme, že číslovka „||“, po níž následuje číslovka „|||“, je číslovka „|||||“. Podrobnější výklad srov. Bostock, D., *Philosophy of Mathematic*. Oxford, Wiley-Blackwell 2009, s. 174-175.

74 Při úvahách o povaze Hilbertova pojetí čárkového kódu jsme vycházeli z výše uvedeného Playfairova srovnání jazyka geometrie a algebry (§ 3).

75 Hilbert, D., *Die Grundlagen der Mathematik.* Citováno podle Van Heijenoort, J., *From Frege to Gödel*, c. d., s. 469.

76 Hilbert, D., Über das Unendliche, c. d., s. 95.

S tím, že staré pojetí vědy není správné a že by se jeho dosavadní model měl konečně postavit „z hlavy na nohy“, přišli ve druhé polovině 20. století příznivci pragmatické filosofie. Ti totiž jako první důsledně odmítli názor, že jazyk v rámci vědy užíváme dvojím způsobem. Nekonfrontovali se však přitom ani s Peacockem, ani s Hilbertem, ale se svými bezprostředními předchůdci, jimiž byli logičtí pozitivisté. Pragmatisté odmítli jejich rozlišení mezi syntetickými a analytickými soudy a přiklonili se ke koncepci, podle níž jazyk používáme výhradně instrumentálně. S tím souvisí, že nové předměty nezavádíme „křtem“ nějaké předem existující věci, ale podobně jako imaginární čísla, jež zavádíme vedeni potřebou vyřešit určité typy rovnic (srov. § 3). V případě zavádění nematematických předmětů jsou naše potřeby odlišné, nicméně nakonec vždy sledujeme (v matematice i v jiných disciplínách) jediný cíl, jímž je dokonalejší orientace v okolním světě. Podle W. V. O. Quina je totiž celé pojmové schéma vědy (tj. i matematiky) třeba chápat „jako nástroj sloužící k předpovědi budoucí zkušenosti na základě zkušenosti předchozí“.[77]

Pragmatikům bychom snad mohli namítnout (podobně jako výše Peacockovi), že instrumentální přístup k poznání by legitimizoval nejenom pojmové schéma vědy, ale i zcela „iracionální“ přístupy. Vždyť svoboda a kreativita lidského ducha, která vytváří nové předměty, stojí i za vznikem dejme tomu mýtů o antických bozích. I do tohoto pojmového schématu byly předměty zavedeny svobodně, a lze je proto podobně jako předměty vědy považovat za jakési kulturní postuláty. Pragmatici by souhlasili, nicméně by poukázali na to, že „mýtus“ o fyzikálních a matematických předmětech „dokázal úspěšněji než ostatní mýty vštípit plynutí naší zkušenosti zvládnutelnou strukturu“.[78] „Mýtus o fyzikálních i matematických objektech“ je tedy dokonalejší nástroj k našemu vypořádání se s empirickou realitou, a proto bychom mu měli dát přednost před mýtem o antických bozích.

Quine a pragmatisté tedy jasně odmítají staré pojetí vědění (jehož předpokladem je referenční užití jazyka) a přiklánějí se k pojetí instrumentálnímu (které referenční užití jazyka odmítá). Tento obrat lze jistě vysvětlit řadou historických okolností a myšlenkových podnětů. V našem příspěvku jsme chtěli vyzdvihnout, že důležitou roli v uvažovaném procesu sehrál formalismus. Představitelé tohoto proudu totiž předkládají pojetí matematiky, které tradičnímu přístupu k vědění přímočaře odporuje, a stojí tak na počát-

77 Quine, W. V. O., Two Dogmas of Empiricism. *The Philosophical Review*, 60, 1951, 1, s. 20-43. Citováno in: Dvě dogmata empirismu. Peregrin, J. – Sousedík, S. (eds.), *Co je analytický výrok?* Praha, OIKOYMENH 1995, s. 97.

78 Tamtéž, s. 98.

ku procesu, jehož vyvrcholením je právě Quinův globální formalismus, či jak se spíše říká, *holismus*.[79]

SUMMARY

The emergence of formalism and a new conception of science

According to formalism a mathematician is not concerned with mysterious metaphysical entities but with mathematical symbols themselves. Mathematical entities, on this view, become mere sensible signs. However, the price that has to be paid for this move looks to be too high. Mathematics, which is nowadays considered to be the queen of the sciences, thus turns out to be a content-less game. That is why it seems too absurd to regard numbers and all mathematical entities as mere symbols. The aim of our paper is to show the reasons that have led some philosophers and mathematicians to accept the view that mathematical terms in a proper sense do not refer to anything and mathematical propositions do not have any real content. At the same time we want to explain how formalism helped to overcome the traditional concept of science.

Keywords: formalism, algebra, pragmatism, conceptions of science

79 Tuto interpretaci podporuje i skutečnost, že mladý Quine s myšlenkami formalismu minimálně sympatizoval. Říká: „Zisky, které má přírodní věda z užití matematických formulí, nevedou k závěru, že tyto formule jsou pravdivé. Nikdo … není ochoten považovat kuličky počítadla za pravdivé; a naše pozice spočívá v tom, že formule platónské matematiky mají stejnou povahu jako kuličky počítadla. Jsou výpočetními pomůckami, s nimiž není spojena otázka ohledně jejich pravdivosti.“ Quine, W. V. O., Goodman, N., Steps towards a constructive nominalism. *The Journal of Symbolic Logic*, 12, 1947, 4, s. 105-122.