# Pojem struktury z hlediska formální logiky

**Pavel Materna**

## Úvodní poznámka Petra Dvořáka

*Článek je věnován klíčovému pojmu poválečné filosofie, pojmu struktury. V matematice učinil Bourbaki tento pojem v přímé návaznosti na lingvistické užití (Roman Jakobson) a antropologické užití (Claude Lévi-Strauss) základem nového promýšlení této disciplíny. Ale zatímco v matematice se za strukturu běžně považuje množina, která sama obsahuje množinu určitých prvků (nositelku) a nějaké zobrazení či relaci na jejích prvcích, Materna ve svém článku nabízí uchopení struktury z hlediska formální logiky. Tuto množinovou strukturu nazývá „systém“ a pojem totožnosti struktury definuje rozsahově jako množinu ekvivalenčních tříd izomorfních systémů. Tímto způsobem lze přesně stanovit, kdy mají nějaké dva systémy tutéž strukturu. Klíčem je známý matematicko-logický pojem izomorfismu. Logika tak nabízí precizaci pojmu, s nímž jinak filosofie a jiné disciplíny pracují jen na intuitivní úrovni. Podobně Materna postupuje ve vyjasňování pojmů dodnes, což dokládá například jeden z jeho posledních článků, nazvaný „Funkce – Procedura – Konstrukce“* (Organon F *19, 2012, č. 3, s. 283-305). Od osmdesátých let se základem této explikace pojmů a významových konstrukcí přirozeného jazyka stala transparentní intenzionální logika Pavla Tichého, k jejímuž rozvoji profesor Materna sám nemálo přispěl.*

*1.* V referátech o struktuře v jednotlivých vědách (biologii, fyzice apod.) se obvykle vychází z intuitivního pojmu struktury charakterizovaného nejvýše tak, jako je to ve Sviděrského monografii *O dialektike elementov i struktury* (Charakter, způsob, zákon tohoto spojení budeme nazývat strukturou, s. 11). Dále se pak uvažuje o struktuře jako o něčem, co již je pojmově zavedeno, a zkoumá se problém vztahu struktury a prvků, struktury a funkce atd.

V logice, zejména ve formální logice, jde však především o samo *vymezení* kategorie struktury, pokud je charakterizovatelná na úrovni logické teorie relací.

Půjde zde tedy v prvé řadě nikoli například o problém, jakou strukturu mají logické objekty (třebas narozdíl od objektů biologie apod.), nýbrž o to, jak nám výzkum těchto objektů umožňuje vymezit pojem struktury.

*2.* V ryze logických monografiích se pojmu „struktura“ používá zřídkakdy. Z intuitivního pojmu struktury však vyplývá, že nejadekvátnějším přístupem k jeho explikaci je patrně zkoumání pojmu *izomorfismu,* který je v logice běžný.

Uvedeme nyní poněkud zjednodušeně vymezení nejprostšího případu izomorfismu: izomorfismu dvojčlenných relací.

Říkáme, že relace $R_1$ je izomorfní s relací $R_2$ vzhledem k množině M právě tehdy, když existuje jednoznačná funkce h taková, že platí

(1) $xR_1y \equiv h(x)R_2h(y), \qquad x \in M, y \in M.$

*Příklad*: Vzhledem k množině reálných čísel je izomorfní relace > („být větší než“) s relací < („být menší než“), neboť existuje jednoznačná funkce f, která každému reálnému číslu a přiřadí takové číslo b, že platí b = −a, tj. f (a) = −a, a lze snadno odvodit

$x > y \equiv f(x) < f(y),$

tj. $x > y \equiv -x < -y$.

Pojem izomorfismu lze ovšem rozšířit na n-členné relace a pak hlavně na systémy, jež obsahují třídy, funkce a relace, resp. operace.

Např. izomorfismus systémů obsahujících funkci G (x, y), resp. G′ (x, y) vzhledem k této funkci lze (zjednodušeně) vymezit takto: Tyto systémy ($A_1$, $A_2$) jsou (vzhledem k funkcím G (x, y) a G′ (x, y)) izomorfní právě tehdy, když existuje jednoznačná funkce h definovaná v $A_1$ a s hodnotami v $A_2$ tak, že platí

(2) $h(G\,(x, y)) = G'\,(h(x), h(y)).$

*Příklad:* Nechť $A_1$ je systém přirozených čísel (nulou počínaje) a $A_2$ systém nezáporných celých čísel, G nechť je operace sčítání v $A_1$ psaná formou funkce (tj. G(a, b) = a + b) a G′ operace sčítání v $A_2$ psaná stejným způsobem (tj. G′ (a, b) = a ⊕ b). Funkce f‘ nechť přiřazuje číslu 0 z $A_1$ číslo 0 z $A_2$ a každému přirozenému číslu a 0 z $A_1$ číslo +a z $A_2$. Pak jistě platí = ( a + b ) = + a ⊕ + b ve shodě s (2).

Přibližně, neformálně řečeno:

Dva systémy předmětů jsou izomorfní, jestliže existuje taková funkce h, která jednoznačně přiřazuje předměty jednoho systému předmětům druhého systému tak, že vztahům mezi předměty prvého systému odpovídají při tomto přiřazení vztahy mezi předměty druhého systému.

*3.* Rozbor relace izomorfismu je pro naše téma důležitý, protože nám umožní formulovat tzv. definici pomocí abstrakce,[1] která vymezí v rámci svých možností pojem struktury. Abychom mohli vybudovat tuto definici, potřebujeme zjistit jisté formální vlastnosti vztahu izomorfismu.

a) Především je zřejmé, že každý systém je izomorfní sám se sebou. Význam příslušné funkce h v tomto případě má identita (Id), přiřazující každému předmětu ze svého definičního oboru obraz podle formule

Id (a) = a.

Protože dále každá relace, operace a funkce v každém systému je totožná sama se sebou, nahlédneme snadno, že formule (1), (2) a analogické formule platí v případě, že uvažujeme vztah systému k sobě samému.

Tento výsledek lze napsat takto:

(3) (S) (S Ism S) čteme: Pro každý systém S platí, že S je izomorfní s S).

b) Je-li dále některý systém $S_1$ izomorfní se systémem $S_2$, pak také $S_2$ je izomorfní s $S_1$ Je-li totiž $S_1$ izomorfní s $S_2$ na základě existence funkce h, pak příslušná funkce g, na jejímž základě je $S_2$ izomorfní s $S_1$, je funkce inverzní k h:

$g = h^{-1}$.

Tento výsledek lze napsat takto:

(4) $(S_1)\ (S_2)\ (S_1 \text{ Ism } S_2 \supset S_2 \text{ Ism } S_1)$

c) Je-li systém $S_1$ izomorfní se systémem $S_2$ a systém $S_2$ je izomorfní se systémem $S_3$, pak také systém $S_1$ je izomorfní se systémem $S_3$. Jsou-li $h_1$ resp. $h_2$ funkce, na základě jejichž existence je $S_1$ izomorfní s $S_2$, resp. $S_2$ s $S_3$, pak funkce $h_3$, na základě jejíž existence je $S_1$ izomorfní s $S_3$ je superpozicí $h_1$ a $h_2$ podle formule

$h_3 = h_2\ (h_1)$.

Tento výsledek napíšeme takto:

(5) $(S_1)\ (S_2)\ (S_3)\ (S_1 \text{ Ism } S_2\ \&\ S_2 \text{ Ism } S_3 \supset S_1 \text{ Ism } S_3)$.

Formule (3) znamená, že vztah izomorfismu je *reflexivní.*

Formule (4) znamená, že vztah izomorfismu je *symetrický.*

Formule (5) znamená, že vztah izomorfismu je *tranzitivní.*

Vztahy, které jsou reflexivní, symetrické a tranzitivní, nazýváme *ekvivalencemi* či *vztahy typu ekvivalence.*

Ekvivalence nám umožňují vymezit určité pojmy tzv. definicí pomocí abstrakce: lze dokázat, že množinu objektů nám ekvivalence rozdělí na vzájemně disjunktní třídy tak, že žádný prvek třídy A není v daném vztahu ekvivalence s prvkem třídy B, B ≠ A, ale všechny prvky každé takové třídy jsou spojeny tímto vztahem ekvivalence. Tím je vymezena jakási vlastnost, společná prvkům těchto jednotlivých tříd (tzv. abstrakčních tříd příslušné relace ekvivalence).

1 Viz např. O. Zich a kol., *Moderní logika.* Praha, Orbis 1958.

*Příklad*: Vztah rovnomocnosti je ekvivalence: každá množina je rovnomocná sama se sebou; je-li množina A rovnomocná s množinou B, je i množina B rovnomocná s množinou A; je-li A rovnomocná s B a B rovnomocná s C, je i A rovnomocná s C. Na základě vztahu rovnomocnosti lze definovat kardinální číslo (mohutnost) množiny A: je dáno množinou všech množin, které jsou rovnomocná s množinou A.

Analogický postup lze aplikovat na vztah izomorfismu:

Mějme určitou oblast, obsahující jisté množství systémů předmětů (tzn. takových souborů, u nichž uvažujeme některé jejich vzájemné relace). Relace Ism nám tuto oblast rozdělí na vzájemně disjunktní třídy systémů. Určitý systém bude patřit do určité třídy a nebude se od ostatních systémů patřících do téže třídy lišit v tom smyslu, že s nimi bude izomorfní. Tyto třídy můžeme nazvat *abstrakčními třídami relace izomorfismu.*

V každé takové abstrakční třídě můžeme zvolit libovolného reprezentanta této třídy, např. systém A. Zdá se, že pojem příslušné abstrakční třídy, tj. *třídy systémů izomorfních se systémem A,* odpovídá celkem adekvátně intuitivnímu pojmu *struktury systému A.*

Řečeno méně přesně: Struktura je společná vlastnost izomorfních systémů. Systémy izomorfní mají stejnou strukturu, systémy heteromorfní mají různou strukturu.

*4.* Z logického hlediska lze tedy za strukturální vlastnosti pokládat ty, jež charakterizují relační síť daného systému.

Přitom je jasné, že tentýž soubor předmětů může jevit různou strukturu, podle toho, kterou stránku jeho systémovosti analyzujeme. Struktura je sice objektivní vlastností souborů předmětů, ale je právě tak *relativní* jako např. trajektorie. Absolutní vlastností se stává až v určité abstrakci daného souboru, jakou je určitý systém.

*5.* Zdá se, že pojetí struktury plynoucí z uvedeného logického rozboru může objasnit i některé obecné stránky vztahu struktury a funkce.

Lze podat rozbor příkladu dvou systémů, jež mají stejnou funkci při zdánlivě různé struktuře. Určitá analýza objeví však ve dvou z jistého hlediska strukturálně odlišných schématech stejnou strukturu. To lze ukázat např. na strukturální síti dvou automatů, jež mají stejné chování (funkci) a z nichž jeden realizuje toto chování na základě negace a disjunkce a druhý na základě negace a konjunkce.

Z vymezení izomorfismu však plyne (zhruba řečeno), že systém založený na negaci a konjunkci je ceteris paribus izomorfní se systémem založeným na negaci a disjunkci. Příslušné vztahy zapíšeme takto:

$\sim (\sim a) = \sim (\sim a)$

$\sim (\& (a, b)) = v (\sim a, \sim b).$

To ovšem neřeší celý problém, který lze pojmově vyjádřit i jako problém mnohosti substrátů téže funkce. Ukazuje se ovšem jedna stránka tohoto problému: že totiž zřejmě musí existovat takový aspekt, který v mnohosti substrátů téže funkce objeví strukturální jednotu. (Tento výsledek, jakož i celá logická teorie struktury, resp. izomorfismu, má značný význam pro teorii modelů.)

*6.* Je formálně logická analýza pojmu struktury dostatečná, vyčerpávající? Jinými slovy: Je pojem struktury formálně logický pojem, jehož sice filosofie i ostatní vědy používají, ale jehož obsah relevantní pro definici není rozšiřován? Nebo existuje taková explikace intuitivního pojmu struktury, která je určitými rysy nedostupná formální logice? Je-li takováto explikace možná, jakým směrem půjde?

K tomu je třeba poznamenat, že zde uvedené vysvětlení pojmu struktury je formálně logické proto, že vystačilo s pojmem relace charakterizované tzv. formálními vlastnostmi. Vymezení, jež by šlo dále, mohlo by buď přibrat další formální vlastnosti (k tomu by mohl přijít podnět z neformálních oborů, ale vymezení samo by zůstalo v rámci formální logiky), nebo by včlenilo jako organickou součást pojmu struktury některé neformální vlastnosti. Ovšem: Ne každé tvrzení o struktuře (např., že je relativně stálá apod.) znamená obohacení tohoto pojmu ve smyslu jeho předefinování či dodefinování. Zjistíme-li např., že stálice mají určitou dotud neobjevenou vlastnost, nemusíme tím nutně měnit definici stálice.