

vojtěch kolman

logika gottloba frega

filosofia

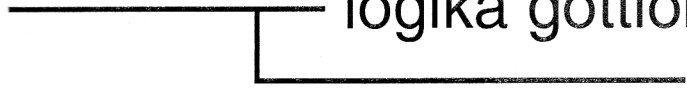
FILOSOFIA

nakladatelství

Filosofického ústavu

AV ČR

ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ



logika gottloba
frega

vojtěch kolman

— logika gottloba
frega

—
vojtěch kolman

Vědecký recenzent: Prof. RNDr. Jaroslav Peregrin, CSc.

© Vojtěch Kolman, 2002

Cover © Jarka Šuštková, 2002

© Filosofia, nakladatelství Filosofického ústavu AV ČR, 2002

ISBN 80-7007-164-8 (tištěná kniha)

ISBN 978-80-7007-714-6 (elektronická kniha)

DOI 10.47376/filosofia.2002.1

OBSAH

Úvodní poznámka.....	xi	
Poděkování.....	xiii	
Úvodní konvence.....	xiv	
1	HISTORICKO-KRITICKÝ ÚVOD.....	3
1.1	Aristotelův model logiky.....	4
1.1.1	Zdůvodnění logické platnosti.....	4
1.1.2	Diagramová sémantika.....	6
1.1.3	Ontologická neutralita.....	7
1.2	Logika transcendentální a logika výpočetní.....	9
1.2.1	Axiomaticko-deduktivní metoda.....	10
1.2.2	Mathesis universalis.....	12
1.2.3	Různé interpretace subjekt-predikátové větné formy.....	14
1.3	Algebra logiky.....	16
1.3.1	Algebra tříd.....	16
1.3.2	Algebra výroků.....	18
1.3.3	Algebra relací.....	20
1.4	Cíle a přednosti pojmového písma.....	22
1.4.1	Schröderův příznak.....	24
1.4.2	Subsumpce a podřazení.....	26
1.4.3	Vliv Peanův.....	28
1.5	Logické základy aritmetiky.....	31
1.5.1	Tři obecné poznámky k interpretaci Fregova díla.....	33
2	GOTTLÖB FREGE.....	35
2.1	Život.....	35
2.1.1	Studium.....	35
2.1.2	Privatdozent.....	36
2.1.3	Extraordinarius.....	37
2.1.4	Krize.....	38
2.1.5	Honorarordinarius.....	41
2.1.6	Paradox.....	42
2.1.7	Život po paradoxu.....	43
2.2	Osobnost.....	45
2.2.1	Alfréd.....	46
2.2.2	Posluchači.....	47
2.2.3	Cesta k moři.....	48

2.2.4	Wittgenstein.....	49
2.2.5	Pozůstalost.....	51
2.2.6	Politika.....	53
3	PRAVDA.....	57
3.1	Norma.....	58
3.1.1	Předmět logiky.....	60
3.1.2	Jednoduchost pravdy.....	61
3.1.3	Tvrzení.....	64
3.1.4	Myšlenka.....	66
3.1.5	Tvrdicí síla.....	68
3.1.6	Wittgensteinova námitka.....	69
3.2	Logika výroků.....	72
3.2.1	Zbytnost pravdy.....	74
3.2.2	Tvrzení, otázka, rozkaz.....	77
3.2.3	Popření.....	78
3.2.4	Komplexní myšlenky.....	80
3.2.5	Funkcionální model výrokové logiky.....	83
3.2.6	Externí a interní pojem pravdy.....	86
3.2.7	Kalkulizace logiky výroků.....	87
4	SUBSTITUCE.....	91
4.1	Funkce.....	91
4.1.1	Nesouditelný obsah.....	93
4.1.2	Holismus.....	95
4.1.3	Inference a substituce.....	98
4.1.4	Pojem a představa.....	100
4.1.5	Syntakticko-sémantické kategorie.....	103
4.1.6	Funkce a její hodnota.....	106
4.2	Kvantifikace.....	108
4.2.1	Ostrost pojmu.....	110
4.2.2	Univerzum diskurzu.....	111
4.2.3	Kvantifikátor.....	113
4.2.4	Obecný substituční princip.....	115
5	IDENTITA.....	119
5.1	Smysl a význam.....	120
5.1.1	Znovurozpoznání.....	122
5.1.2	Leibnizův princip.....	124

5.1.3	Způsob danosti.....	126
5.1.4	Nepřímý kontext.....	128
5.1.5	Pravdivostní potenciál.....	130
5.1.6	Kontextuální závislost.....	132
5.1.7	Rozpad významu.....	136
5.1.8	Atomismus.....	139
5.1.9	Kompozicionalita.....	142
5.2	Logika predikátů.....	146
5.2.1	Předmětný obor.....	146
5.2.2	Jednoduchý model aritmetiky.....	149
5.2.3	Vyloučený třetí.....	150
5.2.4	Nepřímá povaha významu.....	154
5.2.5	Substituční kvantifikace.....	155
5.2.6	Jazyk logiky predikátů.....	159
5.2.7	Interpretace logiky predikátů.....	161
5.2.8	Kalkulizace logiky predikátů.....	163
6	ČÍSLO.....	167
6.1	Deskripce.....	168
6.1.1	Poznání deskripcí.....	170
6.1.2	Existence.....	172
6.1.3	Presupozice.....	175
6.1.4	Kanonický designátor.....	178
6.1.5	Deskriptor.....	181
6.1.6	Mýtus subjektivního.....	183
6.1.7	Sémantický platonismus.....	186
6.2	Abstrakce.....	189
6.2.1	Psychologická abstrakce.....	190
6.2.2	Agregát.....	193
6.2.3	Adjektivní strategie.....	196
6.2.4	Substantivní strategie.....	198
6.2.5	Logická abstrakce.....	200
6.2.6	Průběh hodnot.....	203
6.2.7	Funkce jako abstraktum.....	206
6.2.8	Smysl jako abstraktum.....	208
7	FORMA.....	213
7.1	<i>Grundgesetze</i>	213
7.1.1	Základní pravdivostní funkce.....	213

7.1.2	Abstraktor a § 10	216
7.1.3	Axiomatický systém <i>Grundgesetze</i>	219
7.1.4	Odvozené funkce	222
7.1.5	<i>Anzahl</i>	225
7.1.6	<i>Ancestral</i>	228
7.1.7	Předmětný obor <i>Grundgesetze</i>	231
7.1.8	Russellova antinomie	233
7.1.9	<i>Frege's Way Out</i>	235
7.2	Struktura	238
7.2.1	Korespondence s Hilbertem	238
7.2.2	Formální a materiální teorie	242
7.2.3	Konzistence jako kritérium smyslu	244
7.2.4	Logika s abstrakcí	248
7.2.5	Číslo po paradoxu	252
7.2.6	Peanova aritmetika.....	255
7.2.7	Neúplnost a nekategoričnost.....	258
8	DODATKY	263
8.1	Chronologie Fregova života a díla.....	263
8.2	Slovník	267
9	LITERATURA	279
9.1	Fregovy spisy.....	279
9.1.1	Publikované za Fregova života	279
9.1.2	Publikované posmrtně.....	281
9.1.3	Jednotlivé spisy z <i>Nachgelassene Schriften</i>	281
9.1.4	Sborníky, překlady a jiné	282
9.2	Ostatní	282
10	REJSTŘÍK	292
10.1	Ortotermíny.....	292
10.2	Symboly a zkratky.....	292

Úvodní poznámka

Název této knihy se nezdá být na první pohled k potenciálnímu čtenáři příliš laskavý. Gottlob Frege logiku jako takovou sice nezaložil, to je jak známo zásluha Aristotelova, byl to však Fregův génius, pod jehož rukama zaznamenal význam slov jako “logika” či “logická zkoumání” tak významný posun, že mu titul druhého Aristotela náleží nejen jakožto tvůrci nového, neskonale flexibilnějšího logického systému, ale především jakožto původci a zakladateli nové metody tázání, která v prostoru problémů daných tradicí západní filosofie a vědy začíná tím, co každému vlastnímu tázání s železnou nutností předchází, totiž jazykem. Název ›Logika Gottloba Frega‹ může proto svým obsahem připomínat cosi na způsob ›Psychoanalýzy Sigmunda Freuda‹, tedy jistý druh pleonazmu, který ve svém důsledku ústí v nespecifickém ›Logika‹. Praxe běžného porozumění však není tak krutá a zvolený název záměrům, s nimiž byla kniha psána, slouží rozumnou měrou, neboť to nebyl jen jeden záměr, jemuž se její autor snažil dostat.

V první řadě je třeba jmenovat vlastní, *epistemologické* téma *konstituce* – či obecně – *povahy abstraktních předmětů*. Matematictí logikové často zapomínají, že jejich disciplína a sama obligátní teorie množin vznikla a byla formována právě jakožto pokus o odpověď na filosofickou otázku: ›co je číslo?‹. Následkem této ignorance je Frege považován pouze za jednoho z dělníků vědy, jehož dílo již bylo překonáno dalším vývojem, a je tedy zajímavé nanejvýš z hlediska historického. Přitom se jedná o stále živý a Fregem bezprecedentně rozpracovaný problém, jenž hrál a hraje v oblasti základů matematiky stále a přirozeně prim.

S otázkou abstraktních předmětů souvisí také téma *logické*, konkrétně zahrnující přesné *vymezení pojmu logické interpretace* a vůbec toho, co je logika zač. Praktikování logické sémantiky na půdě teorie množin je pouze projevem drastické nivelizace mnoha důležitých pojmových rozdílů, jak o nich bude ještě v knize řeč. Právě Fregovi je ovšem nutné připsat hlavní zásluhu o to, že jsou zkoumány logická, začínající jazykem a jeho užitým významem, ostře odlišena od ›samozřejmých‹ ontologických úvah o předmětech a jejich množinách. Těm bohužel propadají i mnozí filosofové, kteří se hlásí k Fregem iniciované analytické tradici, v níž jsme proto nuceni konvenčně rozlišovat křídlo metafyzické a transcendentální. Pokouším se ukázat, že Frege nenáleží – jak se typicky předpokládá – k prvnímu, ale k druhému z nich, jež chápu jako přirozený výraz myšlenky logické analýzy jazyka coby odpovědi na tradiční filosofické problémy. Filosofii zde přirozeně myslím filosofii teoretickou, tedy klasickou epistemologii, nikoli cosi na způsob praktické ›*Lebensweisheit*‹.

Třetím a posledním tématem je *sám Frege a jeho dílo jako celek*. Již samostatný výklad významných fregovských témat nese s sebou s ohledem na myšlenkově kompaktní koncepci Fregovy logiky potřebu jistého širšího záběru. Neexistence české, ba ani do češtiny přeložené fregovské monografie se však ukázala být jako zvláště rozhodující, a výsledná podoba knihy je tak určena výkladovou linií spojitě postupující od *Begriffsschrift* přes *Grundlagen* až po *Grundgesetze*. Hlavně z tohoto důvodu byl také rozšířen historicko-kritický úvod a zcela přidána kapitola s životopisnými a faktografickými údaji, jimž se lze ovšem v jakékoli obsírnější knize věnované interpretaci cizího díla sotva vyhnout. Tak jako tak se domnívám, že stejně jako autor k dílu patří i biografie k jeho výkladu.

Co se týče stylu a míry náročnosti předkládané knihy, je nutno říci, že se v žádném případě nejedná o elementární či vyčerpávající úvod do problematiky Freгова díla. Čtenáři, jenž po takové knize touží, je k dispozici anglická monografie Kennyho a německá von Kutscherova, avšak – aniž bych chtěl podceňovat význam jednoduchého či přehledného a úplného zachycení toho, co Frege kdy napsal a dokázal – nezdá se mi, že by témuž účelu, ať již je jakýkoli, nemohla sloužit vlastní četba těch nemnoha spisů, jichž je Frege autorem, spisů příkladně srozumitelných a jasných, tedy nesporně v míře, kterou jakýkoli zjednodušující výklad jen stěží překoná.

Já sám jsem neusiloval ani o jednoduchost, ani o úplnost. Užívám-li často plných citací, má tím být v první řadě demonstrována interpretační věrnost. Ta však nesmí být zaměňována s otrockou interpretací textu, uspokojující se vršením úryvků z Fregových otištěných i neotištěných spisů, bez sebemenšího odstupu, který by dovolil tažení jasné výkladové linie Fregových názorů, přirozeně s vědomím toho, že to může jít proti ›znění‹ mnoha citovatelných míst. Tomu se lze ostatně jen stěží vyhnout, tedy alespoň v případě, zajímá-li nás samo sdělené, nesporně preformované našimi specifickými stanovisky a zájmy, nikoli vyčerpávající historicko-filologický rozbor toho, co autor tam či onde doslova řekl, či co říci zapomněl. Hlavní motivy, jimiž je náš výklad určen, byly již zmíněny výše.

Potenciální čtenář by se však neměl nechat odradit. Právě jistá komplikovanost knihy a perspektivní potřeba – nikoli však okamžitá nutnost – doplňující četby z ní totiž činí – přiznáme-li jí alespoň nějakou interpretační hodnotu – určitou intelektuální výzvu.¹⁾

¹⁾ Uvažuji-li nejjednodušší případ čtenáře, majícího za sebou pouze elementární kurz klasické logiky, představuji si, že při čtení kapitoly /1/, tj. historicko-kritického úvodu

Z četných odkazů lze záhy po započetí četby seznat, jak velkou měrou jsem byl ovlivněn pracemi německého matematika a filosofa Pirmina Stekeler-Weithofera. Opírá-li se velká část této knihy, zvláště ve vztahu k předkládanému pojetí logické konstituce a interpretace, přímo o Stekeler-Weithoferovy *Grundprobleme der Logik*, snad může být v její prospěch uvedeno, že se těmto tématům alespoň s ohledem na jejich výkladové ukotvení v systému Fregovy logiky věnuje v podstatně systematictější a uzavřenější podobě. Další, i když mnohem obecnější vliv přikládám konstruktivistické škole Paula Lorenzena, jehož otevřená mysl představuje po dlouhé době filosofického iracionalismu a vědeckého elitářství konečně projev zdravého intelektuálního optimismu, jenž po vzoru Kantovy kritické filosofie odmítá jakékoli sakrosanktum ezoterických nauk a všeobjímajících teorií a věří, že každý teoretický problém lze řešit na bázi dané společnou praktickou zkušeností.

Poděkování

Mému učiteli, prof. RNDr. Jaroslavu Peregrinovi, CSc., vděčí tato kniha jak za svůj samotný vznik, tak za výslednou podobu v tolika ohledech, že od jejich výčtu raději upustím, abych snad některý neopomenul. Martin Špalek a Tomáš Fürstenzeller byli tak laskavi a průběžně korigovali jednotlivé části rukopisu. Zvláštní dík patří Martě Vlasákové, která pročetla výsledný rukopis celý a svojí pečlivostí přispěla k nápravě velkého množství věcných a stylistických nedostatků i vyložených chyb.

(jenž obecně nedoporučuji vynechávat, neboť obsahuje rozlišení, jež budou využita později), nahlédne do knihy, v níž je sylogistika vyložena z pozic moderní logiky a algebry tříd. Tomu poslouží nejlépe Quinovy *Methods of Logic* či Lorenzenova *Formale Logik*, které mohou zůstat po ruce i pro případ další četby. Paralelně s podkapitolou /3.1/ by mohly být čteny všechny tři studie Fregových *Logische Untersuchungen* a oba články titulu *Logik* z pozůstalosti, k podkapitole /3.2/ první část *Begriffsschrift* a články psané na její obhajobu a ke kapitole /4/ pak *Begriffsschrift* celá a navíc články *Funktion und Begriff* a *Über Begriff und Gegenstand*. Kapitoly /5/ se týká hlavně článek *Über Sinn und Bedeutung*, kapitoly /6/ *Die Grundlagen der Arithmetik*, kapitoly /7/ *Grundgesetze der Arithmetik* a vědecká korespondence s Russellem a Hilbertem. Ve všech případech se jedná o texty dostupné v anglických překladech. K orientačnímu, ale i systematickému studiu užitých pojmů z ›vyšších pater‹ moderní formální logiky a metamatematiky se velmi dobře hodí Švejdarova monografie *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*, z anglických knih potom Boolosova a Jeffreyho *Computability and Logic*, a to zejména pro důraz, který kladou na pojmy z teorie rekurze.

Úvodní konvence

Jemnější významové strukturaci textu by měly sloužit jisté typografické konvence, týkající se především uvozovek, závorek, kurzívy a proloženého textu. K zachycení standardního rozdílu *use/mention*, tj. *užití* slova k vyjádření jeho významu a *zmínění* tohoto slova samotného, používám obvyklých, tzv. meta-jazykových uvozovek:

napsal číslovku “2” na tabuli 2 tahy,
spolu s jejich jednoduchou variantou, jíž jsou obvykle ošetřovány vnořené případy:

“napsal číslovku ‘2’ na tabuli 2 tahy” je věta oznamovací.

Oba tyto typy uvozovek však nejsou využívány systematicky, ale vždy v závislosti na potřebách daného kontextu:

jméno “N” označuje předmět N,

jméno N označuje předmět g.

Otištění výrazu na vlastním řádku je také jednou z možností, jak jej zmínit bez uvedení závorek. Sofistikovanější aparát, jako jsou třeba Quinovy kvaziuvozovky, vynucené potřebou schematických písmen, které *nezmiňují* konkrétní výraz, ale *naznačují* libovolný výraz daného typu, jako např.:

zřetězením věty S, symbolu “ \leftrightarrow ” a věty T získáme větu $\lceil S \leftrightarrow T \rceil$, nezavádím a zpravidla předpokládám, že se čtenář případ od případu zorientuje sám. Zavádím ovšem speciální druh uvozovek citačních:

»*Již Kant učil,*« čteme v Hilbertově přednášce *Über das Unendliche*,
»*že matematika disponuje obsahem zajištěným zcela nezávisle na vší logice [...].*«

Citovaný text, jak vidno, přepisuji kurzívou, není-li ovšem kurzíva již v originále – pak používám naopak normálního písma. Kurzívou jsou také psána jména knih, cizí slova (zpravidla jakožto překladové varianty uváděných termínů), některá schematická a proměnná písmena a zejména fráze, na něž je vhodné z důvodů adekvátní artikulace obsahu textu soustředit pozornost (*sic!*):

nekonečné soudy jsou *záporné*: duše je *nesmrtelná*, číslo je věčné (*nečasové*) atd.

Obvyklé užití uvozovek na fráze, od nichž se chce autor jistým způsobem distancovat, např. v promluvě ironické (*sneer quotations*), zobecňují aplikací jednoduché varianty špičatých uvozovek pro libovolný případ nestandardního užití výrazu, jehož význam si čtenář musí určitým způsobem »rekonstruovat«, dotvořit z daného kontextu a vlastní zkušenosti:

jsou uvažována «čísla» nového typu, odporující běžným algebraickým zákonům.

Oproti tomu důležité výrazy, jejichž význam je v knize přímo zaváděn či rekonstruován – tj. jsou vlastním tématem knihy –, a čtenář se tedy jejich užití musí přizpůsobit, naznačují proloženým písmem. Tyto výrazy jsou slovy tzv. *o r t o j a z y k a* (*Orthosprache*) knihy. Jazyk, který je k jejich vysvětlení použit, tzv. *p a r a j a z y k* (*Parasprache*), musí autor naopak se čtenářem sdílet, i když je v kýženém porozumění odkázán v důsledku vždy na jistou míru vstřícnosti, odhadu a úsilí, k níž je v případě výrazů nestandardního výskytu explicitně vyzván právě vypsáním zvláštních uvozovek.²⁾

Při psaní schémat a formulí používám běžnou závorkovou konvenci a pouze doplňkově konvenci tečkovou (*dots*), a to v natolik fragmentární a názorné podobě, že ji není třeba nijak blíže explikovat předem. Hranaté závorky vždy naznačují autorský zásah do textu – jakousi obdobu znaků oddělujících programátorovy poznámky od těla programu. Obvykle jsou užívány uvnitř citátů a dále v odkazech na literaturu.

V seznamu literatury je na konci knihy přidělen každé knize kód, sestávající buďto z jedinečné kombinace písmen, jež má tuto knihu nějakým způsobem připomínat, či z roku vydání v invertovaných špičatých závorkách, což je případ knih s menší frekvencí odkazů. Odkaz na knihu, případně její část, pak vždy sestává z kódu knihy, následovaném případně hlavičkou anotované pasáže (stránky, kapitoly, dílu, ...), kterou obvykle tvoří číslo stránky. Není-li to zřejmé z uvozujícího textu, je odkaz doplněn ještě o jméno autora, předepsané kurzívou před hranatou závorkou. Toto jsou příklady možných odkazů:

Brandom [ME] [PU, § 53] *Lorenzen* [⟨1955⟩, 132].

Pouze k odkazům na pasáže této knihy slouží ležaté závorky, jejichž prostřednictvím jsou označovány kapitoly /1/, /2/, ..., podkapitoly /2.3/, /2.4/, ... a oddíly /2.2.1/, /2.2.2/, ...

Citáty, jejichž originál překrývá více odstavců, obvykle přepisují souvisle – pak ale původní členění naznačují svislou čarou “|” coby znakem původního odstavce. V citovaném textu je rovněž zachováváno původní formátování odkazů na jiné texty (citát v citátu), knihy atd.; uvozovky, proložené písmo či kurzíva tedy nejsou upravovány či zaváděny podle našich konvencí – přirozeně až na kurzívní inverzi celého citátu.

²⁾ Úvodní věty Wittgensteinova *Tractatu* jsou zjevně psány v tomto vysvětlujícím (a uvozovky zvláště vyžadujícím) modu, v žádném případě se tedy nejedná o definice pojmů jako ›fakt‹, ›skutečnost‹, ›stav věcí‹ atd. Takto jim ale nejspíš rozuměl Frege, a jak vyplývá z jeho a Wittgensteinovy korespondence, nebyl se proto při četbě *Tractatu* schopen dostat přes první stránku.

V textu jsou také používány následující zkrácené tituly knih:

<i>Grundgesetze</i>	Frege: <i>Grundgesetze der Arithmetik</i>
<i>Grundlagen</i>	Frege: <i>Die Grundlagen der Arithmetik</i>
<i>Grundprobleme</i>	Stekeler-Weithofer: <i>Grundprobleme der Logik</i>
<i>Laws</i>	Boole: <i>An Investigation of the Laws of Thought</i>
<i>Principia</i>	Russell, Whitehead: <i>Principia Mathematica</i>
<i>Principles</i>	Russell: <i>The Principles of Mathematics</i>
<i>Tractatus</i>	Wittgenstein: <i>Tractatus logico-philosophicus</i>
<i>Vorlesungen</i>	Schröder: <i>Vorlesungen über die Algebra der Logik.</i>

Filosofie je svojí povahou exkluzivní: zakládá přece myšlení doby: proto vládnoucí systém stejně jako synové sultánů nenesse vedle sebe žádný jiný.

Arthur Schopenhauer

1 HISTORICKO-KRITICKÝ ÚVOD

V historických nářtech vývoje klasické logiky bývá při zmínce o jejím novověkém úpadku zvykem citovat či anotovat³⁾ následující pasáž z Kantovy předmluvy k druhému vydání jeho *Kritiky čistého rozumu*:

»*Skutečnost, že se logika touto spolehlivou cestou [vědy] ubírá již od těch nejstarších dob, lze vyčíst z toho, že od časů Aristotelových nemusela učinit ani jeden krok zpět, nechceme-li za zlepšení považovat eliminaci některých zbytečných subtilit či jasnější výklad, což ovšem náleží spíše eleganci nežli jistotě vědy. Pozoruhodné je na ní také to, že nebyla dodnes schopna učinit ani jeden krok vpřed, a podle všeho se tedy zdá být disciplínou uzavřenou a úplnou.*«
[KrV, BVII]

Kantovi bývá obvykle vytýkáno, že Aristotelovu logiku přecenil, a vzhledem k vlivu, který na vzdělaný svět měl, tak nepřímou zabránil jejímu dalšímu rozvoji. K formální logice, ke které sylogistiku počítal a kterou vymezil jako »*kánon rozumu [des Verstandes und der Vernunft]*, ovšem pouze ve vztahu k tomu, co je na jeho užití formální, bez ohledu na obsah« [KrV, A54/B78],⁴⁾ Kant opravdu příliš nepřispěl a z uvažovaného textu vyplývá, že to ani nepovažoval za nutné; ve skutečnosti k ní přistupoval s jistým despektem⁵⁾ a zmíněnou spolehlivost si vysvětloval omezeností jejího předmětu. Dávat ale Kantovo (nebo třeba Hegelovo) jméno do přímých souvislostí s novověkou krizí logiky je přehnané a spíše to pravý stav věci zakrývá. Z historického hlediska nelze navíc Kantův výrok označit za nepravdivý.

Uhrančivost Aristotelova systému spočívala především v jeho přehlednosti a systematické jednoduchosti, které žádný z alternativních návrhů (logika stoiků) nedosáhl. Neobyčejná volnost, která byla logice ponechána ve středověku, kdy byla považována za základ všech věd, k jehož zvládnutí není zapotřebí žádných speciálních znalostí, a tedy nepřítomnost jakéhokoli regulativního principu vedla k nekontrolovatelnému nárůstu důvtipných, leč zcela nepotřebných diferencí a řešení samoučelných problémů. Aristotelés oproti tomu vybu-

³⁾ Viz např. *Hilbert-Ackermann* [1928], 45], *Kneale* [1962], 355].

⁴⁾ Výměr proveden pro »obecnou, čistou logiku« (*allgemeine, reine Logik*). Že se jedná o »formální logiku«, je jasné např. z [KrV, A131/B170].

⁵⁾ O čemž ostatně svědčí i dobře známý fakt, že žádná z »Logik« nesoucích Kantovo jméno nepochází z jeho pera a že Jäscheho signované kompendium (*Kant [Log]*) obsahuje chyby a nepřesnosti, které – jak lze ověřit srovnáním s jinými texty – od Kanta nepocházejí – viz *Stuhlmann* [1976], 1sq].

doval svoji sylogistiku jako pomocný nástroj (*organon*) pro svůj vědecký ideál – vědu po vzoru biologie, vědu deskriptivní a klasifikující.

1.1 ARISTOTELŮV MODEL LOGIKY

V dobře popsaném oboru (rodu) diskretních, jasně rozlišených předmětů (jako jsou např. zvířata) lze pomocí určitých kritérií vydělit třídu předmětů, které je splňují (alespoň v principu, tj. za předpokladu možné shody v problematických, mezních případech), tedy vytyčit hranici mezi těmito a zbylými předměty oboru. Tyto hranice (*horoi*), ve smyslu extenzionálně chápaných pojmů,⁶⁾ se mohou nacházet v různých mereologických vztazích, jak je lze známým způsobem znázornit pomocí *Eulerových diagramů*.⁷⁾ Na úrovni větné zachycuje Aristotelés možné vztahy dvou pojmů *A*, *B* čtyřmi standardizovanými větnými tvary:

- | | |
|--|---------------------------------------|
| (a) <i>A</i> obsahuje celé <i>B</i> | (o) <i>A</i> neobsahuje celé <i>B</i> |
| (e) <i>A</i> neobsahuje žádnou část <i>B</i> | (i) <i>A</i> obsahuje část <i>B</i> . |

Prostřednictvím schematických (zástupných) písmen, vepsaných na místa pojmových slov, tedy přechodem od věty k větnému schématu fixuje Aristotelés logickou formu konstruovaného systému: v úvahu přicházející (tzv. kategorické) věty přirozeného jazyka musí být nejprve *normovány* – světu a gramatice navzdory – podle výše uvedených vzorů. Alternativní normaci nabízí uživařejší a přirozenému jazyku bližší tvary:

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| (a) každé <i>B</i> je <i>A</i> | (o) některé <i>B</i> není <i>A</i> |
| (e) žádné <i>B</i> není <i>A</i> | (i) některé <i>B</i> je <i>A</i> . |

Dále jednotlivé aristoteléské formy zapisujeme obvyklými zkratkami, a to po řadě jako *AaB*, *AoB*, *AeB* a *AiB*.

1.1.1 Zdůvodnění logické platnosti

Vyskytuje se zde však následující a pro naši věc velmi instruktivní problém. Podle Aristotela [Int, 17b] jsou věty forem *AaB* a *AoB* (resp. *AeB* a *AiB*) tzv. *kontradiktorskými protějšky*, tj. nemohou být obě zároveň pravdivé či zároveň nepravdivé (rozumí se – a to i v dalším textu – pro tytéž

⁶⁾ Explikováno později – viz /1.1.3/.

⁷⁾ Autenticitu a mimořádný význam užití diagramů v systému Aristotelovy logiky hájí Stekeler-Weithofer v [GPL, § 1]. Kniha obsahuje podrobný a originální výklad Aristotelovy (logické) nauky, který se neomezuje, jak bývá často zvykem, pouze na její ›formální‹ fragment (tj. sylogistiku). Srv. také *Stekeler-Weithofer* [SK, § 4].

pojmy A , B), zatímco věty forem AaB a AeB jsou tzv. protějšky kontrárními, tj. nemohou být zároveň pravdivé, nepravdivé však ano. V souladu s pravdivostním principem, podle něhož je libovolná smysluplná věta (aristotelské formy) pravdivá nebo nepravdivá [Int, 17a],⁸⁾ může tedy Aristotelés z nepravdivosti věty určité formy usoudit na pravdivost jejího kontradiktorického protějšku, a *vice versa*. Tak to také dělá při obhajobě pravidel *konverze* [AnI, 25a], podle nichž lze mimo jiné přejít od pravdivosti věty formy AaB k pravdivosti věty formy BiA , a z té pak k AiB . Z pozic moderní logiky ovšem tento přechod platí v obecnosti jen za předpokladu *neprázdnoti* pojmu B , neboť věty forem AoB a AiB jsou interpretovány jako tvrzení *existenční*. Tedy – abychom uvedli konkrétní příklad – zatímco věta

každý jednorozec je rohatec

je shledána pravdivou, není tomu tak v případě věty

některý jednorozec je rohatec,

neboť z ní plyne existence (rohátého) jednorozce. Interpretujeme-li ovšem jako existenční také větu formy AaB , tj. je-li s jejím tvrzením spojeno také tvrzení neprázdnoti pojmu B , přestane být kontradiktorickým protějškem věty formy AoB , neboť v případě prázdnoti pojmu B není ani jedna z těchto vět pravdivá. Jelikož Aristotelovo pojetí kontradikce odpovídá běžné a dosti efektivní logické praxi, spokojují se moderní komentátoři této ›inkonzistence‹ Aristotelovy nauky zpravidla s tím, že příslušné pravidlo označí za *neplatné*.⁹⁾ Aristotelés – je nám vysvětleno – byl k jeho přijetí nejspíše sveden obvyklým

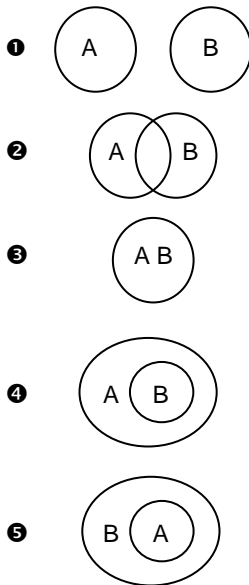
⁸⁾ Tento princip je nazýván *zákonem bivalence* a ve vztahu k Aristotelovi s ním souvisí řada otázek a problémů, které zde není nutné rozebírat. (Detaily viz např. *Lukasiewicz* [1930], § 6, dodatek.) Znaměřší *zákon vyloučeného třetího*, s nímž bývá princip bivalence často zaměňován, je formulován jakožto požadavek pravdivosti věty nebo její negace (popření) (A nebo $ne-A$) [Met, 1011b]; *zákon sporu* zakazuje současnou pravdivost obou. [Met, 1005b] V dalším textu, nebude-li řečeno jinak, budeme pod vyloučeným třetím rozumět jeho silnější verzi, podle níž je každá věta uvažované logické formy buď pravdivá, nebo nepravdivá (tj. nikdy ne obojí), nic třetího, a věta a její negace nemohou být pravdivé, resp. nepravdivé zároveň. Všimněme si, že termín ›negace‹, na rozdíl od sémanticky definovaného ›kontradiktorického protějšku‹, je vlastně pouhým výsledkem syntaktické konvence, dávající jméno dvojici vět forem A a $ne-A$. Definujeme-li nyní pro větu formy AaB negaci jako odpovídající větu formy AoB , resp. pro AeB jako AiB (a *vice versa*), je poslední z uvedených podmínek vyloučeného třetího ekvivalentní tvrzení, že se u dvojic této aristotelské formy jedná o kontradiktorické protějšky aristotelské logiky.

⁹⁾ Viz *Quine* [1962], § 13].

užitím slov jako “každý” a “některý” v přirozeném jazyce, kde je neprázdnost pojmů, na něž jsou aplikována, tiše předpokládána.¹⁰⁾

Pouhý odkaz k přirozenému jazyku je ale ve skutečnosti tou nejzrádnější cestou, jakou se při obhajobě (logické) platnosti pravidla či principu můžeme dát, a četná sofizmata a paradoxy jsou toho důkazem. Na jednu stranu je např. zcela plauzibilní tvrdit, že má-li každý vodník pentle ve vlasech, pak žádný vodník nemůže pentle ve vlasech nemít (a *vice versa*). Na druhou stranu lze trvat na tom, že vodník není žádným z živých tvorů majících pentle ve vlasech, ale ani z živých tvorů, kteří pentle ve vlasech nemají. První příklad se zdá být obhajobou kontrárnosti vět forem AaB a AeB ,¹¹⁾ druhý se jí zdá vyvracet. Je cenným zjištěním, že jakýkoli druh ›jazykové fenomenologie‹, tj. zkoumání, jak to s platností toho kterého principu či pravidla ve vztahu k přirozenému jazyku a jeho užití ›skutečně je‹, troskotá nutně na šíři a indefinitnosti jazykové praxe. Otázky po zdůvodnění logické platnosti pravidla či pravdivosti věty nelze jednoznačně zodpovědět, nevztáhneme-li je ke konkrétní nauce o (normovaném) užití výrazů jazyka, jinými slovy: nedoplníme-li v konstruované logice nauku

o možné (připustné) formě – formální syntax – naukou o možném významu – formální sémantikou. To, že si byl Aristotelés této skutečnosti (alespoň parciálně) vědom, ukazuje Stekeler-Weithofer přesvědčivě ve svých *Grundprobleme der Logik* (Základní problémy logiky).¹²⁾



1.1.2 Diagramová sémantika

Přiřaďme nejprve každé z aristotelských větných forem (dále jen forem) některé z diagramů na obrázku, a to formě AaB diagramy 3 a 4, formě AoB diagramy 1, 2 a 5, formě AeB diagram 1 a formě AiB diagramy 2, 3, 4 a 5. Namísto větným formám můžeme také tyto diagramy přiřadit příslušným aristotelským větným schémátům. Písmenům “A”, “B”, “C”, ... schémat pak odpovídají stejnými písmeny označené kruhy. O diagramu při-

¹⁰⁾ Viz Kneale [1962], 59].

¹¹⁾ Přirozeně jen tehdy, když podobně jako Aristotelés tiše předpokládáme, že za pojmy ›vodník‹ a ›mající pentle ve vlasech‹ lze vzít libovolné dva pojmy jiné.

¹²⁾ Viz pozn. 7.

řazeném tomu kterému schématu nyní řekneme, že toto schéma splňuje, či jinými slovy: že je jeho modelem. Přirozeným způsobem dále rozšíříme pojem splňování i pro libovolnou (konečnou) třídu schémat, a to tak, že vezmeme v úvahu komplexní diagramy, v nichž je nejméně tolik kruhů, kolik je ve schématech dané třídy úhrnem různých schematických písmen,¹³⁾ a v nichž každému písmeni odpovídá právě jeden kruh téhož jména. O těchto diagramech hovoříme také jako o (diagramových) interpretacích dané třídy schémat. Nyní můžeme říci, že interpretace dané třídy schémat tuto třídu splňuje nebo také, že je jejím (diagramovým) modelem, jestliže splňuje každé schéma v ní obsažené. Přejít od (konečné) třídy schémat S ke schématu T (značme $S \Rightarrow T$) pak nazveme logicky platným úsudkovým pravidlem, jestliže každá interpretace třídy S a schématu T , která je modelem třídy S , splňuje také schéma T . Necht' dále písmena "x", "y", "z" reprezentují některá z písmen "a", "e", "i", "o". Sylogismem pak nazveme přechod některého z následujících tvarů:


$$\{AxB, ByC\} \Rightarrow AzC, \quad \{BxA, ByC\} \Rightarrow AzC, \quad \{AxB, CyB\} \Rightarrow AzC.$$

Lze se snadno přesvědčit, že všechny sylogismy tradičně uznávané za správné jsou podle výše uvedené definice logicky platnými úsudkovými pravidly. Totéž platí i pro pravidla konverze jakožto následující přechody:

$$\{AaB\} \Rightarrow BiA, \quad \{AeB\} \Rightarrow BeA, \quad \{AiB\} \Rightarrow BiA.$$

1.1.3 Ontologická neutralita

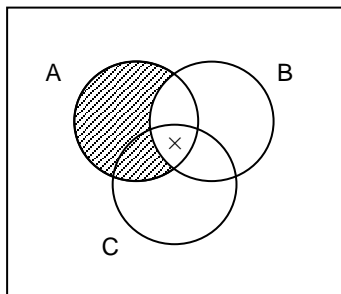
Řekneme-li nyní, že je konkrétní věta formy AxB pravdivá tehdy, jestliže se pojmy A , B k sobě ›ve skutečnosti‹ mají tak, jako to ukazují kruhy některého z diagramů přiřazených formě AxB , formujeme onu pojmovou ›skutečnost‹, k níž se věta vztahuje, naší diagramovou sémantikou; pořádáme ji tedy nepřímo, skrze geometrickou analogii. Ani ta však není založena na nějakém bezprostředním vhledu do jinovsěta geometrických forem, nýbrž spočívá ve specifickém způsobu práce s kreslenými figurami.¹⁴⁾ Víme např., že v našich diagramech nehraje roli šířka čáry kruhu, zato však její spojitost a uzavřenost atd. Pouze s implicitním odkazem na tuto interpretační dovednost jsme byli výše

¹³⁾ Předpokládáme, že diagram  reprezentuje dva překrývající se kruhy. Pro další četné detaily zde bohužel není místo, a v případě nejasností proto odkazují na Stekeler-Weithoferovu knihu, tj. [GPL].

¹⁴⁾ Srv. s Kant [KrV, A713sq/B741sq]: »Konkrétní naryšovaný obrazec je empirický, a přece slouží k vyjádření pojmu, aniž by mu ubral na obecnosti, protože u tohoto názoru přihlížíme vždy jen k aktu konstrukce pojmu [...].«

schopni zavést pojem možného (v úvahu přicházejícího) diagramu a s odkazem na něj coby možnou interpretaci definovat logickou platnost.

Předpokládáme-li nyní, že se ›svět pojmů‹ chová tak, jak to vyžaduje diagramová sémantika, pak jsou věty forem AaB a AoB , resp. AeB a AiB skutečně kontradiktorickými protějšky, neboť třídu schémat $\{AaB, AoB\}$, resp. $\{AeB, AiB\}$ nelze splnit žádným diagramem, nicméně každý diagram splňuje právě jeden z jejích prvků. Bylo by ale chybou interpretovat takovýto předpoklad deskriptivně realisticky – je totiž apriorní povahy, tj. *nemůže být možnou zkušeností vyvrácen*, neboť se sám díky svému normativnímu charakteru podílí na její konstituci. Jeho apriorní nutnost je však *nutností relativní*, a to v tom smyslu, že jej lze za jistých podmínek oprávněně nahradit předpokladem jiným, tj. týkajícím se jiného (v určitých ohledech třeba přijatelnějšího) formálněsémantického schématu.¹⁵⁾ Právě to také činí mnozí moderní logikové, když



označují některá Aristotelova úsudková pravidla za neplatná, resp. neplatná bez přidání existenční premisy. V úvahách o platnosti se totiž orientují na jiném sémantickém modelu, jehož geometrické prezentaci vyhovují spíše *Vennovy* nežli Eulerovy diagramy. V nich je (ne)prázdnost pojmů přímo zachycována šrafováním, znázorňujícím prázdnost, a vpisem křížků, symbolizujících předměty

pod pojem spadající. (Viz obrázek: každé A je B , některé C je B .) Ty ale Aristotelés do své formální sémantiky z relativně dobrých důvodů nezahrnuje.

Definice pojmu, tj. udání významu pojmového slova, říká Aristotelés, souvisí pouze s tím, *co věc je*, nikoli s tím, *že je* [AnII, 91a], [AnII, 93b], tj. že jí něco ›reálně‹ odpovídá. V tomto smyslu není pojem (*horos*) jakožto téma logiky ztotožnitelný s nějakou konkrétní třídou předmětů, tedy s nějakou konkrétní

¹⁵⁾ Zde můžeme lépe než kdekoli jinde nahlédnout, do jaké míry jsou různé úvahy a polemiky na téma ›dvojznačnost negace‹ apod. jalové, jsou-li řešeny *pouze* vágním odkazem na běžný úzus. Nechceme-li sklouznout k nějaké formě naturalismu či se stát samozvanými garanty správného užití jazyka, musíme jej nejprve konvenčně (tj. dohodou) schematizovat nějakým logickým modelem, vůči němuž se pak (např.) otázka vzájemné výlučnosti dvou tvrzení stane pouhou věcí kontroly exkluzivity příslušných formálněsémantických stavů: to, že jsou věty formy AaB a AoB kontradiktorickými protějšky, víme a můžeme tvrdit *jen a pouze* proto, že jim přiřazené třídy diagramů tvoří úplný rozklad systému všech možných diagramových interpretací těchto větných forem.

extenzí, ale nanejvýš s extenzí typizovanou jakožto ›možné‹ vymezení. Aristotelés sám tento rozdíl zamlžuje, když v reakci na Platónovo údajné ›zdvojení‹ světa o tajemnou říši idejí odmítá kromě slov a tříd předmětů, které těmto slovům odpovídají, uznat ještě nějaké třetí entity. [Met, 987b] V praxi je ale k jejich implicitnímu přijetí donucen již tehdy, když uvažuje o ›ontologicky‹ prázdných pojmech (např. o ›kozlojelenovi‹ – viz [AnII, 92b]). Právě způsob vzniku pojmů, resp. způsob naší řeči o nich, tj. metajazyková reflexe nějaké stávající jazykové praxe, ale ukazuje, jak jejich povahu interpretovat, totiž nikoli přímo (deskriptivně) ontologicky, jak to snad dělá (raný) Platón, ale grammaticky, jakožto možné předměty řeči, předměty logické.¹⁶⁾

Jelikož navíc podle Aristotelových vlastních slov ›existence‹ netvoří *rod* [AnII, 92b], tj. neexistuje žádné význačné univerzum, vůči němuž by bylo možné otázky (ne)prázdnosti vztahovat, je jejich ›realistický‹ výklad přinejmenším ›naivní‹. O jednorozčích můžeme hovořit nejen v diskurzu zvířat aktuálně žijících, ale i zvířat bájných či hypotetických; i běžná řeč o mrtvých lidech (starých Římanech) či vyhynulých zvířatech (dinosaurech) je stěží interpretovatelná přímočaře realisticky, ale vždy ve vztahu k příslušnému *kontextu* (literárněvědnému, historickému atd.). Problém (ne)prázdnosti pojmů není tedy tématem Aristotelovy logiky, ale až její *aplikace*: při ní teprve máme zvážit, zda musí být námi užité pojmy něčím aktuálně splněny či zda budeme mluvit jen hypoteticky, v jakém diskurzu se vůbec chceme pohybovat apod.

1.2 LOGIKA TRANSCENDENTÁLNÍ A LOGIKA VÝPOČETNÍ

Přepjatý obdiv, kterému se sylogistika těšila u středověkých učenců, se s příchodem nového věku proměnil v nezájem, ale i odpor. Aristotelovo statické pojetí vědy, nezúčastněně klasifikující smyslovou hmotu (sylogisticky) ošetřenou nomenklaturou, zdaleka nedostačuje požadavkům vědy moderní, která vesmír – namísto aby jej opisovala – (násilně) strukturuje matematickým modelem, vědy, která – slovy Kantovými – »*své zákony nečerpá z přírody, nýbrž je přírodě předepisuje*« [Prol, § 36]. Toužil-li pro ni její přední proponent Descartes nalézt »*spolehlivou metodu vedoucí k poznání všech věcí*« [Dis, část 2, § 5], byl si zároveň jist, že sylogistika, »*jejíž předpisy, spíše než k*

¹⁶⁾ Lze se oprávněně domnívat, že tento rozdíl si Platón přinejmenším ve svém pozdním období dobře uvědomoval, a že se tak Aristotelovo obvinění z pythagorejského mysticismu zakládá na (v lepším případě neúmyslné) dezinterpretaci platónské nauky o idejích; srv. k tomu např. *Stekeler-Weithofer* [1999].

objevu slouží k tomu, aby se jiným vysvětlovalo, co se již ví« [Dis, část 2, § 6], touto metodou není.

Jelikož Aristotelova logika, jakkoli užitečná při budování konzistentní terminologie, ve vztahu k matematice selhává již na těch nejjednodušších početních úlohách, které s ohledem na svoji omezenou subjekt-predikátovou strukturu není vlastně ani schopna adekvátně vyjádřit, lze se sotva divit Kantovi, že obě disciplíny oddělil řezem (bez)obsažnosti a do centra svého zájmu o meze lidského poznání nepostavil logiku formální, ale transcendentální. Ta, podle jeho slov, neabstrahuje »od všeho obsahu poznání, tj. od jakéhokoli jeho vztahu k objektu« [KrV A54/B79], ale sleduje »původ našeho poznání předmětů, nelze-li jej odvodit z těchto předmětů samých« [KrV, A55sq/B80]; také se sice zabývá »zákony rozumu [des Verstandes und der Vernunft], ale jen vztahují-li se k předmětům a priori« [KrV, A57/B81sq].

Transcendentální logika tedy specifickým způsobem studuje svět naší zkušenosti, totiž ve vztahu k podmínkám její možnosti, podmínkám, za nichž je možné naše (objektivitu si nárokující) soudy označit za smysluplné. Tento silný epistemologický akcent, většinou moderních logiků zcela cizí, je také pravou příčinou rezervovaného postoje, který vůči Kantově koncepci logiky a teorie vědy zaujímají. Svého předchůdce naopak (jistým právem) spatřují v Gottfriedu Wilhelmu Leibnizovi.

1.2.1 Axiomaticko-deduktivní metoda

Radí-li Descartes svým současníkům, aby nechali »stranou všechny předpisy dialektiků, jimiž, jak se domnívají, řídí rozum, a to tím, že předepisují určité formy úsudků, z nichž vyplývají tak nevyhnutelné závěry, že jim svěřený rozum, ač osvobozen od jasně a soustředěně úvahy, je přesto schopný silou formy dospět k spolehlivému závěru« [Reg, pravidlo X, § 4], je jasné, že se tak nedistancuje pouze od Aristotelovy sylogistiky, ale že napadá samu ideu formální logiky. Uvažme nyní, do jaké míry jsou jeho výhrady oprávněné.

Vědoslovná koncepce *Druhých analytik* je prototypem tzv. axiomaticko-deduktivní výstavby vědy. Podle ní se každé vědění hodné toho jména – pořádko v celek vědy – zakládá na (i) důkazu z již založených premis a (ii) bezprostředním náhledu pravdivosti prvních premis neboli axiomů, které dokazatelné nejsou. [AnII, 71bsq, 88b] Důkazem je míněn důkaz sylogistický (tj. formálnělogický). Pomineme-li problém pravdivosti prvních premis, vidíme, že tíha založení (*Begründung*) vědeckého tvrzení – jinými slovy: otázka ospravedlnění (*Rechtfertigung*) jeho pravdivosti – byla přesunuta na užitý formálnělogický systém. Nyní provedme několik důležitých rozlišení.

Řekneme, že z (konečné) třídy vět S aristotelské formy lze usoudit na větu T aristotelské formy, nebo jinými slovy: že přechod z S na T je logicky platným úsudkem, jestliže po nahrazení všech pojmových slov v S a T schematickými písmeny tak, že stejná (resp. různá) pojmová slova jsou nahrazena stejnými (resp. různými) písmeny, je přechod mezi výslednou třídou schémat S' a schématem T' logicky platným úsudkovým pravidlem. Řekneme, že z (konečné) třídy S pravdivých vět aristotelské formy vyplývá věta T , jestliže je přechod z S na T logicky platným úsudkem; toto je také Aristotelova nejobecnější koncepce důkazu.¹⁷⁾

K ověření toho, zda z dané třídy S premis vyplývá daná věta T , je podle výše uvedené definice nutné projít všechny možné diagramy pro úsudkové pravidlo $S' \Rightarrow T'$ a zkontrolovat, zda v případě, že splňují třídu S' , splňují také schéma T' , tedy zda se jedná o pravidlo logicky platné. Tato metoda nám sice zaručuje, že po konečně mnoha krocích dospějeme k jednoznačné odpovědi, a je tedy algoritmem rozhodnutí platnosti úsudkových pravidel aristotelské sylogistiky, avšak s narůstajícím počtem premis se stává nepřehlednou a záhy i prakticky neproveditelnou. V *Prvních analytikách* se proto Aristotelés pokouší celý dokazovací proces zjednodušit takto: (1) za kanonické úsudkové pravidlo je považován platný sylogismus; (2) každý platný sylogismus lze s pomocí pravidel konverze a vyloučeného třetího převést na dokonalé sylogismy první figury (*barbara* a *celarent*); (3) každý platný úsudek, v němž bylo vedle dokonalých sylogismů a pravidel konverze užito také vyloučeného třetího, lze nahradit sledem úsudků podle platných sylogismů a rozšířené sady pravidel konverze.¹⁸⁾

Na pozadí Aristotelových úvah je tedy možné definovat přímý (sylogistický) důkaz věty T z premis S jakožto postupnou aplikaci fixní sady pravidel, na jejímž konci stojí dokazovaná věta, nebo přesněji: důkaz věty T z třídy vět S je konečná posloupnost vět U_1, U_2, \dots, U_n , kde $U_n \approx T$ ¹⁹⁾ a libovolná věta U_i ($1 \leq i \leq n$) je buďto prvkem S , nebo na ni lze přímo usoudit podle pravidla konverze či platného sylogismu z některé věty, případně dvou vět indexu menšího; této posloupnosti se také říká odvození, případně dedukce věty T z třídy vět S . K tomu, aby bylo úspěšně vyřešeno převedení sémantických úvah o logické platnosti na syntaktický pojem deduktivní dokazatelnosti skrze

¹⁷⁾ Srv. [Top, 100a].

¹⁸⁾ Podrobnosti opět in: *Stekeler-Weithofer* [GPL, § 3.3].

¹⁹⁾ Symbol “ \approx ” budeme i ve zbytku knihy užívat jako znak metajazykové rovnosti, tj. identity výrazů naznačovaných písmeny na jeho levé a pravé straně.

omezený počet figurálně popsanych, a tedy mechanicky následovatelných pravidel, je ovšem nutné (nededuktivně!) dokázat tzv. větu o úplnosti, v tomto případě tvrzení, že z třídy pravdivých premis S vyplývá věta T tehdy a jen tehdy, je-li T z S přímo (sylogisticky) dokazatelná. Aristotelés tuto (pravdivou) větu sice tvrdí, ale dokazuje pouze její slabší verzi.²⁰⁾

Máme-li důkaz věty o úplnosti, můžeme s pomocí vybraných základních vět (axiomů) snadno zachytit a přehlédnout mnohem větší obor vět, které z nich logicky vyplývají, totiž s odkazem na třídu syntakticky popsanych pravidel, jimiž lze *všechny* tyto věty systematicky generovat. Tento do značné míry praktický rys axiomaticko-deduktivní metody představuje také jednu z jejích největších předností. Na pozadí výše uvedených úvah se nyní jeví Descartova kritika v dvojím světle. Je sice pravda, že *»dialektici se svým uměním nemohou vytvořit sylogismus, který by usuzoval na pravdu, aniž by byla jeho materie dokázána dříve, tzn. aniž by tutéž pravdu, která je v něm dedukována, nepoznali již předem«*, ale tvrzení, že je tak *»dialektika pro ty, kteří hledají pravdu, zcela k nepotřebě [...], a měla by být proto z filosofie přerazena do rétoriky«* [Reg, pravidlo X, § 5], je hrubým podceněním toho, jakou roli v našem poznání hrají přehledná schémata a jejich projekce na dosud neuspořádané obory. V tomto bodě, tedy v popření názoru, že by logika naše poznání nerozšiřovala, ale i v obecných otázkách vědecké metody, je Leibniz rozhodným odpůrcem Descartovým.²¹⁾

1.2.2 Mathesis universalis

Při své práci na diferenciálním počtu Leibniz zjistil, že dobře zvolená notace a vhodný kalkul mohou řadu problémů vyřešit tak říkajíc jednou ranou. Jistota se symboly operující matematiky – navrhuje Leibniz – dala by se však přenést i do jiných věd, neboť *»všechno lidské myšlení se uskutečňuje skrze určité symboly a znaky«* [FL, 110]:

»Kdyby bylo možné najít znaky či symboly uzpůsobené tak, aby šlo jejich prostřednictvím vyjádřit všechny naše myšlenky zrovna tak jasně a zřetelně, jako

²⁰⁾ Srv. *Stekeler-Weithofer* [GPL, § 3.3, s. 102]; v další kapitole Stekeler-Weithofer větu o úplnosti sám dokazuje, a to obvyklým způsobem přes maximálně konzistentní třídy schémat.

²¹⁾ Leibniz výslovně kritizuje Descartovo zneuctění formální logiky např. in: [HG, 230], a to v rámci obecného rozboru karteziánských principů. Vůči četným útokům svých současníků na adresu Aristotelovu a formální logiky vůbec se vymezuje např. in: [FL, 3sq].

jsou v aritmetice vyjádřena čísla a v geometrii čáry, zjevně by bylo možné zacházet se všemi předměty, jsou-li podřízeny rozumnému myšlení, stejným způsobem, jako se to dělá v aritmetice a geometrii. Neboť všechna zkoumání závišující na rozumném myšlení by se uskutečňovala transformací těchto znaků a jistým druhem kalkulu, což by usnadnilo objev mnoha krásných věcí. [...] Nadto by se každý mohl snadno přesvědčit o tom, co bylo objeveno a usouzeno, neboť přezkoumat kalkul by bylo velmi lehké, ať již jeho následováním, nebo zkusmo několika testy, jež by se podobaly devítkové zkoušce v aritmetice. [22]) A kdyby někdo pochyboval o tom, co bych předvedl, řekl bych mu: „Počítejme, milý pane,“ a s perem a inkoustem bychom dospěli ke shodě.« [FL, 90sq]

V tomto citátu máme stručně načrtnuty hlavní body Leibnizova logicistického programu. Jeho první částí je *characteristica universalis*, umělé písmo, které by vhodně zachytilo logickou stavbu věty a umožnilo tak, »aby všechny důsledky, které mohou být usouzeny, ihned vycházely najevo ze slov a symbolů samých« [FL, 93]. Dále pak *calculus ratiocinator*, v němž by se transformací vět (formulí) podle jistých pravidel dospívalo k větám novým (*ars inveniendi*) a který by sloužil také jako rozhodovací algoritmus platnosti úsudku (*ars iudicandi*). Leibniz sám si uvědomoval, že Aristotelova sylogistika s tímto jeho plánem do značné míry souzní, avšak ani v jejím značně omezeném a Aristotelem dostatečně propracovaném rámci jej nebyl – třeba jen v podstatných rysech – schopen předvést. Užitečný postřeh, že na logické dokazování lze pohlížet stejně jako na aritmetické výpočty – totiž jako na *schematické operování* se symboly –, navíc podivným způsobem přepjal a spojil s fantaskním nápadem, podle něhož lze pro každé slovo najít jeho charakteristické číslo takovým způsobem, že se pravda složených výrazů pozná již z jednoduchých výpočtů [HG, 16sq], čímž se blíže nepopsanou cestou z pouhé nauky o možných kombinacích (*ars combinatoria*) stane logika objevu (*logica inventiva*).²³⁾ [FL, 48sq, 84sq] Nechme však nyní stranou četné verze této myšlenky, které – s nevinně technickou, ale i šílenstvím hraničící heuristikou –

²²⁾ *Devítková zkouška* je test sloužící k ověření správnosti násobení (případně sčítání, odčítání a dělení), využívající toho, že součin dvou čísel má tentýž zbytek po dělení devíti jako součin devítkových zbytků obou čísel.

²³⁾ Leibniz byl kombinatorickou myšlenkou posedlý již od dětských let (srv. [FL, 4], [HG, 18, 24]) a učinil z ní také téma své dizertace *De Arte Combinatoria*, v níž mimo jiné podal seznam všech platných sylogismů – viz [FL, 35sq]. Srv. také Russellův výběr citátů ke kapitole XIV z jeho [PoL, 282sq].

Leibniz za svůj živost zformuloval, a věnujme se formálnímu aspektu jeho ideje číselné reprezentace pojmu.

1.2.3 Různé interpretace subjekt-predikátové větné formy

Na rozdíl od empiricky orientovaného Aristotela, který přes všechny (výše zmíněné) obtíže váže pojem na (možné) třídy předmětů pod tento spadajících, orientuje se Leibniz spolu s Kantem na koncept jiný, úzce spojený s tím, co Alberto Coffa výstižně nazval chemickou doktrínou reprezentace.²⁴⁾ Podle této teorie jsou pojmy obsaženy (*enthalten*) v pojmech jiných nikoli ve vztahu k jejich extenzím (mereologicky), ale jakýmsi latentním způsobem, podobným tomu, jakým je chlor obsažen v soli.²⁵⁾ Úkolem logické analýzy, podobně jako analýzy chemické, je daný pojem rozkládat (*auflösen*) tak dlouho, dokud se nedojde k dále nedělitelným, primitivním pojům. »*Poté vzniknou všechny odvozené pojmy ze spojení pojmů primitivních a ty dále složené spojením složených; pouze je třeba dávat pozor, aby nebyla vytvářena spojení neužitečná, kdybychom dali dohromady neslučitelné.*« [HG, 26] V termínech (chemické) obsaženosti formuluje Kant také svoji všeobecně známou definici analytického:

»*Bud'ť náleží predikát B subjektu A jako něco, co je v pojmu A (skrytě) obsaženo, nebo leží B zcela mimo A, ačkoli s ním třeba souvisí. V prvním případě nazývám soud analytickým, v případě druhém syntetickým.*« [KrV, A6/B10]

Tradičně je rozdílnost Kantova-Leibnizova a Aristotelova přístupu zachycena rozlišením mezi *rozsahe* pojmu, jemuž odpovídá třída věcí pod pojem spadajících, a *obsahe* pojmu, který je tvořen právě v tomto pojmu (chemicky) obsaženými pojmy dílčími, tj. jeho *znaky* (*Merkmale*).²⁶⁾ Moderní (Carnapovo) rozlišení extenze a intenze tomuto klasickému rozdílu neodpovídá, neboť carnapovská intenze není nic jiného nežli námi dříve zmíněná *možná extenze*, tj. extenze relativizovaná vůči možnému stavu světa. Pod obsahem pojmu je lépe rozumět souhrn jazykem artikulovaných (na stavu světa nezávislých) kritérií, jimiž byl tento pojem vymezen a která musí předmět, spadající pod takto definovaný pojem (v daném stavu světa), všechna splnit. V souladu s tím můžeme nyní pod obsažeností pojmu *A* v pojmu *B* rozumět přítomnost pojmu *A* definujícího predikátu v seznamu predikátů (znaků), jejichž *konjunkcí* byl definován pojem *B*, a zároveň formulovat tzv. *konjunktivní dok-*

²⁴⁾ Viz Coffa [ST, 9].

²⁵⁾ Schopenhauerův příklad – viz [Welt, svazek II, kniha 1, k. 10].

²⁶⁾ Srv. Schröderův podrobný rozbor této klasické problematiky in: [VA₁, 80sq].

trínu pojmu, podle níž lze každý pojem určit výhradně konjunkcí dílčích znaků. To, že se jedná o pojetí značně úzké, uvidíme později.²⁷⁾

Leibnizovy snahy o číselnou charakterizaci pojmu lze nyní ve vztahu k logice obsahu a s ní spjaté konjunktivní doktríně snadno interpretovat jako pokus o vytvoření aritmetického protějšku ke geometrické sémantice logiky rozsahu, jejíž diagramovou interpretaci dobře znal, a vytvořil k ní dokonce úsečkovou alternativu (viz [FL, 372sq]). Podle Leibnizova návrhu má být každému výrazu přiřazeno číslo tak, aby složenému výrazu odpovídal součin čísel přiřazených výrazům dílčím [FL, 170], přičemž dále nedělitelným slovům by měla odpovídat prvočísla. [FL, 108] Predikát je podle tohoto výkladu obsažen v subjektu tehdy, jestliže jeho číslo beze zbytku dělí číslo subjektu. Vztah dělitelnosti musí ale podle Leibnize nastávat v každém *pravdivém* obecném kladném soudu (tj. soudu formy AaB) [FL, 204], tedy nikoli jen v soudu *analytickém*, jak to požaduje Kant. Tento obtížně akceptovatelný nárok byl nesporně iniciován snahou o zdůvodnění logické platnosti úsudků, neboť by např. z platnosti soudu formy AaB umožnil usoudit na AiB , pro nějž je předem požadována dělitelnost subjektu predikátem *nebo* predikátu subjektem, díky čemuž pak platí také příslušná konverze AiB na BiA a další. Sama Leibnizova aritmetická sémantika, bez zjevného úspěchu vícekrátě přepracovávaná, by si zde ale sotva zasloužila jiné nežli jen historické zmínky, kdyby nebyla příkladným projevem neobyčejné schopnosti generalizace, kterou její tvůrce vládl, a tedy i důvodem toho, proč je Leibniz považován za předchůdce moderní logiky.

Četné podobnosti mezi pravidly mnoha kalkulů, jimiž se ve vztahu k různým oborům – od analýzy přes algebru po geometrii a pravděpodobnost – zabýval, vedly Leibnize k myšlence univerzálního kalkulu, který by se nevztahoval pouze k speciálnímu typu objektů, ale díky obecnosti v něm formulovaných zákonů by se hodil pro zachycení jakékoli úvahy bez ohledu na její obsah. Tuto abstrakci od větné materie sledoval Leibniz ještě dále, když si v rámci konstrukce různých formálních sémantik pro zamýšlený logický kalkul povšiml jisté komplementarity logiky obsahu a rozsahu a ve stylu moderní univerzální algebry nechal volně interpretovatelnými nejen symboly pro pojmy (či třídy), ale i pro příslušné operace. Zároveň s tím pak použil rovnítko jako formativního výrazu [FL, 304sq], čímž zavedl další z možných čtení kopuly “je”, totiž jako vyjádření *r o v n o s t i*. Výraz

²⁷⁾ V [GL, § 88] Frege píše: »*Zdá se, že Kant určuje pojem skrze přiřazené znaky, to je ale jeden z nejméně plodných způsobů pojmotvorby.*« Pro další Fregova vyjádření k pojmotvorbě svých předchůdců viz také oddíly /4.1.1/ a /4.1.2/

$$A + Y = B$$

pak např. symbolizuje v logice rozsahu i obsahu obsaženost pojmu A v pojmu B , přičemž v první z obou logik je symbol “+” chápán jako sjednocení příslušných tříd (tj. sloučení prvků obou tříd do třídy jediné), v druhé pak jako konjunkce predikátů. [FL, 307] Leibniz rovněž zjistil, že totéž lze úspěšněji vyjádřit alternativním

$$A + B = B,$$

opustíme-li ovšem nadobro přirozenou aritmetickou interpretaci. [FL, 403] V základech této myšlenky stojí jeden z úhelných kamenů Leibnizova logického kalkulu, totiž zákon

$$A + A = A,$$

dovolující opakování symbolu bez jakékoli změny obsahu výsledného výrazu, v důsledku čehož je tedy každý pojem (či třída) triviálně obsažen sám v sobě. [FL, 161, 307] Je to právě souhrn těchto dílčích pozorování, jenž – coby cenný a zásadní příspěvek k logice symbolické – činí z Leibnize přímého předchůdce Boolova.

1.3 ALGEBRA LOGIKY

Přehlédneme-li obě velká Boolova díla, v nichž v letech 1847 a 1854 předložil svoji algebru tříd – *The Mathematical Analysis of Logic* a *An Investigation of the Laws of Thought* –, zjistíme, že v podstatných rysech, tedy jakožto první vážná alternativa k Aristotelově sylogistice, Boolův systém Leibnizovy objevy nepřekračuje, ba co víc, často je dokonce krokem zpět. Boolovo pojednání bylo nicméně podáno v nesrovnatelně systematičtější a důkladnější podobě a díky své střízlivosti ve filosofických otázkách, ale i několika originálním příspěvkům k algebře (*law of development*) mohlo vzbudit širší ohlas, a iniciovat tak vznik nového vědního oboru, jehož výsledky o čtyřicet let později vydaly na monumentální třísvazkový opus Ernsta Schrödera *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (Přednášky o algebře logiky).

1.3.1 Algebra tříd

Podobně jako Leibniz byl i Boole fascinován analogií mezi myšlením a algebraickým operováním, usuzováním a počítáním, mezi »zákony logiky« a »zákony čísla«. [IL, k. I, § 10] V centru jeho zájmu však stála logika tříd, tj. logika rozsahu.

Boole užívá písmen “ x ”, “ y ”, “ z ”, ... jako tzv. *v ý b ě r o v ý c h z n a k ů* (*elective symbols*) [MA, 16], jimiž je z *u n i v e r z a* (*Universe*), značeného číslovkou “1” [IL, k. III, § 13], selektována jistá třída předmětů. Vybereme-li

takto třídu x a z ní pak pouze ty předměty, které jsou y ,²⁸⁾ můžeme výsledek těchto dvou sukcesivních operací zachytit výrazem “ xy ”. Podobně jako u aritmetického součinu platí, že nezáleží na pořadí, v němž je tento výběr pro třídy x a y prováděn, tedy že

$$xy = yx.$$

Takto vypadá také jeden z prvních Boolových základních zákonů myšlení. [IL, k. II, § 7] Další získáme opakováním téhož výběru, tj. uvážíme-li rovnost

$$xx = x, \quad \text{případně} \quad x^2 = x,$$

kteou je ovšem porušena paralela s aritmetickým násobením.

Po operaci násobení zavádí Boole logickou variantu aritmetického sčítání, majícího za výsledek sloučení dvou tříd do třídy jediné, značené “ $x + y$ ”. Také pro operaci sčítání platí výše zmíněný komutativní zákon, dualita obou spojek je však porušena Boolovou restrikcí této operace na vzájemně *se vylučující* třídy, tj. třídy, u nichž vede operace součinu k prázdné selekci, rovněž považované za třídu, a to tzv. třídu prázdnou (*Nothing*), značenou číslovkou “0”. [IL, k. III, § 13] Je zřejmé, že Boolovo pojetí logického součtu neumožňuje formulovat zákon

$$x + x = x.$$

Tuto neelegantní konvenci opravil roku 1864 Jevons,²⁹⁾ a umožnil tak přijetí obou De Morganových zákonů:

$$\} \sim = \} + \sim \quad \text{a} \quad \} \sim \sim \} \sim = \} \sim,$$

kde $\}$ je doplněk třídy x , tj. třída všech předmětů univerza, které v třídě x nejsou. (Boole ovšem doplněk třídy x značí jako “ $1 - x$ ”. [IL, k. III, § 14]) Touto důležitou úpravou Jevons – Quinovými slovy – učinil z Boolovy algebry *algebru boolovskou*.³⁰⁾

Aritmetického symbolu odčítání “ $-$ ” užívá Boole pro operaci inverzní k logickému sčítání, tedy s požadavkem, aby

$$z - y = x \quad \text{tehdy, když} \quad x + y = z \quad [\text{IL, k. II, § 13}].$$

V tom také můžeme vidět motivaci, která jej vedla k zmíněné výlučné restrikci logického součtu, neboť pro vzájemně se nevylučující, avšak různé třídy y , z a w může současně platit $x = y + z$ a $x = y + w$, což by ovšem v důsledku znamenalo, že $x - y = z$ a $x - y = w$, tj. že $x - y \neq x - y$. Na tomto příkladě dobře ilu-

²⁸⁾ Lépe by bylo říci: ›ty předměty, které má x společné s y ‹; v textu uvedená formulace je ale pro algebru logiky příznačná a čitelně ukazuje slabiny čistě ›extenzionálního‹ přístupu, o nichž bude ještě řeč.

²⁹⁾ Viz Jevons [‹1864›, k. VI].

³⁰⁾ K tomuto oddílu obecně srv. Quine [‹1985›].

strovaná zbytečná snaha o co nejtěsnější přiblížení aritmetice vedla Boola přes další inverzní operaci, tentokrát logické dělení, k zavedení nových nedefinovaných výrazů, jako jsou všechny “ x/y ” pro třídu x neobsaženou v y , a také výrazy “ $1/0$ ” a “ $0/0$ ”. Ty však Boole na jiném místě nazývá symboly nekonečna a neurčitých tříd. [IL, VI] Znak pro neurčitou třídu užíval Boole již dříve, když podobně jako Leibniz vyjádřil obsaženost třídy x v třídě y rovností

$$x = vy \quad \text{[IL, k. IV, § 11],}$$

pro niž ovšem uvádí i jednodušší variantu, totiž

$$x = xy.$$

Již při tomto přepisu vyvstávají však s užitím neurčitých symbolů četné problémy. Výraz “ $x = xy$ ” či jeho odvozená verze “ $x(1 - y) = 0$ ” jsou zjevně splněny volbou prázdné třídy za proměnnou x ; 0 musí být tedy připuštěna i za v v “ $x = vy$ ”, jinak by se nejednalo o adekvátní přepis. Oproti tomu částečná kladná věta “ $xy = v$ ” má jistě znamenat tolik, co “ $xy \neq 0$ ”, a třída v nesmí být nikdy prázdná, neboť pak by se jednalo o případ obecné věty záporné. Je proto otázka, jak má být deklarovaná neurčitost třídy v vlastně interpretována. Boole zřejmě počítal s její neprázdností, a na některých místech proto nechává výraz “ $x = vy$ ” vyjadřovat současnou platnost soudů “každé x je y ” a “některé y je x ” [MA, 25], problémy s neurčitostí v tím ale nemizí. Je např. možné z “ $xy = v$ ” a “ $wz = v$ ” usoudit na “ $xy = wz$ ”? Příčinou podobných a zcela zbytečných potíží je také výraz pro nekonečno “ $1/0$ ”, selhávající při svém dosažení za “ x ” v zákonu “ $x(1 - x) = 0$ ”, jenž je mimo jiné odvozen ze zákona “ $x^2 = x$ ” transformací na “ $x^2 - x = 0$ ” a vytknutí “ x ”! [IL, k. III, § 14] Boole je takto nucen rozlišovat mezi třídami tento zákon splňujícími a těmi, které jej nesplňují apod. [IL, k. VI] Boolovým pokračovatelům se sice mnohé z těchto defektů podařilo odstranit, nicméně systém, který by byl ve vztahu k sylogistice podstatně silnější a ve svých principech přinejmenším stejně transparentní, vytvořit nedokázali.

1.3.2 Algebra výroků

Jak zdůrazňuje Lukasiewicz ve své pionýrské práci o dějinách výrokové logiky, nespočívá odlišnost logiky peripatetické a stoické ani tak v tom, že by Aristotelés kromě kategorických soudů soudy jiné (hypotetické, případně disjunktivní) neuvažoval, jako spíše v rozdílnosti systematického využívání proměnných (schematických) písmen pro speciální typ výrazů,³¹⁾ tj. *slov pojmo-*

³¹⁾ Srv. Lukasiewicz [1936].

vých v případě Aristotelově a vět v případě Stoy. Tradiční problém vztahu obou logik a případné priority jedné z nich vyvstává i ve spojitosti s Boolovou algebrou.

V rámci svého systému rozlišuje Boole věty, v nichž jsou dávány do vztahu třídy předmětů (*primary propositions*), a věty vzniklé opět spojením vět (*secondary propositions*) [IL, k. IV] – právě to jsou hypotetické a disjunktivní soudy stoické logiky. Boole zvažuje možné způsoby jejich redukce na soudy prvního typu. Nejpřirozenější z nich pojednává již na začátku svých *Laws*, když ve vztahu k jedinému zákonu, který v jeho systému nevyhovuje aritmetické interpretaci, tj.

$$x^2 = x,$$

navrhuje algebru, která by vznikla restrikcí proměnných na čísla 0 a 1, jež tuto rovnost splňují. [IL, k. II, § 13] Víceznačnost symbolů “0” a “1” jej pak vede k další variantě, podle níž pro věty X, Y, Z, \dots označují (*denote*) proměnné x, y, z, \dots v univerzu 1 časových okamžiků všechny ty okamžiky, v nichž jsou ony věty pravdivé. [IL, k. XI, § 7]³²⁾ Pro speciální případ věčných pravd zachycuje Boole (ne)pravdivost věty X přímo rovností

$$x = 1, \quad \text{resp.} \quad x = 0 \quad \quad \quad [\text{IL, k. XI, § 11}].$$

Obě možné varianty časové interpretace proměnných, tedy jak obecná, tak omezující se na věčné věty, dovolují zachytit hypotetický soud “jestliže je X pravdivá, je Y pravdivá” jako

$$x(1 - y) = 0,$$

ke slovu se však dostává i Boolovo oblíbené “ $x = vy$ ”, s “ v ” coby symbolem neurčitého času (*symbol of time indefinite*). Je také zřejmé, co mají tyto kategorické přepisy hypotetických vět vyjádřit: v každém časovém okamžiku, v němž je pravdivá věta X , je pravdivá i věta Y .

V případě soudu disjunktivního přepisuje Boole větu “ X je pravdivá nebo Y je pravdivá” pod vlivem výlučného pojetí logického součtu na

$$x(1 - y) + y(1 - x) = 1.$$

Takto může být také udržena výše zmíněná podobnost s aritmetikou, podle níž by nevylučujícímu součtu “ $x + y$ ” pro (tutéž) hodnotu 1 odpovídal obtížně přijatelný výsledek 2.

Ačkoli Boole pojednává kategorické, hypotetické a disjunktivní soudy současně – a v tom je jeho systém skutečným rozšířením logiky tradiční –, představu-

³²⁾ V *Mathematical Analysis* nechává Boole své univerzum sestávat z >myslitelných případů a kombinací okolností< (*conceivable cases and conjunctures of circumstances*) [MA, 48sq].

jí v jeho pojetí pouhé alternativní výklady téhož logického kalkulu. Sémantická báze kalkulu je tedy značně nespojitá. Celá Boolova koncepce logiky se tak rozpadá na dvě nesourodé části: logiku tříd a logiku výroků. K nim později Schröder přidává, v návaznosti na práci Peircovu, »*třetí (a nejobtížnější) část*« logické disciplíny, logiku relací. [VA₁, 96] I ta je studována separátně a zachovává si všechny neblahé význačnosti logik předchozích.

1.3.3 Algebra relací

Podobně jako (celé) výroky byly i relace tradičním tématem logiky – rovněž jimi se zabývali Hispanus i Ockham³³⁾ a rovněž jimi se zabývali bez výrazného úspěchu. Leibnizův génius sice rozpoznal, že platné asylogistické úsudky jsou právě úsudky založené na relacích – uvažme jeho příklad: Ježíš Kristus je Bůh, tedy matka Ježíše Krista je matka Boha –, nakonec se však v souladu s tradicí přiklonil k subjekt-predikátové redukci. Russellovu domněnku, že tak stejně jako jeho předchůdci a současníci učinil z důvodů metafyzických [PoL, II], [At, 32], [MPD, k. 5], jistě nemusíme sledovat do všech detailů, abychom jí přesto i ve zkráceném podání mohli přiznat značný stupeň plauzibility.

Relace, vysvětluje Russell, zdá se být zvláště na pozadí sporu o univerzálie něčím ještě fiktivnějším nežli samotný jednoduchý atribut: důsledkem toho je obecné přijetí tzv. *axiomu interních relací*, podle něhož je každá relace v podstatě založena předměty, které spojuje. [MPD, k. 5] Tvrdí-li Leibniz, »*že co se týče relací, je otcovství v Davidovi věc jedna a synovství v Šalamounovi druhá, ale že relace oběma společná je pouze mentální povahy*«,³⁴⁾ je zjevné, že se k výše uvedenému axiomu hlásí a s pohledem upjatým k metafyzice substance a akcidentu doufá v libovolné větě najít *pouze* subjekt a predikát. [At, 38] Důraz na slovo “pouze” je zde podstatný, neboť větu “Petr je větší než Karel” lze možná oprávněně rozložit na subjekt Petr a predikát “_ je větší než Karel” či na subjekt Karel a predikát “Petr je větší než _”, tj. jakožto připsal dvou různých vlastností dvěma různým osobám; Leibniz ale v souladu s axiomem interních relací navíc tvrdí, že žádný další rozklad nemá jinou nežli jen fiktivní oporu.

Russellovy úvahy metafyzické, odvozující z této doktríny filosofický monismus [MPD, k. 5], získávají na váze zvláště ve chvíli, když je obviněna z ne-

³³⁾ Odkaz je spolu s dalšími uveden in: *Peirce* [RLT, 150].

³⁴⁾ Citát převzat z *Russell* [PoL, 206]; výše uvedený Leibnizův příklad nesylogistického úsudku je uveden na straně 283 téže knihy. Srv. také *Kneale* [1962, 324].

schopnosti zachytit pojem ›struktury‹, neboť »*struktura je právě to, co monistická logika ničí*« [At, 47]. Pojem relace je ale moderní matematickou fyzikou, jejíž teorie jej mají dokonce v názvu, akcentován natolik, že Carnap může ve své příznačně pojmenované knize *Der logische Aufbau der Welt* (Logická výstavba světa) prohlásit každou vědu hodnou toho názvu za ›*Strukturwissenschaft*‹, tj. tvrdit, že »*každá vědecká výpověď je výpovědí o struktuře*« [Aufb, § 16]. Ukážeme později, že k docenění významu logiky relací a samotné její konstrukci není zapotřebí studovat logickou strukturu světa, jak se zdá navrhovat Russellův logický empirismus či pozitivismus Carnapův, ale že stačí vyjít z pozic skromnějších, usilujících o (zvoleným cílům) přiměřené zachycení logického vyplývání v určitém dobře popsaném kontextu, přesně tak, jak to odpovídá převratnému dílu Fregovu. Nyní se však vraťme zpátky k algebře logiky.

Stejně jako Leibniz uvědomili si i Boolovi následovníci, a to konkrétně August De Morgan, že nejen sylogistika, ale i logika tříd je příliš slabá na to, aby zvládla byť i ty nejjednodušší typy úsudků s relačními termíny.³⁵⁾ De Morganův známý příklad úsudku, na něž Boolova algebra nestačí, se ostatně tomu Leibnizovu podobá: kůň je zvíře, tedy hlava koně je hlava zvířete. V návaznosti na De Morgana se počínaje článkem z roku 1870 věnuje otázce relací také Američan C. S. Peirce.³⁶⁾ V cílené analogii k algebře tříd, jejíž »*ojedinělá krása*« [CP, 3.45] zůstává De Morgan mnoho dlužen, definuje pro (dyadické) relace (*simple relatives* [CP, 3.63]), jež chápe jakožto systémy uspořádaných dvojic (*elementary relatives*) [CP, 3.121], relační produkt [CP, 3.68sq] a (později) relační součet [CP, 3.332], a předvádí tak algebru relací v podstatně elegantnější formě.

Podobně jako lze zřetězením (jednomístných) predikátů získat (jednomístný) složený predikát, případně zřetězením proměnných pro třídy jméno jejich logického součinu, lze uvažovat o relačním součinu jako o zřetězení (›aplikaci« [CP, 3.68]) relačních termů, jako např. ‐mileneček sestry‐ či ‐otec otce‐, případně zřetězení příslušných relačních proměnných. Ihned je zřejmé, že multiplikace relací x , y (definovaná jako relace, v níž jsou dva prvky a a b tehdy, jestliže existuje prvek c , vůči němuž je a v relaci x a který je zároveň v re-

³⁵⁾ Za počátek logiky relací je považován De Morganův článek *On the Syllogism IV and on the Logic of Relations*, napsaný roku 1859.

³⁶⁾ V roce 1870 vychází Peircova první monografie věnovaná logice relací s názvem *Description of a Notation for the Logic of Relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole's Calculus*.

laci y vůči b [CP, 3.332]) na rozdíl od původní operace tříd ní nekomutuje. [CP, 3.53] Pouze proto, aby zachoval souměrnost zákonů algebry tříd, definuje Peirce relační součet $x \uparrow y$ relací x, y jako relaci, v níž je nějaký prvek a k prvku b tehdy, je-li a v relaci x ke každému c , které není v relaci y k b , nebo jinými slovy: jestliže pro libovolné c platí, že je a v relaci x k c nebo c v relaci y k b . Pro člověka znalého moderního predikátového počtu není obtížné ověřit, že pro takto definované relační spojky platí oba De Morganovy zákony (doplňek } relace x je definován stejně jako pro třídy, tj. jako systém těch dvojic, které nejsou v x [CP, 3.330]), to je ale také všechno, co si lze s takto pojatým součtem počít. Peirce sám si těžkopádnost svého raného pokusu uvědomoval a vytvořil k němu také sofistikovanější verzi, kterou posléze rozvinul až do plnohodnotné teorie kvantifikátorů. Výsledky Peircovy práce spolu s vlastními příspěvky a modifikacemi vtělil pak Ernst Schröder do třetího svazku svých *Vorlesungen*, které jsou tak pro algebru logiky tím, čím později budou pro matematickou logiku Russellova-Whiteheadova *Principia Mathematica*, tedy jistým završením epochy.³⁷⁾

1.4 CÍLE A PŘEDNOSTI POJMOVÉHO PÍSMO

Když roku 1879 vyšla Fregova *Begriffsschrift* (Pojmové písmo), obsahující kromě plně kalkulizované výrokové a predikátové logiky prvního řádu s rovností také predikátovou logiku vyšších řádů (sic!), byl Ernst Schröder jejím jediným významným domácím recenzentem.³⁸⁾ V blahosklonném stylu přiznává Fregovi velkou míru ostrotipu, dodává však, že jej vyplýval na to, aby s velkými okolky dospěl k výsledkům, které jiní, jmenovitě Boole a Schröder, zpracovali lépe. Frege je osočen, že na Boolem založenou, třicet let trvající tradici matematické logiky ve svém spise nejen neodkázal, ale zavedením atypické symboliky se od ní dokonce ostře oddělil. Fregův pojmompis podle Schrödera odpovídá pouze části Boolovy logické koncepce, a to kalkulu výroků, na něž je možné vhodnou úpravou redukovat všechny Fregem uváděné soudy. S výjimkou pasáží věnovaných funkci, obecnosti (tj. [B, § 9-12]) a nauce o řadách ([B, § 23-31]) – uzavírá Schröder – nepřináší tedy Fregovo dí-

³⁷⁾ Kvantifikaci zavádí Peirce roku 1883 v článku *The Logic of Relatives* (viz [CP, 3.351sq]); ve stejnojmenném příspěvku z roku 1897 podává rámcový přehled o své (a zčásti i Schröderově) práci v oboru relační algebry (srv. zejména [CP, 3.492sq]). Srv. dále také *Quine* [1989, 258], případně úvodní kapitoly ze Schröderových [VA₃].

³⁸⁾ *Schröder* [1880]; dále citováno podle *Jourdain* [1912.] a podle Patzigova úvodu k *Frege* [1966].

lo ve srovnání s algebrou logiky nic nového, ba naopak, nepřehlednou a místy nadbytečnou formou prezentace je spíše krokem zpět.³⁹⁾

Na Schröderovu recenzi reagoval Frege sérií článků, v nichž se pokoušel vysvětlit cíle a výhody svého pojmového písma ve srovnání s Boolovou algebrou: roku 1880 píše článek *Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift* (Boolova výpočetní logika a pojmové písmo) [BL_N], roku 1882 *Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift* (Boolův formálnělogický jazyk a moje pojmové písmo) [BF_N] a roku 1883 *Über den Zweck der Begriffsschrift* (Účel pojmového písma) [ZB]; otištění se dočkal jen poslední z nich. Frege v nich mimo jiné podrobně rozvádí: (1) že jeho logika nepokrývá jen Boolovu logiku sekundárních soudů, ale je naopak jejím propojením s logikou soudů primárních [ZB, 100sq, 105], (2) že je s ohledem na užití kvantifikátoru schopná adekvátně vyjádřit větší množství soudů, a to speciálně soudů aritmetických [BL_N, 20sq, 23], [ZB, 105] – což je z dnešního pohledu triviální pozorování, neboť algebra tříd odpovídá pouhé logice monadických predikátů Fregeova systému –, a (3) že jeho symbolika, prostá aritmetických víceznačností boolovských metod, uvážlivou volbou základních znaků a toho, co symbolizují, zvláště přispívá k přehlednému zachycení logických zákonů a úsudků. [BF_N, 55sq], [BL_N, 40sq], [ZB, 103] V obecné rovině se hlavní rozdíl mezi svým a Boolovým dílem pokouší Frege objasnit na pozadí Leibnizovy terminologie:

»Boole zamýšlel, rozumím-li mu dobře, vyvinout techniku, kterou by bylo možné systematicky řešit logické úlohy, podobně jako nás algebra učí technice eliminace a výpočtu neznámých. Za tímto účelem zachycuje Boole soudy ve formě rovností, jež sestavuje z písmen a aritmetických symbolů jako +, 0, 1. Logické zákony pak přijímají formu algoritmu, který se však s aritmetickým algoritmem pro tytéž symboly shoduje jen částečně. Od obsahu se při tom zcela odhlíží. [...] Nyní budiž oproti tomu předveden účel mého pojmového písma. Od počátku mám při tom na mysli vyjádření nějakého obsahu. Cílem mého úsilí je lingua characterica, nejprve pro matematiku, nikoli calculus omezený na čistou logiku. Obsah má být ale předáván přesněji nežli jazykem slov.« [BL_N, 13]

Boole a jeho pokračovatelé, nikoli nepodobní Leibnizovi, v radostném opojení z vládnutí ›exaktními‹ (rozuměj: symbolickými) metodami zapomínají, že k je-

³⁹⁾ John Venn, který Fregův spis roku 1880 rovněž stručně recenzoval (Venn [⟨1880⟩]), píše obdobně ve své *Symbolic Logic*: *»Opět zde máme příklad důvtipného muže, jenž vypracoval schéma – v tomto případě velmi těžkopádné – v očividné ignoranci vůči čemukoli, co bylo před ním v oboru uděláno lépe.«* Venn [⟨1881⟩, 415]

jich úspěšné aplikaci je zapotřebí více než jen objevu několika dílčích analogií s jiným, již osvědčeným oborem. Frege nepodceňuje volbu dobré symboliky, vždyť »výhody přehlednosti a přesnosti jsou tak velké, že mnohá zkoumání by bez symbolického jazyka matematiky vůbec nemohla být uskutečněna;« zdůrazňuje však, že při užití symbolů je »nebezpečí propadnutí pouhému mechanismu formulí mnohem větší nežli při užití slov; [...] věda by uvázla na mrtvém bodě, kdyby se mechanismus formulí rozmohl natolik, že by zcela zardousil myšlenku« [WB, 58-59].

»Přirozená cesta, po níž lze dojít k symbolice, se mi zdá být nastoupena tehdy, pocítíme-li při slovy vedeném zkoumání šíři, nepřehlednost a nepřesnost jazyka slov jako něco omezujícího a vytvoříme-li si ve snaze o nápravu tohoto stavu symbolickou řeč, v níž je toto zkoumání možné vést přehledněji a přesněji. Tedy: nejprve potřeba, potom uspokojení. Oproti tomu se mi nezdá být příliš prospěšné vytvořit symboliku jako první, a teprve poté pro ni hledat využití. Mám dojem, že touto cestou se vydala symbolika Boolova-Schröderova-Peanova.« [WB, 59]

To, čeho se algebře logiky podstatně nedostává, je tedy cílená logická analýza, kterou lze sotva nahradit metaforou výpočtu. Řešení boolovských úloh (z větší části vymyšlených tak – poznamenává ironicky Frege –, aby mohly být boolovskými formullemi vyřešeny [ZB, 97]) je logika pojmového písma také schopna [BL_N, 44], nepřikládá tomu však »žádnou váhu, neboť takovéto úlohy se ve vědě vyskytují jen zřídka či vůbec ne«⁴⁰⁾ [BL_N, 52].

1.4.1 Schröderův přízrak

Schröderovu recenzi by šlo za jistých okolností omluvit nezvyklými rysy Fregova výkladu, které činily potíže i lidem Fregově práci (Russell) či Fregovi osobně (Abbe) příznivě nakloněným, kdyby se ještě dvacet let poté ve svém článku *On Pasigraphy* nevyjadřoval o Fregovi jako o tom, »kdo nedbaje čehokoli dosaženého v témže směru ostatními, vyvinul neobyčejné úsilí k provedení toho, co již bylo uděláno mnohem lépe, a když takto přivedl na svět mrtvé dítě, byl již od samého počátku odsunut stranou«.⁴¹⁾ Snad neuškodí podotknout, že první díl Fregova stěžejního díla, *Grundgesetze der Arithmetik* (Základní zákony aritmetiky), vyšel již roku 1893. Schröderův postoj však neodhaluje jen

⁴⁰⁾ Řešení podobných úloh, často dokonce v sylogistické formě – nezbytně však s humorným podtextem – platí dodnes mezi autory učebnic za důležitou, ne-li dokonce podstatnou součást úvodu do elementární logiky.

⁴¹⁾ Citát uveden v Patzigově úvodu k *Frege* [1966], 15].

něco o pozadí Fregova obecně známého osudu ›zneužnaného génia«, ale především něco o osudu algebry logiky samotné.

Bylo již zmíněno, že podobně jako Frege, avšak až o čtyři roky později, přišel na teorii kvantifikace také C. S. Peirce. Na rozdíl od *Begriffsschrift*, v níž je jednoduše v § 11 zavedena tak, jak ji užíváme dodnes, lze však v Peircových spisech podrobně sledovat její genezi.⁴²⁾ Od užití indexovaných symbolů “ Σ ” a “ Π ” jakožto zobecnění logického součtu a součinu pro větší počet relací (případně uspořádaných dvojic) [CP, 3.223] přechází Peirce nejprve k pojetí, v němž s jejich pomocí vyjadřuje libovolnou relaci l jako součet probíhající přes všechny dvojice ($I:J$) univerza individuů, a to rovnicí:

$$l = \Sigma_i \Sigma_j (l)_{ij} (I:J) \quad [\text{CP, 3.328}],$$

kde $(l)_{ij}$ je koeficient, jenž nabývá hodnot 1 a 0 podle toho, zda indexům odpovídající individua v dané relaci jsou, či nikoli. Odtud je již jen krok k přirozenému vyjádření skutečnosti, že ›něco je v relaci l k něčemu«, resp. ›všechno je v relaci l k něčemu« prostřednictvím nerovnosti

$$\Sigma_i \Sigma_j l_{i,j} > 0, \quad \text{resp.} \quad \Pi_i \Sigma_j l_{i,j} > 0 \quad [\text{CP, 3.351}].$$

Operace součtu je zde ovšem mírně upravena: platí totiž

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1 \quad [\text{CP, 3.331}].$$

To také odpovídá Jevonsově reformě, Peircem nezávisle provedené roku 1867 v článku *On an Improvement in Boole's Calculus of Logic*.⁴³⁾ Nahradíme-li číselné čtení koeficientů a kvantifikovaných výrazů rozpisem podmínek jejich ohodnocení číslem větším než nula, můžeme přestat psát “ > 0 ” a konečně dospět k logice kvantifikátorů. [CP, 3.351] Peirce sám si důležitost tohoto přechodu uvědomoval a svůj výsledný systém, nazývaný ›obecnou algebrou logiky«, od původního ostře odlišil. [CP, 3.499] O Schröderovi se však totéž říci nedá.

Ačkoli do své knihy o algebře relací zahrnul všechny Peircovy výsledky v oboru, orientuje se Schröder stále především na algebru dyadických relací, a to s důrazem na slovo “*algebra*”.⁴⁴⁾ Udiven Schröderovou vášní pro svůj původní systém, demonstrovanou mnoha sty stránek textu třetího dílu *Vorlesungen*, komentuje Peirce tuto knihu zcela ve Fregově duchu: »*Zdá se mi, že profesor Schröder přikládá této algebře příliš velký význam. To, co jí v jeho očích činí*

⁴²⁾ Srv. *Quine* [‹1989›, 260sq].

⁴³⁾ Srv. *Peirce* [CP, 3.67], dále také poznámku pod čarou k [CP, 3.199].

⁴⁴⁾ Srv. zvláště Peircovy poznámky k Schröderovi in: [CP, 3.447sq]. V [RLT, 151] Peirce píše: »*Schröderův třetí díl diskutuje tento předmět [logiku relací] velmi podrobně, ale spíše ve prospěch algebry než logiky.*«

zvláště doporučeníhodnou, se mi zdá být sotva zásluhou, totiž že nám umožňuje v hávu rovnosti vyjádřit věty, jejichž skutečný význam je mnohem jednodušší nežli význam oné rovnosti.« [CP, 3.498] »[...] profesor Schröder žene svůj *algebraismus tak daleko, že hovoří o “kořenech”, “hodnotách”, “řešeních” atd. i tehdy, kdy nejsou takové výrazy – a myslím si to i já, který mám takovou zálibu v algebře – vůbec namíste* [...]« [CP, 3.519] Ironické je, že se Schröder rozhodl podstatnou část své knihy zasvětit Dedekindově teorii řetězců [VA₃, § 23sq], předložené ve spise *Was sind und was sollen die Zahlen* (Co a k čemu jsou čísla) roku 1888, pro niž se zdá být relační součin operací mimořádně důležitosti. Právě kvůli této teorii však Frege v *Begriffsschrift* zavádí predikátovou logiku druhého řádu a svojí definicí následnické relace [B, § 23] tak předbílá Dedekinda o několik let. Dedekind sám si všiml podobnosti svých a Fregových výsledků až roku 1889 při četbě Fregových *Grundlagen der Arithmetik* (Základy aritmetiky) z roku 1884 a upozornil na to v druhém vydání svého spisu roku 1893. Schröder ve své recenzi *Begriffsschrift* v souvislosti s příslušnou pasáží pouze vyjadřuje přání přehlednější notace, v třetím díle *Vorlesungen* pak Frega spolu s Husserlem řadí k filosofické straně, která údajně Dedekindovu práci neuvažuje a nezhodnocuje dostatečně. Sám se proto rozhoduje učinit věci zadost a vrhnout na Dedekindovu teorii správné světlo. [VA₃, 347] Vzhledem k výše zmíněnému podcenění fregovských (případně peircovských) metod však brzy troskotá.

1.4.2 Subsumpce a podřazení

Liší-li se snad Peirce a Schröder v názoru na překlad kopuly “je” nebo lépe řečeno: ve volbě základní relace logické algebry (Peirce oproti Schröderově zálibě v znaménku rovnosti preferuje a zavádí do algebry znak pro inkluzi tříd),⁴⁵⁾ oběma v této souvislosti uniká podstatné rozlišení, které se ukázalo být pro novou (matematickou) logiku zásadní. Pozoruhodnou historii vzniku a účinku tohoto objevu lze vyčíst z Russellových poznámek k vývoji jeho filosofických názorů, kde píše o vlivu italského matematika Giuseppa Peana na své logicko-matematické dílo:

»Peanovi jsem vděčil zejména za to, že mě obeznámil se dvěma podstatnými technickými výtobky moderní logiky (jejichž význam pro někoho, kdo – jako já tehdy – léta neusiloval o hlubší porozumění aritmetice, není sám o sobě zřejmý). Oba z nich objevil Frege; ale nevěřím příliš, že by si toho byl Peano

⁴⁵⁾ In [CP, 3.47] zaveden poprvé znak “—<” nevlastní inkluze; srv. dále poznámky pod čarou k [CP, 3.173] a [CP, 3.199].

již tehdy vědom. Já sám jsem to zjistil až o dost později. [...] V případě prvního pokroku se jednalo o jednoznačné rozlišení mezi výroky formy “Sókratés je smrtelný” a “Všichni Řekové jsou smrtelní”. [...] Druhým důležitým logickým pokrokem, který mi Peano zprostředkoval, byl názor, že třída obsahující pouze jediný prvek není s tímto prvkem totožná.» [MPD, k. 6]

První z těchto dvou spolu úzce souvisejících inovací, jimž se budeme později v expozici Fregovy formální sémantiky podrobně věnovat, je v podstatě zavedena již v *Begriffsschrift*. [B, § 9] Peano provedl nezávisle na Fregovi tutéž distinkci o deset let později (1889) ve svých *Arithmetices principia* [AP, k. II, IV], provinil se tam však vůči distinkci druhé [AP, k. IV, věta 56], kterou zavádí až o rok později.⁴⁶⁾ Ve Fregově systému, metodicky upřednostňujícím pojem před jeho rozsahem (třídou), je tomuto rozdílu učiněno zadost v *Grundlagen* (1884), kde je zdůrazněna odlišnost mezi pojmem, pod nějž spadá jeden jediný prvek, a tímto prvkem samotným. [GL, § 51] Význam těchto úprav možná doceníme již nyní, když uvážíme údajný ›paradox‹, který Schröder v algebře tříd objevil již v jejích počátcích a jež se pokusil řešit odmítnutím Boolova (De Morganova) univerza diskurzu.

V algebře tříd vybavené inkluzí je obvykle kladen předpoklad obsaženosti prázdné třídy v jakékoli třídě jiné. Ačkoli lze tuto větu v rámci naivněmnožinové mluvy snadno obhájit ($0 = 0a$), Schröder ji zavádí ve formě definice: prázdná třída (›identická nula‹) je třída (*Gebiet*), která je obsažena v každé třídě; symbolicky $0 F a$, pro a libovolné. [VA₁, 188] Symbol “F” značí nevlastní inkluzi, jejíž význam je identifikován s rolí kopuly ve vztahu subjektu a predikátu kategorických soudů. [VA₁, 232] Identická nula je tedy subjekt ke každému predikátu. [VA₁, 238] Z Boolovy interpretace třídy 1 (›identické jednotky‹) jakožto univerzální třídy (univerza diskurzu) vyvozuje Schröder následující spor: uvážíme-li třídu a tříd totožných s třídou 1, víme, že obsahuje pouze třídu 1 samotnou ($1 F a$). Každá třída ale obsahuje také identickou nulu ($0 F a$), a ta tedy musí být s identickou jednotkou totožná ($1 = 0$). [VA₁, 245]

Analogický výsledek dostaneme pro libovolnou třídu b na místě třídy 1, uvážíme-li třídu a všech tříd totožných s b . [VA₁, 246] Tento defekt se snaží Schröder odstranit opatřením předjímajícím teorii typů, totiž postupnou konstrukcí hierarchie univerz (*Mannigfaltigkeiten*)⁴⁷⁾ s požadavkem, »aby se mezi

⁴⁶⁾ Srv. Heijenoortův komentář in: *Heijenoort (ed.)* [FFG, 84]. Peano odkazuje k Fregovi výslovně až ve svém dalším článku *Principii di logica matematica* roku 1891.

⁴⁷⁾ Toto slovo by bylo nejlépe překládat termínem “varietà”, který má ovšem již speci-
fický algebraický význam.

jejich prvky, danými ve formě “individuí”, nevyskytovala třída, jejímiž prvky by byla individua téhož univerza [jako je tato třída]« [VA₁, 248]. Této devíze může však Schröderův systém stěží dostat, když je v něm o sto stran dříve libovolné individuum výslovně identifikováno s jednoprvkovou třídou, která jej obsahuje. [VA₁, 148]

Frege, který – stejně jako později v případě paradoxu Russellova – má zavedení předmětné hierarchie jen za »*dodatečné vyprošťování lodi z mělčiny, za něco, k čemu by při dobrém vedení vůbec nemuselo dojít*« [SV, 439], považuje Schröderovo sofizma za přímý důsledek neblahého množinového pojetí logiky, v němž »*rozsah pojmu jakožto třída nenásleduje pojem, nýbrž se opírá o jednotlivé [pod něj spadající] předměty. Touto cestou lze možná dospět ke kalkulaci tříd [Gebietekalkul], nikoli však k logice.*« [SV, 455] »[...] *prázdna třída nemůže existovat, rozumíme-li <trídou> soubor či celek individuí, takže třída sestává z individuí nebo, jak říká autor (s. 67), individua třídu skládají.*« [SV, 451] Rovněž ztotožnění jednoprvkové třídy s jejím prvkem jde na vrub tomuto chápání tříd jakožto »*kolektivních sjednocení*« [SV, 436, 445].

K adekvátnímu řešení paradoxu je podle Frega k algebrou akcentovanému vztahu části a celku (vztahu mereologické obsaženosti) nutné přibrat ještě vztah prvku a třídy, jíž tento prvek náleží. (V tomto se tedy Cantorova teorie množin od algebry tříd liší!) Tak na úrovni pojmů, případně jejich rozsahů je pojem »Řek« podřazen pojmu »smrtný« (Fregovým zápisem z [SV]: Řek *sub* smrtný), zatímco předmět Sókratés pod pojem »smrtný« spadá, případně je prvkem jeho rozsahu (Sókratés *subter* smrtný).⁴⁸⁾ Pro prázdnu třídu jakožto rozsah pojmu, pod nějž nic nespadá, a libovolný rozsah *a* tak sice platí *0 sub a*, nikoli však *0 subter a*. Schröderovy snahy učinit tuto konfuzi plauzibilní odkazem k běžně užívaným opisům typu »*každá třída obsahuje jako prvky své vlastní části a jinak “nic”*« [VA₁, 212], tj. identifikace identické nuly s *nic* (ne)označujícím (zdanlivým) jménem přirozeného jazyka, jsou jen ukázkou toho, jak vážně bere v úvodu své knihy proklamovaný cíl překonání »*okovů, v něž přirozený jazyk silou zvyku uvrhl lidského ducha*« [VA₁, 118].⁴⁹⁾

1.4.3 Vliv Peanův

Fregův kontakt s Peanem se (neurčitě) datuje od první poloviny devadesátých let. Peano počínaje svým *Calcolo geometrico* vydaným roku 1888 pracoval na

⁴⁸⁾ *Subter* je ve Fregově obvyklé terminologii vztahem »subsumpce«, zatímco *sub* vztahem »podřazení«. Srv. [WB, 151].

⁴⁹⁾ Srv. Fregovo často citované obdobné vyjádření z [B, VIsq].

prezentaci matematiky ve vhodné symbolické notaci, neboť Boolův-Schröde-rův zápis jeho potřebám nedostačoval. K četným úpravám patřilo mimo jiné oddělení logické a aritmetické symboliky, zavedení abstrakce tříd (tu Frege zvažuje již v *Grundlagen*) a (skrže ní i) kvantifikace, dále již zmíněné rozliše-ní vět singulárních a obecných a mnohé další. Od souhlasu a ocenění důleži-tosti těchto změn se také odvíjí Fregova-Peanova korespondence ([WB, 176sq]).

Vyvrcholením Peanovy snahy o přehledné zachycení soudobého matematic-kého vědění měly být *Formulaire de mathématiques*, vydávané v široké spo-lučásti mnoha učenců. Úvod vyšel roku 1894 pod názvem *Notations de lo-gique mathématique*. Poté, co Peano navrhl Fregovi spolupráci a zveřejnění případné kritiky [WB, 178] a co sám uveřejnil uznanou, i když kritickou recenzi *Grundgesetze* (1895), rozhodl se Frege k podrobnému porovnání své a Pea-novy práce, a to jednak ve formě přednášky, později vydané pod názvem *Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene* (Pojmové písmo pana Peana a moje vlastní), jednak v rámci dopisu Peanovi, tímtéž coby vydavate-lem otisknutém v *Rivista di Matematica* pod hlavičkou *Lettera del sig. G. Frege all'Editore*. Pomineme-li problematiku kontextuální definice, věnuje se Frege v předložených úvahách především otázce volby základních znaků. Peanova sada, ukazuje, nejenže není co do počtu menší sady prznaků *Grundgesetze*, jak Peano ve své recenzi tvrdí [WB, 185], ale je navíc zatížena vážnými nedo-statky definitorickými a víceznačnostmi vůbec. Tolikráté již předhazovanou dvojrozměrnost svého zápisu nepovažuje Frege ve srovnání s linearitou notace *Formulaire* za nevýhodu: vždyť je naopak »hlavní předností psaného oproti mluvenému. Sazečovo pohodlí přece není nejvyšší dobro« [PB, 364]. Již kdysi o tom ostatně napsal: »Ono zdání neobvyklosti vznikne tehdy, naznačíme-li souditelné obsahy pouze pomocí jednotlivých písmen. Jakkmile je však důsledně vypíšeme, jak je to při vlastním užití běžné, rozkládá se každý z nich na řádce zleva doprava a všechny pak po sobě následují od shora dolů.« [BL_N, 51]

Je historickou skutečností, že další vývoj logické notace dal v otázce dimenze a přehlednosti přednost Peanovi, jehož symbolika a také závorkové a tečkové konvence se přes Russellovu úpravu v *Principia Mathematica* vlastně užívají dodnes;⁵⁰ nicméně – jakkoli jsou Fregovy obecné sémiotické postřehy cenné,

⁵⁰ Od Peana pochází znak “ \in ” pro náležení, původně začáteční písmeno kopuly “je”, “ $\epsilon\sigma\tau\iota$ ”. Znak “ \subset ”, tj. obrácené “ \supset ”, užíval Peano současně pro inkluzi, implikaci a de-dukci. Ve významu implikace si jej ponechal také Russell, mírně jej ovšem upravil na “ \supset ”; pro inkluzi pak zavedl moderní tvar “ \subset ”. První písmeno slova “ $\iota\sigma\varsigma$ ” (“stejný”),

a to i jako ilustrace toho, jak vážně a důkladně konstrukci pojmového písma bral (srv. zvláště jeho [BB]) –, samotný vzhled písma je skutečně, jak sám říká, *pouhou záležitostí fyziologickou* [PB, 364], tj. nezáleží na něm, co se týče věci samé.⁵¹⁾ Peanovy *Formulaire* ale – ač možná v držení uživatelsky příjemnější notace – selhávají ve vlastním provedení: teorie kvantifikace je podle Peanových vlastních slov stále považována za záhadnou (*abstruse*), a proto také zavedena pouze prostřednictvím několika příkladů;⁵²⁾ pro implikaci, inkluzi a dedukci je užíván jeden a tentýž symbol [PB, 371sq], a vše potom kulminuje v selhání nejvážnějším, a to naprosté absenci jakéhokoli explicitně formulovaného *úsudkového pravidla*. Peanův systém, stejně jako systém Dedekindův, tak přes nesporně větší rozsah zpracované látky nedisponuje žádným logickým nástrojem, o něž by se mohl jeho uživatel v deklarovaném úsilí o preciznější důkaz opřít. Shrnuto Fregovými slovy: »*Úmysl se zdá být zaměřen spíše na hromadění znalostí nežli na důkaz, spíše na stručnost a internacionalitu nežli na dokonalost logickou.*« [PB, 365sq]

»*Leibnizovskými výrazy můžeme říci: Boolova logika je calculus ratiocinator, ale žádná lingua characterica, peanovská matematická logika je především lingua characterica, a mimoto také calculus ratiocinator, zatímco mé pojmové písmo by mělo být rovnocenným spojením obou.*« [PB, 371]

Bertrand Russell, který se pod vlivem Peana začal věnovat Fregovým spisům podrobně až v době, kdy byla jeho první kniha o základech matematiky, *The Principles of Mathematics*, již před dokončením (1902), v úvodu k dodatku věnovaném Fregovi píše: »*Fregovo dílo překypuje subtilními distinkcemi a vyhýbá se všem obvyklým omylům, jimž propadají autoři knih o logice. Jeho symbolismus, ač bohužel těžkopádný do té míry, že jej lze v praxi jen obtížně použít, je založen na mnohem hlubší analýze logických pojmů, než je analýza*

svůj původní symbol pro jednoprvkovou třídu obsahující daný prvek, Peano později obrátil a použil pro znak inverzní operace, pro níž platí $x = i_x$. Právě v tomto významu, tj. jakožto operátor určité deskripce, jej převzal Russell. Peano je také autorem znaku “ \exists ” existenční kvantifikace a indexické kvantifikace subjunktora (“ \supset_x ”). K historii peanovské notace viz např. *Quine* [1986].

⁵¹⁾ Zdůrazňují: nezáleží na *vzhledu* písma, na *písmu* samotném však ano! Frege píše: »*Již objev tohoto písma zdá se mi být příspěvkem k logice.*« [B, XIII]

⁵²⁾ Frege komentuje: »*V tomto bodě je mé Pojmové písmo z roku 1879 mnohem dál než Peanovo. Pro svůj symbol obecnosti jsem již tehdy předložil všechny zákony, které jsou zapotřebí [...]. Co do počtu je jich jen několik a nevím, co by se na nich dalo nazvat záhadným.*« [PB, 376]

Peanova, a je tak svému příhodnějším rivalovi filosoficky značně nadřazen.« [PoM, 501]

Do vlastního vývoje matematické logiky zasahuje tedy Frege opožděně. Russellova slova z úvodních díků k *Principles* jsou více než výmluvná: »*Kdybych se s prací profesora Frega seznámil dříve, vděčil bych mu za velmi mnoho, takto jsem však přišel na většinu jím dosažených výsledků nezávisle sám.*« [PoM, xvii] Přes Russellovy nesčetné projevy uznání však zůstává Fregovo dílo po další desítky let takřka neznámé. Ještě v polovině třicátých let považuje Lukasiewicz za nutné zdůraznit to, »*co se dokonce ani v Německu nezdá být obecně známo, totiž že zakladatelem moderní výrokové logiky je Gottlob Frege*«. ⁵³⁾ Schröderovy *Vorlesungen* oproti tomu platí stále za »*Standardwerk*« oboru a souboj s novátorskými *Principii* definitivně prohrávají až někdy na počátku čtyřicátých let. ⁵⁴⁾

1.5 LOGICKÉ ZÁKLADY ARITMETIKY

V předmluvě k *Begriffsschrift* vznáší Frege otázku po zdůvodnění (pravdivosti) vědeckého tvrzení, tedy otázku starou jako filosofie sama. Na rozdíl od historické geneze důvodů pro vynesení určité obecné věty, podstatně se lišící od člověka k člověku, měla by požadovaná odpověď podat charakteristiku objektivní, neboť úzce »*související s vnitřní podstatou uvažované věty*« samotné. Fregův zájem na řešení tohoto problému je ovšem velmi specifický, totiž soustředěný na tvrzení aritmetická. Klasické rozdělení pravd na analytické a syntetické, ve smyslu pravd dokazatelných čistě logicky a těch, k jejichž důkazu je zapotřebí názoru, jej přivádí k otázce, ke které z těchto skupin zařadit věty aritmetiky:

»*Když jsem si tedy položil otázku, ke kterému z těchto dvou druhů aritmetické soudy patří, musel jsem nejprve zkusit, jak daleko se v aritmetice lze dostat pomocí úsudků samých, pouze s oporou v zákonech myšlení, jež jsou nadřazeny všemu ojedinelému. Postupoval jsem tak, že jsem se nejprve pokusil odvodit pojem uspořádání v řadě logickou cestou, abych odtud mohl pokračovat k pojmu čísla. Aby se při tom nemohlo nepozorovaně vetřít nic z názoru, záleželo vše nutně na spojitosti úsudkového řetězce. Když jsem se snažil tomuto poža-*

⁵³⁾ Lukasiewicz [1936].

⁵⁴⁾ Leopold Löwenheim obhajoval Schröderův kalkul, v němž celý svůj život pracoval, ještě roku 1940 v článku *Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkul* (Matematika oděná do Schröderova kalkulu relací). I jeho slavné (Skolemem zobecněné) výsledky o existenci modelu dané mohutnosti jsou psány Schröderovou notací.

„davku co nejpřísněji dostát, narazil jsem na překážku v nedostačnosti jazyka, jež při všech vznikajících obtížích ve vyjadřování, čím zapletenějšími se vztahy stávaly, tím méně dovoľoval dosáhnout přesnosti, které vyžadoval můj cíl. Z této potřeby vyšla myšlenka tohoto pojmového písma. To by tak mělo předně sloužit k tomu, aby mohla být platnost úsudkového řetězce přezkoumána tím nejjistějším způsobem a aby každý předpoklad, jež se chce nepozorovaně vetřít, mohl být předveden, a tím i prozkoumán co do svého původu. Proto jsem také rezignoval na vyjádření všeho, co nemá pro sled úsudků žádný význam.“ [B, IV]

Podobnost Fregem sledované cesty k zdůvodněně vybudované aritmetice, jejímž základem by měla být logika a pouze logika, s programem Leibnizovým je očividná a Frege si jí byl také dobře vědom, jak lze seznat již z úvodu k *Begriffsschrift*, ještě zřetelněji pak z příslušných paragrafů *Grundlagen*: *»Lze snadno předvídat, že se Leibnizovy výroky dají vykládat ve prospěch analytické povahy zákonů čísla [...]. Přece však tato vyjádření ztrácejí na váze v důsledku Leibnizova sklonu pohlížet na všechny pravdy jako na dokazatelné.« [GL, § 15]* Vůči Leibnizovým přepjatým ambicím je tedy Frege skeptický: *»Také Leibniz rozpoznal výhody vhodné notace, přecenil je však. Jeho myšlenka obecné charakteristiky [...] byla příliš obrovská na to, aby se pokus o její uskutečnění mohl dostat dále nežli jen do stadia příprav. [...] Kdyby se ale tohoto vysokého cíle nepodařilo dosáhnout na jeden jediný pokus, přece by nebylo nutné vzdávat pozvolné, postupné přibližování. [...] V symbolech aritmetiky, geometrie či chemie můžeme vidět realizaci leibnizovské myšlenky pro jednotlivé obory.« [B, V-VI]*

Problémová spjatost a omezení Fregových výzkumů »pouze« na aritmetiku je rys, který musíme mít při pokusu o adekvátní interpretaci jeho díla stále na zřeteli. Je-li Frege právem považován za druhého Aristotela, je to zásluhou právě tohoto zaujetí konkrétním úkolem. Pouze díky němu Frege objevil plauzibilní řešení problémů, které byly po dlouhá staletí příčinou těch nejpodivuhodnějších konfuzí a paradoxů. Neobyčejná síla jeho logiky spočívá v tom, že ji nepojal jako rezervoár přirozených rozumových pravd, ale »jen« jako (více či méně vhodný) nástroj (analýzy jazyka) matematiky:

»Vztah mého pojmového písma k přirozenému jazyku lze, domnívám se, nejjasněji předvést, přirovnáme-li jej ke vztahu mikroskopu a oka. Oko má rozsahem svého použití, pohyblivostí, již se dovede přizpůsobit nejrůznějším okolnostem, nad mikroskopem velkou převahu. [...] Jakmile však začnou vědecké cíle klást velké požadavky na ostrost rozlišení, ukazuje se oko nedostačujícím.

Mikroskop je oproti tomu takovýmto cílům nejdokonaleji přizpůsoben, ale právě proto pro jiné zcela k nepotřebě. Tak je toto pojmové písmo pomůckou vytvořenou pro jisté vědecké cíle, která nesmí být odsuzována za to, že se pro jiné nehodí.« [B, V]

1.5.1 Tři obecné poznámky k interpretaci Fregova díla

A r i t m e t i k a. Logicky a zdůvodněně vybudovaná aritmetika byla hlavním Fregovým cílem; tomu podřídil veškeré své úsilí, přinejmenším do doby vydání druhého dílu *Grundgesetze*. Na celou jeho publikační činnost – jeho kritiku psychologismu, filosofický spis o čísle (*Grundlagen*), tažení jemných diferencí sémantických (smysl a význam, předmět a pojem, funkce a pojem atd.) – je nutné nahlížet v tomto světle. Přesto je však třeba zmínit, že Frege obecně ve svých úvahách a příkladech aritmetický kontext často opouští, a vyvolává tak oprávněné podezření, že od své logiky přece jen občas očekává víc nežli jen pomocnou ruku při řešení »jistých vědeckých cílů«, a nechává ji často artikulovat spíše »nejobecnější zákony pravdivosti« [L_{2N}, 139]. Napětí mezi těmito dvěma zatím jen vágně charakterizovanými přístupy prostupuje celým Fregovým dílem a je v jistém smyslu i příčinou jeho zhroucení.

S t u d i u m z á k l a d ů. Zatímco Kant byl ke své kritické filosofii doveden Humovou skepsí ohledně platnosti přírodních zákonů, údajně obhajitelných jen (obecně neplatnou) indukci, a tedy zvykem, jsou Fregova zkoumání základů především jednou z mnoha reakcí na mohutný vzmach novověké matematiky a četných problémů s ním spjatých. (Kant ani Hume o jistotě matematiky přirozeně nepochybovali.) V tomto kontextu je také Fregovým cílům a otázkám nutné rozumět. Devatenácté století bylo dobou objevu neeuklidovských geometrií (*na čem je založena geometrie?*), dobou paradoxů analýzy a zpochybnění jejího geometrického (národního) výkladu (*na čem je založena aritmetika?*) a dobou objevu čísel nového typu, vymykajících se obvyklým algebraickým zákonům (Hamiltonova hyperkomplexní čísla (*co je číslo?*)). Fregovo volání po zpřísnění důkazové koncepce a vyjasnění základních pojmů tak jde v obecné ideové linii s Weierstrassovým programem aritmetizace analýzy, Cantorovou teorií množin a prací Dedekindovou, potýkajícími se s problémy, které při této a případně další (množinové, logické) redukci vyvstaly a vyvstávají (nekonečno, matematická indukce atd.). Frege však své konkurenty převyšuje jak v čistotě provedení, které dovoluje dosáhnout jeho originální logický kánon, tak silou filosofického vhledu.

Filosophie. Fregovy epistemologické zájmy, výše demonstrováné jeho tázáním po původu (možnosti?) aritmetických tvrzení, po jejich významu a konkrétně po tom, co jsou abstraktní předměty matematiky zač, mohou být se zájmy Kantovými srovnávány v tom smyslu, že Frege svojí radikální tezí o závislosti významu slov na jejich užití v rámci smysluplné věty zásadně přispěl k přeměně mentalisticky dezinterpretovatelné transcendentální analýzy v rozbor (formálních) presupozic naší řeči (jak je např. tématem Strawsonovy slavné knihy o Kantovi)⁵⁵) a díky tomuto obratu (*linguistic turn*) a své logice pak pro obor aritmetických předmětů, k nimž nemáme žádný přímý přístup ve vnímání či zkušenosti, umožnil objasnit principy jejich konstituce. V tomto ohledu je tedy Fregovo (opětovně?) vtažení teorie poznání do logických zkoumání a jeho zdůraznění druhotnosti *výpočetní*⁵⁶) koncepce Leibnizovy-Boolovy činem obdobné povahy a významu, jakým bylo odsunutí Leibnizova mechanického *vysvětlení* světa a člověka coby *božského stroje* [Mon, § 64] Kantovým tázáním po *podmínkách možnosti* takovýchto pojmů a teorií.

Na závěr je v souvislosti se všemi uvedenými body dobré připomenout to, co Alberto Coffa ve své knize o sémantické tradici podotýká k posunu chápání slov “logika”, “logický” od vzniku moderní logiky po dobu naší:

»“Logické” – *dopustili bychom se vážné chyby, kdybychom nesprávně pochopili to, co Frege mínil tímto stále se opakujícím výrazem svých raných spisů. To, co Frege a Russell nazývali “logickým”, co Husserl nazýval “logickým” zkoumáním, co Meinong nazýval “Gegenstandstheorie” a o čem Wittgenstein mluvil jako o “logicko-filosofickém” pozorování, má k sobě velmi blízko; nemělo by to být zaměňováno s tím, co dnes nazýváme logikou poté, co formalismus a teorie množin opanovaly pole. Jejich “logika” byla naše sémantika, doktrína obsahu, jeho povahy a struktury, nikoli jen jeho “formálního” fragmentu.*« [ST, 64]

⁵⁵) Strawson [1964].

⁵⁶) V souvislosti s Boolovou logikou používá Frege termín “*rechnende Logik*”. Viz [BLN].

2 GOTTLOB FREGE

2.1 ŽIVOT

Friedrich Ludwig Gottlob Frege⁵⁷⁾ se narodil 8. listopadu 1848 v pobaltském Wismaru. Jeho otec Karl Alexander Frege byl zakladatelem a také ředitelem vyšší dívčí školy, pro jejíž potřeby sepsal moderní učebnici německé gramatiky.⁵⁸⁾ Když roku 1866 předčasně zemřel, převzala řízení školy Fregova matka Auguste, rozená Bialloblotzky, zčásti proto, aby mohla finančně podporovat svého syna během studií. Frege je zahájil absolvováním wismarského gymnázia, z něhož ihned poté, co roku 1869 odmaturoval z latiny, řečtiny, francouzštiny a matematiky, odešel na univerzitu do čtyři sta kilometrů vzdálené Jeny. Ta se pro něj stane tímtež, čím pro Kanta Královec, to jest celoživotním půso-
bištěm.

2.1.1 Studium

V Jeně je v té době jedna z nejmenších z jedenadvaceti německých univerzit. V počtu studentů je na dvacátém místě; tatam je její bývalá filosofická sláva, svázaná se jmény Hegela, Fichta a Schellinga, a rovněž finanční prostředky jsou nevalné. Proč si ji tedy Frege vybírá a zapisuje se na ni do studia matematiky a přírodních věd, je předmětem četných spekulací. Mnohem vhodnější by se zdálo být Lipsko, kde po léta sídlila vlivná a bohatá větev Fregových příbuzných, vlastníci *Bankhaus Frege & Co*; zřejmě zde ale panoval letitý rodinný spor.⁵⁹⁾ Rozhodující vliv měl nejspíš Leo Sachse, doučující Frega se vši pravděpodobností matematice, sám jenský absolvent.⁶⁰⁾

Na univerzitě navštěvuje Frege především přednášky z fyziky (*Matematická teorie gravitace, elektřiny a magnetismu, Experimentální fyzika, Telegraf a jiné elektřinou poháněné stroje, Galvanismus a elektrodynamika, Analytická mechanika, Nauka o lomu světla, Vybrané kapitoly z mechaniky a fyziky, Prak-*

⁵⁷⁾ Za podklad Fregovy biografie posloužila v první řadě čerstvě vydaná a obsahově nejbohatší fregovská biografie *Kreiser* [⟨2001⟩].

⁵⁸⁾ *Kreiserova* kniha obsahuje pozoruhodnou studii, porovnávací moderní zásady, na nichž je učebnice Fregova otce (*Hilfsbuch zum Unterrichte in der deutschen Sprache für Kinder von 9 bis 13 Jahren*) vystavěna (výuka jazyka musí začínat větou a její části nesmí být studovány jednotlivě, ale vždy v jejím rámci atd.), s Fregovými vědecko-filosofickými názory a některými syntakticko-sémantickými rysy Fregova pojmování. Viz *Kreiser* [⟨2001⟩, 176sq].

⁵⁹⁾ Viz *Kreiser* [⟨2001⟩, 53].

⁶⁰⁾ Viz *Kreiser* [⟨1997⟩], *Heblack* [⟨1997⟩].

tická cvičení z fyziky, *Základní nauky mechanické fyziky, Mechanika pevných těles*), dále studuje chemii (*Obecná chemie, Cvičení z chemie*), matematiku se zjevným zaměřením na geometrii (*Analytická geometrie, Analytická geometrie prostoru, Aplikace infinitesimálního kalkulu v geometrii, Algebraická analýza, Teorie funkcí komplexní proměnné*) a absolvuje také Fischerův kurz *Systém kantovské neboli kritické filosofie*. Fischerově kurzu o logice, metafyzice a vědosloví se ovšem vyhýbá.

Jelikož pravděpodobně pomýšlí na akademickou dráhu či ji alespoň nevyklučuje a Jena nedisponuje vhodnou zkušební komisí, přesouvá Frege svá studia po čtyřech semestrech do Göttingen, a to nejspíš na radu svého učitele matematické fyziky Ernsta Abbeho, který tak kdysi rovněž učinil. Královská pruská univerzita Georga Augusta je vyhlášena nejen svým oddělením matematiky, na němž působili Gauß, Dirichlet a Riemann, ale vyučuje zde také vlivný filosof a logik Rudolf Hermann Lotze. Fregova účast na jeho přednáškách také zavdala podnět k dohadům o Lotzeho vlivu na další vývoj Fregových názorů,⁶¹⁾ nutno však poznamenat, že se jednalo pouze o kurz *Filosofie náboženství*, jež mohl mladík, vychovaný v přísné evangelické víře, navštěvovat z přirozeného zájmu, o němž ostatně svědčí i poznámky náboženského charakteru v jeho deníku.⁶²⁾ V Göttingen promuje Frege roku 1873 prací *Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene* (Geometrické zobrazení imaginárních forem v rovině) a získává titul doktora filosofie (*Dr. phil.*).

2.1.2 Privatdozent

Ernst Abbe, který od roku 1866 spolupracoval s Zeissovým optickým závodem na zdokonalení mikroskopu, se s rostoucím úspěchem tohoto podniku, jenž v pozdějších letech přinesl Jeně i Abbemu samotnému slávu a kapitál, začíná postupně vyvazovat z univerzitní činnosti a jako vhodnou náhradu za matematické přednášky své a churavějícího ordinaria Snella doporučuje Frega. Ten se na základě Abbeho dobrozdání roku 1874 urychleně habilituje v oboru matematika prací *Rechnungsmethoden, die auf einer Erweiterung des Größsenbegriffes gründen* (Početní metody opírající se o rozšíření pojmu veličiny). V ní se od čistě geometrického tématu dizertace dostává k oblasti abstraktní matematiky, když zobecňuje pojem veličiny na příkladě funkce a její iterace. Obecnost jeho zájmu je zřejmá i z tezí, které předložil k povinné veřejné dis-

⁶¹⁾ Srv. Gabriel [◁1989◁], Gabriel [◁1997◁].

⁶²⁾ Viz Frege [T].

putaci. Je jistým překvapením, že všechny bez výjimky nesou pečeť filosofických problémů, jež bychom podle obsahu byli ochotni řadit až do myšlenkového období vzniku *Grundlagen*. Jsou to:

- »I. *Tvrzení, že je prostor nekonečný, je pouze relativní pravda.*
- II. *Číslo přísluší věcem jen do té míry, do jaké jsou objekty naší pozornosti.*
- III. *Číslo není nic původně daného, nýbrž je lze definovat.*
- IV. *Axiomy geometrie nejsou induktivní, ale apriorní pravdy.*
- V. *Veličina není názor.*«⁶³⁾

Již z formulace je zjevné, že studium Kanta nemělo ve vývoji Fregových názorů pouhý rys povrchního, všeobecného vzdělání, jehož lze nanejvýš *ad hoc* využít k ornamentálním odkazům či zaplnění povinných úvodních pasáží, ale že tvořilo fundament a východisko tázání vlastních.⁶⁴⁾

V návaznosti na úspěšnou habilitaci je Frege jako soukromý docent (*Privatdozent*) začleněn do univerzitních struktur. Univerzita toto řešení situace vítá již proto, že neplacené místo soukromého docenta vyhovuje její nelehké finanční situaci lépe než povolání nového ordinaria.

Fregova přednášková činnost několika následujících let byla velmi obsáhlá (analytická geometrie, algebraická analýza, teorie funkcí komplexní proměnné, teorie určitých integrálů a fourierovských řad aj.), zvláště když k ní později přibral přednášky z mechaniky od nemocného Snella. Větší počet přednášek mohl být žádoucí již proto, že přednášející dostával od zúčastnivších se studentů honorář (tzv. *Kolleggeld*) – jestliže ovšem neměli vysvědčení o chudobě, což často měli. Soukromým docentům, Frega nevyjímaje, byly však zpravidla přidělovány jen speciální přednášky, navštěvované minimálně. Základní kurzy s velkou účastí si ponechávali řádní profesori. Jelikož Frege řádným profesorem nikdy nebyl, mohl si také za všech 68 semestrů svého působení na univerzitě připsat za honoráře úhrnem 4 618 marek. Někteří jeho kolegové získávali částku téměř poloviční za jeden jediný semestr.

2.1.3 Extraordinarius

Fregovo jmenování extraordinariem, jež bylo žádoucí jednak z hlediska finančního, ale i s ohledem na personální stav matematicko-fyzikálních věd fakulty, bylo podmíněno vědeckou monografií. Roku 1879 tak Frege vydává svoji *Begriffsschrift* a dočkává se, jak již jsme výše zmínili, prvního vážného

⁶³⁾ Citace z *Kreiser* [2001], 123].

⁶⁴⁾ Víme také, že Frege byl členem Kantovy společnosti (*Kantgesellschaft*).

zklamání své vědecké kariéry. Jelikož se očekávalo, že po Snellově odchodu se společná katedra pro matematiku a fyziku rozdělí na dvě, Ernst Abbe, s nímž se Frege mezitím spřátelil (věkový rozdíl mezi nimi činil jen osm let), měl pravděpodobně Frega za přirozeného kandidáta na místo řádného profesora.⁶⁵⁾ Ten se nyní svou atypickou prací v záhadné, s matematikou (jak se zdálo) jen okrajově související oblasti zřejmě připravil o všechny šance, a Abbe se tak ve svém dobrozdání⁶⁶⁾ k mimořádné profesuře ani nesnaží zakrývat zklamání, když o *Begriffsschrift* píše: »*Jedná se jen o vedlejší produkt jeho matematického bádání; [...]. Za šťastný autorský debut proto tuto publikační prvotinu svého kolegy nemohu považovat; důkladně číst ji bude jen málokdo a ještě méně bude těch, kdo ji pochopí a ocení.*« Napáchané škody se pak pokouší alespoň minimalizovat: »*Jakkoli však dopadne konečný soud o významu a nosnosti dr. Fregem rozvíjených idejí, nelze dle mého mínění pochybovat o následujícím: za prvé, že člověk, jenž při své matematické práci vytvoří logickou studii takto obecného zaměření, jistě ve své vědecké domácnosti nežije z ruky do úst; za druhé, že způsob, jímž jsou v tomto malém spisu pojaty a diskutovány logické a matematické problémy, nese pečeť originálního bádání a prozrazuje neobyčejnou sílu ducha.*«

Na základě Abbeho posudku vystavená žádost fakulty o Fregovo jmenování extraordinariem klade důraz zejména na jeho činnost matematika a pedagoga: »*Ač pramálo schopen získat mimořádný potlesk průměrného studenta, dosáhl blahodárné a nyní velmi cenné učitelské působnosti díky tomu, že si lepší část našich studentů matematického oboru postupně uvědomila, co jsou jim jeho přednášky s to nabídnout. Ve skutečnosti je dr. Frege s ohledem na velkou jasnost a preciznost svých přednášek a vzhledem k uvážlivosti svého výkladu obzvláště uzpůsoben uvádět příčinlivé posluchače do obtížné látky matematického studia [...].*«⁶⁷⁾ Ministerstvo dává souhlas k Fregově jmenování ještě téhož roku. Katedru získává spolu s vedením matematického semináře Johannes Thomae z Freiburgu, dodnes známý především z polemik, jež Frege vedl s jeho formalistickou koncepcí matematiky.

2.1.4 Krize

Chladné přijetí *Begriffsschrift* nejspíš uvrhlo Frega do osobní krize spojené s rozhodováním, zda bude pokračovat v práci na základech matematiky a nové

⁶⁵⁾ K této hypotéze viz *Kreiser* [2001], 364sqq].

⁶⁶⁾ Dále citováno podle *Stelzner* [1997].

⁶⁷⁾ Citováno podle *Kreiser* [2001], 360].

logice, bez valné naděje na uznání a zisk (kurz *Begriffsschrift* neměl obvykle více než dva až tři posluchače, často jej nenavštěvoval vůbec nikdo), či zda se etabluje v nějaké klasické matematické disciplíně – jak to očekával Abbe –, s vyhlídkou na dobře placené místo řádného profesora. Fregovo dočasné působení na soukromé střední škole v letech 1882 až 1884 je možná právě projevem této nejistoty ohledně další univerzitní dráhy. Výmluvná je v této souvislosti poznámka z Thomaeova dopisu příteli, v níž se zmiňuje o situaci na katedře: »*Co se týče kolegů, nic se nezměnilo. Frege jde stále svou cestou, která ho neposouvá příliš kupředu. Kromě toho ještě vyučuje na jednom institutu. Je mu již 33 let.*«⁶⁸⁾ O tom, jak se Frege rozhodl, svědčí část žádosti o jeho povýšení, podané o více než deset let později: »*To, že prof. Frege nebyl brán při obsazování kateder na vysokých školách dosud v úvahu, tkví jistě ve věrnosti, s níž lpí na problémech, jejichž zvládnutí si určil za svůj životní úkol.*«⁶⁹⁾

Nejspíše to byla rada Brentanova žáka a toho času v Praze působícího filosofa Carla Stumpfa,⁷⁰⁾ co přivedlo Frega k nápadu, aby před vlastním výkladem svých výzkumů v oblasti základů aritmetiky vydal spis přístupnější širšímu čtenářskému okruhu, spis, v němž by své myšlenky vysvětlil a popularizoval. Proto roku 1884 vycházejí *Die Grundlagen der Arithmetik*, uvozené rozsáhlou pasáží filosofickou a prosté jakéhokoli symbolismu. Historie se však opakuje. Knize je věnováno pouhých pět recenzí, tři z nich vyloženě nepřátelské (uznalé pasáže se pak vztahují pouze na první, »kritickou« část),⁷¹⁾ přičemž zvláště hořký musel být pro Frega posudek Cantorův, kterého sám považoval za jednoho z mála spřízněných badatelů v oboru. Cantor, jehož teorie množin byla stran matematiků vystavena stejnému nepochopení jako Fregova logika, zcela minul jádro Fregova výkladu a podstatnou část své recenze postavil na hrubém popření Fregova (oprávněného) tvrzení, že v knize zavedený pojem »kardinálního čísla« (*Anzahl*) odpovídá Cantorovu termínu »mohutnosti« (*Mächtigkeit*).⁷²⁾

⁶⁸⁾ Dopis otištěn in: *Dathe* [◁1997◁].

⁶⁹⁾ Citováno podle *Kreiser* [◁2001◁, 386]. Pozoruhodné je, že autorem zmíněné žádosti je zřejmě Johannes Thomae, který tak projevil vůči Fregovi, s nímž vedl velmi ostré vědecké spory, pozoruhodnou míru vstřícnosti a taktu.

⁷⁰⁾ Viz [WB, 256sq].

⁷¹⁾ Recenze jsou otištěny in: *Frege* [◁1984◁, 109-128], spolu s vyjádřením Schröderovým z [VA₁, 704] a Husserlovým z [PA, 129-135], Fregovou odpovědí na Cantorovu recenzi (*Frege* [◁1885◁]) a Scholzovou recenzí nového vydání spisu z roku 1934.

⁷²⁾ V publikaci *Frege* [◁1984◁, 119] je otištěna poznámka Zermelova, připojená ke Cantorově recenzi ve sborníku *Cantor* [GAC, 441], v níž je vyjádřeno politování nad tím,

Jak těžce na Frege nepříznivý ohlas na obě jeho uveřejněná díla dopadl, lze vyčíst z úvodu k jeho hlavnímu dílu, *Grundgesetze der Arithmetik*, v němž o deset let později označuje za důvod jeho zpoždění »malomyslnost, která mne načas přemohla v důsledku přijetí, nebo lépe řečeno, nepřijetí mých výše jmenovaných spisů matematiky [...]« [GG₁, XI]. Zatímco kritikům své *Begriffsschrift* čelil zjevně s otevřenou myslí a zápalem pro věc samu, od zveřejnění *Grundlagen* se v jeho spisech začíná objevovat zahořklý a osobní tón,⁷³⁾ s trvajícím opomíjením ze strany kolegů přecházející až v urážky na cti. Divoký sarkasmus, s nímž koncem devadesátých let napadá nešťastný Schubertův příspěvek o čísle do *Encyklopedie matematických věd*, stejně jako jeho osobitý, britký a průhledný literární styl, má ve filosofii obdobu snad jen v polemikách Schopenhauerových,⁷⁴⁾ s nímž tak sdílí nejen výbušnou letoru, ale i trpkou zkušenost ignorovaného. Na rozdíl od velkého pesimisty však není Frege finančně nezávislý, a proto mají jeho výbuchy vzteku fatální, i když celkem po-

»že si – jak ukazuje tato recenze – oba současníci, velký matematik a zasloužilý logik, tak málo porozuměli«.

⁷³⁾ V recenzi »na oplátku« píše Frege o jednom z Cantorových článků roku 1892: »Kdyby pan Cantor mé »Základy aritmetiky« nejen recenzoval, ale při jejich čtení také přemýšlel, mohl by se vyhnout mnoha chybám. Již dávno jsem v nich dokázal to, oč se zde on marně snaží.« Frege [1892].

⁷⁴⁾ Frege svůj pamflet uvádí těmito slovy: »Můj první dojem [z Schubertova pojednání] nebyl příznivý; pozvolna se mi však mysl rozjasnila. To, co jsem zprvu považoval za nedostatek, neduh, ba za smrtelnou nemoc, naučil jsem se oceňovat jako nejvlastnější sílu. Byl jsem jen zpočátku příliš zajat v dřívě tak běžném přeceňování přemýšlení. Jen pozvolna jsem se dokázal propracovat k svobodnějšímu stanovisku. Ve skutečnosti!, není přemýšlení pro vědu častěji spíše překážkou nežli silou pohánějící vpřed? Kolik nepřijemných, vedlejších a cestu křížících otázek nám přemýšlení předhazuje; otázek, které by bez něho jednoduše vůbec ani nevznikly? Kolik sil je takovýmito otázkami odvráceno od hlavních problémů, a je tak pro pokrok vědy zcela ztraceno? O kolik stručnější, pohodlnější, ano, o kolik jasnější by bylo vše, kdybychom kameny vrhané myšlením do cesty nechali ležet stranou. S nepřemýšlením, tolik spřízněným s Léthé, je také – domnívám se – nalezen balzám, který utiší ony zkraje zmíněné útrapy. | Čím déle jsem se zabýval souhrnem nauk, které mne podnítily k tomuto poznání, tím více jsem nabýval přesvědčení, že jejich pěstění zajistí u našich potomků konci devatenáctého století zvláštní slávu. Pak bude klasické pojednání pana Schuberta jmenováno v první řadě. Avšak příliš mohutné je ono dílo, než aby pouhému jednotlivci směla připadnout čest přivést jej k naplnění. Múza dějin shledá, že věnec slávy je nutné rozložit na menší; a tu se otevírá vyhlídka na získání alespoň jeho části, byť by to byl jen jediný lístek vavřínu. Tomuto pokušení jsem nemohl odolat.« [ZS, IV]

chopitelné konsekvence. Svými útoky na úspěšnější kolegy si jistě mnoho přátel nenadělal, ve svých pracích nikoho necitoval, a ani citovat nepotřeboval (skandál!), tudíž i jeho citovanost byla zanedbatelná, a představitelé fakulty (kteří se ostatně o žádné jiné prameny ani nemohli opřít) tedy neměli žádný důvod pro uspíšení jeho kariérního postupu, a tím i řešení jeho nelehké finanční situace. Jejího zlepšení se Frege dočkal až roku 1886, a to nikoli z iniciativy školy, ale z prostředků fondu, který Ernst Abbe založil ze svého podílu na stále úspěšnějším podnikání v optice a při jehož zřízení na ministerstvu (čehož důvodem byla také anonymita donátora) si vymínil zvýšení Fregova platu na 2 000 marek ročně s tím, že mu bude udělen dekret (*Lehrauftrag*) na přednášku z analytické mechaniky, pro níž by jinak bylo zapotřebí najmout novou, z rozpočtu (*Etat*) placenou sílu. Před tímto zvýšením, do roku 1885, pobíral Frege pouze 300 marek. Jeho ›*Kolleggeld*‹ pak v celoživotním průměru zřídka kdy přesáhlo 100 marek a většinou odpovídalo částce, kterou byl jeho plat zdaněn. Podle Stelznerova zjištění se po Abbeho donaci »*Frege se svým platem dostal na dolní hranici střední třídy, stále hluboko pod plat ostatních úředníků a nezávislých*«. ⁷⁵⁾

2.1.5 Honorarordinarius

Fregovo ›opus magnum‹, *Grundgesetze der Arithmetik*, vyšlo sice až roku 1893 – a to vlastně jen jeho první díl, neboť jediný nakladatel, který jej byl ochoten vydat, podmínil vydání druhého dílu úspěchem dílu prvního – nicméně uplynulých deset let od vydání *Grundlagen* podle Fregových vlastních slov »*neuplynulo marně: dílo mohlo dozrát*« [GG₁, X]. Byly to roky zasvěcené cizelování pojmového aparátu.

Roku 1891 vychází článek *Funktion und Begriff* (Funkce a pojem), o rok později pak *Über Sinn und Bedeutung* (O smyslu a významu) a *Über Begriff und Gegenstand* (Pojem a předmět); všechno klasické práce logické analýzy jazyka. Začátek devadesátých let je také dobou Fregovy korespondence s Husserlem, který mu roku 1891 zaslal svoji *Philosophie der Arithmetik* (Filosofie aritmetiky), v níž o Fregových *Grundlagen* kriticky, nicméně s respektem referuje. ⁷⁶⁾ Fregova recenze této knihy z roku 1894 odvrátila sice s velkou pravdě-

⁷⁵⁾ Stelzner [1997], 23], srv. také Stelzner [1996].

⁷⁶⁾ V jednom z dopisů Fregovi Husserl píše: »*I když nemohu s Vašimi teoriemi souhlasit, co se týče jádra věci, stále se obdivuji duchaplné originalitě, jasnosti a skoro bych chtěl říci: poctivosti Vašeho bádání, které nezamlčí žádnou pochybnost, je prostě každé*

podobností Husserla od psychologických tendencí, a ovlivnila tak zřejmě nepřímo i vznik fenomenologie, prudkostí svého antipsychologického výpadu však ochladila jejich vzájemný vztah natolik, že si roku 1932 v odpovědi zřizovateli Fregova archivu, profesoru Scholzovi, Husserl odmítá vzpomenout na podnět své a Fregovy korespondence, a dodává: »*Obecně tehdy platil [Frege] za podivína, který je sice ostrovtipný, ale ničím nepřispívá ani matematice, ani filosofii.*« [WB, 92] – Lepší ukázkou oprávněnosti Fregových slov, v nichž hodnotí výhledy svých *Grundgesetze* jako mizivé, neboť matematici při přečtení výrazů jako “pojem”, “relace” či “soud” vykřiknou »*metaphysica sunt, non leguntur!*«, zatímco ze strany filosofů spatřících formule zaznívá »*mathematica sunt, non leguntur!*« [GG₁, XII], si lze jen stěží představit.

Písemný kontakt s Peanem zhruba ze stejné doby, ač není průlomem v šíření Fregových myšlenek, přece jen znamená blýskání na lepší časy a je také základem pro pozdější (mnohem pozdější) proniknutí Fregových myšlenek do zahraničí. Peanova uznalá slova jsou rovněž, spolu s vyjádřením Dedekindovým, podkladem pro žádost o Fregovo jmenování Honorarordinariem (*ordentlicher Honorarprofessor*). Tato funkce však – jak již její název napovídá – byla pouze čestná, titulární, tedy bez katedry, a tím i jakéhokoli právně zakotveného vlivu na chod fakulty či univerzity. Senát sestával výhradně z řádných profesorů, mezi něž ovšem do konce svého života Frege nepatřil.

Honorarordinariem byl jmenován až roku 1896, a to zřejmě v reakci na intervenci profesora Abbeho, který zajistil hrazení čestné profesury prostřednictvím *Carl-Zeiss-Stiftung*, nadace, kterou po Zeissově smrti vytvořil z již zmíněného ministerského fondu. Takto se sice Fregův plat nezvýšil, profesura však byla uznána za rozpočtovou (*Etatstelle*), a získala tak status pevného, doživotního nároku. Původní příspěvek nadace Fregovi byl navíc záhy navýšen o 500 marek. To zřejmě umožnilo uhradit náklady na dotisk druhého dílu *Grundgesetze* roku 1903. O rok dříve, to jest v době, kdy byla jeho kniha již v tisku, však Frege zjišťuje, že mlčení kolegů a malý náklad není to nejhorší, co mohlo jeho dílo potkat. Právě v této době jej totiž zastihuje dopis od Bertranda Russella, sdělující mu, že systém *Grundgesetze* obsahuje spor.

2.1.6 Paradox

Roku 1900 se lord Russell, pracující již několik let na knize o základech matematiky (*The Principles of Mathematics*), seznámil na mezinárodním filoso-

neurčitosti v myšlenkách a slovech a všude se snaží proniknout až k posledním základem.« [WB, 99]

fickém kongresu v Paříži s Giuseppem Peanem a jím prezentovaná matematická logika jej zaujala natolik, že se svá bádání rozhodl založit právě na ní⁷⁷⁾ –, podobně jako Frege tedy vytyčil program logizace matematiky. Na jaře roku 1901, v souvislosti se studiem Cantorova díla, Russell objevil známý paradox ›množiny všech množin, které nejsou svými vlastními prvky«. Tento se zdál ohrožovat nejen jeho knihu, ale všechny obdobné systémy současníků. Když roku 1902 začal podrobně studovat Fregovo dílo, s překvapením zjistil nejen to, že jsou v něm anticipovány mnohé z jeho vlastních objevů a že je Frege v práci na logickém založení aritmetiky vlastně mnohem dál, ale také, že se zmíněný paradox dotýká i Fregových *Grundgesetze*. Dne 16. června 1902 pak píše Fregovi dopis, v němž mu objev paradoxu sděluje a zároveň vyjadřuje uznání jeho práci: »[...] u Vás jsem našel to nejlepší, co je mi z naší doby známo, a proto si dovoluji vyjádřit Vám svůj nejhlubší respekt.« [WB, 212] První opravdové pocty se tak ironicky Fregovu celoživotnímu dílu dostává zároveň se zprávou, v jejímž světle se může jevit jako zcela bezcenné. Ve své odpovědi Frege píše: »Váš objev sporu mne nanejvýš překvapil a skoro bych řekl, že mnou otrásl, neboť je tím zpochybněn základ, na němž jsem se domníval vystavět aritmetiku.« [WB, 213] Celková situace je navíc o to tíživější, že druhý díl *Grundgesetze* je již připravován k tisku a v chvatu načrtnutý pokus o odstranění paradoxu by celý systém evidentně paralyzoval k nepoužití. V hluboké depresi tedy Frege pouze přidává na závěr knihy doslov, v němž o Russellově antinomii a jejích důsledcích stručně informuje: »Vědeckému spisovateli se sotva může přihodit něco nepříjemnějšího, než že se mu po dokončení práce zhroutí jeden ze základů stavby. Do této situace mne dostal dopis pana Bertranda Russella ve chvíli, kdy se tisk tohoto svazku chýlil ke konci.« [GG₂, 253]

2.1.7 Život po paradoxu

Roku 1924 si Frege do svého deníku poznamenal: »Mé úsilí o vyjasnění toho, co nazýváme číslem, skončilo neúspěchem.« [T, 1073] Rezignace, kterou lze z této noticky vyčíst, spojená s nostalgií (»Zázrak čísla.« [AD_N, 276]), jsou zvláště patrnými průvodními jevy oněch dvaceti tří let Fregova života po odhalení paradoxu. Roku 1906 píše Johannes Thomae kurátoru von Eggelingovi ohledně potřeby nového asistentského místa v matematickém semináři, z něhož se Frege začal postupně vyvazovat: »Máme zde ještě kolegu Frega. Bohužel nemohu zamlčet, že jeho působení v poslední době upadá. Důvody se neda-

⁷⁷⁾ Viz Russell [MPD, k. 6].

jí spolehlivě zjistit. Snad je lze hledat ve Fregových hyperkritických sklonech.«⁷⁸⁾ Z textu lze jasně seznat, že v Německu zůstala Fregova práce, v zahraničí (zejména Russellovou zásluhou) stále více doceňovaná, jen něčím, vůči čemu lze pouze projevovat ›hyperkritické sklony‹. Toto zlehčování důsledků Russellova paradoxu pro Fregovo dílo a pro základy matematiky vůbec, kterého se ve společných debatách Thomae pravděpodobně dopouštěl, bylo zřejmě také příčinou jednoho z Fregových nejostřejších osobních útoků vůbec, a to v článku *Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae* (Odpověď na prázdninové povídání pana Thomae), vydaném v témže roce. Thomae, který se zřejmě po léta snažil ve vztahu k univerzitě nedat najevo jakoukoli osobní nelibost vůči Fregovi, jehož nelitostná kritika formálních teorií aritmetiky jej pronásledovala již po desetiletí,⁷⁹⁾ však svým dopisem zásadně ovlivnil postoj fakulty k Fregově osobě, postoj, který se po Abbeho smrti roku 1905 zhoršoval víc a víc. Na základě Thomaeova dopisu píše kurátor von Eggeling vládním úřadům ve své zprávě: »Čestný profesor, dvorní rada dr. Frege se nikdy nestal dobrým docentem, podlomem osobní tragédií a zrazen svými hyperkritickými sklony ohledně naplnění své úspěšné vědecké činnosti.«⁸⁰⁾ O dva roky později pak von Eggeling odmítá návrh na větší oslavu Fregových šedesátin s poukazem na podřadný význam jeho učitelské činnosti pro univerzitu. Fregova vědecká práce těchto let je skromná a omezuje se prakticky jen na pokračování debaty s Davidem Hilbertem. Ta započala vzájemnou korespondencí z počátku století a točila se především kolem ›implicitní definice‹, pojmu raženého Hilbertovými *Grundlagen der Geometrie* (Základy geometrie), a otázek kritéria matematické pravdy. Poté, co Hilbert s odvoláním na nedostatek času korespondenci ukončil, obnovil debatu na stránkách *Jahresberichte* roku 1906 Alwin Korselt.⁸¹⁾ Korespondence s Löwenheimem, jenž se pokoušel Frega přesvědčit o možnosti korektního vystavení formalistické aritmetiky, bohužel vzala za své při zničení Scholzova archivu bombardováním Münsteru roku 1945. Teprve po svém penzionování roku 1918 napsal Frege ještě tři významné články, pravděpodobně koncipované jakožto část souhrnné prezentace své logiky v rámci cyklu *Logische Untersuchungen* (Lo-

⁷⁸⁾ Citováno podle Kreiser [1983], 338].

⁷⁹⁾ Aniž by si ovšem vzal k srdci cokoli z Fregových výtek, jak již to ostatně napovídá samotný podtitul příspěvku, na nějž Frege s takovou zlostí reagoval, tj. "Ferienplauderei" (viz Thomae [1906]). Ke vztahu obou matematiků srv. Stelzner [1997], 24], Dathe [1997], 92] a Kreiser [2001], k. 3.6.1]

⁸⁰⁾ Citováno podle Kreiser [1983], 338].

⁸¹⁾ Viz Frege [UG₂].

gická zkoumání); jsou to *Der Gedanke* (Myšlenka), *Die Verneinung* (Negace), *Gedankengefüge* (Spojení myšlenek). Jinak zůstává Frege v posledních dvou desítkách let svého života opět zcela stranou veřejného vědeckého života. Tentokrát však zcela dobrovolně. Na Russellovu nabídku přednášky na kongresu v Cambridge odpovídá: »Uznávám, že mám důležité důvody, abych do Cambridge jel, a přece cítím něco jako nepřekonatelnou překážku.« [WB, 252] Na své dřívější plány logického založení matematiky pak postupně zcela rezignuje. »Russellova Principia se mi čtou velice obtížně; zakopávám takřka o každou větu« [WB, 129], píše roku 1914 v dopise Jourdainovi o teorii typů, kterou se Russell svému paradoxu vyhnul; Zermelovu axiomatickou teorii množin, zdá se, vůbec nezná. Přesto však nezůstalo toto období Fregeova života zcela bez vlivu. Má osobní podíl na dalším filosofickém vývoji dvou významných, ne-li nejvýznamnějších postav logiky dvacátého století: Ludwiga Wittgensteina a Rudolfa Carnapa.

2.2 OSOBNOST

›Osobní tragédií‹, o níž se kurátor Eggeling ve výše uvedené ministerské zprávě zmiňuje, bylo úmrtí Fregeovy manželky Margarete roku 1904. Margarete Frege, rozená Lieseberg, pocházela rovněž z Wismaru. Frege se s ní oženil roku 1887, ve svých 39 letech. Margarete bylo tehdy 32 let. V téže roce se také přestěhovali do nového domu, financovaného Fregovou matkou, která žila se svým synem ve vlastní domácnosti od svého přestěhování z Wismaru roku 1881. K němu došlo čtyři roky poté, co se vzdala řízení školy. Důvod, proč neodešla k Fregovu o čtyři roky mladšímu bratru Arnoldovi, zůstává neobjasněn. Snad to souvisí s Fregovou osobní krizí začátku osmdesátých let. O Arnoldovi samém není známo takřka nic. V úředních záznamech je veden jako spisovatel a z řízení, vedeného v souvislosti s Fregovým úmrtím, vyplývá, že vztahy obou bratrů nebyly nijak vřelé.⁸²⁾

V průběhu devadesátých let onemocněla Margarete Frege podle všeho vážnou chorobou. Zřejmě v důsledku toho se již nemohla starat o Fregovu matku, která proto roku 1896 odchází do katolického domova pro přestárlé, kde o dva roky později umírá. Manželský pár rok na to podává inzerát, v němž hledá hospodyni ›für Küche und Haus‹. Dvacetiletá Meta Arndt, která se o místo přihlásí, se pak stará o Fregovu domácnost až do jeho smrti.

⁸²⁾ Viz Kreiser [2001], 41, 567].

2.2.1 Alfréd

Úmrtí Margarete roku 1904 zanechalo Frega bez potomků. Z Wittgensteinových vzpomínek na první návštěvu u Frega nicméně vyplývá, že manželství bezdětné nebylo, děti však zemřely v raném věku: *»Napsal jsem Fregovi dopis, v němž jsem mu předložil některé námitky k jeho teoriím, a čekal úzkostlivě na odpověď. K mé velké radosti Frege odepsal a požádal mě, abych přijel a navštívil ho. Když jsem přijel, viděl jsem skupinu chlapeckých školních čapek a slyšel křik chlapců hrajících si v zahradě. [...] Frege, jak jsem se dozvěděl později, měl velmi smutný manželský život – jeho děti zemřely mladé a jeho žena též; měl adoptivního syna, jemuž byl, jak věřím, laskavým a dobrým otcem.«⁸³⁾ Adoptivním synem, a zřejmě také jedním z dětí, nejspíše spolužáků, hrajících si v zahradě, byl tehdy již desetiletý Alfréd Fuchs.*

Alfréd Fuchs se narodil roku 1903 v nešťastných rodinných poměrech. Jeho otec skončil v ústavu pro choromyslné a matka zemřela roku 1910, v době, kdy již dávno nebyla schopna o Alfréda a jeho o dva roky mladší sestru Toni pečovat. Děti tehdy žily na faře spravované prasynovcem Fregovy matky, pastorem Johannesem von Lüpke. On také dozajista svému osobně i vědecky zlomenému strýci, léčícímu se od roku 1905 opakovaně na nervovou slabost, adopci navrhl a zprostředkoval. Frege následně převzal nad oběma sourozenci opatrovnictví. Vzhledem ke svému vysokému věku a skromným prostředkům si však k sobě nemohl vzít obě děti, Toni proto nakonec musela odejít do dětského domova.

Že měla adopce blahodárný vliv nejen na stárnoucího Frega, lze vyčíst již ze zápisů farní kroniky. Tam se mimo jiné píše: *»Chlapec se zdál být zcela zkažený a sedláci ho po selském způsobu myšlení měli za bezvýchodně ztracený případ. V novém opatrovnictví se z něj však brzy vyklubal dobrý, poslušný chlapec a při své návštěvě záhy překvapil všechny, kdo ho dříve znali.«⁸⁴⁾ Pečlivou výchovou dovedl Frege chlapce až ke studiu techniky. Poté, co ji Alfréd roku 1929 dostudoval, nejsou již o něm takřka žádné zprávy. Víme jen, že padl ve druhé světové válce roku 1944 v Montessonu u Paříže. Jeho sestra zemřela roku 1990.*

⁸³⁾ Citováno podle Kreiser [⟨2001⟩, 497]. Kreiser se domnívá, že se zde Wittgenstein nejspíš mylí, neboť jakékoli jiné zprávy či záznamy o Fregových vlastních dětech nejsou známy.

⁸⁴⁾ Citováno podle Kreiser [⟨2001⟩, 500].

2.2.2 Posluchači

Zatímco o Wittgensteinově kontaktu s Fregem jsou známy jen velmi kusé zprávy, Carnap u Frega několik let studoval, a v jeho vzpomínkách tak máme zachováno jedno z mála souvislých svědectví o Fregově osobě a jeho pedagogickém působení. Carnap píše:

»Na podzim roku 1910 jsem navštívil Fregův kurz “Begriffsschrift” (pojmové písmo, ideografie); ze zvědavosti, aniž bych věděl něco o přednášejícím či tématu, s výjimkou přítelovy poznámky, že to někdo označil za zajímavé. Studentů tam byl jen velmi malý počet. Frege vypadal velmi staře. Byl malé postavy, spíše plachý, extrémně introvertní. Jen zřídka se díval do publika. Zpravidla jsme viděli jen jeho záda, zatímco psal na tabuli své záhadné diagramy a vysvětloval je. Nikdy se nestalo, že by student vznesl poznámku, ať již během přednášky či po ní. Zdálo se, že diskuse vůbec nepřipadá v úvahu. | Ke konci semestru Frege naznačil, že nová logika, do níž nás uvedl, by mohla sloužit k rekonstrukci celé matematiky. Tato poznámka vzbudila naši zvědavost. V letním semestru roku 1913 jsme se já a můj přítel rozhodli navštěvovat Fregův kurz “Begriffsschrift II”. Tentokrát sestávala celá třída z nás dvou a armádního majora ve výslužbě, studujícího některé z nových matematických idejí jako koníčka. Od tohoto majora jsem také poprvé slyšel o Cantorově teorii množin, o níž se do té doby žádný profesor nezmínil. V této malé skupině se Frege cítil mnohem volněji a trochu roztál. Otázky či diskuse stále nepřicházely v úvahu, ale občas učinil kritickou poznámku o jiných koncepcích, někdy s ironií, či dokonce sarkasmem. [...] | Ve vyšším kurzu Begriffsschrift Frege vysvětlil různé aplikace, mezi nimi některé, jež nejsou obsaženy v jeho publikovaných spisech, např. definici spojitosti a limity funkce či rozdíl mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí. Všechny tyto pojmy bylo možné vyjádřit s pomocí kvantifikátorů, které se v jeho systému logiky objevily vůbec poprvé. Předvedl také ukázkou logické chyby v ontologickém důkazu Boha. | Ačkoli Frege podal ne jeden příklad zajímavé aplikace svého symbolismu v matematice, obecné filosofické problémy obvykle nediskutoval. Z jeho díla je zřejmé, že považoval svůj nový nástroj za filosoficky velmi významný, nám o tom však nedal žádný jasný náznak. Ačkoli jsem se tedy o jeho systém logiky intenzivně zajímal, nebyl jsem si tehdy jeho velkého filosofického významu vědom. Teprve mnohem později, po první světové válce, když jsem četl Fregovy a Russellovy knihy s větší pozorností, rozpoznal jsem hodnotu Fregova díla nejen ve vztahu k základům matematiky, ale i pro filosofii obecně.«⁸⁵⁾

⁸⁵⁾ Carnap [⟨1963⟩, 5-6].

Carnapovým vzpomínkám o průběhu Fregových přednášek odpovídají také zápisky jeho spolužáka Wilhelma Flitnera, jenž o Fregovi píše: *»Abbeho následník, Siegfried Czapski, jej považoval – jak jsme věděli od jeho děti – za nejvýznamnější hlavu univerzity. Přesto měl Frege obtíže vůbec své přednášky realizovat. “Tres faciunt collegium” bylo tehdy stále ještě platné pravidlo, přičemž se započítával i docent. Řadu semestrů musely přednášky odpadnout, neboť Carnap nesehnal druhého posluchače. Tak mě naverboval a já navštěvoval mimořádně poutavou logickou přednášku o “Pojmovém písmu”; v dalším semestru fungoval jako třetí muž bratr Julia Frankenbergera [...]. Ačkoliv byl naším sousedem na Forstweg, viděli jsme podprůměrně vysokého muže jen zřídka, nanejvýš když s pohledem k zemi a rukama za zády kráčel přes Forstwegbrücke a pak zmizel ve svém domě. Na přednášce se sotva podíval na své posluchače, byl pouze zaujat symboly, které psal na tabuli, plně obrácen do sebe a zcela u věci ›logika‹.«⁸⁶⁾ Podobně vzpomíná i Gershom Scholem, který v Jeně studoval v letech 1917 a 1918: *»Frege byl jistě široko daleko nejvýznamnější hlava filosofické fakulty, muž, který je ve vědě slavný ještě dnes. V Jeně byl pouze trpěným přívěskem, jež nikdo nebral vážně. [...] Na Fregovi, který byl skoro stejně starý jako Eucken a jako on nosil bílý plnovous, se mi líbilo především jeho zcela nepompézní vystupování, které ve srovnání s Euckenovým zvláště vynikalo. Ale v Jeně bral Frege sotvakdo vážně.«⁸⁷⁾**

2.2.3 Cesta k moři

Základní rysy Fregovy povahy, plachost a uzavřenost, potvrzují i další kusá svědectví nashromážděná Kreiserem. Dcera dr. Schöna, který s rodinou ve Fregově domě od roku 1913 bydlel a později ho i odkoupil, ve svém dopise píše: *»Profesor Frege byl velmi laskavý, vřidný starý pán, extrémně skromný, plachý a skoupý na slovo. Měli jsme před ním obrovský respekt.«* Z dopisu se také dovídáme o Fregově celoživotním obyčeji – pěší cestě na sever: *»V létě, během dlouhých univerzitních prázdnin, cestoval prof. Frege rok co rok do své meklenburské vlasti. Měl svoji speciální trasu, nocoval vždy ve stejných hostincích. Ani zpět nevyužíval železnice. Na tento výlet si s sebou bral Bleyleiv těsně přiléhající oděv, tytéž boty, tlustou hůl do ruky a ruksak na záda. Z celého srdce mě těší, že se tento skromný a velkým osobním utrpením strádající člověk dočkal uznání alespoň posmrtně.«⁸⁸⁾*

⁸⁶⁾ Citováno podle Kreiser [2001], 277].

⁸⁷⁾ Citováno podle Kreiser [2001], 469].

⁸⁸⁾ Citováno podle Kreiser [2001], 487].

Ze zmínek v dalších vzpomínkách současníků vyplývá, že každoroční výprava do Meklenburska nebyla jenom příležitostnou návštěvou příbuzných, nýbrž činností, jíž si Frege dopřával pro vlastní potěšení. Historik Cartellieri, jenž znal Frega především z náhodných setkání na ulici, v níž oba bydleli, venčili (a odtrhávali od sebe)⁸⁹⁾ své psy, v této souvislosti o Fregovi říká: *»Vyprávělo se o něm, že – ač zde byl řádným Honorarordinariem, proslavil se jako významný učenec dílem až po své smrti. Každoročně cestoval pěšky se svým psem k moři a líčil mi příležitostně, jak velké kouzlo mají chvíle, kdy se na horizontu pozvolna vynořují ještě vzdálené linie hor a kdy opět mizí. Z toho má člověk víc nežli ze spěšné jízdy vlakem. Bylo velmi zajímavé mu při tom naslouchat.«⁹⁰⁾*

Odlehčeným způsobem se v jedné ze vzpomínek dostává Fregovo putování na sever do souvislosti s jeho jmenováním dvorním radou (*Hofrat*). Tento společensky významný titul byl Fregovi udělen spíše náhodou roku 1903 jako ukvapená reakce kurátora na výzvu sasko-výmarského knížete, aby se u příležitosti jeho sňatku rozdalo co nejvíce řádů a vyznamenání. Ve Fregově příbuzenstvu se prý s oblibou vyprávěla následující příhoda: *»Když Frege ve svém zgruntu rustikálním cestovním oděvu chtěl cestou dostat pokoj v nějakém dobrém hotelu, byl občas odbyt portýrem, že je vše obsazeno, ačkoliv ve skutečnosti nepovažoval vandrovníka za solventního. Nato ho G. F. zdvořile požádal, zda by se alespoň nepodíval, jestli nepřišla nějaká pošta pro tajného radu Frega, načež se mu ihned otevřely dveře.«⁹¹⁾*

2.2.4 Wittgenstein

Wittgenstein, jenž Fregův prominentní vliv na své myšlení explicitně vyjádřil v úvodu k *Tractatu* ([TLP]) – který je ostatně vzhledem k úzké problémové spjatosti s Fregovým (a Russellovým) dílem těm, kdo tato neznají, v detailu nesrozumitelný –, navštívil, podle vyjádření jeho sestry, Frega ještě jako student berlínské techniky roku 1911: *»V této době či o něco později jej najednou uchvátila filosofie, tzn. přemýšlení o filosofických problémech, tak silně a zcela proti jeho vůli, že tímto dvojím a vzájemně si odporujícím vnitřním povoláním těžce trpěl a cítil se jako rozpolcený. [...] Pracoval tehdy na nějaké filoso-*

⁸⁹⁾ Cartellieri vypravuje, že při této příležitosti udeřila jednou jeho manželka deštníkem místo psa samotného Frega, a bylo jí od té doby velmi trapně, když se s ním na ulici setkala.

⁹⁰⁾ Citováno podle *Kreiser* [⟨2001⟩, 485].

⁹¹⁾ Citováno podle *Kreiser* [⟨2001⟩, 465].

fické práci a nakonec dospěl k rozhodnutí ukázat její plán profesorovi Fregovi z Jeny, jenž se podobnými otázkami zabýval. Ludwig se v těch dnech trvale nacházel v nepopsatelném, takřka chorobném rozrušení, a já se velmi obávala, že Frege, o němž jsem věděla, že je to starý člověk, nepřistoupí k této věci s trpělivostí a pochopením, jakých by si vážnost situace vyžadovala. Měla jsem tedy během Ludwigovy cesty za Fregem velké obavy a strach, vše ale šlo mnohem lépe, než jsem myslela. Frege podpořil Ludwiga v jeho filosofickém hledání a poradil mu, aby šel studovat do Cambridge k profesorovi Russellovi, což Ludwig také udělal.»⁹²⁾ Komplikovanost Wittgensteinova a Fregova vztahu (totéž platí o jeho vztahu s Russellem), zrcadlí se třeba jen v zcela typické averzi Wittgensteinových příznivců vůči Fregovým filosofickým naukám,⁹³⁾ opřené zcela evidentně o skutečnost, že jsou ve Wittgensteinových spisech zpravidla kritizovány, komentuje Alberto Coffa v úvaze k problému začlenění Wittgensteina mezi členy ›sémantické tradice‹ následovně:

»Potíž není ani tak v tom, že by se Wittgensteinovy úmysly zcela lišily od úmyslů Frega, Russella a jejich kolegů, ale že se jejich naděje zdály být Wittgensteinovými obavami, jejich projekty Wittgensteinovými terči; jejich nepřátelé Wittgensteinovými přáteli. Ani není pravda, že by měl Wittgenstein radikálně odlišný pohled na povahu logiky, matematiky či vědy než kdokoli jiný ze skupiny; v této tradici panovala vždy velká míra plurality. [...] Byl-li Wittgenstein

⁹²⁾ Rhees (ed.) [1992], 23sq; srv. také Rheesovu poznámku tamtéž.

⁹³⁾ Dva nejuznávanější vykladači Wittgensteinova díla G. P. Baker a P. M. Hacker podali ve své knize o Fregovi v tomto směru skutečně ojedinělý výkon. Stylizuje se v úvodu do role bořitelů fregovského mýtu a jeho ›naivní doktríny moderního pythagoreismu‹, zahrnují čtenáře až do konce své objemné knihy nepřebornými důkazy Fregovy (nejen!) filosofické nekompetentnosti, s evidentním, byť nepochopitelným záměrem nepřiznat mu ani tu nejmenší zásluhu na utváření moderního myšlení, to vše pokud možno za pomoci neotřelých a silných výrazů, s četností kolem šesti na stránku (a to skutečně bez nadsázky). I když šíře shromážděného materiálu dělá z knihy opravdu ojedinělý a cenný studijní zdroj, naprostý nedostatek té nejelementárnější vstřícnosti jí podstatným způsobem ubírá na výkladové hodnotě. Nezaujatý čtenář zmíněné knihy bude již po několika stranách souhlasit s tím, že její styl vystihují pozoruhodně Schopenhauerova slova z úvodu ke kritickému expozi Kantovy filosofie: *»Je mnohem snazší poukázat v díle velkého ducha na chyby a omyly, nežli podat jasný a úplný výklad jeho hodnoty. Neboť chyby jsou něco jednotlivého a konečného, a lze je proto úplně vyčíslit. Oproti tomu je to právě onen cejch, vtisknutý géníem dílu, co činí jeho význam nevýstižným a nevyčerpatelným: proto také stojí nestárnoucí mistři mnoha staletí vedle sebe.«* [Welt, svazek I, 561].

mezi sémantiky něco jako pátá kolona, bylo to proto, že od samého počátku patřilo jeho srdce jedné z nejromantičtějších, nejvíce iracionálních verzí idealismu. Jestliže to tak nevypadá, je to z větší části proto, že se připojil k táboru nepřítelů, aby odkrýval jeho chyby zevnitř, a z části i proto, že se mu dařilo získávat body spíše proti svému družstvu než na úkor svých oponentů.« [ST, 141sq]

Vhodným výkladem Fregova logického díla lze ukázat, že mu Wittgenstein dluží mnohem víc, než si on sám či jeho obdivovatelé byli a jsou ochotni přiznat (ve vztahu ke Carnapovi je naopak nutné zdůraznit, že se jeho sémantické studie, přes deklarovanou inspiraci, kryjí s Fregovými distinkcemi jen parciálně), a ve Wittgensteinových spisech často vyjadřovaný odstup lze možná vysvětlit i historií osobních vztahů obou velkých logiků, jak ji např. nacházíme vylíčenu ve vzpomínkách Wittgensteinovy sestry: »Ostatně musím zmínit,« píše, »že Ludwig, který se před válkou s profesorem Fregem spřátelil tak, že u něj víckrát strávil i několik dní, dal tomuto během války zaslat strojový opis začátku své knihy [míněn *Tractatus*]. Frege však překvapivě knize vůbec nerozuměl a zcela upřímně to také Ludwigovi napsal. Ludwig se mu názorově zřejmě nějak vzdálil a přátelství již nebylo po válce obnoveno.«⁹⁴ Stále trvajícím účtu a obdivu, i když v poněkud specifickém kontextu, resp. svým specifickým způsobem, vyjadřuje Wittgenstein v jedné ze svých pozdních poznámek: »Styl mých vět je mimořádně silně ovlivněn Fregem. A kdybych chtěl, mohl bych snad tento vliv ukázat tam, kde by jej na první pohled nikdo neviděl.« [Zet, 712] V poslední ze souboru *Rozličných poznámek*, datované roku 1951 (což je rok Wittgensteinovy smrti), čteme: »Nemůže sám sebe posuzovat ten, kdo se nevyzná v kategoriích. (Fregův způsob psaní je mnohdy velký; Freud píše znamenitě a je požitek jej číst, ale jeho psaní není nikdy velké.)« [VB, 573]

2.2.5 Pozůstalost

Frege byl roku 1917 z důvodů chronické neurastenie opětovně donucen požádat o uvolnění z výuky. Když další rok vypsál své dvě obligátní přednášky, nikdo se na ně nezapsal, a tím padl poslední důvod, proč by měl ve svých sedmdesáti letech ještě zůstat na univerzitě. Roku 1918 je proto na vlastní žádost penzionován, s důchodem odpovídajícím plně výši dosavadního platu. Ten do této doby zaznamenal zvýšení nejprve roku 1909 o dalších 400 marek z nadace a o dva roky později byl podle nové tabulky ministerstva navýšen na předepsaných 5 000 marek pro extraordinariát po dvaceti letech služby. Tím se

⁹⁴ *Rhees (ed.)* [1992, 27sq].

Frege ocitl na částce, kterou podle nové vyhlášky musel dostat řádný profesor jako nástupní plat.

Zároveň s odchodem do penze prodává Frege svůj jenský dům a vrací se zpátky do meklenburské vlasti, kde se spolu s Alfrédem a svojí hospodyní usazuje v Bad Kleinen, jižně od Wismaru. Toto přesídlení je však umožněno až díky finanční výpomoci Wittgensteinově. Většinu Fregových úspor nakonec stejně po válce znehodnotí inflace, takže Alfréd a Meta Arndt musí po Fregově smrti dům opustit a přestěhovat se do pronajatého bytu v Pastově u Rostocku.

V posledních letech svého života Frege definitivně opouští logicistickou ideu. S váhavostí jeho pozdních vyjádření na téma ›číslo‹ podivuhodně kontrastují slova z dopisu Karlu Zsigmondymu z tohoto období:

»Bude Vám známo, že jsem se velmi snažil objasnit to, co nazýváme slovem "číslo". Snad je Vám také známo, že toto úsilí zdánlivě vyústilo v úplný neúspěch. Ten působil jako dále trvajících vzruch, který v mém nitru nedovolil této otázce utichnout. Působil ve mně dále, ačkoliv jsem se tak říkajíc úředně o tuto věc více nesažil. A toto působení, které se ve mně odehrávalo nezávisle na mé vůli, překvapivě vrhlo znenáhla na celou otázku jasné světlo.« [WB, 270]

Fragment dopisu však končí příliš brzy a co má být oním ›světlem‹ zůstává nevyřčeno. Snad tím Frege míní svou myšlenku založit číslo na geometrii. Tento odvážný plán však začne realizovat příliš pozdě – kolem roku 1924 –, než aby stačil dokončit víc než jen pouhý nárys. Umírá 27. 7. 1925. V poznámce přiložené ke svým neuveřejněným spisům píše Alfrédovi prorocky:

»Milý Alfréde!

Neopovrhuj mnou napsanými rukopisy. I když všechno to zlato není, přece je zlato v nich. Věřím, že mnohé z toho bude jednou ceněno mnohem více než dnes. Dohlédni na to, aby se nic neztratilo.

V lásce tvůj otec

Je to velký kus mne samotného, který ti v tom odkazuje.«⁹⁵⁾

Od konce šedesátých let, kdy byla ukončena redakce spisů z Fregovy pozůstatosti, a od Dummettovy kanonické interpretace Fregových textů, čítající více stran než tyto texty samotné, se nejenže fregovská literatura stala – ne-li ještě nepřehlédnutelnou, pak alespoň – přehlédnutelnou velmi obtížně, ale bylo shromážděno i mnoho materiálů týkajících se samotného Frega – i když, přiro-

⁹⁵⁾ Citováno podle *Frege* [N, XXXIV].

zeně, dosáhnout jakýchkoli zpráv o člověku, jehož podobu z dospělosti⁹⁶⁾ máme zachycenu jen na dvou fotografiích, je úkol předem odsouzený k nejasnostem a dohadům.

2.2.6 Politika

Fregův nechvalně známý politický deník, nezařazený do vydání spisů z pozůstalosti, ale časopisecky publikovaný roku 1994 s doprovodným komentářem,⁹⁷⁾ přinesl s sebou otázky, na něž jednoduché odpovědi prostě neexistují, jak to snad ukazují i hořká slova, jimiž Michael Dummett, vážně se angažující v britské rasistické krizi šedesátých let, zakončuje předmluvu ke své monumentální knize o Fregově filosofii jazyka:

»Je v tom jistá ironie, že muž, jehož filosofickým názorům jsem v průběhu let zasvětil tolik času, byl přinejmenším ke konci svého života přesvědčený rasista, konkrétně antisemita. Tento fakt odhalil fragment deníku, který se zachoval mezi Fregovou pozůstalostí; profesor Hans Hermes jej však spolu s jejím zbytkem v rámci Freges nachgelassene Schriften nezveřejnil. Deník ukazuje Frega jako muže extrémně pravicových názorů, ostře se vyhraňujícího vůči parlamentnímu systému, [sociálním] demokratům, liberálům, katolíkům, Francouzům, a především židům, kteří by podle něj měli být zbaveni politických práv a v ideálním případě vyhnáni z Německa. Když jsem před mnoha lety poprvé tento deník četl, byl jsem hluboce otřesen, neboť jsem si Frega vážil jako absolutně racionálního muže, i když možná ne zrovna muže nejpříjemnějšího. Lituji, že se vydavatelé jeho pozůstalosti rozhodli speciálně tuto část vynechat. Dozvěděl jsem se z ní o lidech, a snad i o Evropě něco, co bych raději nevěděl.« [FPL, xii]

K obsahu deníku poznamenejme nejprve tolik, že kromě několika úvah věnovaných otázkám čísla (otištěných v [N]), jej spolu s poznámkami náboženského charakteru tvoří převážně úvahy politické. Jejich tón udává předvídatelným způsobem Fregův obdiv k Bismarckovi, který však nebyl ničím neobvyklým, vlastně jej sdílela většina členů jenského profesorského sboru. Za zmínku stojí, že Fregovi zastánci a oblíbení učitelé, Ernst Abbe a jeho tchán Carl Snell, k této skupině nepatřili – naopak, byli příznivci liberálně-levicových kruhů, které (jak Frege v deníku uvádí) Bismarck výslovně nazval nepřátelskými a za něž Snell dokonce několikrát kandidoval. Abbe sám na půdě Zeissova závodu

⁹⁶⁾ Kreiserova kniha obsahuje navíc rodinnou fotografii z Fregova dětství (odhaduji ve věku kolem deseti let) a z doby studií, asi kolem roku 1875.

⁹⁷⁾ Frege [T].

realizoval program zlepšení sociální situace dělníků, nebyl však žádným socialistou, jak také Frege nezapomíná ve svém deníku poznamenat:

»Profesor Abbe z Jeny byl jedním z nejušlechtilějších lidí, které jsem na své životní dráze potkal. [...] Abbeho kolébka stála v dělnickém domku. Z toho lze také vysvětlit jeho sociální smýšlení a jednání. V důsledku jeho příchodu do optických závodů byly zdokonaleny matematické teorie optických přístrojů, zvláště mikroskopu, a to vždy v užší návaznosti na potřeby a výsledky jejich aplikace. Tím dovedl Zeissový optický závod do plného rozpuku a stal se nakonec jejich ředitelem. [...] Majetek nadace byl jenom jeho dílem. Ve skutečnosti to byl velký dar dělníkům, podle Abbeho mínění jej však dělníci dosáhli sami, a právem jim tedy náležel. Byl to jeden z nejušlechtilějších a z ryzího křesťanství pocházejících pokusů o to, jak pozvednout dělníky v jejich hospodářské situaci, a tím i obecně.« [T, 1067]

Tento křesťanský počín volnomyšlenkáře Abbeho srovnává Frege s kázáním jistých sociálně smýšlejících teologů, jimž se sociální demokraté – jak vyplývá z dalších záznamů – nebezpečně podobají: *»Věří, že jsou svým křesťanstvím zavázáni k tomu, aby všude tam, kde dělníci a jejich zaměstnavatelé dospěli ke sporu ohledně platů či pracovní doby, přispěchali na pomoc dělníkům proti jejich zaměstnavatelům. Zatímco Abbe se snažil pozvednout hospodářskou situaci dělníků na vlastní náklady, chtějí tak tito teologové učinit na náklady cizí. Kvůli tomuto rozdílu tíhnu k názoru, že si přívlastky “evangelický” a “křesťanský” dávají vlastně neoprávněně, zatímco nepochybují ani na okamžik, že Abbeho velkorysý dar vzešel z pravého křesťanského smýšlení.« [T, 1068sq]*

O tom, že se Frege zajímal o společenské a politické otázky, a nebyl tedy uzavřen jen svému vědeckému bádání, nemůže být po přečtení výše zmíněných poznámek sporu. Bohužel nejsou všechny tak idylické. V deníku evidentně den po dni živený nacionalismus nepřijemně vyhrězává v následujícím záznamu, jenž je přímo zmiňován v Dummettově citovaném textu a který také zavedl podnět k četným fámám a dohadům, jimž by mělo být tímto, tj. jeho doslovnou citací, učiněno zadost: (30. 4. 1924)

»Člověk může uznávat, že existují navýsost uctyhodní židé, a přesto považovat za neštěstí, že je v Německu tolik židů a že mají stejná plná politická práva jako občané arijského původu; ale jak málo zmůže přání, aby židé ztratili svá politická práva nebo ještě lépe, aby z Německa zmizeli. Před formulací příslušných paragrafů, které by nás této mizérie zbavily, je nejprve nutné zodpovědět otázku: Jak je možné spolehlivě rozeznat židy od nežidů? Před šedesáti lety to možná bylo snadné. Dnes se mi to zdá být obtížné. Snad se musíme

omezit pouze na boj proti smýšlení, jehož projevy židé tolik škodí, a právě tyto projevy trestat ztrátou občanství a ztížením jeho získání.» [T, 1092sq]

Podobný zápis lze najít již 22. 4. 1924 (mimo jiné v den dvoustého výročí Kantova narození). U této poznámky vydavatelé deníku upozorňují na možné protestantsko-konzervativní (tj. nikoli národněsocialistické) kořeny Fregova antisemitismu. Ať již se to má jakkoli, zdá se (alespoň mně) být zvláště podstatné a činící významný rozdíl, že Frege svůj odpor vůči židům nikdy – pokud je známo – veřejně nemanifestoval, a omezil jej tedy pouze na svůj soukromý deník, v němž dával temným hnutím své bezútěšným životem deprimované mysli volný průběh.

3 PRAVDA

Zprvu je naše jazyková praxe, naše schopnost dorozumět se jednoduše faktem. Dále je možné na tuto skutečnost vznášet nejrůznější otázky: jak je možné, že se domluvíme, o čem mluvíme ... a pokoušet se je řešit návrhy různých sémantických teorií, gramatik apod. Sama o sobě však takováto konstrukce neřeší nic; nemůže nám vysvětlit, jak ve vši obecnosti funguje jazyk – je v lepším případě jen další jazykovou praxí.

Porozumění jazyku představuje (Wittgensteinovými slovy) zvládnutí určité techniky.⁹⁸⁾ Pravidlům užití výrazů jazyka (mysleme si zde třeba predikátorová pravidla typu ›je-li něco pes, nesmíš popírat, že je to savec‹,⁹⁹⁾ případně úsudková pravidla obecně) se zprvu učíme ›emprakticky‹ – nejsou nám vysvětlena, tj. nepodléhají (meta)jazykové kontrole, ale jsme v nich, resp. v jejich následování ›vyucvičení‹.¹⁰⁰⁾ »Následuji-li pravidlo, nevolím. Následuji pravidlo slepě.« [PU, 219]

Pokud je jazykový úzus funkční, není důvod tuto situaci měnit. »*Kdybychom měli logicky dokonalou řeč, nepotřebovali bychom žádnou logiku nebo bychom ji mohli vyčíst z jazyka.*« [ME_N, 272] Konfliktům se ale s ohledem na organickou povahu jazyka nelze nikdy úplně vyhnout – jak jsme o tom ostatně uvažovali v rámci úvodní aristotelské podkapitoly /1.1/ – a zprvu implicitně ovládnuté principy je nutné explikovat, uspořádat a revidovat. Tuto fázi nazýváme (*metajazykovou*) *reflexí stávajícího úzu*. V ní také teprve vstupuje do hry logika. Jelikož navíc nedisponujeme žádným ›archimédovským bodem‹, je jasné, že jsme i na této úrovni nutně odkázáni na nějakou fungující část naší praxe, a že naše reflexe je tedy vždy jen reflexí dílčí. Univerzální či finální teorie jazyka se tak ukazuje být iluzí.

Celý tento proces načrtnutý v maximální stručnosti můžeme s jistou velkorysostí ohledně původního kontextu předběžně srovnat s metodou, o níž Paul Lorenzen ve svém článku *Regeln vernünftigen Argumentierens* (Pravidla rozumné argumentace) píše:

»*Při ospravedlnění norem pro jednání v nějaké konkrétní situaci provádíme určitý druh pohybu ve spirále. Začínáme normativní genezí [tj. nikoli genezí faktickou, jak se uskutečnila v dějinách, ale genezí, jak se uskutečnit mohla a měla], např. genezí forem jazyka, které lze ospravedlnit na základě společné,*

⁹⁸⁾ Viz [PU, § 199].

⁹⁹⁾ Srv. *Kamlah-Lorenzen* [LP, k. 3, § 1].

¹⁰⁰⁾ Srv. [PU, § 157, 198], případně *Lorenzen* [KW, 70].

bezprostřední jazykové praxe. Použijeme tyto normy, abychom kriticky porozuměli, tj. pochopili nějaký úsek dějin. Poté jsme případně opět v situaci, v níž je možné předložit další normativní geneze. Tyto aplikujeme opět na dějiny atd. | Pohyb ve spirále, vracející se od normativní k faktické genezi a zpět, aniž by teoreticky dospěl ke konci, pohyb, který však, abychom v naší situaci mohli vůbec jednat, musíme s poslední dosaženou normativní genezí přerušit, nazývám v návaznosti na Hegelovu terminologii dialektickou metodou.» [KW, 96]

Rozčleníme-li tedy koncepci jazykové analýzy jako dialektického pohybu do tradiční třístupňové formy,¹⁰¹⁾ tvoří její první fázi (tezi) nějaká stávající část konvenční, momentálně však problematizované praxe, druhou (antitezi) její kritika a návrh změny, spočívající v konstrukci normativu, který ve fázi třetí (syntezí) na fázi první aplikujeme a dostáváme se tak znovu do stavu – teze případně analýzy další.

3.1 NORMA

Použijeme-li klasifikaci, kterou Popper uvádí v jednom ze svých článků,¹⁰²⁾ pak lze převládající názory na povahu logiky roztrždit takto:

- (A) pravidla logiky jsou zákony myšlení,
- (A1) jsou to přírodní zákony myšlení, tj. popisují, jak skutečně myslíme,
- (A2) jsou to normativní zákony, tj. říkají, jak bychom měli myslet,
- (B) pravidla logiky jsou nejobecnější přírodní zákony, tj. popisné zákony platící pro všechny předměty a situace,
- (C) pravidla logiky jsou zákony popisných jazyků, zákony užití jejich slov a vět.

K pojetí (C) lze zatím říci jen tolik, že by si zasloužilo analogického rozdělení na dvě podskupiny jako (A). Jelikož však budeme v dalším textu hájit názor, že se (A) od (C) v podstatě neliší, ve zkratce: že myšlení není nic jiného nežli tichá řeč, tj. řeč bez veřejné manifestace, můžeme tezi (C) prozatím přeskočit. Frege (stejně jako Popper a – jak bylo doufám možné seznat z dosavadního textu – i autor této knihy) je výslovným zastáncem druhé varianty prvního po-

¹⁰¹⁾ Spřízněnost Hegelovy triády, vyložené z pozic analytické filosofie, s Carnapovou ›racionální rekonstrukcí‹ (*rationale Nachkonstruktion*) z *Der logische Aufbau der Welt* obhazuje Stekeler-Weithofer v rámci své hegelovské knihy – viz [HAP, 20].

¹⁰²⁾ *Popper* [1946].

jetí, tj. (A2). Úvodem fragmentu logické učebnice, kterou připravoval, Frege přímo píše:

»Tak jako etika může být i logika nazývána normativní vědou. Jak musím myslet, abych dosáhl cíle, to jest pravdy? Od logiky očekáváme odpověď na tuto otázku [...].« [L_{2N}, 139]

Vůči variantě první, tj. (A1), coby převládajícímu trendu své doby se oproti tomu Frege soustavně a právem ve svých spisech vyhraňuje:

»Skutečné myšlení není vždy v souladu s logickými zákony, stejně jako není skutečné jednání vždy v souladu se zákony morálními. Sousedí “zákon myšlení” je proto v logice lépe vůbec nepoužívat, neboť nás svádí k tomu, abychom logické zákony chápali jako zákony přírodní. Jako takové je musíme přenechat psychologii.« [L_{2N}, 157]

Ohledně Fregovy námitky proti (A1) je nejprve vhodné v upomínce na Kantovu praktickou filosofii uvážit rozlišení dvou druhů nutností, totiž nutnosti kauzální (modality fyzické, ontické) a nutnosti racionální (modality etické, deontické). Jak zákony přírodní, tak logické jsou sice nutné, tj. *a priori* v tom smyslu, že nepřipouští výjimky, a nelze je tedy možnou zkušeností vyvrátit [L_{1N}, 4sq]; zákony logiky však tuto zkušenost navíc vůbec nepopisují, nejsou deskriptivní, popisné. Onticky není nic nemožného na vynešení dvou protichůdných tvrzení; deontické *musíš* (>usuzovat v souladu s logickými pravidly – protože je to správné, tj. mělo by to tak být<) se tedy od ontického *musíš* (>dýchat, jinak zemřeš – protože to tak v tomto světě chodí, tj. dopadlo by to tak<) kategoriálně liší. *»Zákony skutečného usuzování nejsou zákony správného usuzování; neboť pak by nebylo možné usuzovat chybně.« [L_{1N}, 4]*

Zatímco (A1) přibližuje logiku psychologii, vidí v ní pojetí (B) a jeho nejznámější představitel Bertrand Russell¹⁰³⁾ něco na způsob >univerzální fyziky<, lišící se od ostatních přírodních věd jen stupněm obecnosti. [PM, 93] *»Prubírský kámen, s jehož pomocí mohou být logické věty odlišeny od vět ostatních,«* píše Russell v [ThK, 97], spočívá v tom, že jsou výsledkem *»procesu generalizace dovedeného do svých nejzazších limit«*. Logika je abstraktní přírodní věda, která *»nesmí akceptovat jednorožce o nic více nežli zoologie; neboť logika se zabývá reálným světem stejně opravdově jako zoologie, i když jeho*

¹⁰³⁾ V Russellově autobiografii se dočteme, že tento svůj raný názor později modifikoval směřem k pojetí (C). Viz [MPD, k. 9].

abstraktnějšími a obecnějšími rysy« [MP, 169]. Zákony logiky jsou tedy deskriptivní, »zákon sporu [...] je fakt týkající se věcí našeho světa« [PP, 89]. Na rozdíl od Wittgensteinova známého výroku z *Tractatu*, totiž že: »[...] logické zákony popisují lešení světa, nebo spíše, reprezentují jej. O ničem “nepojednávají”.« [TLP, 6.124], který se zdá být také v rozporu s Russellovým »logickým empirismem«, však Frege tvrdí ještě něco víc. Zvláštností logiky není, že by na rozdíl od věd ostatních ve své »reprezentující«, deskriptivní dimenzi selhala. Jejím cílem není pravdivý popis světa, ale pravda samotná.

3.1.1 Předmět logiky

»Při uvádění do nějaké vědy cítí člověk potřebu získat alespoň nějakou představu o její podstatě. Přál by si spatřit cíl, o něž se usiluje, stanovit cílový bod, udávající směr, kterým se má postupovat. V logice nám k jeho naznačení může posloužit slovo “pravdivý”, podobně jako slovo “dobrý” v etice a “krásný” v estetice. Všechny vědy mají sice pravdu jako svůj cíl, ale logika se predikátem “pravdivý” zabývá zcela speciálním způsobem, totiž podobně jako fyzika predikáty “těžký” a “teplý” nebo chemie predikáty “kyselý” a “zásaditý”; ovšem s tím rozdílem, že tyto vědy kromě jmenovaných vlastností musí brát v úvahu také vlastnosti jiné a žádnou z nich nejsou ve své podstatě charakterizovány tak dokonale, jako logika slovem “pravdivý”.« [L_{2N}, 139]

Podobně jako kontradikce či správný úsudek, ani pravda není přirozený (»přírodní«), ale *normativní* fenomén. Zdůvodnění pravdivosti, resp. nepravdivosti nějaké věty či soudu nemůže mít tedy charakter kauzální – je zapotřebí normativního »ospravedlnění« (*Rechtfertigung, justification*). »Logika se zabývá jen takovými důvody souzení, které jsou pravdami. Soudit tak, že jsme si vědomi jiných pravd jakožto důvodů ospravedlnění, znamená usuzovat. Existují zákony pro tento druh ospravedlnění a cílem logiky je stanovení těchto zákonů správného usuzování.« [L_{1N}, 3] Právě záměna kauzálního a normativního zdůvodnění je charakteristickým projevem a hlavní chybou psychologické redukce, jak jsme ji dříve zmínili a svázali s teorií (A1).

»U psychologického pojetí logiky padá rozdíl mezi důvody ospravedlňujícími nějaké přesvědčení a příčinami, které toto přesvědčení reálně vyvolaly. Skutečné ospravedlnění pak není možné; na jeho místo nastupuje vyprávění, jak bylo onoho přesvědčení dosaženo [...].« [L_{2N}, 159]

Takovýmto líčením lze ale doprovodit i vznik nějaké pověry či divadelního kusu. Nahradíme-li nauku o pravdě, pravdivém soudu, správném úsudku apod. popisem temných hnutí mysli, skládání představ či anatomickým výkladem

funkce nervové soustavy, předpokládáme tyto buď jako objektivní, a tedy pravdivě dané, čímž se dopouštíme kruhu, nebo se i v jejich případě dožadujeme psychologické explikace, a neměli bychom tedy mluvit o nervech, buňkách a reflexech, ale o představách nervů, představách buněk a představách reflexů. *»A kdyby snad atomy a molekuly v mém mozku tančily s tisícinásobně větším veselím a bujností nežli komáři v krásný letní podvečer, nebylo by i tehdy zrovna tak absurdní tvrdit, že tento tanec platí nebo že je pravdivý? A kdyby jejich vysvětlení byla zrovna takovými tanci, je možné říci, že jsou pravdivá?«* [L_{2N}, 156]

Převedení na psychologii je v případě logiky zrovna tak (ne)možné jako u jiných vědních oborů: *»Stejným právem jako zákony logické bychom mohli jako zákony myšlení a souzení chápat i zákony fyzikální či geometrické, totiž jako předpisy, podle nichž se souzení v tom kterém oboru musí řídit, má-li zůstat v souladu s pravdou. Stejně tak jako geometrie či fyzika, ani logika není správným místem k provádění psychologických zkoumání. Vysvětlení průběhu myšlení a souzení je sice úkol možný, ale v žádném případě ne logický.«* [L_{2N}, 157sq] Liší-li se však psychologie od ostatních (přírodních) věd svým předmětem, v tažení demarkační čáry mezi ní a logikou jakožto naukami o myšlení je navíc nutné vzít v úvahu rozdíl deskriptivního a preskriptivního: *»To, co se obvykle nazývá zákony myšlení, totiž zákony, podle nichž se, alespoň za normálních okolností, provádí soudy, mohou být vždy jen zákony toho, co je za pravdivé považováno [Fürwahrhalten], nikoli však zákony pravdivosti [Wahrsein]. Považujeme-li něco za pravdivé – a psychologičtí logikové budou za pravdivé považovat přinejmenším své vlastní teorie –, uznáváme tím existenci něčeho, co je pravdivé. Pak je ale přece pravděpodobné, že budou existovat i zákony pravdivosti, a existují-li, musí to být normy pro ono za pravdu považované. A to jsou logické zákony v pravém slova smyslu.«* [L_{2N}, 158]

3.1.2 Jednoduchost pravdy

Co se týče pojmu pravdy, dozvídáme se od Frega ještě o jeho nedefinovatelnosti. Argument je veden regrese:

»Bylo by nyní marné pokoušet se objasnit definicí, co máme rozumět pod slovem “pravdivý”. Kdybychom chtěli říci: “pravdivá je představa, jestliže se shoduje se skutečností”, nic bychom tím nezískali, neboť, abychom to mohli použít, museli bychom v každém daném případě rozhodnout, zda se nějaká představa shoduje se skutečností; jinými slovy: zda je pravda, že se ona představa shoduje se skutečností. Definované by tak muselo předcházet sebe sama.

Totéž platí o každém vysvětlení formy: “A je pravdivé, jestliže má ty a ty vlastnosti, nebo je s tím a tím v tom a tom vztahu.” Vždy bychom v daném případě narazili na otázku, zda je pravda, že A má ty a ty vlastnosti, že je s tím a tím v tom a tom vztahu. Pravda je evidentně něco tak původního a jednoduchého, že její převedení na něco ještě jednoduššího není vůbec možné.» [L_{2N}, 140]

V pojmu pravdy jsme tedy našli normativní primitiv. Význam a důsledky Fregova regresivního argumentu jsou nyní předmětem častých dohadů a sporů. Nejprve je zřejmé, že je zde tak či onak dotčena *k o r e s p o n d e n č n í t e o r i e p r a v d y*: ›pravdivé je to, co se shoduje se skutečností‹,¹⁰⁴ ať již třeba reprezentovaná modifikací Tarského ›kritéria adekvátnosti‹.¹⁰⁵

(T) “p” je pravdivá věta *tehdy a jen tehdy*, když to, že p, je skutečnost nebo speciálně:

(S) “Sókratés je moudrý” je pravdivá věta *tehdy a jen tehdy*, když předmět jména “Sókratés” má vlastnost moudrosti.

Fregova námitka se obrací proti tomu, že by byl ve výše uvedených frázích definován pojem pravdy (pro určitou větu), tj. že je význam výrazu “pravdivý” na levé straně plně dán významem pravé strany, aniž by byl v této již sám (skrytě) obsažen. Jakožto úvodní explikace (*Erklärung*)¹⁰⁶ užití slova “pravdivý” mohou být (T) i (S) vhodná, obecně však nechávají příliš velký prostor k dohadům, *co* by mělo být jejich případným (izolovaným) tvrzením vlastně řečeno. V neutrálním, analytickém čtení je pravá strana jen metajazykovou variantou, překladem věty v uvozovkách ze strany levé; její role není ›explanační‹, ale ›expresivní‹: jedná se o formálněsémantické ›vyjádření‹ *neformální, empirické skutečnosti*.¹⁰⁷ Tato interpretace také nejlépe odpovídá Tarského teorii pravdy, která je proto někdy vhodněji nazývána teorií sémantickou, ovšem s touto výhradou, že termínu ›definice‹ (pravdy) je v ní užíváno jinak než ve Fregově (klasickém) stylu.

Realistické pojetí korespondenční teorie oproti tomu počítá s bezprostředností, ba výkladovou prvotností výrazů jako jsou “předmět”, “stav věci” (*Sachverhalt, state of affairs*), “skutečnost” (*Tatsache, fact*), “vlastnost” atd., a v důvěře v nezávislou ›existenci‹ předmětů, vlastností a skutečností pak vysvětluje pravdivost vět odkazem k jejich dodatečné shodě (korespondenci) s takto

¹⁰⁴ Standardní odkaz je na *Aristoteles* [Met, 1011b]. V historickém rámci podrobně diskutováno in: *Tugendhat* [ESP, 249sq].

¹⁰⁵ *Tarski* [1935]. Kritérium zní: “p” je pravdivá věta *tehdy a jen tehdy*, když p.

¹⁰⁶ Srv. *Frege* [LM_N, 224sq].

¹⁰⁷ Srv. *Brandom* [ME, 329].

předstrukturovaným světem; pravdivé věty jsou jeho obrazem. Frege, ve stejném duchu jako kdysi Kant,¹⁰⁸⁾ pochybuje o nosnosti této koncepcce pravdy:

»Shoda je relace. Tomu však odporuje způsob užití slova “pravdivý”, což není relační slovo, neobsahuje žádný odkaz k něčemu jinému, s čím by mělo být něco ve shodě. [...] Také shoda může být dokonalá jen tehdy, když se shodující se věci sloučí vjedno, tedy když se nejedná o úplně rozdílné věci. Pravost bankovky můžeme testovat tak, že se ji pokusíme stereoskopicky překrýt s pravou bankovkou. Avšak pokus o stereoskopické překrytí dvacetimarkovky s kusem zlata by byl směšný. Překrytí představy s nějakou věcí by bylo možné jen tehdy, kdyby i ona věc byla představou. A kdyby se pak ona první s tou druhou dokonale shodovaly, sloučily by se vjedno. To ale právě tehdy, určíme-li pravdu jakožto shodu představy s něčím skutečným, nechceme. Právě při tom je podstatné, že se skutečné od představy liší. Pak ale neexistuje žádná dokonalá shoda, žádná dokonalá pravda. Pak by nebylo vůbec nic pravdivé; neboť co je pravdivé jen zpola, není pravdivé vůbec. Pravda se neslučuje s žádným více či méně.« [G, 59sq]

S explanační silou (realisticky pojaté) korespondenční teorie se to má, Kantovy výměny slovy, v důsledku zrovna tak, *»jako když někdo před soudem učiní výpověď a odvolá se při ní na svědka, kterého nikdo nezná, jehož důvěryhodnost však má být zajištěna tím, že o tom, kdo se na něj jako na svědka odvolal, tvrdil, že je to čestný muž« [Log, A70].*

Realistické čtení frází jako (T) či (S) podmiňuje porozumění jejich levé straně, resp. v ní obsažené větě v uvozovkách porozuměním straně pravé – postupuje tedy zprava doleva. Tento postup – a spočívá v tom, jak posléze uvidíme, i pointa Fregova výkladu pravdy – lze ale *obrátit*. Řekneme třeba: ›to, že je “p” pravdivá, znamená, že se jí vyjádřený (možný) stav věci (to, že p) stal faktem‹ nebo ›věta “Sókratés je moudrý” a věta “Sókratés je mudrc” jsou vyjádřením téže skutečnosti‹, a to jako bližší určení významu slova “fakt”, “skutečnost”. Otázka pravdivosti vět jako “Sókratés je moudrý” je potom převedena na otázku porozumění těmto větám, resp. tomu, co říkají, a to v souvislosti s praktickou zkušeností jejich správného užití v konkrétních situacích. S obratem k jazyku (*linguistic turn*) je tak spojen i obrat pragmatický (*pragmatic turn*).

¹⁰⁸⁾ Fregovy úvahy z [G, 59sq] tvoří jasnou paralelu ke Kantově [Log, A70].

3.1.3 Tvrzení

Rozhodujícím krokem na cestě za konkretizací předmětu logiky je tedy v souladu s výše řečeným analýza užití výrazu “pravdivý”:

»*Jsme proto při objasnění toho, co je našemu predikátu nejvlastnější, odkázáni na jeho srovnání s predikáty ostatními. Nejprve se od nich odlišuje tím, že je vypovídán vždy, kdykoli je vůbec něco vypovídáno. | Tvrdím-li, že součet 2 a 3 je 5, tvrdím také, že je pravda, že 2 a 3 je 5. A zrovna tak tvrdím, že je pravda, že se moje představa kolínského domu shoduje se skutečností, tvrdím-li, že se shoduje se skutečností. To, čehož prostřednictvím vypovídáme pravdu, je tedy vlastně forma tvrdící [oznamovací] věty [Behauptungssatz], a slovo “pravdivý” k tomu nepotřebujeme. Ano, můžeme dokonce říci: tam, kde užíváme výrazu typu “je pravda, že...”, je ve skutečnosti tím podstatným forma tvrdící věty.*« [L_{2N}, 140]

Pravda je tedy spojena s aktem tvrzení. Rozeznáváme nyní čtyři možné významy tohoto slova: (1) tvrzení jakožto konkrétní jazykové (řečové) jednání (*speech act, Sprechhandlung*), v němž pak, nemá-li být jeho výsledek (2) chápán jen jako pouhý sled zvuků určité výšky a intenzity (zurčení horského toku, skřek tetřeva) či v případě psaného slova fyzický výskyt skvrn určité barvy, musí být (znovu)rozpoznán nějaký ›typ‹, jehož je tento výsledek realizací – zažitou terminologií: jehož je *token*¹⁰⁹⁾ – tedy posloupnost jisté fixní sady fonémů či písmen.¹¹⁰⁾ Tento typ bude v našem případě (3) tvrdící věta, a to jako *schemata* pro jednání (*Handlungsschema, Handlungstyp*),¹¹¹⁾ lhostejno zda psaní či mluvení; tato věta zase, není-li jen reliktem dávno zaniklé civilizace či uměleckým projevem, tj. hraje-li určitou aktuální roli v praxi vzájemné domluvy, není tvrzena sama pro sebe, ale slouží v té které situaci (*Verwendungssituation*) k vyjádření (tvrzení) ›obsahu‹ příslušného *token*. Toto s pravdivostním nárokem tvrzené (4) nazývejme *souzeným obsahem*.¹¹²⁾

¹⁰⁹⁾ Rozlišení *type/token* je Peircovo. Viz [CP, 4.537].

¹¹⁰⁾ Srv. s pojednáním o fonetických normách z *Quine* [WO, § 17].

¹¹¹⁾ Sepsání čtyřky, začínající tahem nožičky odshora dolů a připsáním zobáčku, to vše provedené inkoustovým perem, je pro nás momentálně příkladem stejného jednání jako její sepsání křídou, postupující od zobáčku k nožičce tažené libovolně, jinými slovy realizací téhož ›*Handlungsschema*‹ “sepiš čtyřku”, resp. typu “4”. Výsledkem je modré a bílé *token*.

¹¹²⁾ Místo tohoto poněkud nepřirozeně znějícího sousloví by bylo lépe napsat “soud”, došlo by však ke konfuzi s Fregovým použitím tohoto termínu, jak se o něm zmíníme

Různá tvrzení (1) stejné věty (3) mohou jakožto *token* (2) vyjadřovat různé souzené obsahy (4) v tom smyslu, že pronesení této věty bude klasifikováno v jedné situaci jako správné, jindy naopak jako nesprávné nebo zcela nesmyslné. Uvažme větu obsahující některý z arzenálu indexických výrazů jako “ta-dy”, “já”, “ty”, “včera”, “toto”, a to třeba větu “tento stůl je zelený”: v situaci s hnědým stolem s jejím pronesením nebudeme souhlasit, bude-li ukazováno do prázdna, zhodnotíme je jako nesmyslné, tj. nevyjadřující žádný souzený obsah. To ukazuje, že pravdivost primárně nenáleží větám (3), neboť ty by ji měnily podle okolností. Díváme-li se dále v souladu s dosud řečeným na pravdivost jako na jistý druh správnosti, je jasné, že ji nelze připsat ani tvrzení druhu (2), které je jakožto *token* větného typu (3) jen jistým konvenčně rozpoznávaným sledem znaků, ale že se přímo týká toho, co je tímto tvrzením vyjádřeno, toho, čím je ›čině‹ nějaký komunikačně-pragmatický rozdíl v pravém slova smyslu, tedy souzeného obsahu. »[...] lidská řeč sestává z vět. Věta samotná ale není to, na čem při řeči skutečně záleží, na rozdíl od smyslu nebo obsahu, který s větou spojujeme a který chceme jejím prostřednictvím sdělovat.« [EG_N, 182]

Tvrzení (1) různých vět (3) mohou být jako *token* (2) vyjádřením téhož souzeného obsahu (4). Uvažme třeba dvě (typograficky odlišné) věty “ty máš hlad”, “ty jsi hladový”: v libovolné ›rozumné‹¹¹³⁾ situaci platí, že jsme-li ›oprávněni‹ k vynesení jedné, pak i druhé. Ale pozor, věty jako tyto vyjadřují tytéž souzené obsahy jen ve stejných *situacích*, chceme-li tedy třeba říci, že mají tentýž ›obsah‹, užíváme pak toto slovo jinak než námi specifikované sousloví “souzený obsah”: skrze *token* typu “ty máš hlad” adresovaný osobě O₁ v čase T₁ vyjádříme pak sice tentýž ›obsah‹ jako skrze *token* typu “ty jsi hladový” adresovaný osobě O₂ v čase T₂, nezávisle na volbě osob a časů; stejně jako v případě vět (2) nebudeme ale moci takto určenému ›obsahu‹ připsat pravdivost *per se*, jako jsme to učinili v případě souzených obsahů.¹¹⁴⁾

Uvážíme-li namísto aktuálního tvrzení (1) nějaké věty (3) tvrzení možné, pak lze říci, že věta (3) nezávisle na své realizaci (2) vyjadřuje různé s o u d i t e l n é (tj. možné) o b s a h y. Větu, která je takto vyjádřením *jediného* sou-

v příštím oddílu. Kromě toho jej lze dát do vhodné souvislosti s Fregovým souslovím “souditelný obsah” (*beurteilbarer Inhalt*), užívaným ve smyslu ›obsahu možného soudu‹.

¹¹³⁾ Slovo “rozumné” má upozorňovat na fakt, že indefinitnost jazykové praxe může diskriminovat jakoukoli takto položenou ekvivalenci, a v jejím užití je tedy vždy implicitně předpokládán určitý kontext – tomu se ale budeme ještě podrobně věnovat.

¹¹⁴⁾ Srv. Tugendhatovo užití slova “význam” (*Bedeutung*) a příslušné úvahy in: *Tugendhat* [ESP, 282sqq].

ditelného obsahu, nazýváme v návaznosti na Quina věčnou větou (*eternal sentence*),¹¹⁵⁾ zkráceně E-větou (*E* jako *eternal*, případně *ewig*). Jelikož taková věta vyjadřuje z definice v každé situaci tentýž souzený obsah, hovoříme o ní také jako o situacně nezávislé větě. Tyto věty také stojí v centru Fregova zájmu, což není nijak překvapivé, uvědomíme-li si, že věty matematiky jsou jako jejich příklad první po ruce. V souvislosti s E-větami také můžeme (přeneseně) hovořit o jejich pravdivosti a nepravdivosti.

3.1.4 Myšlenka

Situacně nezávislou větou vyjádřený souditelný obsah nazývá Frege *myšlenkou* (*Gedanke*).¹¹⁶⁾

»Aniž bych tím chtěl podat definici, nazývám myšlenkou něco, u čeho může pravdivost vůbec přicházet v úvahu. Nepravdivé tedy počítám k myšlence zrovna tak jako pravdivé.« [G, 61]

»Odhlédneme-li od bájí a smyšlenek a vezmeme v potaz jen takové případy, v nichž jde o pravdu ve vědeckém slova smyslu, můžeme říci, že každá myšlenka je buď pravdivá, nebo nepravdivá, tertium non datur. Je nesmyslné, hovoříme-li o případech [situacích], v nichž je myšlenka pravdivá, a o jiných případech, v nichž je nepravdivá. Tatáž myšlenka nemůže být hned pravdivá a hned zase nepravdivá, nýbrž v případech, které máme při takovýchto výročích na mysli, se vždy jedná o různé myšlenky a naše domněnka myšlenky jediné spočívá v tom, že je užito stejných slov, a tato slova pak tvoří nevlastní větu. Stále dost nerozlišujeme mezi symbolem a tím, co vyjadřuje.« [EL_N, 202]

Příkladem toho, o čem Frege mluví jako o nevlastní větě, jsou právě věty obsahující indexické výrazy: »Má-li být užitím přítomného času učiněn časový údaj, musíme vědět, kdy byla věta vyslovena, abychom mohli myšlenku správně uchopit. Potom je tedy doba řeči částí vyjádření myšlenky. Chce-li dnes někdo říci totéž, co včera vyjádřil užitím slova “dnes”, nahradí toto slovo výrazem “včera”. [...] Podobně se to má u slov jako “zde”, “tam”. Ve všech takovýchto případech není pouhé písmem zachytitelné slovo úplným vyjádřením myšlenky, nýbrž k jejímu správnému uchopení je zapotřebí ještě znalost jistých okolností, které řeč doprovázely a byly při tom použity coby prostředek

¹¹⁵⁾ Viz *Quine* [WO, 12].

¹¹⁶⁾ O *souditelném obsahu*, zmiňovaném v raných spisech, Frege v [GG₁, X] říká, že jej nechal rozpadnout na *myšlenku* a *pravdivostní hodnotu*. Toto rozlišení ale souvisí s distinkcí *mysl/význam*, a proto jej musíme odložit na později. Anotované věty se to nijak nedotkne.

vyjádření myšlenky. *K nim může patřit ukázání prstem, pohyb ruky či pohled.*« [G, 64] Tvrzení věty “ty máš hlad” adresované Alfrédu Fregovi 28. 11. 1919 v ranních hodinách vyjadřuje tedy tutéž myšlenku jako tvrzení věty “tys byl včera ráno hladový” určené témuž den poté, totiž myšlenku, že měl Alfréd Frege 28. 11. roku 1919 ráno hlad, a to jako souditelný obsah situačně nezávislé věty “Alfréd Frege měl 28. 11. 1919 ráno hlad”.

V souvislosti s myšlenkou hovoří Frege také o ›soudu‹ a o ›obsahu‹. Na s o u d pohlíží jako na akt ›uznání pravdivosti myšlenky‹ [G, 62], podotýká ale: ›*Takto přesně nevíme, zda to, co logici nazývají soud, má být myšlenka spolu anebo bez soudu, že je pravdivá. Podle samotného slova bychom měli myslet, že se soudem, ale užití jazyka je tak rozmanité, že vlastní vynesení soudu, poznání pravdy není spoluminěno.* Užívám slovo “myšlenka” skoro stejně jako logici slovo “soud”.« [EL_N, 201] (Srv. dále [G, 61].) My v dalším textu přímo převezmeme Fregovo pojetí soudu jakožto komplexního aktu uznání pravdivosti souditelného obsahu, v němž samotném toto uznání zahrnuto není. Co se týče o b s a h u, Frege říká: ›*Dvě věty A, B mohou stát k sobě navzájem v takovém vztahu, že každý, kdo uzná obsah věty A jako pravdivý, musí uznat bez dalšího jako pravdivý také obsah B, a obráceně, že každý, kdo uzná obsah B, musí uznat i obsah A (ekvipolence) [...]. Tyto věty nemusí být v každém ohledu rovnocenné; s jednou může být např. spojeno něco jako poetický opar a u druhé může chybět. Také takovýto poetický opar počítáme k obsahu věty, nikoli však k tomu, co uznáváme jako pravdivé nebo zavrhuje jako nepravdivé. [...] | Z obsahu věty je tedy nutné vyčlenit část, která může být sama o sobě uznávána jako pravdivá nebo zavrhována jako nepravdivá. Tuto část nazývám myšlenkou ve větě vyjádřenou. Je tím, co mají obě ekvipolentní věty výše uvedeného druhu společné. Jen s touto částí obsahu má logika co do činnosti. Cokoli jiného, z čeho se ještě skládá obsah věty, nazývám zabarvení [Färbung] myšlenky.*« [KU_N, 213sq]

Uvedenou dichotomií: *situačně nezávislá věta a myšlenka*, jako to, co je touto větou možné vyjádřit, Frege v první řadě charakterizuje jisté rysy naší řeči jakožto logicky irelevantní – jedná se např. o slova podněcující pouze naši představivost, tj. něco, co má třeba význam při vnímání uměleckého díla, liší se však od člověka k člověku (subjektivní ›Färbung‹), dále o rozdíly gramatické (přechod od aktiva k pasivu a paralelní převedení předmětu akuzativu na subjekt věty) či překladové ekvivalenty různých jazyků. [G, 63], [L_{2N}, 150sq] Výše zmíněný ohled na pravdu je také důvodem, proč Frege ve svých raných spisech nazývá relevantní část obsahu věty jako my zde *souditelným obsahem*. Soud je něco, co je spojeno s pravdivostním nárokem.

3.1.5 Tvrđící síla

Pronesení téže věty může být projevem různých jazykových aktů; v závislosti na tónu hlasu může znamenat tvrzení, rozkaz či otázku (“ty máš hlad [?]”, “měníme směr trasy [!, ?]”), může být také součástí dadaistického divadelního kusu či folklórní písně. Moment, kterým se tvrzení věty liší od jiných řečových aktů, nazývá Frege *tvrdící silou* (*behauptende Kraft*). V tvrdící síle se skrývá pravdivostní nárok:

»Říká-li někdo s tvrdící silou něco, o čem ví, že to není pravda, lže. O herci na jevišti to ale neplatí. Nelže, protože při tom chybí tvrdící síla.« [LM_N, 252]

Jelikož je *»přísná věda zaměřena na pravdu a jen na pravdu«* [G, 63] a Fregovým cílem je vytvoření písma, v němž *»nebude nic [podstatného pro logický úsudek] přenecháno odhadu«* [B, 3], je nutné najít nějaký transparentní znak projevu tvrdící síly. Nestačila by však, nabízí se pochybnost, předběžná úmluva, že všechny věty pojmového písma (věty matematiky!) jsou v asertorickém modu?

Uvažme ale nějaké spojení vět vytvářející komplexní situačně nezávislou větu, jako např. “jestliže (28. 3. 1879 v Jeně) prší, je (28. 3. 1879 v Jeně) mokro”: *»[...] i když vyslovíme složenou větu s tvrdící silou, netvrdíme tím přece pravdu myšlenky antecedentu ani myšlenky konsekventu. Uznání pravdy se týká spíše myšlenky celého spojení vět.«* [EL_N, 201] Čili: *»Vzniká potřeba vyjádřit myšlenku, aniž bychom ji kladli jako pravdivou.«* [KU_N, 214] Bez této možnosti bychom nebyli schopni použít logických pravidel, jako je *»modus ponens«*, neboť bychom ve větách typu “prší” a “jestliže prší, pak je mokro” nebyli schopni rozpoznat vyjádření téhož, a takto usoudit na “je mokro”.

Znak, kterým by se odlišilo užití věty s pravdivostním nárokem a bez něj, se tedy zdá být v pojmovém písmu nezbytný. Samotné slovo “pravdivý” se k tomu, jak již bylo naznačeno, nehodí: *»Formou tvrdící věty vyslovujeme uznání pravdy. Slovo “pravdivý” k tomu nepotřebujeme. A i tehdy, když jej používáme, neleží vlastní tvrdící síla v něm, ale ve formě tvrdící věty, a kde se tato tvrdící síla ztratí, nemůže ji slovo “pravdivý” znovu obnovit.«* [G, 63] Věta “jestliže prší, je mokro” může být beze změny obsahu parafrázována jako “jestliže je pravda, že prší, je pravda, že je mokro”. Jejím tvrzením se pravdivost antecedentu ani konsekventu opět netvrdí.

Ačkoli je podle Fregova pozorování tvrdící síla často spojena s kopulou či gramatickým predikátem [SP_N, 192], nehrají tato dvě tradiční logická určení v rámci pojmového písma podstatnou roli a ve vztahu ke komplexním větám nedává jejich rozlišování ani dobrý smysl. [B, § 3] *»V pojmovém písmu mám*

vlastní symbol tvrdící síly: pruh soudu. V jazycích, které znám, takový symbol chybí a tvrdící síla je pevně spojena s indikativem hlavní věty.« [KUN, 214]

V *Begriffsschrift* zavádí Frege následující symboliku: E-věta A vyjadřuje myšlenku a pouze »tato okolnost, že« A [B, 2] má být vyjádřena jako

— A,

tj. aniž by byla myšlenka (v *Begriffsschrift* »souditelný obsah«) tvrzena. Symbolu

—,

později v *Grundgesetze* nazvaném vodorovný pruh (*Wagerechter*), se říká v *Begriffsschrift* pruh obsahu (*Inhaltsstrich*). Tvrdící sílu reprezentuje svislý pruh

|,

v *Begriffsschrift* i *Grundgesetze* nazývaný pruh soudu (*Urteilsstrich*); my budeme v dalším textu hovořit také o svislém pruhu. Výsadní roli, kterou Frege v systému pojmového písma přisuzuje oběma pruhům, potvrzuje i následující, poněkud kryptické místo:

»Lze si představit řeč, v níž by byla věta “Archimédés zahynul při dobývání Syrakus” vyjádřena následujícím způsobem: “Násilná smrt Archimédova při dobývání Syrakus je skutečnost.” Zde je také možno, chceme-li, rozlišit subjekt a predikát, v subjektu je však zahrnut celý obsah a predikát jen plní účel klást jej jakožto soud. Taková řeč by měla jen jediný predikát pro všechny soudy, totiž predikát “je skutečnost”. Vidíme, že o subjektu a predikátu v obvyklém slova smyslu zde nemůže být řeč. Taková řeč je naše pojmové písmo a symbol — je jeho společný predikát pro všechny soudy.« [B, § 3]

3.1.6 Wittgensteinova námitka

Tradičně se s Fregovým symbolem tvrdící síly pojí potíž, kterou Wittgenstein v *Tractatu* zformuloval takto:

»Fregův “pruh soudu” “|—” je logicky zcela bezvýznamný; ukazuje u Frega (a Russella) jen to, že tito autoři považují takto označenou větu za pravdivou. “|—” patří proto ke spojení vět zrovna tak málo jako třeba číslo věty. Věta nemůže o sobě samé vypovídat, že je pravdivá.« [TLP, 4.442]

Tato poznámka na jednu stranu odpovídá Fregově analýze zbytnosti predikátu “pravdivý”, na druhou stranu ukazuje na skutečnou potíž (nejen Fregovy) teorie tvrzení, na věc, o níž Russell hovoří jako o »velmi obtížném logickém problému, totiž rozdílu mezi aktuálně tvrzenou větou [asserted proposition] a vě-

tou uvažovanou jen jako komplexní pojem«. ¹¹⁷⁾ Tento problém se Russell pokoušel řešit rozlišením psychologického a nepsychologického (tj. logického) smyslu slova “tvrzení” a dovedl jej až k podivnému závěru, že tvrzena v nepsychologickém smyslu může být pouze *pravdivá* věta. [PoM, § 38]

Wittgensteinem a Russellem nesporně ovlivněná Jourdainova otázka stárnoucímu Fregovi, zda již (roku 1914) »*považuje tvrzení (|—) za pouze psychologické*« [WB, 126], má sice jisté oprávnění, v zásadě ji lze ale uvést na pravou míru:

(i) Frege na některých místech odlišuje *tvrzení* od *soudu*, který je – jak víme – uznáním pravdivosti myšlenky, jako manifestací (*Kundgebung*) tohoto uznání. [G, 62] Toto a podobná rozlišení (článek *Gedanke* vyšel až roku 1918) by se zdála naznačovat, že myšlení (chápání se myšlenky) a souzení jsou podle Frege jen soukromými, mentálními akty a tvrzení jejich pouhou externalizací. Frege sám se soustavně ohrazoval proti takovému, tj. psychologickému čtení své epistemologie, většinou se však spokojil s idiosynkratickým (negativním) tvrzením objektivity poznávaného na rozdíl od subjektivní poznávajícího (v tomto duchu také odpovídá Jourdainovi [WB, 126sq]), a na explicitní argumenty proti možnosti privátního jazyka (myšlení) tak musíme počkat až na Wittgensteinova *Filosofická zkoumání*. [PU, § 243sq] To ale neznamená, že by se vůči nim Frege nějak zásadně prohřešil – v této knize, speciálně pak v oddíle /6.1.6/, se naopak pokoušíme ukázat, že pro ně připravil půdu.

(ii) Fregova tvrzení jako: »*pouze myšlenka uznaná za pravdivou může tvořit premisu úsudku*« [L_N, 281] a »*vyjadřuje-li věta vyslovená s tvrdící silou nepravdivou myšlenku, je logicky nepoužitelná, přesněji řečeno, nesrozumitelná*« [WB, 127], nám – zdá se – nedávají na výběr. Chceme-li (jako že chceme) činit soudy a provádět úsudky, musíme být buď neomylní, a každé tvrzení nepravdivého tedy považovat za lež, tj. něco morálně nepřijatelného, nebo se uchýlit k Russellově podivuhodné doktríně, ať již znamená cokoli. Ve Fregových tezích je ale před jejich případným zavržením nejprve třeba rozpoznat stopu tradice, k níž se výslovně přihlásil úvodními slovy *Begriffsschrift* (viz úvod podkapitoly /1.5/): Cílem vědy je pravdivé poznání. Tvrzená věta je tradičně na rozdíl od pouhého mínění považována za poznání až tehdy, když je jako taková zdůvodněna. ¹¹⁸⁾ Deduktivní důkaz jako případné zdůvodnění pak

¹¹⁷⁾ K porozumění Russellovu textu nám poslouží terminologické vysvětlení z jeho expozice Fregových názorů: »*Gedanke* [myšlenka] je zde to, co jsem nazval větou, která nebyla tvrzena [...].« [PoM, § 477].

¹¹⁸⁾ Srv. *Platón* [Thea, 201c].

na rozdíl od pouhého odvození začíná pravdivými premisami.¹¹⁹⁾ Logika jakožto nástroj tohoto úsilí o poznání pravdy »*má pak co do činění jen s takovými důvody souzení, které jsou pravdami. Soudit s tím, že jsme si vědomi jiných pravd jakožto ospravedlňujících důvodů, znamená usuzovat.*« [L_{1N}, 3] Potud jsou tedy jasná i výše citovaná Fregova tvrzení. Zbývá však přirozeně otázka, jak výrazy jako “poznání”, “mínění”, “uznání pravdivosti” chápat, tj. jak jejich použití smířit s lidskou omylností, s tím, co Frege velmi často akcentoval jako rozdíl mezi (objektivně) »pravdivým« a (subjektivně, psychologicky) »považovaným za pravdivé«.

Cesta vede přes konstrukci sofistickovanějšího normativního slovníku, jak je např. provedena v Brandomově *Making It Explicit*. V první řadě si je zapotřebí uvědomit následující: věty nevnášíme jen tak, abychom s nimi třeba, jak poznamenal Wittgenstein, tapetovali stěny, ale vůči druhým; tvrzení je jistý druh praktického závazku. Brandomův návrh spočívá nyní ve specifikaci tohoto normativu jakožto závazku inferenčního (*inferential commitment*): »*Idea je ta, že tvrzení (akty, které jsou veřejným podstoupením asertorického závazku) jsou v podstatném případě tím, po důvodech čehož se ptáme a v čem vždy spočívá udávání důvodů.*« [ME, 167]¹²⁰⁾ V Lorenzenově dialogické logice, představující historicky ojedinělý případ formálního zachycení usuzování jakožto společenské praxe, objevujeme tutéž ideu. V sémantice dialogu se proponent vnesením neelementární věty zavazuje k obhajobě (zdůvodnění) této teze, a to buďto vnesením teze další, nebo útokem na některou z tezí oponenta. Předepsání symbolu “┌—” před tvrzenou větou lze tedy dát dobrý, nepsychologický smysl! Pragmatický rozdíl mezi

┌— (jestliže *A*, pak *B*)
 a ┌— (jestliže *A*, pak *B*), ┌— *B*

je evidentní. V prvním případě se k obhajobě (udání důvodu) věty *A* či *B* nezavazujeme, ani tyto věty neklademe jako možné premisy dalších úsudků. Wittgensteinova poznámka z *Filosofických zkoumání* v tomto ohledu (až napodruhé) trefuje cíl:

»*Fregův symbol pro tvrzení zdůrazňuje začátek věty. Má tedy podobnou funkci jako tečka za větou. Odlišuje celou periodu od věty uvnitř periody. Kdybych někoho slyšel říci “prší”, ale nevěděl, zda jsem slyšel začátek nebo konec pe-*

¹¹⁹⁾ Srv. *Aristotelés* [Top, 100a].

¹²⁰⁾ Poznání jakožto komplexnímu deontickému statu je věnováno *Brandom* [ME, k. 4, oddíl 1, 199sq].

riody, nepředstavuje pro mě tato věta ještě žádný prostředek dorozumění.« [PU, § 22]

(iii) Námitka, že Frege svou tezí o nemožnosti vedení úsudku z nepravdivé premisy diskriminuje úsudek z pouhých hypotéz (*»Pouhé hypotézy nemohou být užity jako premisy.*« [WB, 118]) či standardní metodu nepřímého důkazu,¹²¹⁾ představuje nyní jen zdánlivou potíž. Naopak, již odstup, který při pronášení hypotéz dáváme najevo s pomocí uvádějících frází jako “předpokládejme, že _”, “necht’ _” atd., naznačuje, že se jedná o odlišný jazykový akt, totiž bez samostatného (absolutního) charakteru závazku (>zde stojím a tvrdím<), ale jen jeho přípravy. Bylo by absurdní vynést předpoklad a skončit. V dialogické hře můžeme toto zřeknutí se odpovědnosti manifestovat tím, že ji přeneseme na (fiktivního) oponenta prostřednictvím obrátů jako “říkáte-li _ , pak ale musíte uznat _” či “dejme tomu, že _ , potom však _” apod.¹²²⁾

Uvážení relativní (nesamostatné) povahy (pre)supozic je také bází Fregova vlastního řešení problému, jak jej rozvedl především v polemice s Hilbertovou koncepcí formálních (a vzájemně neslučitelných) geometrií: *»Někdo ale třeba namítne, že přece z určitých myšlenek můžeme čistě hypoteticky vyvozovat důsledky, aniž bychom soudili na jejich pravdivost. Jistě, čistě hypoteticky! Ale zmíněné myšlenky již nejsou úsudkovými premisami. Premisami jsou spíše jisté hypotetické myšlenky [tj. souditelný obsah kondicionálu] obsahující ony uvažované myšlenky jako své podmínky. Také v konečném výsledku se musí ony uvažované myšlenky objevit jako podmínky; a z toho vyplývá, že nebyly užity jako premisy; neboť pak by v konečném výsledku zmizely.*« [UG₂, 425]¹²³⁾ Svázáním výskytu hypotetického předpokladu s antecedentem kondicionálu “jest-liže _ , pak _” si Frege ušetřil presupoziční analogon svislého pruhu.¹²⁴⁾

3.2 LOGIKA VÝROKŮ

Začali jsme jazykovým aktem tvrzení, a to jako něčím, co lze v principu schvalovat, či popírat, považovat za oprávněné, či nikoli, v regulativním smyslu slova: co lze fixovat na >ano<, či >ne<, *tertium non datur*. Termíny “princi-

¹²¹⁾ Viz např. *Baker-Hacker* [FLE, 38].

¹²²⁾ Ke vztahu přímého a nepřímého důkazu srv. také *Aristotelés* [Met, 1006a]. Metodickou prioritu prvního z nich demonstruje Aristotelés již zmíněnou (/1.2.1/) eliminací aplikace vyloučeného třetího v sylogistickém důkazu přímými úsudky.

¹²³⁾ Srv. také [LM_N, 263sq], zvláště kvůli diskusi nepřímého důkazu, případně Fregovu korespondenci s Dinglerem in: [WB, 30sq] a dále i [V, 145].

¹²⁴⁾ Srv. *Dummett* [FPL, 313sq].

pu” a “regulativu” nás opět upomínají na normativní charakter takovýchto výroků, kterými nemá být popírán výskyt sporných a nejasných případů (ne)správnosti, (ne)pravdivosti nějaké věty (tvrzení), nýbrž vytyčen ideál, na němž se máme v dále konstruované logice orientovat; jinými slovy: ›regulativní ideál‹ prováděného zkoumání. Výrazem této ideje je pak fregovská *myšlenka*, a to jakožto výsledek rozkladu možného tvrzení situačně nezávislé věty na tuto větu samotnou, její *obsah* a *uznání* jeho pravdivosti. »*V logice platí: každá myšlenka je buď pravdivá, nebo nepravdivá, tertium non datur.*« [KUN, 214] Akt uznání pravdivosti E-větou *A* vyjádřené myšlenky — *A* zachycujeme předepsáním svislého pruhu, případně komplexním performátorem “ \vdash ” jako $\vdash A$ a hovoříme o něm jako o soudu.

Zatímco původně, s odvoláním na běžnou praxi vynášení soudů, bylo přiřknutí pravdivosti větě chápáno až odvozeně *via* pravdivost soudů, případně souditelných obsahů, v ›uměle‹ konstruovaných větných systémech, jako jsou např. *Begriffsschrift* či *Grundgesetze*, je tomu naopak. (Dostáváme se do druhé, normativní fáze úvodem této kapitoly popsané Lorenzenovy triády.) Začínáme strukturálně popsanou větou a v závislosti na její výstavbě jí skrze pravdivostní podmínky přidělujeme pravdivostní hodnotu. (»*Rozlišuji totiž dvě pravdivostní hodnoty: pravdu a nepravdu.*« [GG₁, X]) Sepsáním

(π) $\vdash A$

vyjadřujeme soud, že byla věť *A* přidělena hodnota pravda (o *A* pak můžeme hovořit jako o jménu této hodnoty – viz [GG₁, § 2]), a to podle okolností soud pravdivý, nepravdivý či nesmyslný nebo přesněji žádný. Poslední případ nastává tehdy, když věť příslušnými kritérii nebyla přiřazena hodnota žádná nebo obě. I když ve většině zajímavých případů překračují námi navržená kritéria jejich reálnou kontrolovatelnost (bude diskutováno v /5.2.4/ a dále), musí být možné některá přiřazení (π) tvrdit bez připuštění mýlky, tedy: praxe tvrzení musí zahrnovat také praxi úspěšného tvrzení, a to i v takovém smyslu, že je neúspěch předem (tj. z definice) vyloučen. V mnoha případech bude (π) výrazem pouhé *stipulace*. V tomto duchu (předem garantovaného úspěchu) je také nutné číst Fregova vyjádření jako: »*Soud reprezentovaný v pojmovém písmu pomocí symbolu “ \vdash ” nazývám větou pojmového písma nebo krátce větou.*« [GG₁, § 5] či jádro odpovědi na Jourdainovu otázku (/3.1.6/): »*Kdybychom při prezentaci úsudku v mém pojmovém písmu vynechali u premis pruhu soudu, chybělo by něco podstatného. A je dobře, že je toto podstatné viditelně ztělesněno v nějakém symbolu, a ne jen dodatečně pochopeno na základě nevyšlovené konvence; neboť konvence, podle níž by mělo být něco dodatečně*

pochopeno, upadne lehce v zapomnění, zvláště tehdy, je-li nevyslovena.«
[WB, 127]

3.2.1 Zbytnost pravdy

Regresivní argument z /3.1.2/ a s ním spjaté pozorování z /3.1.3/, konkrétně:
»*Tvrdím-li, že součet 2 a 3 je 5, tak také tvrdím, že je pravda, že 2 a 3 je 5.*«
[L_{2N}, 140], může vyvolat dojem, že je Frege zastáncem redundanční teorie pravdy, tradičně spojované s Ramseyem¹²⁵⁾ a Wittgensteinem shrnuté do hesla:

»*Co tedy znamená: věta >je pravdivá<? >p< je pravdivá = p. (To je odpověď.)*«
[BGM, část I, dodatek III, § 6],

tedy alespoň potud, předpokládá-li se, že tato rovnost (ekvivalence) je jediné, co lze o pravdě říci, či dokonce, že sémantický pojem pravdy nehraje v teorii významu (logice) žádnou podstatnou roli.¹²⁶⁾ To je ale v jasném rozporu s Fregovým pozdvižením pravdy na ústřední téma logiky a v *zásadním* rozporu s jeho postupem v *Grundgesetze*, kdy je výslovně pro jednotlivé věty systému »[...] *konvenčně určeno, za jakých podmínek znamenají pravdu* [jsou pravdivé, je jim přiřazena hodnota pravda]« [GG₁, § 32]. Tím jsou pravdivostní podmínky vyňaty z jakéhokoli podezření redundance, ba naopak, jak ještě uvidíme, ve vztahu k (sémantickému) významu lze jejich úlohu nahlédnout jako podstatně konstitutivní. Všimněme si také, že Fregova teze nemá podobu Wittgensteinoва (netriviálního) hesla, ale jako

$$(\vdash \text{“}A\text{” je pravdivá}) = \vdash A$$

je jen konstatováním triviality, že tvrzení věty jakožto její vyslovení s pravdivostním nárokem je ekvivalentní tvrzení, že je pravdivá. Přirozeně také platí, že je-li “ $\vdash A$ ” vyjádřením řádného soudu, je tvrzení pravdivosti tohoto soudu ekvivalentní s tímto soudem samotným, tj.

$$(\text{“} \vdash A \text{” je pravdivý soud}) = \vdash A. \text{ } ^{127)}$$

Co lze odvodit z regresivního argumentu a co jsme také použili proti realisticky pojaté korespondenční teorii pravdy, je nemožnost uniformní charakterizace

¹²⁵⁾ Zvláště s ohledem na: Ramsey [FM, 142sq].

¹²⁶⁾ Srv. Dummettův rozbor tématu in: [FPL, 458sq], případně celou kapitolu 13 tamtéž. Dále Tugendhat [ESP, 249sq].

¹²⁷⁾ Nevyjadřuje-li “ $\vdash A$ ” soud, pak nemá příslušné tvrzení pravdivosti žádný smysl – není důvodu, proč pouhé posloupnosti psaných či vyčtených znaků připisovat pravdivost; jinými slovy: není to tak, že by pravá strana neměla smysl, zatímco strana levá by byla nepravdivá.

pravdivosti pro všechny smysluplné věty jazyka. Vezmeme-li však vážně úvodem této kapitoly načrtnuté pojetí jazykové analýzy jako dialektického pohybu, nejsme tím nejen nijak zaskočeni, ale nemáme ani důvod k obavám, že není pravdivost analyzovatelná vůbec, byť přirozeně pouze v lokálním měřítku a relativně k oboru, v němž její otázku považujeme za neproblematickou. Abychom tyto úvahy nevedli stále jen v abstraktní rovině, uvažme následující (s ohledem na využití v dalším textu terminologicky širše koncipovaný) příklad z oblasti základů matematiky.

Zmínili jsme úvodem, že to byl Leibniz, kdo si povšiml společných vlastností počítání a usuzování jakožto přechodu od symbolů k symbolům, a anticipoval tak další vývoj logiky. Historické reminiscence nás ale momentálně nezajímají, podstatný je postřeh, že v matematice i v logice operujeme se symboly (či jinými artefakty) podle jistých pravidel. Jednání podle pevných pravidel budeme nyní nazývat *schematickým operováním*; schéma pro operování s libovolnými figurami nazveme *kalkulem*. Ten necháme skládat z atomárních figur, proměnných a pravidel, které v závislosti na již vygenerovaných figurách (posloupnostech atomárních figur) ›přikazují‹ generovat figury další; tyto generované figury nazýváme *slovy kalkulu*. Produkci nějaké figury podle pravidel kalkulu nazveme *odvozením* této figury v kalkulu; odvoditelnost figury A v kalkulu K zapisujeme $\vdash_K A$.¹²⁸⁾ Obecné pravidlo kalkulu má formu $A_1, A_2, \dots, A_n \Rightarrow A$, kde písmena A_1, A_2, \dots, A_n, A reprezentují posloupnosti atomárních figur kalkulu a proměnných, a to p, q, \dots v *lastních* (*Eigenvariable*), probíhajících pouze přes slova tímto kalkulem dosud vygenerovaná, nebo a, b, \dots výrokových (*Aussagenvariable*), vztahujících se na slova generovaná kalkulem jiným. Antecedent pravidla (část nalevo od šipky) může být prázdný; o pravidle pak hovoříme jako o *počátku kalkulu*. Pravidlo R nazýváme *přípustným* pro kalkulu K a značíme $\vdash_K R$ (jedná se vlastně o zobecnění odvoditelnosti!), jestliže se po rozšíření kalkulu o toto pravidlo nezvětší třída jeho slov. Tolik tedy k terminologii.

Předpokládejme nyní, že jsme se (např.) spolu s Lorenzenovou operativní koncepcí logiky a matematiky rozhodli chápat velkou část matematiky jako teorii práce s libovolnými kalkuly,¹²⁹⁾ a to s tím, že pro nás otázka zvládnutí pojmu odvoditelnosti či neodvoditelnosti figur a přípustnosti či nepřípustnosti

¹²⁸⁾ Podobnost (v tomto případě indexem odlišeného) symbolu “ \vdash_K ” se symbolem tvrdící síly jde na vrub dnešnímu užití Fregova znaku, které se jeho původního, *sémantického* významu zcela zřeklo a nahradilo jej významem *syntaktické* odvoditelnosti.

¹²⁹⁾ Lorenzen [1955, 3sq].

pravidel nepředstavuje vážný teoretický problém, a coby záležitost elementárně praktické dovednosti ji odkazujeme do ›předvědeckého‹ kurzu *protologiky*.¹³⁰⁾ Sada kalkulu

$$(K1) \quad \Rightarrow | \quad (K2) \quad \Rightarrow |, a| \\ p \Rightarrow q \quad a, b \Rightarrow a|, b|$$

tj. (K1) generátor číslovek

$$|, ||, |||, \dots,$$

s atomární figurou “|” a s vlastní proměnnou “*p*”, a (K2) určení (definice) jejich uspořádání, s atomárními figurami “|”, “,” a výrokovými proměnnými “*a*”, “*b*”, probíhajícími přes figury kalkulu (K1), nám pak dovolí spolu s již zmíněným předpokladem empraktického zvládnutí (následování) takovýchto pravidel formulovat výraz jako

$$(\rho) \quad \vdash S < T \text{ tehdy a jen tehdy, když } \vdash_{K2} S, T,$$

s pravou stranou obsahující tvrzení odvoditelnosti figury *S, T* v (K2) a levou jakožto stipulační pravdivostní hodnoty pro větu předem popsané formy.¹³¹⁾

Vrátíme-li se tedy nyní k problému určení pravdy, vidíme, že zde namísto zavrženého

$$(\vdash A) \text{ tehdy a jen tehdy, když } A$$

nastupuje netriviální

$$(\zeta) \quad (\vdash A) \text{ tehdy a jen tehdy, když } B,$$

kde *B* reprezentuje již zvládnutý (tj. neproblematický) rozpis pravdivostních podmínek, za nichž je přiřazena hodnota pravda větě *A*. Takováto určení nejsou však zajímavá sama o sobě, ale jen proto, že lze ›měle‹ ohodnocený systém vět levé strany projikovat na nějakou stávající (problematickou) část jazykového úzu, tedy že nám např. konvence jako (ρ) dovolí netriviální (protože praktickou) odpověď na otázku, proč je pět menší než osm apod.

Uvědomme si dále, že pravá strana (ζ) jakožto strana pravdivostních podmínek hraje roli *a priori* strany levé, tj. předchází jí (v nečasovém smyslu slova) a nelze ji v této samé tematizovat, tedy ani zpochybnit či vyvrátit. Podobně jako (Lorenzenova) teorie kalkulu ve vztahu k aritmetice, je aritmetika spolu s ge-

¹³⁰⁾ Lorenzen [‹1955›, 7], Lorenzen [‹1955a›].

¹³¹⁾ Lorenzenův operativní model je přirozeně interesován na větách podstatně složitějších (v první řadě na větách matematické analýzy). Uvažme ale, že zdánlivá trivialita výše uvedeného končí již v dalším kroku případné expozice, kdy je nutné vyjasnit (nikoli pojem, ale) důkaz *neodvoditelnosti* nějaké figury.

ometrií tradičním *a priori* fyziky.¹³²⁾ Odtud také ona neustále deklarovaná ›nutnost‹ aritmetických pravd.

3.2.2 Tvrzení, otázka, rozkaz

V souvislosti s aktem tvrzení jsme hovořili o souhlasu a popření jako o jeho charakteristických rysech. Stanovisko ano/ne lze ale zaujímat i u jiných jazykových aktů: tvrzení “dveře jsou zavřené”, otázka “jsou dveře zavřené?” či rozkaz “zavřete dveře!” snesou reakci “ano” či “ne” ve stejné míře. Než tento postřeh chápat jakožto znehodnocení výše uvedené specifikace, obrátíme jej naopak v její prospěch, totiž tak, že v něm nahlédneme (i) projev primátu tvrzení jakožto jazykového aktu, bez něhož by jiná jazyková jednání vůbec nebyla hodna tohoto názvu,¹³³⁾ a (ii) argument pro jejich prezentaci v téže formě zahrnující symbol specifické performativní (asertorické, interogativní, imperativní) síly a (ve všech případech téhož) (souditelného) obsahu.¹³⁴⁾

Kladení otázek představuje v tomto ohledu nejjednodušší případ. To, s čím při tvrzení vyslovujeme souhlas (*bejahen*) či co popíráme (*verneinen*), nazývá Frege v *Begriffsschrift* souditelným obsahem. Takto jsme také uvažovali v /3.1.3/. Pozměněnou terminologií Fregových pozdních spisů pak můžeme říci následující: »*Větná otázka* [tzv. otázka zjišťovací, na rozdíl od ›slovní otázky‹, tzv. otázky doplňovací, jako “kdo přišel pozdě?”] *obsahuje výzvu k tomu, abychom nějakou myšlenku buďto uznali za pravdivou, nebo ji zavrhlí jako nepravdivou.*« [V, 143] »*Očekáváme odpověď* “ano”, *nebo* “ne”. *Odpověď “ano” říká totéž, co tvrdící věta; neboť skrze ni je myšlenka stavěna jakožto pravdivá. Takto můžeme ke každé tvrdící větě vytvořit větnou otázku. [...] Tvrdicí věta a větná otázka obsahují tutéž myšlenku; ale tvrdící věta obsahuje ještě něco navíc, totiž právě tvrzení. Také větná otázka obsahuje něco navíc, totiž výzvu.*« [G, 62]

Nyní je jasné, že (i) bez možnosti tvrzení by nebylo možné ani tázání, neboť již druhým krokem jazykové hry kladení otázek je dávání odpovědí, a že (ii) lze analogicky k asertorickému aktu chápat akt interogativní jako spojení E-větou A vyjádřené myšlenky — A se znakem interogativní síly “?”.

¹³²⁾ Srv. k tomu např. Fregovo vyjádření z [GL, § 87]: »*Zákony čísel tedy nejsou aplikovatelné na předměty vnějšího světa: nejsou přírodními zákony. Jsou ale aplikovatelné na soudy, které o předmětech vnějšího světa platí: jsou to zákony přírodních zákonů.*«

¹³³⁾ Srv. *Brandom* [ME, 172].

¹³⁴⁾ Srv. *Tugendhat* [ESP, 74sqq].

Obecná forma jazykového aktu by pak pro “M” jakožto zástupný symbol performativního modu mohla vypadat takto:

M — A.

Problematictější se zdá být záležitost rozkazů, jimž Frege vazbu na myšlenku výslovně upírá. [G, 62] Rovněž zde však lze postupovat výše uvedeným způsobem a imperativ jako “zavři dveře” převést do formy

! — dveře jsou zavřené,

v níž je nařízeno zjednání stavu vyjádřeného myšlenkou příslušné oznamovací věty. Spolu s Brandomem pak můžeme oprávněně říci: *»Výřčení věty “zavři dveře” lze považovat za rozkaz pouze v kontextu praxe zahrnující soudy, a tedy tvrzení, že jsou dveře zavřeny, či že zavřeny nejsou.»* [ME, 172] Totéž platí pro přání, sliby atd. Úroveň těchto úvah je pochopitelně již pro jejich letmo načrtnutou povahu pouze motivační, tj. *»nedokázali«* jsme v nich zhola nic. Lze v nich však (mimo jiné) najít způsob, jakým je možné diskriminaci neasertorických jazykových aktů v systému Fregovy logiky hájit; totiž podobně, jak to Frege sám činí již v *Begriffsschrift* pro případ apodiktických soudů: *»Označím-li nějakou větu za nutnou, dávám tím jen najevo své důvody pro příslušný soud. Jelikož tím ale není nijak dotčen pojmový obsah soudu, nemá pro nás forma apodiktického soudu žádný význam.»* [B, § 4]¹³⁵⁾

3.2.3 Popření

Ve vztahu k tvrzení jakožto logikou privilegovanému jazykovému aktu zbývá vyjasnit ještě jednu, a to velmi podstatnou věc. Zopakujme nejprve již jednou řečené: klademe-li otázku, *»očekáváme odpověď “ano”, nebo “ne”. Odpověď “ano” říká totéž, co tvrdící věta; neboť skrze ni je myšlenka kladena jakožto pravdivá«* [G, 62]. Co ale říká odpověď *»ne«*? Zkusíme třeba navrhnout: odpověď *»ne«* myšlenku popíráme neboli klademe jako nepravdivou. Pak je ale popření, o němž jsme dosud tak často v souvislosti s tvrzením hovořili, k tomuto inverzním, a tedy svébytným jazykovým aktem, neboť se v něm skrývá cosi jako *»nárok na nepravdu«*. Na úrovni větné je pak toto jazykové jednání mani-

¹³⁵⁾ Tato pasáž z *Begriffsschrift* je zajímavá také proto, že se jedná o jediné místo (alespoň o jiném nevím), kde se Frege výslovně věnuje (epistemickým) modalitám, a to jako výroků o dokazatelnosti z relevantních znalostí; věta (myšlenka) *A* je *možná*, jestliže její negaci (popření) nelze dokázat ze známých skutečností, a *A* k nim lze tedy (zatím) bezesporně přidat; (pro ilustraci uvažme např. vyšetřování zločinu a věty jako “zloděj musel být muž”, “oběť mohla vraha znát” atd.) K takovéto rekonstrukci modalit srv. např. Lorenzen [LKW, 132sqq].

festováno zápornou “ne”, která následně charakterizuje typ popírající věty, takto stojící na stejné úrovni s větou tvrdící (teď již jen jako jedním z případů věty oznamovací), tázací, rozkazovací atd.

K tomu všemu Frege namítá: *»Hovoří se o souhlasných a popírajících soudech. Také Kant tak činí. Přeloženo do mého způsobu řeči bychom rozlišovali souhlasné a popírající myšlenky. Přinejmenším pro logiku je toto rozlišení zcela zbytečné a jeho důvody lze hledat mimo ni. Není mi znám jediný logický zákon, při jehož formulaci by bylo nutné nebo jen výhodné toto označení použít. [...] K tomu se ještě přidává to, že není vůbec snadné říci, co je popírající soud (popírající myšlenka). Uvažme věty “Kristus je nesmrtelný”, “Kristus žije věčně”, “Kristus je smrtelný”, “Kristus nežije věčně”. Co z toho je souhlasná a co popírající myšlenka?«* [V, 149sq] Tuto čistě praktickou motivaci pak Frege dovádí k následujícímu vyhocení problému: *»Existují tedy dva odlišné způsoby souzení, z nichž je jeden souhlasnou, druhý pak zápornou odpovědí na nějakou otázku? Nebo je souzení v obou případech totéž? Patří popření k souzení? Nebo je popření částí myšlenky, která je pro souzení podkladem? Je souzení uznáním pravdivosti myšlenky také v případě záporné odpovědi na otázku? Pak se nejedná o myšlenku bezprostředně obsaženou v otázce, nýbrž myšlenku této myšlenky protikladnou.«* [V, 153]

Sugestivní sled otázek tak přehledně a přirozeně ústí v následující řešení: Akt popření je aktem tvrzení protikladné věty (myšlenky), utvořené z věty popírané pomocí fráze “není pravda, že _”, případně vsunutím zápornky “ne” apod. Ve všech těchto případech nejsou příslušné výrazy znakem performativního aktu, nýbrž příspěvkem k tvrzené větě (myšlenke). Jinak by v případě složených vět jako třeba “jestliže není pravda, že A, pak B” nastal stejný problém, s jakým jsme se setkali u tvrdící síly v /3.1.6/. (Srv. [V, 153sq].) Neboli:

»Proti každé myšlenke stojí myšlenka jí protikladná, takže zavržení jedné znamená uznání druhé. Souzení je volba mezi dvěma protikladnými myšlenkami. Uznání jedné z nich a zavržení druhé je jeden a tentýž čin. Pro zavržení tedy nepotřebujeme žádný speciální symbol, pro popření bez tvrdící síly však ano.« [KUN, 214]

Od *Begriffsschrift* je k — A protikladná myšlenka značena jako

— A.

»Má tím být vyjádřena okolnost, že obsah neplatí.« [B, § 7] Symbol

—

sestává z vodorovného pruhu a svislého pruhu popření (*Verneinungsstrich*); my o něm a o jeho moderní variantě “¬” budeme hovořit jako o negátoru.

V rámci pragmatického pojetí tvrzení jako (inferenčního) závazku představuje Fregova strategie uniformního jazykového aktu jedině uspokojivé řešení, když totiž vyjímá popření ze sféry anarchie (nezávazného) pochybování (o všem a beze všeho) a spojuje jej přímo s tvrdícím závazkem. Je-li protikladnost dvou vět chápána v tom smyslu, že závazek k jedné znamená ztrátu oprávnění k druhé, představuje tvrzení věty popření věty protikladné.¹³⁶⁾ Podle pravidel dialogické logiky je závazek k protikladné tezi jediný možný útok na negovanou větu.¹³⁷⁾

Bez zajímavosti není ani případné zvážení metafyzických důsledků Fregova odmítnutí rozlišit záporné od kladných vět, a to např. v souvislosti s tehdy aktuální Russellovou doktrínou ›negativních faktů‹ [RLA, 67sq], zvláště když vzpomeneme Fregova vyjádření jako: »*Skutečnost [fakt] je myšlenka, která je pravdivá.*« [G, 74] apod.

3.2.4 Komplexní myšlenky

Jak jsme již zjistili, přidání predikátu “pravdivý” k vyjádření myšlenky nechá tuto zcela netknout: »*V zásadě neznamená věta “Je pravda, že 2 je prvočíslo” nic víc než věta “2 je prvočíslo”.*« [EL_N, 211] Tedy:

—— (je pravda, že A)

vyjadřuje totéž, co

—— A.

Přidání predikátu “nepravdivý” oproti tomu myšlenku převrací v protikladnou, tedy:

—— (není pravda, že A)

vyjadřuje totéž, co

—— \neg A.

Tvrzením jedné věty se takto můžeme vyjádřit k pravdivosti věty jiné. Nabízí se nyní rozšířit tuto možnost i pro více vět (myšlenek). V *Begriffsschrift* Frege uvažuje:

»*Znamenají-li A a B souditelné obsahy, máme zde následující čtyři možnosti:*

- (1) A je potvrzen [bejaht] a B je potvrzen,
- (2) A je potvrzen a B je popřen [verneint],

¹³⁶⁾ Srv. *Brandom* [ME, 178].

¹³⁷⁾ Srv. např. *Lorenzen* [LKW, 60sq].

(3) *A je popřeno a B je potvrzeno,*

(4) *A je popřeno a B je popřeno.*

[(σ)] $\begin{array}{l} \text{┌─── A} \\ \text{└─── B} \end{array}$

nyní znamená soud, že třetí z těchto možností neplatí, ale že platí jedna ze tří zbývajících.« [B, § 5]

Ve znaku

(τ) $\begin{array}{l} \text{┌─── A} \\ \text{└─── B} \end{array}$

máme vyjádření tzv. materiálního kondicionálu; svislý symbol, spojující dva pruhy obsahu, je nazván podmínkovým pruhem (*Bedingungsstrich*). My budeme o příslušném komplexním znaku, ale i o jeho moderní variantě “ \rightarrow ” mluvit jako o subjunktivu.

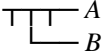
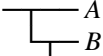
Fregova nejasná formulace, používající pragmatických termínů souhlasu (potvrzení) a popření, poněkud komplikuje další výklad, tradičně ovlivněný tabulkovou sémantikou pravdivostních podmínek, jak ji známe především z Wittgensteinova *Tractatu* ([TLP, 4.31sq]). Za asistence ostatních Fregových spisů se však lze dobrat přehledných výsledků celkem snadno.

Výraz (τ) vyjadřuje myšlenku (souditelný obsah) protikladnou myšlence — (ne A a B) [BF_N, 57]; jedná se o hypotetické spojení vět [EL_N, 202], jemuž na úrovni obsahu odpovídá spojení myšlenek (*Gedankengefüge*) [GF] v (hypotetickou) myšlenku komplexní, k níž jedině se také vztahuje soud (σ). [EL_N, 201] Volbu této kombinace vysvětluje Frege v jedné ze svých nepublikovaných obhajob pojmového písma srovnáním se symbolikou Boolovou takto:

»Říká-li jedno ze dvou značení vše, co znamená i druhé, zatímco toto druhé neobsahuje celý smysl prvního, nazývám význam druhého jednodušší nežli prvního, neboť má méně obsahu. Uplatníme-li toto měřítko, vidíme, že nejjednodušší možný vztah dvou souditelných obsahů lze získat popřením jednoho ze čtyř případů [viz výše uvedený rozpis kombinací], neboť popření dvou z nich říká více než popření jediného a popření tří ještě více; shoduje se s potvrzením čtvrtého. Z boolovských symbolů neodpovídá žádný tomuto požadavku nejvyšší jednoduchosti významu. [...] Boolův logický součin $A \cdot B$ znamená jakožto potvrzení prvního případu popření tří zbylých, a je tedy velmi obsažný. [...] Chceme-li se vyvarovat právě uvedeného nedostatku, musíme zavést vlastní označení pro popření jednoho ze čtyř výše vyčíslených případů. [...] Vybral

jsem si třetí případ “ne A a B ” jako ten, jehož popření získá vlastní symbol $[(\tau)]$.« [BF_N, 55sqq]

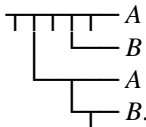
Ve zbytku textu pak Frege ukazuje, že je schopen pouze s pomocí negátoru a subjunkturu vyjádřit jak popření zbylých případů, tak spojení boolovská, kupř.:

A a B		moderní notací	$A \wedge B$,
A nebo B (nevyklučující)			$A \vee B$ atd.,

v důsledku tedy připuštění libovolné kombinace případů. Tě lze dosáhnout např. vhodným konjunktivním spojením popření případů jednotlivých, jak to lze konkrétně ukázat (srv. [B, 12], [ZB, 7]) na příkladě vylučující disjunkce, kterou dostaneme spojením výrazů

	
---	---

popírajících po řadě čtvrtý a první případ, do



Teprve v pozdějších Fregových spisech nacházíme moderní formulaci podmínek materiálního kondicionálu s termíny “pravdivý”, “nepravdivý” na místě “potvrzen”, “nepotvrzen” (viz [EL_N, 202],¹³⁸) [KU_N, 215]). V dopise Husserlovi z roku 1906 pak čteme:

»Ale předpokládejme ještě jednou, že písmena “ A ” a “ B ” zastupují vlastní věty [věty vyjadřující (úplné) myšlenky, tj. E-věty]. Pak neexistují případy, v nichž je A pravdivá, a jiné, v nichž je nepravdivá; nýbrž: buď je A pravdivá, nebo je nepravdivá; tertium non datur. Totéž platí o B . Potom máme čtyři kombinace:

A je pravdivá a B je pravdivá,
 A je pravdivá a B je nepravdivá,

¹³⁸) V tomto fragmentu z roku 1906 Frege navíc dodává: »Je tomu dnes již dvacet osm let, co jsem toto vysvětlení předložil. Tehdy jsem se domníval, že stačí jenom lehce naznačit, a druzí se brzy vyznají lépe než já. A nyní, když uplynulo více než čtvrt století, nemá většina matematiků o celé věci ani tušení, a totéž platí i u logiků! Jaká tupost! Chování těchto učenců mi připomíná vola před novými vraty: zírá, bučí, snaží se proniknout jinudy, ale projít skrz, to by mohlo být nebezpečné.« [EL_N, 202]

A je nepravdivá a B je pravdivá,
A je nepravdivá a B je nepravdivá. « [WB, 103sq]

Soud

(σ) $\begin{array}{l} \vdash A \\ \vdash B \end{array}$

je nepravdivý tehdy a jen tehdy, jsou-li oba soudy $\vdash A$, $\vdash B$ pravdivé, ovšem za právě zmíněného *předpokladu*, že tyto dva výrazy vůbec nějaké soudy artikulují, jinými slovy: že je (byla) větám *A*, *B* jednoznačně přiřazena právě jedna pravdivostní hodnota. Teprve potom má smysl něco jako (σ) vůbec formulovat. Oproti tomu lze soud (σ) vynést, »aniž bychom věděli, zda je *A a B třeba potvrdit, nebo popřít*« [B, 6], tedy aniž bychom příslušné pravdivostní hodnoty znali. Uvědomíme-li si navíc, že ačkoli v *Begriffsschrift* zastupují schematická písmena “*A*”, “*B*”, ... souditelné obsahy, přihlíží Frege při jejich skládání pouze k jejich pravdivosti a otázky obsahu, např. příčinné souvislosti obou vět, odsouvá stranou (srv. [B, 6]), tedy všimneme-li si, že pravdivost výsledného spojení závisí pouze na pravdivosti dílčích vět – je jejich funkcí –, začne nám být postupně jasné, proč Frege později (v *Grundgesetze*) hovoří o rozpadu souditelného obsahu (z *Begriffsschrift*) na myšlenku a pravdivostní hodnotu (porozumíme tedy lépe jeho distinkci smyslu a významu) a přechází od praxe tvrzení souditelných obsahů k formulaci podmínek přiřazení pravdy a nepravdy větám coby jménům obou hodnot (viz [GG₁, X, § 2, 32]). S vědomím, že užijeme rozlišení, kterým se budeme podrobně věnovat až později, a že tak navíc učiníme v kontextu, v němž je Frege zavedl až odvozeně, rozvedeme s jistým předstihem tento proces přímo v expozici Fregova výrokovělogického modelu.

3.2.5 Funkcionální model výrokové logiky

Podobně jako výrazy “některé *B* je *A*” či “žádné *B* není *A*” v případě aristotelické logiky, jsou nyní výrazy jako “ $\vdash A$ ” či (τ) větnými schémata, tj. slouží k vyjádření větné formy, v tomto případě formy výrokovělogické. Písmena “*A*”, “*B*” zde ovšem nezastupují pojmy, ale (situačně nezávislé) věty, v případě *Begriffsschrift* pak souditelné obsahy. Forma uvažovaných vět je rekurzivně definována následujícím volně načrtnutým kalkulem \mathcal{K}_S :

- (V1) o systému symbolů a_i , pro i probíhající přes všechny numerály, což mohou být slova kalkulu (K1) z /3.2.1/, hovoříme jako o *b á z i* systému větných schémat fregovské výrokové logiky (dále jen větných schémat); výrazy $\vdash a_i$ nazýváme elementárními schémata,
- (V2) jsou-li *A*, *B* větná schémata, pak $\vdash i$

$$\text{—} A, \text{—} \text{—} A, \text{—} \text{—} \text{—} A$$

$$\text{—} \text{—} \text{—} B,^{139)}$$

(V3) vodorovné pruhy řazené za sebou lze sloučit (*verschmelzen*) v jeden; negátor sestává v tomto smyslu ze dvou vodorovných pruhů (oddělených pruhem popření), subjunktory z pruhů tří (viz [GG₁, § 48]).

V základech Fregovy logiky stojí nyní následující konstitutivní (normativní) princip, který nazýváme v návaznosti na Stekeler-Weithoferovy *Grundprobleme* (viz [GPL, 206]) jednoduše principem pravdivostním:

(WP) Každá smysluplná věta je pravdivá nebo nepravdivá, nic třetího a nikdy ne obojí.

S pohledem stále upřeným k tomuto principu a v analogii k dříve zkonstruovanému modelu aristotelské logiky lze nyní formální sémantiku k fregovské výrokovělogické syntaxi uvést takto: Začneme tím, že tutéž roli, jakou hrály kruhy komplexních diagramů v logice aristotelské, přisoudíme ›umělým‹ předmětům ›pravda‹ (*das Wahre*) a ›nepravda‹ (*das Falsche*), dále značeným jako “W” a “F”. Právě ony budou totiž přiřazovány jednotlivým písmenům “A”, “B”, ... schémat. Vezměme dále naše tři formotvorné symboly, tj. vodorovný pruh, negátor a subjunktory, jakožto jména funkcí, pro něž jsou pravda a nepravda argumenty i hodnotami (odtud také řeč o pravdivostních *hodnotách*),¹⁴⁰ podobně jako jsou přirozená čísla argumenty i hodnotami funkce sčítání či násobení. Tyto pravdivostní funkce nyní reprezentujeme tabulkami

A	— A	— — A
W	W	F
F	F	W

A	B	— — — A — — — B
W	W	W
W	F	W
F	W	F
W	W	W

a pro případ negátoru a subjunktory o nich hovoříme jako o *negaci* a *subjunkci*. Je zřejmé, že v závislosti na ohodnocení báze a rekurzivní vý-

¹³⁹⁾ Výrazy na tomto řádku ovšem nejsou větná schémata, ale schémata schémat; z důvodů jednoduchosti však v dalším textu (ostatně jako již dříve v několika méně křiklavých případech) tento rozdíl nepodporuji specifickou volbou znaků a přenechávám jej (čtenáři a) kontextu.

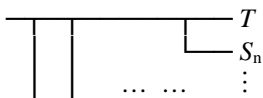
¹⁴⁰⁾ Srv. k tomu [FB, 13], kde také (s. 21 a dále) Frege předvádí výše zmíněné funkcionální pojetí logických spojek, avšak v modifikaci, které se ještě budeme věnovat později (funkce musí být definovány na celém univerzu).

stavbě zachycené kalkulem \mathcal{K}_S je každému větnému schématu postupným ohodnocením dílčích schémat přiřazena právě jedna pravdivostní hodnota. Ujijeme-li tedy obratu z Wittgensteinova *Tractatu*, můžeme říci, že »věta [fregovské formy] je výrazem svých pravdivostních podmínek« [TLP, 4.431], tj. její forma určuje, jaká ohodnocení báze jsou přípustná (dají hodnotu W) a jaká jsou popírána; a můžeme podobně jako třeba Frege v *Begriffsschrift* a příbuzných spisech ukázat, že tak lze vyjádřit pravdivostní podmínky libovolné, tj. že subjunktory a negátory tvoří funkcionálně úplný systém spojek fregovské výrokové logiky.¹⁴¹⁾ O ohodnocení báze pravdivostními hodnotami můžeme také hovořit jako o interpretaci schémat funkcionální výrokové logiky.

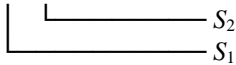
Tak, jako jsme aristotelským schématům přiřazovali možné komplexní diagramy (interpretace) těch konfigurací, které je splňovaly, můžeme nyní totéž provést pro schémata fregovská, totiž přiřadíme-li jim ta z možných ohodnocení báze, která jim výsledně dávají hodnotu W ; o těchto interpretacích lze Wittgensteinovou terminologií hovořit jako o pravdivostních důvodech daného schématu, resp. věty dané formy [TLP, 5.101], a říci, že toto schéma splňují. Snadno nyní zavedeme pojem logicky platného úsudkového pravidla jakožto takového přechodu od (konečné) třídy schémat S ke schématu T (značme opět $S \Rightarrow T$), že je třída pravdivostních důvodů společných všem schématům třídy S obsažena v třídě pravdivostních důvodů schématu T . Oproti logice aristotelské formulujme navíc ještě definici tautologické formy jako schématu, pro něž je každé ohodnocení báze pravdivostním důvodem, a formy kontradiktorní, pro níž není důvodem žádné. Platí, že

$$\{S_1, S_2, \dots, S_n\} \Rightarrow T$$

je logicky platným úsudkovým pravidlem tehdy a jen tehdy, je-li



¹⁴¹⁾ Frege přímý důkaz »úplnosti« ve výše uvedeném smyslu nikdy nepodal, z dříve uvedených míst je ale zřejmé, že si jí byl vědom; v [GF, 48] pak hovoří o (rovněž úplném) systému alternativních spojek, konjunktory a negátory, jako o »uzavřeném celku«, a to na pozadí stejných úvah jako kdysi v raných obhajobách *Begriffsschrift*. V nich se mimo jiné o možnosti této volby spojek také zmiňuje [BF_N, 56], dává však přednost subjunktory, neboť jeho prostřednictvím lze snáze vyjádřit úsudek. [B, 13] K tomu se ale brzy dostaneme.



tautologickým schématem.

3.2.6 Externí a interní pojem pravdy

Podobně jako kruhy v aristotelském modelu jsou pravda a nepravda, nikoli třeba souditelné obsahy, vlastními, *interními* objekty fregovského modelu (výrokové) logiky. V logice aristotelské byla oproti tomu otázka pravdy a nepravdy až záležitostí *externí* aplikace modelu (diagramů) na skutečnost.¹⁴²⁾ Chceme-li tedy nyní specifikovat, kdy je věta fregovské formy (externě) pravdivá, dostaneme s ohledem na fakt, že jsme pravdivost samu zakomponovali do naší formální sémantiky, netriviální odpověď jen v případě věty komplexní formy: totiž určují-li elementární věty takové ohodnocení (relevantní části) báze, které je pravdivostním důvodem příslušného schématu. Aby bylo možné náš výrokovělogický model vůbec aplikovat, je proto nutné normovat (ať již stávající či právě konstituovanou) praxi užití vět tak, aby za elementární věty, tj. věty neobsahující žádný výraz ekvivalentní některému z formotvorných znaků (negátoru, subjunktoru), byly voleny (stávající či potenciální) E-věty. O těchto větách pak můžeme uměle, tedy ve výše popsaném interním smyslu hovořit jako o jménech pravdy a nepravdy, lhotejně, zda jim jsou tyto hodnoty přiřazeny na základě praxe uznávání souditelných obsahů či přímou stipulací.¹⁴³⁾

S pomocí negátoru a subjunktoru lze dále v souladu s kalkulem \mathcal{X}_S rozšířit libovolný systém elementárních vět na systém vět komplexní výrokové formy, a to tak, že zůstane zachována platnost WP. Případné čtení složených vět s pomocí obrátů (spojek) přirozeného jazyka jako “jestliže _ , pak”, “_ nebo _” atd. je opět nutné vést s vědomím, že bylo výše uvedeným rozpisem pravdivostních podmínek vyrváno šíří obvyklého úzu¹⁴⁴⁾ a co do svého ›smyslu‹

¹⁴²⁾ Rozdíl mezi externím a interním pojmem pravdy, konkretizovaný na příkladě Aristotelovy a Fregovy logiky, je velkým tématem Stekeler-Weithoferových *Grundprobleme* – viz např. [GPL, § 5.3].

¹⁴³⁾ Frege si byl umělosti řeči o pravdě a nepravdě jakožto předmětech či pravdivostních hodnotách dobře vědom, srv. např. [FB, 13, pozn. 6], [SB, 34].

¹⁴⁴⁾ V poznámce k hypotetickému spojení vět (myšlenek) v [GF, 45] Frege píše: »*Možná někdo namítne, že jsme tím nevystihli jazykový úzus. Proti tomu je třeba stále zdůrazňovat, že vědě musí být povoleno mít jazykový úzus vlastní a že se nemůže pokaždé podřizovat přirozenému jazyku. Právě v tom vidím největší potíž filosofie, že pro svoji práci nachází jen pramálo vhodný nástroj, totiž přirozenou řeč, jejíž vývoj byl spoluur-*

normováno. Není náhodou, že tento ›smysl‹ (normované) věty dané formy ztotožňuje Wittgenstein přímo s pravdivostními podmínkami, takže lze říci, že rozumět větě znamená vědět, za jakých podmínek je pravdivá. [TLP, 4.024] To také odpovídá Fregově pozdní terminologii, v níž je ›smysl‹ věty, určený jakožto ›způsob danosti‹ pravdivostní hodnoty (coby ›významu‹ věty, tj. toho, čeho je věta jménem), ztotožněn s myšlenkou [SB, 32sq] a ta pak (na jediném, zde již několikrát anotovaném místě z [GG₁, § 32]) s podmínkami přidělení pravdy a nepravdy. Jelikož předpokládáme, že je elementárním větám skrze (blíže nespecifikované) pravdivostní podmínky a případná mimojazyková fakta (stav světa) jednoznačně a jednou provždy přiřazena pravdivostní hodnota, je jasné, že se tak díky funkcionální výstavbě uvažované logiky stane i větě komplexní, a (komplexní) pravdivostní podmínky jejího ohodnocení tak mohou být bez problému ztotožněny s (komplexní) myšlenkou, kterou vyjadřuje.

Spěchá-li Wittgenstein ke svému určení smyslu připodotknout, že větě můžeme rozumět, aniž bychom věděli, zda je pravdivá [TLP, 4.024], činí tak (jak ještě uvidíme!) zcela v duchu Fregova článku *Über Sinn und Bedeutung* a v souladu s tím, co Stekeler-Weithofer nazval ›kritériem smyslu‹ fregovské logiky,¹⁴⁵ totiž že v otázce pravdivosti vět záleží jen na principiálním přiřazení obou hodnot (rozpisem pravdivostních podmínek), nikoli na jejich konkrétní znalosti. Rozhodneme-li se podobně jako Paul Lorenzen či konstruktivisté obecně pro efektivní koncept pravdy, tj. ztotožníme-li pravdivost s efektivní zdůvodnitelností (*Begründbarkeit*), pak kupř. tvrzením věty formy “A nebo B” vyjadřujeme jiný smysl (myšlenku) než v logice fregovské, totiž tu, že jsme schopni alespoň jednu z dílčích vět (efektivně) dokázat (obhájit). Jasně tedy vidíme, že je porozumění dané větě nutně vázáno na zvládnutí příslušných pravdivostních podmínek, a stává se tím i zřejmé, co znamená, řekneme-li (později), že smysl věty (či obecně výrazu) předchází její pravdivosti (obecně významu).¹⁴⁶

3.2.7 Kalkulizace logiky výroků

Řekneme nyní, že *soud*

$$\vdash A$$

čováno potřebami, které jsou jí cizí. Tak je i logika nucena vyšlechtit použitelný nástroj z toho, co má k dispozici.«

¹⁴⁵ Stekeler-Weithofer [SK, § 8].

¹⁴⁶ Srv. k tomu Wittgensteinův odkaz na Frega z [TLP, 4.431].

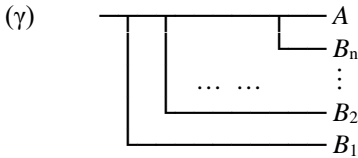
(případně jeho pravdivost) vyplývá z *pravdivých* soudů

$$\vdash B_1, \vdash B_2, \dots, \vdash B_n,$$

je-li přechod od

vět $\vdash B_1, \vdash B_2, \dots, \vdash B_n$ k větě $\vdash A$

logicky platným úsudkem, což z definice platí tehdy, je-li



větou tautologické formy, stručně tautologií. (Slovo “úsudek” používáme pro libovolný přechod mezi větami, a tedy v rozporu s územ Fregovým, pro nějž jsme rezervovali termín »vyplyvání«.) Korespondence logicky platných úsudků s tautologiemi formy (γ) dovoluje Fregovi redukovat každý úsudek podle logicky platného pravidla na aplikaci pravidla jediného (srv. [B, § 6]):

(MP) $\vdash A, \vdash B \Rightarrow \vdash A,$

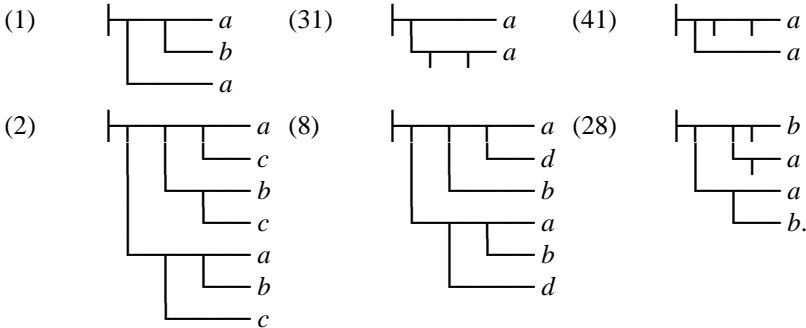
s tím předpokladem, že může být k původním premisám přibrána libovolná tautologie. Pravidlo (MP) se tradičně nazývá *modus ponens*. Výrokově-logický (deduktivní) důkaz z soudu $\vdash T$ z třídy (pravdivých) soudů (premis) S je tedy posloupnost pravdivých soudů

$$\vdash U_1, \vdash U_2, \dots, \vdash U_n,$$

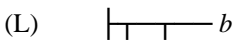
kde $U_n \approx T$ a soud $\vdash U_i$ libovolného indexu i ($1 \leq i \leq n$) je buďto prvkem S , tautologií nebo na něj lze přímo usoudit aplikací pravidla MP na některé ze soudů nižšího indexu. Stejně jako v případě sylogistiky dovoľovalo procházení možných, příslušná schémata splňujících diagramů ověřit platnost úsudku, poskytuje tabulková metoda rozhodovací algoritmus¹⁴⁷⁾ tautologičnosti věty (tedy i platnosti úsudku) systematickým prohledáním všech možných ohodnocení elementárních schémat. V *Begriffsschrift* deklarovaná přehlednost, jednoduchost a uniformita důkazové koncepce vedla však Frega k historicky první úplné axiomatizaci (kalkulizaci) tautologických schémat výrokové logiky,¹⁴⁸⁾ a to s následujícími (podle [B, § 14-19] očíslovanými) axiomy:

¹⁴⁷⁾ Tato metoda byla popularizována Wittgensteinovým *Tractatem* – viz [TLP, 5.101]; k její historii viz *Kneale* [*1962*], 420, 532sq].

¹⁴⁸⁾ Frege k tomu píše: »Očividně není totéž, zda zákony [myšlení] pouze známe, nebo zda víme, jak jsou jedny odvoditelné z druhých. Takto dospějeme k malému počtu zákonů, v nichž, přibereme-li ty obsažené v pravidlech, je zahrnut obsah všech, ač ještě ne-

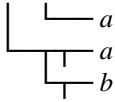


Na tyto axiomy se nyní můžeme dívat jako na bezpremisová pravidla (tvaru “ $\Rightarrow A$ ”, kde “ A ” reprezentuje libovolný z axiomů), tvořící spolu s MP kalkulem (axiomatický systém) \mathfrak{S}_{VL} generující všechna tautologická schémata fregovské výrokové logiky, a to za předpokladu, že se proměnné “ a ”, “ b ”, ... vztahují k libovolnému schématu (slovu) kalkulu \mathfrak{S}_S z/3.2.5/. Důkaz k o r e k t n o s t i kalkulu \mathfrak{S}_{VL} , tj. toho, že generuje pouze tautologická slova kalkulu \mathfrak{S}_S , je celkem snadný a lze jej v podstatě připsat Fregeovi: stačí totiž ukázat, že (i) výše uvedené axiomy jsou tautologickými schématy, že (ii) MP vede od tautologických schémat zase ke schématům tautologickým (třída pravdivostních důvodů tautologického antecedentu pravidla je tvořena všemi možnými ohodnoceními, tedy – z definice logické platnosti úsudkového pravidla – i třída konsekventu) a že (iii) dosazení libovolného slova A kalkulu \mathfrak{S}_S za všechny výskyty některé z proměnných v tautologickém schématu zachová jeho tautologičnost (což je dáno tím, že A při daném ohodnocení reprezentuje ve všech dosazených výskytech tutéž pravdivostní hodnotu.) Důkaz úplnosti, tj. toho, že kalkulem \mathfrak{S}_{VL} generuje všechna tautologická slova kalkulu \mathfrak{S}_S , *Be-griffsschrift* neobsahuje a Frege se (na jiném místě) spokojuje pouze s poukazem na to, že se svými axiomy (*Urgesetze*) vždy vystačil. [BL_N, 42] První důkaz věty o úplnosti pro výrokovou logiku podal až roku 1921 E. L. Post, ovšem pro systém z *Principia Mathematica*.¹⁴⁹⁾ Lukasiewicz poté ukázal, že axiomy Fregeova systému nejsou nezávislé, neboť lze (8) odvodit z (1) a (2) (jinak řečeno: jedná se o přípustné pravidlo vůči zbylým pravidlům kalkulu \mathfrak{S}_{VL}), a že lze (28), (31) a (41) nahradit axiomem



rozvinut. Výhodou deduktivního způsobu prezentace je i to, že nám dovolí poznat toto jádro.« [B, § 13]

¹⁴⁹⁾ Post [1921].



a získat tím spolu s MP úplný a nezávislý systém axiomů (1), (2) a (L). Jelikož je axiom (L) z \mathfrak{S}_{VL} odvoditelný, přenáší se důkaz úplnosti Lukasiewiczova systému také na systém Fregův.¹⁵⁰⁾

¹⁵⁰⁾ Srv. k tomu poznámkový aparát z *Lukasiewicz-Tarski* [⟨1930⟩, § 2], dále *Kutschera* [⟨1989⟩, 29sq] a případně *Lukasiewicz* [⟨1936⟩, 127].

4 SUBSTITUCE

Mělo-li být cílem Fregovy *Begriffsschrift* vytvoření aparátu, který by klasické matematice postačoval jak ve své roli expresivní, tak důkazové, bylo zbudování výrokové logiky jen prvním, z historického hlediska dávno odbytým krokem na této cestě. Volba materiálního kondicionálu za základní kámen výrazového, resp. důkazového systému by se navíc zdála být s avizovanou snahou »o vyjádření nějakého obsahu« [BL_N, 13], jíž se má Fregovo pojmové písmo podstatně lišit od Boolovy výpočetní logiky, dokonce v rozporu, byť to má být jen obsah postačující vedení matematických úsudků. Ač tedy ne zcela bez oprávnění, je tato námitka předčasná, neboť jsme dosud neprobrali nejdůležitější technický koncept Fregovy logiky – *kvantifikátor* – a dva úzce s ním související principy vázané na pojmy *substituce* a *identity*.

4.1 FUNKCE

Zatímco příklady za pravdivé uznaného hypotetického spojení vět jako

- (1) jestliže je Johann Strauss autorem *Veselé vdovy*, pak je kočka krátkouchá dovádivé zvíře

dávají odhlédnutí od obsahu příslušných vět až příliš drasticky najevo, je ve většině věrohodných příkladů jako

- (2) jestliže prší, je mokro,
 (3) roste-li vrba na břehu řeky, naklání se nad vodu,
 (4) je-li Alík pes, pak štěká

patrná vazba sdílených okolností (možného výskytu deště, konkrétního stromu či živočicha), k nimž se obě sloučené věty vztahují, vazba, jejímž přetržením (zpravidla) nevzniknou dvě samostatné (situačně nezávislé) věty (“prší”, “je mokro”), ačkoli věta komplexní samostatná (situačně nezávislá) byla, případně je jejich smysl pozměněn do té míry, že opětovné spojení nevyjadřuje tutéž myšlenku; uvažme třeba:

- (5) roste-li vrba na břehu řeky, naklání se vrba nad vodu.

Poslední z výše uvedených hypotetických vět, tj. věta (4), by se zdála těmto úvahám vymykát, neboť ji lze beze změny smyslu transformovat na

- (6) jestliže je Alík pes, pak Alík štěká.

Uvážíme-li však jedno z jejích možných čtení, a to jakožto odpovědi na otázku “štěká Alík?”, v řadě s dalšími reakcemi typu “jen psi štěkají”, “každý pes štěká”, “Alík je přece pes”, vidíme, že ačkoli se všechny tyto věty liší mírou obecnosti mluvčího s živočichem Alíkem, lze v nich zároveň najít (implicitní) odkaz k témuž *obecnému* faktu (myšlence), na jehož obecnost nemá v pří-

padě takto užitě věty (6) výskyt slova “Alík” vliv. Jeho role je pak totiž zástupná a může ji hrát i jméno jiné, jen když se zachová příslušná vazba na ten-
týž objekt obou spojených vět, tvořící jakési jejich ohnisko.¹⁵¹⁾ Tudy se
také ubírá pravděpodobná geneze fregovského kvantifikátoru.¹⁵²⁾ Projděme si
nyní její počátky na jednom z Fregových vlastních příkladů.

Řešíme-li nějakou početní úlohu, můžeme od mezivýsledku $2^2 = 4$ přejít
k $2^4 = 16$ a symbolicky tento přechod zachytit jako

$$(7) \quad \begin{array}{l} \text{—} \\ \text{—} \end{array} \begin{array}{l} 2^4 = 16 \\ 2^2 = 4, \end{array}$$

a to s vědomím, že se podobně jako u věty (4) jedná o případ aplikace obecného
pravidla, dovolujícího přejít také od $(-2)^2 = 4$ k $(-2)^4 = 16$, ale i od $3^2 = 4$
k $3^4 = 16$, přirozeně tak, že za pravdivost antecedentu neručíme. Věta (6) či

$$(8) \quad \begin{array}{l} \text{—} \\ \text{—} \end{array} \begin{array}{l} 3^4 = 16 \\ 3^2 = 4, \end{array}$$

není tedy jako např. věta (1) pravdivá jen z milosti pravdivostních podmínek
materiálního kondicionálu, ale i jakožto případ obecné věty, totiž že cokoli, co
je druhou odmocninou ze 4, je i čtvrtou odmocninou z 16. Tuto obecnost mů-
žeme nyní vyjádřit tak, že ohnisko věty explicitně naznačíme nahrazením
(substitucí) téhož symbolu v obou spojených větách týmž latinským písmenem
“x” takto:

$$(9) \quad \begin{array}{l} \text{—} \\ \text{—} \end{array} \begin{array}{l} x^4 = 16 \\ x^2 = 4. \end{array}$$

Totéž pak lze udělat i ve větě (6)

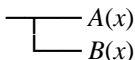
$$(10) \quad \begin{array}{l} \text{—} \\ \text{—} \end{array} \begin{array}{l} x \text{ štěká} \\ x \text{ je pes} \end{array}$$

a číst ji třeba jako “jestliže je něco pes, pak to štěká”, případně aristotelskou
formou “každý pes štěká”. O takovémto spojení vět, obsahujících »společnou
neurčitou část, skrze niž věc získává na obecnosti«, hovoří Frege jako o »hy-
potetickém soudu v pravém slova smyslu« [BF_N, 59]. My o něm můžeme ho-
vořit jako o obecném hypotetickém soudu, resp. větě. Jednotlivé
věty dílí nazývá Frege *nevlastními větami* a nechává je vyjadřovat ne-

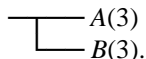
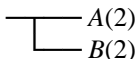
¹⁵¹⁾ Převzato z Quinova »ohniskového pozorovacího kategorikálu« – viz *Quine*
[<1990>, § 4].

¹⁵²⁾ Z *Begriffsschrift* ji, jak již bylo zmíněno, vyčíst nelze, vodítko ale poskytují jiné
Fregovy spisy, zvláště [BL_N, 17sq], [BF_N, 58sq], [EL_N, 203sq], [KU_N, 214], kde Fre-
ge předesílá výklad obecných hypotetických soudů pojednání o kvantifikátoru (k ně-
muž v některých případech ani nedojde) a někdy i pojednání o hypotetických soudech
prostých.

vlastní myšlenky. [KUN, 215] Schematické znázornění spojení nevlastních vět A , B jako



nám pak dovolí zachytit v případě vět jako (7) či (8) nejen interní podobnost antecedentu s konsekventem, tj. sdílení téže větné části, ale i externí podobnost jedné s druhou, tj. jejich vzájemnou podobnost coby případů téhož obecného schématu – viz třeba:



Ani jedno z hlediska výrokové logiky možné není. Promítnutím ›společné neurčitě části‹ do prezentace větné formy byl tedy učiněn první, a to zásadní krok na cestě k logickému zachycení vědecky relevantních (obecných!) tvrzení (zákonů). Zatím jsme však stále ještě na počátku. Zásah do struktury elementární věty si totiž vyžádá důkladnou logickou analýzu těch větných částí, které samy větami nejsou.

4.1.1 Nesouditelný obsah

Cílem *Begriffsschrift*, dozvídáme se z úvodu spisu, je vyjádření všeho, co má význam pro sled úsudků. Toto inferenčně relevantní Frege nazývá pojmovým obsahem (*begrifflicher Inhalt*).¹⁵³ [B, IV] Tento zahrnuje nejen obsah souditelný, který lze uvést frází “okolnost, že _” a nárokovat mu předepsáním performátoru “┌──” pravdivost (je obsahem možného soudu, tj. *souditelný*), ale i obsah nesouditelný (*unbeurteilbarer Inhalt*), u něhož to možné není. Jako příklad výrazu s takovýmto obsahem uvádí Frege slovo “dům”, tedy tradiční slovo pojmové. [B, § 2] Vůči tradiční nauce o pojmu se však v obhajobách své *Begriffsschrift* ostře vyhraňuje:

»Boole předpokládal logicky dokonalé pojmy jako předem dané, čímž si ušetřil tu nejobtížnější část logické práce, a mohl tak z daných předpokladů vyvozovat své důsledky mechanickými výpočty.« [BLN, 39]

»Předvedeme-li tuto věc [boolovského tvoření pojmů] v geometrických obrazech [pomocí eulerovských diagramů], vidíme, že [...] at' již pojem vznikl logickým násobením či sčítáním, sestává jeho ohraničení z částí ohraničení daných pojmů. [...] Toto manévrování v geometrických obrazcích je přirozeně výrazem něčeho, co tkví ve věci samotné a co bez oněch obrazců nelze vůbec

¹⁵³ Podle něj je také Fregův spis pojmenován – viz [B, IV]. K možnému původu názvu srv. Heijenoort [FFG, 1].

vyjádřit. Při tomto způsobu pojmotvorby musí být tedy systém pojmů, nebo, řečeno obrazně, síť hranic předpokládána jako předem daná. Nové pojmy jsou zde pak vlastně již obsaženy: je zapotřebí jen využít stávajících čar a novým způsobem ohraničit dílčí plochy.« [BL_N, 37sq]

Vědecky plodná určení pojmu, pokračuje Frege, by však měla vést spíše hranice nové, nežli opisovat staré, a logika *Begriffsschrift* tomuto cíli vyhovuje nesrovnatelně větší měrou: »Rovněž zde jsou využity staré pojmy k tvorbě nových; ale jsou přitom rozmanitě spojovány prostřednictvím symbolů obecnosti, popření a podmíněnosti.« [BL_N, 39]

Frege nepopírá, že se jeho logika výsledně také orientuje na nějakém obraze (funkcionálním modelu), jímž jsou pak všechny možnosti pojmotvorby určitým způsobem ›dány předem‹ (*a priori*!). Východiskem (1. fází Lorenzenovy triády) jeho konstrukce (2. fáze) však není univerzum konvenčně uznávaných (na jazyku nezávislých) entit (představ, počítků, idejí, pojmů, množin atd.), ale jazyková praxe tvrzení souditelných obsahů:

»U Aristotela totiž, stejně jako u Boola, je tvorba pojmů abstrakcí původní logický akt a souzení a usuzování se uskutečňuje až bezprostředním či zprostředkovaným srovnáním pojmů podle rozsahů. [...] V protikladu k Boolovi [a Aristotelovi] začínám od soudů a jejich obsahů, nikoli od pojmů. Právě definovaný hypotetický vztah souditelných obsahů má pro založení mého pojmového písma podobný význam jako rovnost rozsahů pojmů pro logiku boolovskou. Utváření pojmů nechávám vyvstat až ze soudů. Myslíme-li si totiž v souditelném obsahu

$$2^4 = 16$$

2 jakožto nahraditelné něčím jiným, třeba (-2) či 3, což lze naznačit tím, že na místo 2 dosadíme x:

$$x^4 = 16,$$

rozpadne se souditelný obsah na trvalou a proměnlivou část. První z nich, vzatu samu o sobě, ale s volným místem pro druhou, nazývám pojmem "čtvrtá odmocnina z 16".« [BL_N, 16sq]

Netriviálnost Fregova obratu k jazyku a s tímto úzce spjaté holistické strategie postupu od celku k části se hned zpočátku ukazuje v možnosti vícerozhledného rozkladu dané věty, a tedy zřetelným příslibem flexibility konstruované logiky, to znamená něčeho, co je strategii skládání předzhotoveného (alespoň zprvu, tj. před provedením fregovské analýzy!) zcela nedostupné:

»Nyní můžeme

$$2^4 = 16$$

vyslovit ve větě “2 je čtvrtá odmocnina z 16” nebo “jednotlivost 2 spadá pod pojem čtvrté odmocniny z 16” nebo “náleží třídě čtvrtých odmocnin z 16”. Zrovna tak bychom ale mohli také říci: “4 je logaritmus z 16 při základu 2”. Potom by bylo 4 uchopeno jako nahraditelné, a získali bychom tak pojem “logaritmus z 16 při základu 2”:

$$2^x = 16.$$

Ono x zde naznačuje místo, které má zaujímat symbol jednotlivosti spadající pod daný pojem. Můžeme také v

$$x^4 = 16$$

myslet 16 jakožto nahraditelné, a znázornit to jako

$$x^4 = y.$$

Takto získáme pojem relace, totiž vztahu čísla ke své čtvrté mocnině. Namísto toho, abych soud skládal z jednotlivé věci jakožto subjektu s předem utvořeným pojmem jakožto predikátem, nechávám naopak rozpadnout souditelný obsah, a získávám tak pojem. Aby se mohl takto rozpadnout, musí být výraz souditelného obsahu samozřejmě již sám v sobě členěn. Z toho lze usoudit, že alespoň dále nerozložitelné vlastnosti a vztahy musí mít vlastní jednoduchá označení. Z toho však nevyplývá, že jsou představy těchto vlastností a vztahů vytvářeny nezávisle na věcech; nýbrž že vznikají současně s prvním soudem, s nímž jsou věcem připisovány.« [BL_N, 18sq]

Vyjdeme-li tedy jako Frege od věty, a to metodicky nejlépe od hypotetického spojení vět společného ohniska (jako byla např. věta (7)), jehož naznačením pomocí písmene “ x ” získáme nejprve spojení dvou nevlastních vět, na něž lze (až) poté pohlížet jako na reprezentanty (komplexních) pojmů a na příslušný subjunktor jako na znak jejich podřazení, snadno pochopíme oprávněnost závěru, k němuž Frege při srovnání své a Boolovy logiky dospívá: »Převodl jsem v protikladu k Boolovi jeho primary propositions zpět na secondary. [...] Takto věřím, že se mi jednoduchým a přiměřeným způsobem podařilo vytvořit organické spojení mezi oběma boolovskými oddíly.« [BL_N, 19]

4.1.2 Holismus

Důraz na prvotnost věty, resp. jejího obsahu, a odvozený charakter obsahů výrazů dílčích není jen náhodným jevem Fregových raných spisů, ale naopak něčím, co považoval za rozlišení zásadní. Roku 1919, v poznámkách určených Ludwigu Darmstaedterovi, píše:

»Charakteristický rys mého pojetí logiky nejprve ozřejmím tím, že na vrchol kladu obsah slova “pravda”, a pak tím, že za ním nechávám ihned následovat

myšlenku jako to, u čeho pravdivost vůbec přichází v úvahu. Nevycházím tedy od pojmů a neskládám z nich myšlenky nebo soudy, nýbrž získávám části myšlenky jejím rozpadnutím. Tímto se odlišuje moje pojmové písmo od podobných výtvorů Leibnizových a jeho následovníků, přes moje možná nešťastně zvolené pojmenování.» [AD_N, 273]

Priorita věty, resp. jejího obsahu přirozeně souvisí s vymezením pravdy jakožto předmětu logiky: věta je nejmenší jazyková jednotka, u níž *pravdivost vůbec přichází v úvahu*. Báze této sémantické priority je ale ryze pragmatická; slovo “pravdivý” slouží pouze k explicitnímu (i když ne dostačujícímu) vyjádření tvrdící síly: »[Slovo] “pravdivý” představuje vlastně jen neúspěšný pokus o vystižení [podstaty] logiky, přičemž to, o co zde skutečně jde, vůbec neleží ve slově “pravdivý”, nýbrž v tvrdící síle, s níž je vyslovována věta. [...] To, v čem je odkaz na podstatu logiky obsažen nejzřetelněji, je tvrdící síla, s níž je vyslovena myšlenka.« [ME_N, 272] Teprve věta je něco, k čemu se lze v praxi vzájemného dorozumění vůbec zavázat, učinit nějaký rozdíl – Wittgensteinovými slovy: *to, čím může být skutečněn tah v jazykové hře –*, a pojem pravdy a myšlenky (obsahu) jsou pouze služebnými distinkcemi této její pragmatické role.

Tradiční výklad, předesílající nauce o soudu nauku o pojmu, v obecném případě získávaného ›zředením‹ mentální reprezentace nějaké smysly vnímané jednotliviny (*repraesentatio singularis*), obrací Frege zcela v duchu Kantova pozorování, že jedinou úlohou pojmu je jeho užití v soudu [KrV, A68/B93], ve ztotožnění pojmu s touto úlohou samotnou: »*Nevěřím, že tvoření pojmů může předcházet souzení, protože by tak byla předpokládána samostatná existence pojmu, nýbrž chápu pojem jako něco, co vznikne rozpadem souditelného obsahu.*« [WB, 164] Obecně lze potom obsah jakéhokoli větného výrazu chápat jako jeho příspěvek k pragmatické roli tvrzení vět, v nichž může figurovat. Jedním z důsledků takto pojatého obsahu jazyka a myšlení je jeho objektivita (intersubjektivita): »*Byl by vůbec senzualismus Lockův a idealismus Berkeleyův a všechno to, co se k nim váže, možný, kdybychom vždy dostatečně rozlišovali mezi myšlením v užším smyslu a představováním, mezi částmi [obsahu] (pojmy, předměty, relacemi) a představami? I když se lidské myšlení bez představování neuskutečňuje, přece je obsah soudu něco objektivního, pro všechny totožného, a nezáleží u něj na tom, které představy jeho chápání doprovázejí. Tyto jsou pokaždé jiné a subjektivní. Vše, co jsme zde řekli o obsahu jakožto celku, platí i o částech, které v něm rozlišujeme.*« [BZ_N, 115] Možné podezření z naivního platonismu se zde ukazuje jako zvláště liché, neboť Fregeova říše pojmů a jiných ›obsahů‹ má být výsledkem jazykové analýzy, nikoli

předmětem zvěsti samozvaného vyslance nebes, který předpokládá »pojmy jako předem dané, čímž si ušetřil tu nejobtížnější část logické práce« [BL_N, 39], a v důsledku je vydán stejně libovůli a zmatku jako relativisté, jejichž teoriím chtěl levnou mytickou dikcí a do omrzení opakovanou modlitbou k »nezávislému«, »objektivnímu« a »reálnému« učinit přítrž.

Pečlivé čtení úvodních slov *Begriffsschrift* ukazuje, že je Fregův analytický program dokonce mnohem ambicióznější, než by se mohlo i z poměrně odvázných pozic větného holismu zdát, totiž že v tradiční posloupnosti výkladu »pojem - soud - úsudek« obrací nejen dva členy první, ale i dva členy poslední, a hlásá tak holismus inferenční, tedy pořadí »úsudek - soud - pojem«. Znovu zopakujme: »Proto jsem také rezignoval na vyjádření všeho, co nemá pro sled úsudků žádný význam. To, na čem jediném mi záleží, jsem v § 3 nazval pojmovým obsahem.« [B, IV] Ve zmíněném paragrafu pak také nacházíme inferenční charakterizaci (nesouditelného) pojmového obsahu:

»[...] obsahy dvou soudů se mohou lišit dvěma různými způsoby: zaprvé tak, že důsledky, které mohou být vyvozeny spojením jednoho z nich s určitým soudem jiným, vyplývají vždy také ze spojení druhého z nich s tímtéž určitým soudem; za druhé, že tomu tak není. Obě věty: "Řekové zvítězili u Plataji nad Peršany" a "Peršané byli u Plataji poraženi Řeky" se liší prvním ze způsobů. I když lze rozeznat malou odlišnost smyslu, přece převládá shoda. Tu část obsahu, která je v obou soudech stejná, nazývám pojmovým obsahem. Jelikož pouze na něm v *Begriffsschrift* záleží, není nutné rozlišovat mezi větami s tímtéž pojmovým obsahem.« [B, § 3]

Viděli jsme již, že oproti právě řečenému je výsledné rozlišení z *Begriffsschrift* mnohem hrubší, tj. věty jsou rozlišovány jen potud, liší-li se pravdivostní hodnotou (jsou jmény různých předmětů). Ve skutečnosti je Fregova nerozhodnost v otázce toho, jakou míru různosti »obsahu« dvou různých jazykových výrazů považovat za sémanticky uspokojivou, průvodním jevem celého jeho díla a vrcholil v diskusi a distinkci »smyslu a významu«. Ta se pod hlavičkou volby mezi *extenzionální* a *intenzionální* sémantikou táhne až po dnešní dobu. Na příkladě z *Begriffsschrift* však můžeme nahlédnout pro Fregu atypickou aplikaci *substituční techniky*, která se jakožto upřesnění již vícekrát zmíněného »rozpadu« obsahu komplexních výrazů na obsahy výrazů dílčích stane v kontextu soudu (tj. nikoli inference) úhelným kamenem Fregovy funkcionální sémantiky, a to jak logiky výroků, tak i predikátů. Bude-li následující oddíl připadat čtenáři obtížně stravitelný, chtěl bych ho poprosit, aby jej přeskočil a případně se k němu vrátil poté, co přečte kapitoly /4/ a /5/.

4.1.3 Inference a substituce

Začněme tím, že spolu s Brandomem, jenž ve svém *inferencialismu*¹⁵⁴⁾ znovu oživil a rozpracoval nesmělý a dílčí náznak Fregův, reformulujeme (a mírně upravíme) výše uvedený příklad takto: věty *A*, *B* mají tentýž pojmový obsah tehdy a jen tehdy, lze-li vzájemně substituovat jednu za druhou v rámci libovolného úsudku – ať v něm figurují jako premisy či jako závěr –, aniž by se tím změnila jeho ›správnost‹.¹⁵⁵⁾ Za nutnou podmínkou správnosti úsudku považujeme, že vede od pravdivých premis jen a jen k pravdivému závěru. V typických příkladech, jako byl ten Fregův, tato podmínka ovšem není podmínkou postačující. Pak by totiž měla věta “Řekové zvítězili u Platají nad Peršany” stejný obsah jako jakákoli věta téže pravdivostní hodnoty, což zjevně Fregovým úmyslům neodpovídá! Materiální kondicionál ovšem zachycuje právě tento degenerovaný typ úsudku, kde je přenos pravdivosti postačujícím kritériem jeho správnosti.¹⁵⁶⁾ Účelově využijme této vlastnosti Fregova subjunktora a namísto na inference aplikujme substituční strategii přímo na věty.

V návaznosti na Fregovo užití symbolu tvrdící síly, jak jsme jej diskutovali dříve, a na knihu Dummettova¹⁵⁷⁾ navrhuje Brandom¹⁵⁸⁾ rozlišit dvě funkce (oznamovací) věty, totiž její využití přímé, kdy je tvrzena *s a m o s t a t n ě* (*freestanding*), a její využití nepřímé, *i n g r e d i e n ě n í*, kdy je pouhou součástí tvrzené věty (*ingredient*). O větách, které mají (vždy v závislosti na určitém kontextu) stejnou samostatnou, resp. ingredienční roli, řekneme, že mají tutéž samostatnou, resp. ingredienční hodnotu. Zmíněné dvě funkce se nemusí krýt, na druhou stranu je možné požadovat, aby záměna dvou vět téže ingredienční funkce nevedla ke změně samostatné funkce věty, v níž k substituci dochází – jinými slovy: aby byly substituovatelné *salva functione*. Vyjdeme-li dále z toho, že je nám samostatná funkce věty známa, můžeme uvedenou *substituční charakteristiku považovat za postačující určení ingredienční funkce věty*, a případně říkat, že jsme ji získali *rozpadem* funkce samostatné.¹⁵⁹⁾ Výsledkem této strategie (v určitém větném kontextu) mohou být např.

¹⁵⁴⁾ Pro úvod do problematiky viz *Peregrin* [VS, k. 6-7].

¹⁵⁵⁾ Viz *Brandom* [ME, 96].

¹⁵⁶⁾ Fregovi jde přirozeně o úsudek logicky platný, v němž je nutné vzít navíc v potaz formu daných vět, tj. ve skutečnosti ›obsah‹ jisté privilegované třídy výrazů, konvenčně uznaných za formotvorné.

¹⁵⁷⁾ Viz [FPL, 417].

¹⁵⁸⁾ [ME, 338sqq].

¹⁵⁹⁾ Více k metafoře rozpadu významu v /5.1.7/ a dalších oddílech kapitoly /5/.

vícehodnotové logiky (k tomu jakožto technické studii také směřuje Dummettův výklad) s *multihodnotami* jakožto ingredienty a *designovaností* coby hodnotou samostatnou.¹⁶⁰ Nezačínáme tedy typicky od fixní sady (libovolného počtu) multihodnot a jejich rekurzivní distribuce složeným větám prostřednictvím pravdivostních tabulek, tj. ›zdola nahoru‹, ale naopak ›shora dolů‹, od designovanosti jako toho, co je přenášeno správným úsudkem (případně toho, co je přiděleno logicky pravdivé, tj. tautologické větě),¹⁶¹ k třídám vět, jejichž vzájemná substituteuce v rámci libovolné věty nezmění její designovanost, a je jim tak posléze z definice přidělena tatáž multihodnota.

Vyžadujeme-li, aby (v nějakém kontextu) záměna vět téže samostatné hodnoty neovlivnila samostatnou hodnotu věty, v níž k substituci dochází, žádáme vlastně, aby samostatná funkce věty zahrnovala i její funkci ingredienční, tedy v důsledku ztotožnění obou funkcí (větu považujeme za svoji vlastní substituteutu, takže z totožnosti ingredienčních hodnot vyplývá totožnost samostatných triviálně). V předchozí kapitole popsána logika výroků, v níž je samostatná funkce věty redukována na pojmenování jedné ze dvou pravdivostních hodnot, je příkladem systému této vlastnosti. O takovýchto kontextech se někdy hovoří jako o *extenzionálních*. Je pozoruhodné, že si Frege ve svých nepublikovaných spisech¹⁶² pohrával s myšlenkou zachytit pojmový obsah věty stejně jako později Carnap v rámci kontextu neextenzionálního, obsahujícího formotvorné výrazy “možný” a “nutný”, a to jako ingredienční hodnotu zaměnitelnou s ohledem na zachování pravdivosti či nepravdivosti jakožto hodnot samostatných, tj. *salva veritate*: Lze říci, že věty *A*, *B* mají *tentýž* pojmový obsah (vyjadřují tutéž myšlenku), jestliže je pravdivá věta

nutně platí, že A tehdy a jen tehdy, když *B*.

¹⁶⁰ Podrobnosti viz *Brandom* [ME, 340sqq].

¹⁶¹ Tautologie je rovněž definována substitučně, totiž jako designovaná věta, jejíž designovanost zůstane zachována při jakékoli (přípustné) substituci v rámci mimologického (neformotvorného) slovníku. Substituční pojetí správnosti úsudku a tautologičnosti formule má tu výhodu, že je lze rozšířit na libovolnou oblast vědeckého zkoumání, a to fixováním pro tuto oblast specifického slovníku coby souhrnu formotvorných výrazů. To také naznačuje Frege, když říká: »*Stejně jako má geometrie pojem bodu, má i logika své vlastní pojmy a relace a ty také tvoří její obsah. Vůči těmto se nechová formálně. Žádná věda není zcela formální; ale do jisté míry je i gravitační mechanika formální, pokud jsou jí všechny optické a chemické vlastnosti lhostejné. Tělesa různé hmotnosti pro ni zaměnitelná nejsou; ale nic nestojí v cestě zaměnitelnosti těles odlišných vlastností chemických.*« [UG₂, 428]

¹⁶² Viz [KU_N, 213], který byl již citován v rámci /3.1.4/, případně [WB, 105].

To má znamenat, že lze od předpokládané pravdivosti jedné z vět A či B přejít k pravdivosti věty druhé nezávisle na *znalosti* stavu světa (tedy ve všech ›možných‹ světech, tj. ›nutně‹), pouze na základě zvládnutí jistých pravidel užití jazyka (tj. pravidel analytických) jako např. ›zvítězil-li x nad y , pak nepopírej, že byl y od x poražen‹ apod. Výsledkem této charakterizace obsahu je ale v první řadě carnapovská intenze, se všemi tradičními problémy a odlišnostmi od Fregova původního pojetí smyslu (obsahu), jak se jim budeme ještě věnovat.¹⁶³⁾

Co však můžeme předběžně docenit již zde, je zásadní význam výše zmíněné kontextuální závislosti celé analýzy, která např. připuštěním komplexních vět jako “Petr právě myslel na větu A ” vede od pravdy a nepravdy coby samostatných hodnot k tolika ingredienčním hodnotám, kolik je substituovatelných vět, neboť je-li uvedená komplexní věta pravdivá, pak substituce jakékoli věty odlišné od A tuto pravdivost změní. Bez kontextuální restrikce může být tedy jakákoli substituční charakterizace proměněna ve zcela bezcennou.

4.1.4 Pojem a představa

V expozici nauky o pojmu nešetřila předfregovská logika na detailech. Vezmeme-li pro stručnou ilustraci Schröderovy *Vorlesungen*, vidíme mimo jiné, že: (i) pojem je charakterizován geneticky, tj. má být s ohledem na svoji abstraktní povahu výsledkem mentálního procesu, při němž »koncentrujeme naši pozornost na určité znaky *myšlené věci, jinými slovy na nějaké části naší představy této věci, přeneseme je do pole naší pozornosti a s menší či větší dokonalostí je izolujeme tak, že od ostatních znaků odhlédneme neboli “abstrahujeme”, tzn. odsuneme ve vědomí do pozadí ty části představ, které jim přísluší, případně je necháme zcela zmizet*« [VA₁, 82], (ii) pojem je tedy obecnou představou (*repraesentatio communis*), které na úrovni výrazu odpovídá obecné jméno (*nomen appellativum*), (iii) lišící se od jména vlastního (*nomen proprium*) tím, že se vztahuje k více věcem, jimž stejným právem náleží. [VA₁, 67]

Nezávisle na košatosti výkladu, jenž v Schröderově případě zahrnuje vyčerpávající klasifikaci jmen na abstraktní a konkrétní, jednoznačná a mnohoznačná, vícesmyslná a nesmyslná, absolutní a relativní, pozitivní a negativní atd., končí vše s železnou nutností v tomtéž osvědčeném závěru: (iv) »*také individuální*

¹⁶³⁾ Zvláště viz /6.2.8/. Pro ilustraci zmiňme alespoň jeden typický příklad: jelikož pravdivost vět matematiky vůbec nezávisí na stavu světa – což platí triviálně s ohledem na jejich apriorní povahu –, vyjadřují všechny matematické věty téže pravdivostní hodnoty tutéž intenzi.

neboli jednotlivou věc budeme považovat za “pojem”« [VA₁, 89]. Jednotlivina jakožto ›conceptus singularis‹ má tedy hrát v rámci soudu stejnou roli jako ›conceptus communis‹. Stručné shrnutí a ›zdůvodnění‹ této uniformní doktríny soudu, neblahého dědictví po Aristotelovi, podává např. Schopenhauer takto:

»*Logické pravidlo, podle něhož je nutné pojednávat soudy kvalitativně individuální, tedy soudy mající za subjekt individuální pojem (notio singularis), stejně jako soudy obecné, je založeno na tom, že se skutečně jedná o soudy obecné, s jedinou zvláštností, že mají za subjekt pojem, který může být realizován pouze jediným reálným předmětem [...]: tak tomu je, když je pojem označen vlastním jménem. Toto ale vlastně přichází v úvahu až tehdy, když přecházíme od abstraktní k názorné představě, tedy když chceme pojmy realizovat. Při myšlení, při operování se soudy zde nevzniká žádný rozdíl; a to proto, že mezi jednotlivými a obecnými pojmy žádný logický rozdíl není: “Immanuel Kant” znamená logicky: “každý Immanuel Kant”.*« [Welt, svazek II, kniha 1, k. 9]

Fregova formální sémantika staví oproti tomu právě na tom, že zde logický rozdíl je, a to – přinejmenším s ohledem na ›jisté vědecké cíle‹ – rozdíl podstatný.

Chceme-li rekapitulovat genezi Fregovy ontologie ›pojmu a předmětu‹ krok za krokem, je vhodné začít odmítnutím mentálně-deskriptivní charakterizace pojmu, výsledně pak odtržením sémantiky (logiky) od psychologie vůbec. Je-li totiž pojem jakožto cosi obecného, nekonkrétního popsán psychologickou abstrakcí, zůstává problém, jak rozlišit jednotlivé a obecné v rámci abstraktních disciplín, jako je třeba matematika, na nichž má přirozeně Frege největší zájem.¹⁶⁴ Bezradnost Fregových předchůdců i současníků, pro něž je v důsledku rozdíl mezi číslem dvě a pojmem sudého čísla jen otázkou větší či menší soustředěnosti myslí, pak ústí ve faktickém (často jen implicitním) ztotožnění předmětu s jeho mentální reprezentací, a to i v oblasti předmětů fyzických!¹⁶⁵ Uniformní doktrína soudu je jen jedním z projevů tohoto selhání.

Takto odhaliv pramen všeho zla, stejnou měrou rozšířeného v pracích filosofů i matematiků, komentuje Frege teorii psychologické abstrakce na příkladu

¹⁶⁴ Podle Schrödera označuje vlastní jméno v první řadě věci konkrétní (*nomen concretum*), ale i jednotlivosti abstraktní (*nomen abstractum*), získané obdobným procesem jako pojmy. O tomto procesu se však kromě toho, že je to proces neúplný (?), již nic dalšího nedozvíme. [VA₁, 57sq]

¹⁶⁵ Srv. s úvodními citáty z *Vorlesungen*. V prvním ([VA₁, 82]) Schröder rozlišuje mezi věcí a její představou, jejíž úpravou v myslí pak získává pojem, v druhém ([VA₁, 89]) již hovoří o jednotlivé věci jako o pojmu. Srv. také [VA₁, 59].

Husserlovy *Philosophie der Arithmetik* následovně: »*Nejprve je všechno představa. Významy slov jsou představy. U slova "číslo" jde tedy např. pouze o to, vykázat příslušné představy a popsat jejich vznik a skládání. Předměty jsou představy. J. St. Mill tak se souhlasem autora [tj. Husserla] nechává předměty (whether physical or mental) vstoupit do stavu vědomí a tvořit jeho části (70). Ale neležel by např. Měsíc stavu vědomí v žaludku až příliš těžce? Jelikož je všechno představa, můžeme předměty pozměňovat zaměřením či odpoutáním pozornosti. Zvláště to druhé je velmi významné. Všimáme si méně jedné představy, a ona mizí. Tím, že takto necháme mizet jednu vlastnost [Merkmal] po druhé, získáváme stále abstraktnější pojmy. Také pojmy jsou tedy představy, jenom méně úplně nežli předměty; mají však vlastnosti těch, z nichž jsou abstrahovány. Nepozornost je tedy výsostně účinná logická síla; odtud asi také pochází roztržitost učenců.*« [RPA, 316]

V konfrontaci s obsahovou prázdnotou a neurčitostí psychologicky fundovaného aparátu pojmotvorby, Cantorem využitého v nauce o nekonečnu, pak Fregův sarkasmus ztrácí jakékoli zábrany: »*Spatří-li černoši ve vnitřní Africe poprvé dalekohled nebo hodinky, mívají sklon připisovat těmto věcem podivuhodné kouzelné vlastnosti. Něco podobného se stává mnohým matematikům s filosofickými výrazy. Mám na mysli zvláště tyto: "definovat" (Brahma), "reflektovat" (Višnu), "abstrahovat" (Šiva). Připojená jména indických božstev naznačují kouzelné účinky, které jsou při tom předpokládány. [166] [...] V držení těchto kouzelných sil není člověk příliš dalek všemohoucnosti. Význam této možnosti lze sotva změřit. Pomysleme např. na její hodnotu pedagogickou: učitel má dobromyslného, ale líného a hloupého žáka. Abstrahuje tedy od jeho lenosti a hlouposti, přičemž stále reflektuje na jeho dobromyslnost. Následně mu definicí udělí vlastnosti pile a chytrosti. Prozatím se ovšem člověk omezil jen na matematiku.*« [CTN, 77sq] V matematice je ovšem s ohledem na její abstraktní povahu sklon k psychologické explanaci pochopitelný; zavrhneme-li jej úplně, přirozená otázka potom zní: »*Jak je nám tedy dáno číslo, nemůžeme-li o něm mít žádnou představu ani názor?*« [GL, § 62]

A Fregovu odpověď vlastně již známe: »*Slova něco znamenají pouze v kontextu věty. Jde tedy o to vysvětlit smysl věty, v níž se vyskytuje číslovka.*« [GL, § 62] Odtud také výzva k radikální sémanticko-holistické analýze:

¹⁶⁶⁾ Trojice božstev po řadě ztělesňuje princip stvoření světa, jeho udržování a jeho zničení.

»*Stanovili jsme axiom, že význam slov není možné vysvětlit izolovaně, ale vždy v kontextu věty. Následováním tohoto axiomu se, jak věřím, lze vyhnout fyzikálnímu pojetí čísla, aniž bychom upadli v pojetí psychologické.*« [GL, § 106]

4.1.5 Syntakticko-sémantické kategorie

Naším východiskem je věta coby nejmenší jednotka jazyka vyslovitelná s pravdivostním nárokem, naším cílem popis sémantické role dílčích výrazů v jejím kontextu. Nechceme-li každému z nich přiznat roli vlastní, je třeba provést určitou kategorizaci. V *Begriffsschrift* předkládá Frege následující návrh:

»*Myslíme-li si okolnost, že je vodík lehčí nežli kysličník uhličitý, vyjádřenou v našem formálním jazyce, můžeme na místo symbolu pro vodík dosadit symbol pro kyslík nebo pro dusík. Tím se mění smysl dané věty tak, že se “kyslík” nebo “dusík” ocitají ve vztahu, v němž byl předtím “vodík”. Díváme-li se na nějaký výraz tímto proměnlivým způsobem, rozpadá se na pevnou část, reprezentující totalitu vztahů, a symbol uvažovaný jako nahraditelný, jenž znamená předmět, který se v těchto vztazích nachází. První část nazývám funkcí, druhou jejím argumentem.*« [B, § 9]

Dříve použitá metafora ›rozpadu‹ souditelného obsahu má tedy svůj přímý, nemetaforický původ a vzor v rozpadu věty, a to na dva typy výrazů, jejichž role je charakterizována pojmy *f u n k c e* a *a r g u m e n t u*. Fregem užitá substituční technika by se na první pohled mohla zdát tyto dva typy výrazů odlišovat již na úrovni gramatické. Řekli bychom: dva výrazy mají tutéž *g r a m a t i c k o u* roli, jestliže věta, v níž se jeden z nich vyskytuje, nemůže být nahrazením tohoto výrazu výrazem druhým proměněna v negramatický výraz, tj. jsou-li substituovatelné *s a l v a g r a m a t i c i t a t a e*. Frege však dává obratem jasně najevo, že ačkoli je větný výraz východiskem sémantické analýzy, je při ní nutné jít mnohem hlouběji, než sahá úroveň gramatické stavby:

»*Chtěl bych zde varovat před klamem, k němuž dává jazykový úzus snadný podnět. Srovnáme-li dvě věty:*

“číslo 20 je reprezentovatelné jako součet čtyř druhých mocnin”

a “každé celé kladné číslo je reprezentovatelné jako součet čtyř druhých mocnin”,

zdá se být možné uchopit “reprezentovatelné jako součet čtyř druhých mocnin” jako funkci, jejímž argumentem bylo jednou “číslo 20”, jindy zase “každé celé kladné číslo”. Omyl tohoto pojetí rozeznáme, povšimneme-li si, že “číslo 20” a “každé kladné číslo” nejsou pojmy stejné kategorie [Rang]. Co lze říci o čísle 20, nelze v tomtéž smyslu říci o “každé celé kladné číslo”, za jistých

okolností ale o každém celém kladném čísle. Výraz “každé celé kladné číslo” nedává jako “číslo 20” sám o sobě samostatnou představu, nýbrž získává smysl až z kontextu.« [B, 17]

Distinkce funkce a argumentu znamená tedy definitivní konec subjekt-predikátové analýzy věty. V *Begriffsschrift* je ovšem toto zásadní rozlišení ještě zatíženo konfuzí mezi výrazem a tím, co tento výraz znamená (jeho obsahem), a je zde navíc užíván později zavržený termín “představa”. Momentálně je však podstatné, že se sémantické (logické) kategorie výrazů od gramatických liší. V obecné rovině bychom k tomu mohli říci alespoň tolik: dva výrazy náleží téže sémantické kategorii, jestliže substituce jednoho za druhý v rámci věty nezmění její sémantický (pragmatický) potenciál. Tvrzení vět “číslo 20 je reprezentovatelné jako součet čtyř druhých mocnin” a “každé celé kladné číslo je reprezentovatelné jako součet čtyř druhých mocnin” se tak mohou svým pragmatickým potenciálem lišit např. v tom smyslu, že jsou spojena s odlišným inferenčním závazkem, jenž může v případě druhé z nich implikovat závazek k (obhajobě) první, nikoli naopak.

Bližší pohled na Fregovo užití substituce nás dostane o další krok dál. Z pohledu této techniky lze rozlišovat tři typy výrazů: (S1) ty, v nichž je něco substituováno (což byly zatím jen věty), (S2) ty, které jsou substituovány, a (S3) ty, které tvoří rámec této substituci, tedy to, co je pro daný výraz typu S1 společné všem jeho substitučním variantám.¹⁶⁷⁾ (Výrazy A a B typu S1 jsou svými substitučními variantami, jestliže lze jeden z druhého získat náhradou výrazu, resp. výrazů typu S2 nějakým jiným výrazem, resp. výrazy typu S2.) Je jasné, že o funkci hovoří Frege v souvislosti s typem S3, ostatně srovnej již obrat z úvodního citátu: »pevná část reprezentující totalitu vztahů«.

Při cizelaci pojmového aparátu *Begriffsschrift* v rámci svých spisů zralého období Frege píše: »Při slově “funkce” ovšem bývá zvykem myslet na výrazy, v nichž je číslo neurčitě naznačeno [andeuken] písmenem x, jako třeba “ $2 \cdot x^3 + x$ ”; ale tím se nic nezměnilo, neboť tento výraz také naznačuje číslo, i když neurčitě, a v tom, zda sepiší toto číslo či jenom “x”, není žádný rozdíl. | Přece jsme však sepsáním neurčitě naznačujícího “x” uvedeni na správnou cestu; x může být nazváno argumentem funkce a ve výrazech

“ $2 \cdot 1^3 + 1$ ”

“ $2 \cdot 4^3 + 4$ ”

¹⁶⁷⁾ Brandom o výše zmíněných typech hovoří po řadě jako o (S1) ›substituted in‹, (S2) ›substituted for‹ a (S3) ›substitutional frame‹ [ME, 368].

“ $2 \cdot 5^3 + 5$ ”

opakovaně rozpoznána tatáž funkce, jen s rozdílnými argumenty, totiž 1, 4, 5. Z toho lze seznat, že vlastní podstata funkce spočívá v tom, co je oněm výrazům společné; tedy v tom, co se ve výrazu “ $2 \cdot x^3 + x$ ” vyskytuje ještě mimo “ x ”, co ale můžeme zapsat třeba takto:

“ $2 \cdot ()^3 + ()$ ”.

Jde mi o to ukázat, že argument nepatří k funkci, nýbrž tvoří spolu s funkcí úplný celek; neboť funkci samu lze nazvat neúplnou, vyžadující doplnění či nenasycenou.« [FB, 5sq] Opisné termíny nasycenosti a úplnosti pak Frege znovu aplikuje při analýze věty: »Oznamovací věty obecně mohou být stejně jako rovnosti či nerovnosti nebo analytické výrazy rozloženy na dvě části, z nichž jedna je sama o sobě uzavřená, druhá vyžaduje doplnění, je nenasycená. Např. věta “Caesar dobyl Galii” může být rozložena na “Caesar” a “dobył Galii”. Druhá část je nenasycená, nese s sebou prázdné místo, a teprve tím, že je toto místo vyplněno vlastním jménem nebo výrazem, který vlastní jméno zastupuje, vychází neuzavřený smysl najevo. Význam této nenasycené části nazývám funkcí. Caesar je v tomto případě její argument. | Vidíme, že zde zároveň podnikáme rozšíření jiným směrem, totiž ve vztahu k tomu, co může vystupovat jako argument. Nejsou připuštěna pouze čísla, ale předměty vůbec, přičemž k předmětům musíme samozřejmě počítat také lidi.« [FB, 16]

Kategorie substituovatelných výrazů je tedy uvedena termíny “uzavřenosti”, “úplnosti” a “nasycenosti” a mají ji tvořit vlastní jména, popsána jako výrazy, jejichž významem jsou nasycené entity – předměty: »Vlastním jménem nazývám každý symbol pro předmět.« [BG, 197, pozn. 10] Slovem “význam” nyní Frege opisuje sémanticky relevantní část obsahu (srv. [FB, 2sq]); tu část, která bude přímo utvářet konstruovaný model (predikátové) logiky.

Zprvu je ovšem zcela otevřeno, jaké výrazy budou do třídy vlastních jmen zahrnuty, a odkaz k předmětům je pouze pomocný – neznamená tedy proměnu holistické analýzy v nazírání nasycenosti či nenasycenosti tím či oním výrazem náhodně označených entit. Frege dal ostatně v *Grundlagen* dostatečně najevo, že volba jistých výrazů (konkrétně číslovek) za jména předmětů není v žádném případě věc bezprostředně zřejmá či nějak předem daná a že oprávněně k ní je nutné hledat spíše v jazyce nežli mimo něj. Odtud také proklamovaná analytičnost aritmetiky! Jak navíc ukazuje jeho analýza pojmu třídy a dalších typů kolektivu, k níž se ještě dostaneme zvláště v souvislosti s Fregovou koncepcí kardinálního čísla v podkapitole /6.2/, není ani ve sféře empirické jen tak beze všeho zřejmé, co je a co není ›předmět‹. (Židle, spálená židle, hromada

dřeva, roztroušená hromada dřeva, atomy tvořící židli atd.?)¹⁶⁸) Frege tedy v žádném případě nesdílel sebejistotu ›realistů všedního dne‹; jeho zájmy nejsou ontologické, ale v první řadě (formálně)sémantické, a těm také postačuje následující opisné (tj. striktně nedefinující) určení: »*Předmět je vše, co není funkce, čehož výraz tedy s sebou nenese prázdné místo.*« [FB, 18]

4.1.6 Funkce a její hodnota

Funkce je významem (rolí) nenasyceného výrazu. Tento výraz pak reprezentuje substituční rámec, tedy i totalitu substitučních variant, jimiž je sdílen. Tak třeba třídám vět:

- | | | | |
|-----|--|-----|--|
| (1) | Brutus zabil Caesara
Cato zabil Caesara
Nero zabil Caesara
Caesar zabil Caesara
.... | (2) | Brutus zabil Bruta
Cato zabil Cata
Nero zabil Nera
Caesar zabil Caesara
.... |
| (3) | Brutus zabil Caesara
Caesar zabil Bruta
Nero zabil Cata
Caesar zabil Caesara
.... | (4) | Brutus zabil Caesara
Brutus zabil Nera
Brutus zabil Bruta
Brutus zabil Cata
.... |

odpovídají různé substituční rámce. Následujícíce Fregův úzus je můžeme s pomocí řeckých písmen zachytit takto:

- | | | | |
|-----|-----------------|-----|-----------------|
| (1) | ζ zabil Caesara | (2) | ζ zabil ζ |
| (3) | ξ zabil ζ | (4) | Brutus zabil ζ. |

Nenasycené výrazy budeme dále reprezentovat tímto způsobem.

Matematický příměr argumentu a funkce však s sebou přináší další otázky. Výrazy jako " $2 \cdot 1^3 + 1$ ", " $2 \cdot 4^3 + 4$ ", " $2 \cdot 5^3 + 5$ ", ... nám posloužily za východisko, od něhož lze dospět k funkci $2 \cdot \zeta^3 + \zeta$ a předmětům 1, 4, 5, ..., a to jakožto významům nenasycené fráze " $2 \cdot \zeta^3 + \zeta$ " a nasycených výrazů "1", "4", "5", ... Díváme-li se na celou věc obrácenou perspektivou, můžeme ony výrazy chápat jako výsledky nasycení pevné funkční fráze jednotlivými výrazy jmennými. Chápeme-li navíc aritmetické rovnosti typu " $2 \cdot 1^3 + 1 = 3$ ", " $2 \cdot 4^3 + 4 = 132$ ", " $2 \cdot 5^3 + 5 = 255$ ", ... jako vyjádření toho, »že je význam uskupení symbolů pravé strany totožný s významem uskupení strany levé« [FB, 3], pak pojmáme složené výrazy nalevo od rovnítky jako výrazy jmenné,

¹⁶⁸) Srv. Wittgenstein [PU, § 46-47].

tj. reprezentující tytéž předměty jako výrazy vpravo. O těchto předmětech pak tradiční terminologií hovoříme jako o hodnotách funkce pro daný argument. »*To, na co je funkce doplněna argumentem, nazýváme nyní hodnotou funkce pro tento argument. Tak je např. 3 hodnotou funkce $2 \cdot x^2 + x$ pro argument 1, protože platí $2 \cdot 1^2 + 1 = 3$.*« [FB, 8] Aritmetická funkce je tedy jakýmsi přiřazením jistých předmětů (argumentů) předmětům jiným (hodnotám), s tou podmínkou, že různým hodnotám odpovídají různé argumenty.

V přirozeném jazyce lze přímý pendant k aritmetické trojici ›argument - funkce - hodnota‹ najít spíše u nevětných frází typu “hlavní město Německa”, které jednak vlastní jména obsahují a jednak za ně mohou být samy považovány. [FB, 17sq] V analogii k výše uvedenému příkladu z aritmetiky pak můžeme říci: Berlín je hodnotou funkce ›hlavní město ζ‹ pro argument Německo, protože platí, že hlavní město Německa je (=) Berlín; tj. můžeme uchopit význam výrazu “hlavní město” jako funkci přiřazující předmětům, které jsou státy, předměty, které jsou jejich hlavními městy. V důsledku je tedy třída S1, tj. třída výrazů, v nichž lze provádět substituci, rozšířena o celou třídu S2 výrazů substitovatelných. Otázkou nyní zůstává, zda lze rozlišení ›argument - funkce - hodnota‹ udržet i pro případ věty, jinými slovy: zda lze větu uchopit jako výraz hodnoty nějaké funkce pro nějaký argument. Frege si zde opět vypomáhá aritmetickým příměrem:

»*Nejprve přidávám k symbolům +, −, atd., které slouží k tvoření funkčních výrazů, ještě symboly =, >, <, takže mohu hovořit o funkci $x^2 = 1$, kde x zastupuje argument. První otázka, která zde vyvstává, se týká hodnot této funkce pro různé argumenty. Dosadíme-li za x pevně po řadě −1, 0, 1, 2, dostaneme*

$$(-1)^2 = 1,$$

$$0^2 = 1,$$

$$1^2 = 1,$$

$$2^2 = 1.$$

Z těchto rovností je první a třetí pravdivá, ostatní nepravdivé. Nyní říkám: “hodnota naší funkce je pravdivostní hodnota” a rozlišuji pravdivostní hodnotu pravdivého od nepravdivého. Jednu z nich nazývám stručně pravda, druhou nepravda. V souladu s tím znamená např. “ $2^2 = 4$ ” pravdu stejně jako “ 2^2 ” znamená 4.« [FB, 12sq]

Jako význam věty je tedy ustanovena její pravdivost, a to jakožto funkční hodnota aplikace významu nenasycené větné části na část nasycenou. (Frege sám k této konvenci neopomíná dodat, že se »*může zdát zprvu libovolnou a umělou a že by mohlo být vyžadováno podrobnější zdůvodnění*«

[FB, 14, pozn. 6] – tomu bude věnován článek *Über Sinn und Bedeutung*. Pro naše účely je však výše uvedený sled úvah více než dostatečný.) Postřeh, že »oznamovací věta neobsahuje žádné prázdné místo, a proto lze její význam nahlédnout jako předmět« [FB, 18], tedy zařazení větných výrazů mezi výrazy jmenné, k čemuž by se zdál ostatně opravňovat i fakt jejich obsaženosti (a tedy i substituovatelnosti) ve větách jiných, vede pak k úplnému ztotožnění tříd S1 a S2 a následné trivializaci Fregova systému na čistou logiku termů, tj. systém s jedinou základní kategorií vlastního jména. Všechna tato opatření mají tedy v první řadě technický ráz a posuzovat je lze až po ovoci. Frege o nich také hovoří jako o dále testovatelné hypotéze [SB, 34sq] – my budeme v dalším textu, neřekneme-li ovšem jinak, mezi větou a vlastním jménem rozlišovat.

Nyní se také můžeme konečně vrátit zpět k pojmu pojmu: »Viděli jsme, že hodnotou naší funkce $x^2 = 1$ je vždy jedna z pravdivostních hodnot. Je-li nyní pro nějaký argument, např. -1 , funkční hodnotou pravda, můžeme to vyjádřit takto: “číslo -1 má vlastnost, že je jeho druhá mocnina 1 ” nebo stručněji: “ -1 je druhá odmocnina z 1 ” nebo “ -1 spadá pod pojem druhé odmocniny z 1 ”. Je-li hodnotou funkce $x^2 = 1$ pro nějaký argument, např. 2 , nepravda, můžeme to vyjádřit jako: “ 2 není druhá odmocnina z 1 ” nebo “ 2 nespadá pod pojem druhé odmocniny z 1 ”. Vidíme na tom, jak úzce souvisí to, co je v logice nazýváno pojmem, s tím, co nazýváme funkcí. Ano, lze říci: pojem je funkce, jejíž hodnotou je vždy hodnota pravdivostní.« [FB, 15] Pojem je tedy ztotožněn s »charakteristickou funkcí«, která přiřazuje jednotlivým předmětům pravdivostní hodnoty podle toho, zda pod něj spadají, či nikoli. Funkci » χ zabil Caesar« pak odpovídá pojem »Caesarova vraha«, funkci » χ zabil ζ « pojem »sebevraha« atd.

4.2 KVANTIFIKACE

Uchopení pojmu jakožto funkce, tj. něčeho kategoriálně odlišného od předmětu, a tedy vlastní jádro Fregovy revoluční sémantické analýzy věty, má podobně jako kvantifikace, která je vlastně jen druhou ze stran téže mince, kořeny v úvahách kolem vlastního (obecného) hypotetického soudu:

»Podřazení pojmu “druhá odmocnina ze 4” pod pojem “čtvrtá odmocnina z 16” pojímám takto: když je něco druhá odmocnina ze 4, je to i čtvrtá odmocnina z 16:

$$\begin{array}{l} \vdash x^4 = 16 \\ \vdash x^2 = 4. \end{array}$$

[...] Tímto pojetím jsem také učinil zadost rozdílů mezi pojmem a jednotlivou věcí, jenž je u Boola zcela setřen. Jeho písmena totiž přísně vzato neznamenají

jednotlivé věci, ale vždy rozsahy pojmů. Mezi pojmem a předmětem je totiž nutné rozlišovat i tehdy, spadá-li pod pojem jeden jediný předmět. Pojem “planeta, jejíž vzdálenost od Slunce leží mezi vzdáleností Venuše od Slunce a vzdáleností Marsu od Slunce” je přece něco jiného než jednotlivá věc Země, i když jen ona pod zmíněný pojem spadá. Jinak bychom nemohli vytvářet pojmy různých obsahů, jejichž rozsah se vždy omezuje pouze na jednotlivou věc Zemi. V souvislosti s pojmem můžeme vždy klást otázky, zda a co pod něj spadá, otázky, které jsou u jednotlivých věcí beze smyslu. Zrovna tak musí být rozlišován případ podřazení pojmu pod pojem od případu, kdy pod pojem spadá nějaká věc, ačkoli jazyk oba vyjadřuje v téže formě. Výše uvedené příklady

$$\begin{array}{l} \text{┌─── } x^4 = 16 \\ \text{└─── } x^2 = 4 \end{array} \quad a \quad \text{┌─── } 2^4 = 16$$

reprezentují tento rozdíl v pojmovém písmu.« [BL_N, 19sq]

Vydeme-li nyní z transformace věty do subjekt-predikátové formy ›S je P‹, vidíme, že rozdělení tradičních jmenných výrazů na jména vlastní a funkční (pojmová) – a především příslušná ontologie ›předmětu a pojmu‹ – vede k následující diferenciaci možného čtení kopuly “je”:

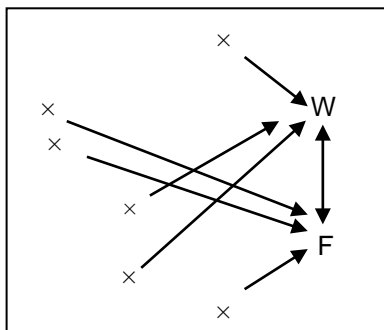
(1) Základním vztahem Fregovy logiky je *spadání předmětu pod pojem* neboli vztah logické *subsumpce*, jemuž odpovídá čtení ›předmět S spadá pod pojem P‹, pro “S” vlastní jméno a “P” jméno funkční. Kopula je zde výrazem funkcionální aplikace funkce P na předmět S a náleží vlastně predikátu, jehož nenasyčenost zdůrazňuje. »*To, co u funkce nazýváme nenasyčeností, můžeme u pojmu nazvat jeho predikativní povahou.*« [ASB_N, 129] »*Pojem je to, co může být vypovídáno, předmět to, co nemůže být vypovídáno, o čem však může být vypovídáno.*« [BZ_N, 109] Od případů, které by se této poznámce zdály odporovat, se odvíjejí další možné varianty čtení kopuly.

(2) Ve větách jako “Jitřenka je Večernice” není predikována Večernice Jitřence, nýbrž je tvrzena *identitoba* předmětů. Kopula “je” zde tedy slouží k vyjádření rovnosti. Věta má pak formu ›S = P‹, pro “S”, “P” vlastní jména. Je tu ovšem možnost číst výše uvedenou větu prvním způsobem, totiž když vynětím jména “S” dospějeme k substitučnímu rámci “ζ = P”, reprezentujícímu pojem ›totožný s P‹, konkrétně tedy ›totožný s Večernicí‹. Pod tento pojem pak spadá jeden jediný předmět, totiž Večernice, o níž jej lze také pravdivě predikovat, přičemž jeho nenasyčená povaha, zdůrazněná výrazy “totožný”, případně identitu zastupující kopulou “je”, zabraňuje tomu, abychom jej identifikovali s tímto předmětem samotným. [BG, 194] Nejedná se o předmět, ale o přiřazení předmětů (v tomto případě předmětu jediného) předmětům.

(3) Třetí případ představuje nám dobře známý vlastní hypotetický soud, a tedy kopula ve významu *p o d ř a z e n í d v o u p o j m ů*. Frege zde užívá rozpisů jako *›spadá-li něco pod pojem S, spadá to i pod pojem P‹*, čímž dává jednak najevo, že pojem S na místě gramatického subjektu svoji predikativní povahu neztrácí [ASB_N, 130], a jednak, že pojem P není predikován pojmu S, ale předmětům pod něj spadajícím, i když se tak děje jeho prostřednictvím, a zmíněná predikace tedy neztrácí smysl tehdy, je-li prázdný. (Srv. [SV, 454].) Dříve než dáme Fregově nauce o větné formě obecných tvrzení konkrétnější podobu, učinme ještě sémantickou bázi jeho logiky názornější grafickým srovnáním s modelem aristotelským.

4.2.1 Ostrost pojmu

Interními objekty Aristotelovy logiky byly *pojmy*, reprezentovatelné uzavřenými *kruhy*, nacházejícími se ve vztazích mereologického *překrývání*. V logice Fregově nemají pojmy charakter samostatných entit: v případném obrázku (modelu) jsou v první řadě zakresleny *předměty*, zprvu jako samostatné, vzájemně nezávislé objekty, reprezentované třeba *křížky* či *tečkami*, posléze pak *spojené šipkami*, jež naznačují *přiřazení* hodnoty danému argumentu nějakou funkcí. *Pravda* a *nepravda* jsou také interními předměty modelu, a mohou být tedy argumenty i hodnotami libovolných přiřazení. To, že funkce (alespoň v původním slova smyslu) interními předměty modelu nejsou, neznamená právě nic jiného, než že nefigurují jako argumenty či hodnoty možných přiřazení. Tak např.

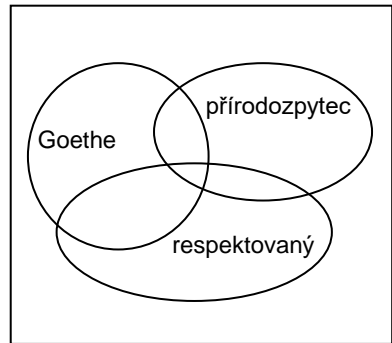


vlastní hypotetický soud *›S je P‹* nenárokují přiřazení hodnoty pravda funkci *P* funkci *S*, ale přiřazení hodnoty pravda funkci *P* těm předmětům, *jimž* byla pravda přiřazena funkcí *S*. Takto lze nahlédnout logickou platnost přechodu od vět formy *›S je P‹*, *›P je Q‹* k větám formy *›S je Q‹*, a to pro výrazy “P”, “Q” funkční a výraz “S” lhostejno zda funkční či jmenný.

Podmínka, kterou Frege na jakoukoli uvažovanou funkci opakovaně klade, je její totalita, tj. definovanost pro každý předmět. *›Tento požadavek může být také zdůvodněn potřebou platnosti věty o vyloučeném třetím. Z ní totiž plyne, že musí být každý pojem ostře ohraničen, takže je pro každý předmět určeno, zda pod daný pojem spadá, či ne. Není-li tomu tak, existuje kromě obou případů “a spadá pod pojem F” a “a nespadá pod pojem F” ještě případ třetí, totiž*

případ nerozhodnosti. Chybný úsudek známý jako Acervus [míněn paradox hromady] je založen na tom, že je za pojem pokládáno něco (např. hromada), co s ohledem na nedostatečné ohraničení nemůže být logikou za pojem považováno.« [BGD_N, 168] Totéž se týká i funkcí: »Pro každý argument x , pro nějž by nemělo " $x + 1$ " význam, neměla by hodnotu ani funkce $x + 1 = 10$, tedy ani žádnou pravdivostní hodnotu, takže by pojem toho, co zvětšeno o 1 dá 10, neměl ostré hranice. Požadavek ostrého ohraničení pojmů nese s sebou tedy obecně také požadavek, aby měly funkce pro každý argument nějakou hodnotu.« [FB, 19] V grafickém znázornění libovolného přiřazení musí tedy vést od každého předmětu (právě jedna) šipka k nějakému předmětu jinému.

Diagramový model logiky Aristotelovy ostrost obecných pojmů ve Fregově smyslu nezohledňuje. Pojmy individuální jsou totiž rovněž reprezentovány kruhy, a mohou se tak k pojmům ostatním nacházet ve vztahu částečného překrytí, tj. nejen úplné inkluze či exkluze, jak by to Fregova břitva ›bud'_, anebo _‹ vyžadovala. Podle Aristotelova (nepříliš šťastného) příkladu může být predikát "zítra přestati (existovat)" aplikován na pojem vzdělaného Mikkala, aniž by se vztahoval k Mikkalovi jakožto celku [AnI, 47b], tj. kruhem reprezentovaný individuální pojem lze stejně jako pojem obecný členit průniky jiných pojmů na části (Wagner skladatel, Wagner hudební teoretik, Verdi pěstitel stromových alejí, Verdi autor *Síly osudu*), které pak mohou být obsaženy v pojmech nezahrnujících celek či části ostatní (›obdivuhodný‹, ›všeobecně uznávaný‹ atd.).¹⁶⁹⁾ Zda se jedná o výhodu či defekt, ponechme okolnostem a čtenáři.



4.2.2 Univerzum diskurzu

Požadavek ostrého ohraničení pojmu vznáší Frege zvláště důrazně v kontextu svých základních vět definování, a to konkrétně principu úplnosti (*Grundsatz der Vollständigkeit*), který na definovaný pojem klade nárok ostrého vymezení. [GG₂, § 56] Frege zvažuje dva typické případy definování, které se proti tomuto principu prohřešují. Prvním z nich je definování postupné (*stückweises Definieren*), které »spočívá v tom, že je dána definice pro zvláštní

¹⁶⁹⁾ Srv. k tomu *Stekeler-Weithofer* [GPL, § 4.2].

případ – např. pro celá kladná čísla – a je také použita v četných teorémech, načež následuje další definice pro jiný případ – např. celých záporných čísel a nuly – často ještě s tou chybou, že se dotýká i případu, který již byl ošetřen. I když se ve skutečnosti podaří vyhnout kontradikci, není tomu tak díky této metodě.» [GG₂, § 57] »Postupným definováním je ovšem zpochybněn i status teorémů. Jestliže jsou např. slova “odmocnina z 9” definována v omezení na obor celých kladných čísel, lze pak dokázat třeba teorém, že existuje jen jedna druhá odmocnina z 9, který je ihned vyvrácen, rozšíří-li se úvaha na čísla záporná a v souladu s tím je pak také upravena definice. Ale kdo může vědět, zda jsme tak již dospěli k definitivně platné větě? [...] Bez definitivně platných definicí nejsou ani definitivně platné teorémy.» [GG₂, § 61]

Definování podmíněné (*bedingte Erklärung*), tvořící druhý z kritizovaných případů,¹⁷⁰⁾ je s definováním po částech úzce spjaté, pokouší se však případné nejednoznačnosti v aplikaci odstranit tím, že definici předkládá ve formě kondicionálu, jehož antecedent obsahuje výslovné omezení na daný obor. Definice může mít třeba podobu:

jsou-li x, y přirozená čísla, pak platí $R(x, y)$ tehdy a jen tehdy, když...

Frege však upozorňuje, že od této definice, např. logicky platným obratem neplatí-li, že $(R(x, y))$ tehdy a jen tehdy, když...) a x je přirozené číslo, pak y není přirozené číslo,

vede přes nutnost uvážení předmětu y , který není přirozeným číslem, přímá cesta k prolomení hranic předem zvoleného oboru, a tedy i k potřebě definice celoplošné. [GG₂, § 65] Výše uvedené úvahy navíc Frege radikalizuje do té míry, že vyžaduje vymezení pojmu nejen vůči přirozenému předmětu aplikace, ale vůči předmětu jakémukoli. Tak např. predikát “chlupatý”, užívaný v oboru živých tvorů, a to i s potenciálně nerozhodnými případy (postupně ošetřovanými predikátorovými pravidly jako třeba ›jezek nemá chlupy, ale bodliny‹, ›kiwi je pták, a ptáci mají peří‹ atd.), je třeba definitoricky rozšířit na jakýkoli možný předmět smysluplné řeči, tedy explicitně definovat dejme tomu i pro \aleph_1 : »*Otázka, zda je součet Měsíce a Měsíce roven jedné, neboli zda Měsíc spadá pod pojem něco, co přičteno samo k sobě, dá výsledek jedna, by byla*

¹⁷⁰⁾ Frege diskutuje oba typy v korespondenci s Peanem, který jich využívá a jejich využití obhájí praktickou nutností, odrážející dle jeho názoru skutečný vývoj vědy (v Lorenzenově terminologii: ›historickou‹, nikoli ›normativní‹ genezi). Srv. [WB, 181sq], [GG₂, § 58, pozn. 1]. V obecné rovině k tomu Frege říká: »*Musíme vždy rozlišovat mezi dějinami a systémem vědy. V dějinách máme vývoj, v systému strnulost. Systém může být vystavěn. Co ale jednou stojí, musí buď zůstat, nebo je celý systém nutné strhnout, aby mohl být postaven nový.*« [LM_N, 261]

nezodpověditelná; jinými slovy to, co jsme právě nazvali pojmem, by žádný vlastní pojem nebyl, neboť by chybělo ostré ohraničení. Byl-li ale již jednou výraz “a přičteno k b dá c” zaveden, nelze zabránit utvoření pojmového jména jako “něco, co přičteno samo k sobě, dá výsledek jedna”.« [GG₂, § 64]

Predikace napříč kategoriemi, tj. s jediným univerzem předmětů, je zdrojem četných problémů, a jak známo, také jednou z příčin zhroucení systému z *Grundgesetze*. Jako netriviální se např. hned ukáže otázka, jak určit pojmy mimo jejich původní aplikaci, když přímočará konvence, přiřazující předmětům těchto oborů nepravdu,¹⁷¹⁾ vede typicky u funkce jako třeba $\zeta + \zeta$ k porušení totality, neboť pod pojem $\text{›Měsíc} + \text{Měsíc} = \zeta\text{‹}$ nespadá žádný předmět.¹⁷²⁾

4.2.3 Kvantifikátor

Obecnost vlastního hypotetického soudu, případně soudu vůbec, jsme vyjádřili latinskými písmeny, vztahujícími se k libovolnému předmětu z univerza diskurzu. V případě složitějších vět však tato konvence nedostačuje k zachycení potřebných diferencí:

›Uvažme nyní případ, kdy je obsah [...] obecného kladného soudu částí soudu složeného, třeba jako podmínka soudu hypotetického; např. jestliže je každá druhá odmocnina ze 4 čtvrtou odmocninou z m, musí být m rovno 16. Výraz

$$[(\delta)] \quad \begin{array}{l} \text{———} m = 16 \\ | \\ \text{———} x^4 = m \\ | \\ \text{———} x^2 = 4 \end{array}$$

této větě neodpovídá, a je dokonce nepravdivý, pročez je také pruh soudu na levém konci nejvyššího vodorovného pruhu vynechán, neboť za m a x mohou být dosazena čísla, která obsah učiní nepravdivým. [Frege dále dosazuje hodnotu 3 za x a hodnotu 17 za m, přičemž z pravdivostních podmínek materiálního kondicionálu lze snadno dopočíst výslednou hodnotu nepravda.] Takto není [(δ)] pravdivý pro všechny hodnoty pro x a m, což by bylo předsazením pruhu soudu tvrzeno. Věta “jestliže je každá druhá odmocnina ze 4 čtvrtou odmocninou z m, musí být m rovno 16” říká však něco jiného. Její obsah by mohl být také vyjádřen takto: “jestliže, ať je x cokoli, platí věta, že musí být $x^4 = m$ tehdy, když je $x^2 = 4$: pak je $m = 16$.” | Vidíme tedy: obecnost vyjádřená pomo-

¹⁷¹⁾ *›Můžeme např. stanovit, že hodnotou funkce $\zeta - \zeta$ bude v případě, že jeden z argumentů není reálné číslo, vždy nepravda, ať již je druhým argumentem cokoli.« [LM_N, 260]*

¹⁷²⁾ Tento příklad viz Heijenoort [*1986*, 37].

cí x se nesmí týkat celku [(δ)], nýbrž je omezena pouze na

$$\frac{}{\frac{}{x^4 = m} \\ x^2 = 4.}$$

Toto označuji tak, že pruh obsahu opatřuji jamkou, do níž vkládám německé písmeno, kterým je také nahrazen výskyt x:

$$\frac{-q}{\frac{}{a^4 = m} \\ a^2 = 4.}$$

Takto omezují obor obecnosti vyjádřené německým písmenem na obsah, do jehož pruhu byla umístěna jamka (§ 11 Pojmového písma). Náš [pravdivý] soud tak získává následující výraz:

$$\frac{}{\frac{}{\frac{}{m = 16} \\ q} \\ a^4 = m} \\ a^2 = 4. \ll [\text{BL}_N, 20\text{sq}q]$$

S pomocí symbolu

$$-q-$$

tradičně nazývaného obecným kvantifikátorem, a německého písmene, tzv. vázané proměnné, lze tedy omezit obecnost pouze na část strukturované věty, což Frege právem namítá v odpověď Schröderovým návrhům¹⁷³⁾ na (údajně snadné) převedení notace *Begriffsschrift* do symboliky boolovské, která to ve skutečnosti neumožňuje: »V tomto způsobu značení spatřuji jednu z nejpodstatnějších částí svého pojmového písma, které díky němu získalo oproti písmu Boolovu významný náskok také coby pouhá reprezentace logických forem.« [ZB, 9]

Podobným způsobem bude jamková césura zužitkována v diferenciaci soudů záporných, totiž k odlišení popření obecnosti od obecnosti popření, tj. konkrétně třeba

$$(\kappa) \quad \frac{}{\frac{}{\frac{}{a^4 = 16} \\ q} \\ a^2 = 4} \quad \text{od} \quad (\lambda) \quad \frac{-q}{\frac{}{a^4 = 16} \\ a^2 = 4,}$$

což by prostým předepsáním negátoru před obecnou větou zůstalo nejasné. [GG₁, § 8] Možnost užití latinských písmen pro vyjádření obecnosti si Frege sice ponechává, spojí je ale s konvencí, podle níž »u latinského písmene zahrnuje obor vše, co ve větě leží za pruhem soudu« [GG₁, § 17], jinými slovy: latinské písmeno se vztahuje k celku věty, a činí ji tedy vždy větou obecnou. Výraz

$$\frac{}{\frac{}{x^4 = 16} \\ x^2 = 4}$$

je tak ekvivalentní obecnosti popření, tj. výrazu (λ).

¹⁷³⁾ Schröder [<1880>, 91sq]; srv. Jourdain [<1912>, kap. Gottlob Frege, § 11].

4.2.4 Obecný substituční princip

Zavedením symbolu kvantifikace jsme vedle kategorizace nevětných výrazů rozšířili formální syntax logiky predikátů o nový prvek. Je-li S věta fregovské formy, obsahující výraz N z třídy substituovatelných výrazů Π , což budeme zapisovat jako $S(N)$, pak výraz vzniklý nahrazením tohoto výrazu libovolným německým písmenem a , což budeme zapisovat jako $S(N/a)$, a předepsáním kvantifikátoru $\text{—}q\text{—}$, tj.

$$\text{—}q\text{—} S(N/a),$$

je větou fregovské formy. Opět platí, že pruhy obklopující jamku z obou stran jsou chápány jako pruhy obsahu (vodorovné pruhy), a splývají tedy s vodorovnými pruhy zřetěžených znaků. Mnohokrát bude výhodné analogicky ke schematickým písmenům “ M ”, “ N ” pro jména užívat také výrazy “ $F(\zeta)$ ”, resp. “ $G(\zeta, \xi)$ ” apod. pro slova pojmová; větu $\text{—}q\text{—} S(N/a)$ pak pro případ $S \approx F(N)$ můžeme psát jednoduše jako $\text{—}q\text{—} F(a)$ či moderní notací jako

$$\forall x.F(x),$$

neboť F představuje tu část věty S , která zbude po vyjmutí jména N , tj. $F(x) \approx S(N/x)$. Nyní se však přidržíme výše uvedeného (substitučního) značení. Třída Π substituovatelných výrazů obsahuje ve Fregově pojetí všechna možná jména předmětů, včetně jmen pravdy a nepravdy. My budeme předpokládat, že ji tvoří pouze výrazy nevětné, a to v obecném případě jména nějakého omezeného větného kontextu. Sémantické ohodnocení kvantifikované věty – tak, jak jej Frege zavádí – závisí dále na následujícím principu, který Stekeler-Weithofer nazval **o b e c n ý m p r i n c i p e m s u b s t i t u č n í m**:

(ASP) je-li $S(N)$ smysluplná věta fregovské formy, pak to platí i o každé větě $S(N/M)$ pro N a libovolné M z třídy substituovatelných výrazů Π .

Jelikož jsme smysluplnost Fregem uvažovaných vět spojili s principem WP, požadujícím jejich jednoznačnou pravdivost, či nepravdivost, znamená ASP v důsledku, že pro libovolné M z Π je výraz

$$(\eta) \quad \text{—} \text{—} S(N/M)$$

vyjádřením smysluplného – tj. buď pravdivého, nebo nepravdivého – soudu. Za těchto podmínek můžeme konečně říci, že výraz

$$\text{—}q\text{—} S(N/a)$$

vyjadřuje soud, podle něhož je výše uvedený soud (η) pravdivý pro libovolné M z Π . Jestliže tomu tak není, pak s ohledem na platnost WP a ASP (!) musí existovat M , pro něž soud (η) neplatí, tj. pro něž je větě $S(N/M)$ přiřazena nepravda, a soud

$$\text{—} \text{—} q\text{—} S(N/a)$$

lze číst jako tvrzení existenční: $\exists x$ existuje a takové, že platí $\neg S(N/a)$.
[B, § 12] Výraz

$$\neg \exists x$$

bývá pak také nazýván existenčním kvantifikátorem, neboť jeho předepsáním před výraz $S(N/a)$ – samozřejmě doprovazeným tvrdícím pruhem – lze vyjádřit existenci M takového, že je $S(N/M)$ přiřazena pravda. Moderní notací lze psát také

$$\exists x.F(x),$$

kde $F(x) \approx S(N/x)$.

Zabýváme-li se nyní v návaznosti na již provedené konstrukce formálních sémantik logiky aristotelské a Fregovy logiky výroků otázkou, jak by měla vypadat interpretace větného schématu predikátové logiky, jmenovitě schématu kvantifikovaného, je třeba vyjít z faktu, že výše popsané ohodnocení vět kvantifikované formy závisí na specifikaci oboru Π jmen a dále na ohodnocení systému vět, které vzniknou dosazením výrazů z Π za příslušnou vázanou proměnnou. Uvažujme takto: myslíme-li si jména z Π indexovaná přirozenými čísly, pak jejich posloupnost N_1, N_2, \dots určuje pro větu $S(N)$ s $N \approx N_i$ posloupnost všech substitučních variant $S(N/N_j)$ pro j libovolný index, což díky platnosti ASP a WP (!) znamená, že je tak určena také posloupnost těmto variantám přiřazených pravdivostních hodnot:

N_1	N_2	N_3	N_i
$S(N/N_1)$	$S(N/N_2)$	$S(N/N_3)$	$S(N)$
W	W	F	F

Podobně jako v interpretaci logiky výroků zde tedy vystupují posloupnosti pravdivostních hodnot, tentokrát však vázané na předem daný obor Π jmen, resp. jejich významů (předmětů), a substituční rámec $S(N/\zeta)$. Věť S mohou přirozeně odpovídat různé rámce, tj. může být spolu se svojí pravdivostní hodnotou členem několika různých posloupností, obor Π možných substituent je však díky ASP pevně fixován, a tedy pro všechny tyto posloupnosti stejný. Přibližný popis interpretace logiky predikátů se zdá být nyní nasnadě: měla by být tvořena třídou předmětů přiřazovaných schematickým písmenům jmenovým, tzv. nosičem interpretace, dále pak na těchto předmětech definovanými totálními funkcemi (výše zmíněnými posloupnostmi přiřazení), odpovídajícími schematickým výrazům nenasyceným. Schéma $\neg q - S(N/a)$ by pak očividně splňovaly ty interpretace, v nichž by funkce odpovídající výrazu $S(N/\zeta)$ přiřazovala všem předmětům nosiče hodnotu W, schéma $\neg \exists x - S(N/a)$ pak ty, v nichž by příslušná funkce přiřadila hodnotu F alespoň jednomu z předmětů nosiče.

Takto načrtnuté vymezení interpretace také odpovídá stávající praxi, studující vztahy formálních teorií a abstraktních struktur, které je splňují. Teorie modelů, na jejíž půdě se tato zkoumání zpravidla odehrávají, ale nestuduje samotný pojem interpretace (struktury). Chápe totiž sebe sama jako součást univerzální nauky o těch nejjobecnějších vlastnostech všech předmětů bez rozdílu – teorie množin (a to často v její ›naivní‹ podobě) –, od níž pak přebírá nejen pojmový aparát rozličných množinových operací, ale i jeho přímočarou aplikaci, umožňující bez větších obtíží prohlásit za interpretaci ›množinu všech přirozených (nebo reálných) čísel spolu s funkcemi sčítání a násobení (jakožto podmnožinami kartézského součinu nosiče)«, ›množinu všech efektivně vyčíslitelných funkcí«, ›množinu všech barev spektra‹ stejně jako ›množinu všech možností, jak ušít večerní oblek, spolu s funkcí jejich finanční a časové náročnosti«. Před kolapsem, kterým takto pěstovaná volná mluva o předmětných říších hrozí, jak jej ostatně známe z paradoxů týkajících se ›množiny všech množin«, lze sice hledat záchranu v teorii množin ›axiomatické‹; ta sama však ze své povahy (axiomatické teorie) logický kalkul, a tedy i pojem interpretace předpokládá, nemluvě o tom, že nebylo dosud definitivně rozhodnuto o její bezespornosti.¹⁷⁴⁾

Proč je pro nás přímé pojetí interpretace nedostačující, je ale zřejmé již z dříve řečeného. Zdůraznili jsme, že pojem funkce a předmětu nechápeme jako *rozlišení ve sféře nějaké stávající totality entit*, ale v první řadě jako *určení sémanticko-pragmatické role výrazů* našeho jazyka. Tuto roli jsme sice upřesnili s pomocí *substituční strategie*, totiž rozlišením frází na substituovatelné a na substituční rámce, bližší konstituci významu těchto výrazů, podle níž by se dalo orientovat při vedení úsudků, jsme však nepodali, ačkoli jsme se k ní hlásáním větného holismu přímo zavázali. Odmítnutí realistické sémantiky, která logickou kategorizaci výrazů, a tedy i případnou odlišnost jejich sémantické role zdůvodňuje rozličnou povahou těmito výrazy denotovaných entit, nás navíc *zavazuje podat čistě analytická kritéria této kategorizace* – jinými slovy: specifikovat, kdy považovat jazykovou frázi za výraz jmenný či funkční, aniž bychom se při tom odvolali k našim smyslům, resp. k čemukoli mimo jazyk. Teprve po splnění těchto podmínek budeme konečně schopni *popsat logickou konstituci jakéhokoli oboru, který by si nárokoval status interpretace* predikátové logiky, přičemž Fregův požadavek logického založení aritmetiky spojíme s tvrzením, že obecné principy výše zmíněné konstituce (jako jsou např. WP a ASP) k ›vytvoření‹ oboru abstraktních předmětů (čísel) *postačují*.

¹⁷⁴⁾ Bude ještě diskutováno později – viz /5.2/ a /7.2/.

5 IDENTITA

W. V. O. Quine ve své knize *Word and Object*¹⁷⁵⁾ přesvědčivě ukázal, že sémantický rozdíl mezi ostenzivně zavedenými významy výrazů jako “máma”, “červeně”, “králík” a “voda” neleží na straně stimulů, jimž jsme byli jako děti v procesu elementární jazykové výuky vystaveni, ale v sofistikovaném užití těchto výrazů v monolitických větách. Konečná posloupnost *d e i k t i c k ý c h*, tj. ukázáním doprovobených příkladů

d₁ je (není) P

d₂ je (není) P

d₃ je (není) P

d₄ je (není) P

.....

rozvíjejících význam výrazu P, vede sice obecně k osvojení kritéria (správnosti či nesprávnosti) aplikace tohoto výrazu vzhledem k potenciálně nekonečnému množství typických situací, nikoli však k odlišení singulárního výrazu “máma”, označujícího relativně trvalý a kompaktní časoprostorový objekt, od obecného výrazu “červený”, jehož reference se podobně jako u výrazu “voda” nachází roztroušena na mnoha místech, na rozdíl od něj však vždy nesamostatně, tj. na věcech, a oba tyto látkové termíny pak zase od sortálního predikátu “králík”, jenž sice má či může mít také větší počet instancí, jejich kumulací ani dělením však další instance nevznikají, tj. část králíka ani skupina králíků nejsou samy králíkem.

Úvodem k *The Roots of Reference*, kde má být ve *Word and Object* načaté téma formování reference probráno podrobněji, Quine říká:

»Poměrně nepatrné tajemství halí způsoby, jimiž se učíme používat pozorovací věty a reagovat na ně přitakáním či nesouhlasem poté, co jsme k tomu vyzváni. Avšak řeč o předmětech – abstraktních, fyzických, či dokonce smyslových – si není možné ani tak rychle osvojit, ani tak snadno vysvětlit. Bezchybná předmětná řeč vyžaduje, aby dítě zvládlo objemný aparát jazykových částic – “ten-týž”, “jiný”, “tamto”, “to”, koncovku plurálu [tj. anglické “-s”] a mnohé další –, aparát, jenž je na úrovni observačních vět nedosažitelný.« [RR, ix]

Rozdíl mezi jednotlivým a obecným, mezi >tamtím (konkrétním) králíkem< a >nějakým králíkem (obecně)< závisí právě na větěném užití pomocných výrazů, které nemají žádný (přímý) observační význam (*stimulus meaning*), a proto je

¹⁷⁵⁾ Jedná se především o kapitolu *The Ontogenesis of Reference*, tj. [WO, k. 3., § 17-25].

také v počátečních stádiích utváření jazyka zcela setřen. Význam slov této rané fáze se snad nejvíce blíží užití látkových termínů jako “voda”, které se – ač připouštějí pouze singulár – vztahují k více instancím, a lze je tak do dichotomie jednotlivého a obecného obtížně vměstnat:

»[...] *matka, červené a voda jsou pro dítě všechny téhož typu; každá je jen historií sporadických setkání, roztroušený kus toho, co jde kolem. První osvojení si těchto slov je tedy uniformní záležitostí zvládnutí toho, jak moc z kolemjdoucího považovat za matku, za červené či za vodu. Není tomu tak, že by si v prvním případě dítě řeklo “Ahoj! opět máma”, v druhém “Ahoj! jiná červená věc” a v třetím “Ahoj! více vody”. Všechny případy jsou na stejné úrovni: Ahoj! více mámy, více červeného, více vody.*« [WO, 92]

Predikáty v této podobě, tj. v užití degenerovaných observačních vět jako “máma (zde)”, “červené (zde)”, “králík (zde)”, budeme Tugendhatovou terminologií nazývat *k v a z i p r e d i k á t y*.¹⁷⁶⁾ Aristotelovu sylogistiku, jak jsme ji vyložili dříve, lze potom v jistém smyslu nazývat kvazipredikátovou logikou.

5.1 SMYSL A VÝZNAM

Přechod od nespojitě počitkové masy kvazipredikátu k diferencovanému užití predikátu sortálního, umožňujícího rozlišit jednotlivou věc od obecného pojmu, pod něž spadá, tematizuje Quine pod výmluvnou hlavičkou ›dělení reference‹. Toto dělení (›*Ur-teilung*‹) se za asistence podpůrné jazykové výbavy odehrává v rámci soudu (›*Urteil*‹),¹⁷⁷⁾ speciálně pak ve větách jako “toto je tentýž králík, kterého jsme viděli včera”, “toto jsou dva různí králíci” apod., tedy ve větách vyjadřujících identitu

d_1 je totéž P jako d_2

dvou deiktických případů. *K r i t é r i u m i d e n t i t y* je tak přiřazeno kritériu aplikace jako to, co sortál odlišuje od predikátů ostatních, co mu na rozdíl od nich garantuje diskrétní množinu předmětů, na něž byl původní ›*cluster*‹ souhlasných případů rozdělen. Dva predikáty s toutéž deiktickou aplikací, jako třeba

	knižní exempláře mé knihovny	(kniha jako fyzický objekt)
a	tituly mé knihovny	(kniha jakožto titul),

¹⁷⁶⁾ Viz Tugendhat [ESP, 208].

¹⁷⁷⁾ Srv. Stekeler-Weithoferův komentář k Hegelově nauce o soudu, speciálně kapitulu *Urteil als Ur-Teilung* in: [HAP, 357sqq]. Srv. také Fregovo: »*Je možné říci, že souzení [Urteilen] je rozlišování částí [Teilen] v rámci pravdivostní hodnoty.*« [SB, 35] K tomuto místu se podrobněji vyjádříme v /5.1.7/.

tak mohou být vzhledem k odlišným kritériím identity rozličnými sortály s početně odlišnou extenzí: dva různé výtisky mohou být reprezentanty téhož titulu. Počítatelnost, tedy přípustnost otázky ›kolik P?‹, je také skutečně jednou z charakteristik, kterou je sortální predikát alternativně vymezován¹⁷⁸⁾ a s níž jej spojuje Frege:

»*Neboť pojem, jemuž je připisováno číslo, obecně ohraničuje to, co pod něj spadá, určitým způsobem. Pojem “písmeno slova ‘šest’” odděluje ‘š’ od ‘e’, toto zase od ‘s’ atd. Pojem “slabika slova ‘šest’” vyzdvihuje toto slovo jako celek a nedělitelné v tom smyslu, že jeho části již pod pojem “slabika slova ‘šest’” nespádají. Ne všechny pojmy mají tuto vlastnost. To, co spadá pod pojem červeného, můžeme např. rozdělovat mnoha způsoby, aniž by jeho části přestaly pod tento pojem spadat. Takovému pojmu nepřísluší žádné [konečné] číslo.*« [GL, § 54]

Naivněmnožinová řeč je neudržitelná právě proto, že výrazy jako “množina”, “předmět” či “věc”, které fungují gramaticky po způsobu sortálů, nejsou spojeny s žádným pevným ohraničením, individuací pod ně spadajícího, a nevymezují tedy (Fregeovými slovy) žádný předmět zkoumání, nebo lépe řečeno: žádný ›předmětný obor‹. Otázka “kolik?” u nich pak vůbec nemá smysl:

»*Dám-li [něko]mu do rukou balíček karet se slovy: urči počet [tj. kolik předmětů zde je], neví, zda chci znát počet karet nebo úplných her či třeba při skatu počet karet s hodnotou. Tím, že jsem mu dal do ruky balíček, neurčil jsem plně předmět jeho zkoumání; musím dodat slovo: karta, hra, hodnota.*« [GL, § 22]

Přepis dotazu ›kolik červeného je zde v místnosti?‹ na ›kolik červených předmětů je zde v místnosti?‹ představuje tedy pouze zdánlivé upřesnění. Udání zkoumaného předmětného oboru vyžaduje pravý sortál jako “živočich” nebo “oděv” atd. Voda či cukr, vzpínající se jakožto přetrvavší případy archaické kategorie kvazipredikátů zcela předmětné řeči, musí být před vlastním sčítáním (před)sortovány do sklenek, kostek apod.

Sortální restriktce, s níž Frege svazuje smysl výrazu “kolik?”, je ale pevně spjata i s výrazy jako “každý” a “některý”; vždyť uvažme věty jako

všichni (*lidé*) jsou smrtelní,
či každé *komplexní číslo* má druhou odmocninu.¹⁷⁹⁾

¹⁷⁸⁾ Srv. *Tugendhat* [ESP, 453sq], případně i odkaz na literaturu tamtéž. Odmítavé stanovisko lze najít např. in: *Wiggins* [1967, 39].

¹⁷⁹⁾ Srv. *Brandom* [ME, 436sq].

Je proto spíše překvapivé a pro další vývoj Fregových logických názorů (jak uvidíme v závěrečné podkapitole /7.2/) osudné, že v tomto zcela analogickém případě extrapoloval směrem ke kvantifikaci nerestringované, namísto aby hájil logicky prvotní kvantifikaci sortálně omezenou, když sám, jak jsme viděli, odvíjel genezi kvantifikátoru od vlastního hypotetického soudu, umožňujícího explicitní vyjádření oboru úvahy v antecedentu.¹⁸⁰⁾ Při kvantifikaci stejně jako při počítání předpokládáme celek předmětů pevně určených ve své identitě, a to skrze »*pojmem, jenž to, co pod něj spadá, ostře ohraničuje a nedovoluje žádné svévolné dělení*« [GL, § 54].

5.1.1 Znovurozpoznání

Zprvu nerozlišené “toto je máma”, “toto je červené”, “toto je králík” se začíná pozvolna diferencovat. V případě sortálu je rozdělení reference názorně doprovázeno osamostatněním deiktických výrazů jako “zde”, “toto”, “tamto” apod., původně nedílných součástí kvazipredikátu, které nyní – v závislosti na situaci – odkazují k jednotlivým předmětům tak, jak jsou tyto individuovány příslušným sortálem. Jinými slovy: z *token* deiktických výrazů se stávají jména předmětů.

Chceme-li překonat situační závislost deiktických gest, nabízí se možnost »pokřtít« jednou provždy daný předmět výrazem, jenž bude dále užíván výhradně v odkazu k němu. To je také funkce tradičně přisuzovaná vlastním jménům přirozeného jazyka. Samotné pojmenování předmětu, třeba nějakého nového kopce, z něj ale obecně identifikovatelný objekt nedělá – k tomu je zapotřebí zaplést jej do sítě vztahů s objekty ostatními, resp. s jejich jmény. Minimálním požadavkem této plošné reference se zdá být Fregovo kritérium znovurozpoznání (*Wiedererkennen*):

»*Má-li symbol a označovat předmět, musíme mít kritérium [Kennzeichen], které by nám dovolilo vždy rozhodnout, zda je b totéž co a, i když bychom nebyli pokaždé schopni toto kritérium použít.*« [GL, § 62]

Kritérium znovurozpoznání předmětů je zjevně kritériem identity sortálního predikátu, kterým je vymezen příslušný předmětný obor. K určení reference nového singulárního termínu N proto obvykle stačí doprovodit deiktické gesto

¹⁸⁰⁾ Quine v jedné ze svých posledních knih poznamenává: »*V mimologické praxi se skutečně sotva najde příležitost pro obecnou kvantifikaci mimo kondicionál či bikondicionál $\forall x(Fx \supset Gx)$, $\forall x(Fx \equiv Gx)$, nebo, jak je značil Giuseppe Peano, “ $Fx \supset_x Gx$ ” a “ $Fx \equiv_x Gx$ ”. Avšak máme-li toto, můžeme definovat nerestringovanou kvantifikaci “ $\forall xFx$ ” jako “ $(Fx \supset Fx) \supset_x Fx$ ”.*« [1995a, 30sq] Srv. k tomu také Frege [DEN, 70].

vhodným sortálem P:

tato *řeka* (nikoli voda, která právě protéká, či rameno, na něž také ukazuje) je Nil,
tento *králík* (nikoli třeba barva koberce, na němž dotyčný králík skáče) je Petr;

obecně tedy >d (toto) je totéž P jako N_\leftarrow , přičemž předpoklad zvládnutých pravdivostních podmínek věty

d_1 je totéž P jako d_2

již obstará začlenění uvažovaného jména do vztahu se stávajícími či potenciálními jmény d_1 , d_2 předmětů oboru. Je to právě tato komplikovaná praxe znovurozpoznání téhož, nikoli samotný akt deixe, tedy jen dočasná fyzická blízkost muzejního exponátu a jeho štítku, co činí z výrazu jméno. – Wittgensteinovými slovy: »*Symbol sám je mrtvý. Co mu dává život? – Žije v použití. Má potom onen dech života v sobě? – Nebo je použití jeho dech?*« [PU, § 432]¹⁸¹⁾ Kritérium znovurozpoznání není však podle Frega jen *nutnou* podmínkou předmětné reference. Předmětné obory, v nichž nehraje deixe podstatnou významotvornou roli, si jej vynucují i jako podmínku *postačující*:

»*Jak je nám tedy dáno číslo, nemůžeme-li o něm mít žádnou představu ani názor? Slova něco znamenají pouze v kontextu věty. Jde tedy o to, vysvětlit smysl věty, v níž se vyskytuje číslovka. Tím je zprvu ponecháno ještě mnoho místa libovůli, ale již jsme konstatovali, že s číslovkami je nutné spojovat samostatné předměty. Tím je nám dán druh vět, které musí mít smysl, vět vyjadřujících znovurozpoznání. [...] Tímto způsobem udáme obecné kritérium rovnosti čísel. Poté, co jsme takto dosáhli prostředku, jenž nám umožní uchopit konkrétní číslo a znovurozpoznat ho jako totéž, můžeme brát číslovku jako vlastní jméno.*« [GL, § 62]

Samostatnost předmětů a jejich znovurozpoznání tedy splývají. Uvažme např. již Fregovu poznámku: »*Z téhož důvodu zde ještě neříkám “ $n = m + 1$ ”, neboť už skrze symbol rovnosti je ($m + 1$) označeno jako předmět.*« [GL, § 76]

¹⁸¹⁾ Srv. k tomu dále Wittgensteinovy poznámky týkající se deixe (*hinweisende Definition*) z [PU, § 28-38], speciálně: »*Mohli bychom také říci: definice ukázáním vysvětluje užití – význam – slova potud, jestliže je již jasné, jakou roli v jazyce má toto slovo vůbec hrát.*« [PU, § 30] Právě na tomto místě je také rozhodně odmítnuta Augustinova představa učení se jazyku coby deiktickému olepování světa jazykovými výrazy s tím, že se tváří »*jako by dítě přišlo do cizí země a nerozumělo tamní řeči; tj.: jako by již řeč mělo, ale jinou. Nebo také: jako by již umělo myslet, ale ještě ne mluvit. A “myslet” zde znamená něco jako: mluvit sám k sobě.*« [PU, § 32]

V přípustnosti za jednu ze stran tvrzení identity máme tedy podle Frega nutné a postačující kritérium toho, zda je výraz daného kontextu jménem předmětu, či nikoli. »*Je jenom jeden typ vět, které musí mít pro každý předmět smysl, a těmi jsou věty znovurozpoznání, které u čísel nazýváme rovnostmi.*« [GL, § 106] »*Nyní vyvstává otázka: kdy jsme oprávněni chápat nějaký obsah jako obsah soudu vyjadřujícího znovurozpoznání?*« [GL, § 107] To, o co tedy jde v dalším zkoumání konstituce významu nasycených výrazů, je otázka, jak »*fixovat smysl soudu vyjadřujícího znovurozpoznání*« [GL, § 104], a to nejprve obecně, a poté i pro konkrétní případ oboru čísel. [GL, § 63sqq, § 104sqq]

5.1.2 Leibnizův princip

Zkoumání identity věnoval Frege svůj notoricky známý článek *Über Sinn und Bedeutung*. Na zvláštnost role, kterou by měl symbol rovnosti hrát v systému jeho logiky, však upozornil již v příslušné pasáži *Begriffsschrift*:

»*Zatímco jinak jsou symboly pouze zástupci obsahu, takže každé spojení, v něž vstupují, vyjadřuje pouze vztah jejich obsahů, jakmile jsou spojeny symbolem rovnosti obsahu, obrací najednou své vlastní já ven; neboť je tím označena okolnost, že dvě jména mají tentýž obsah.*« [B, § 8]

Tím, že v kontextu rovnosti nejsou výrazy jazyka užívány obvyklým způsobem, to jest směrem ven, mimo jazyk, k reprezentovanému, je definitivně potvrzen konstitutivní charakter identity. – Nejedná se o metafyzické, triviálně (evidentně?) pravdivé tvrzení totožnosti předmětu se sebou samým, o němž – zdá se – platí Wittgensteinovo: »*Říci o dvou předmětech, že jsou identické, je nesmysl, a říci to o jednom, neříká vůbec nic.*« [TLP, 5.5303]¹⁸²⁾ Jde o výraz metajazyka, položení různých reprezentací jakožto zástupců téhož. *R e p r e z e n t a c e m i* v širším slova smyslu přirozeně nemusíme rozumět pouze výrazy jazyka, ale také *fenomény*, jak jsme je dříve uvažovali v doprovodu deiktických gest a obrátů, jako »toto zde« (>tento králík«, >tato kniha«), jejichž (psaná) *token*, patřičně indexovaná místem a časem projevu, pak mohou příslušné jevy zastupovat v pojmovém písmu.

Viděli jsme, že nejen abstraktní, ale libovolný předmět je nám *in concreto* dán pouze prostřednictvím svých reprezentací, neboť jsou to v jistém smyslu pouze ony, na něž lze přímo ukázat, napsat je či vyslovit a zpřítomnit tak praxi vzájemné domluvy.¹⁸³⁾ Odtud také námi v /4.2.4/ načrtnuté *substituční* pojetí

¹⁸²⁾ S patřičným závěrem, totiž že »*symbol rovnosti není podstatnou součástí pojmového písma*« [TLP, 5.533].

¹⁸³⁾ Analogie s Kantovým pojmem »věci o sobě« a úvodní větou *Kritiky*, totiž »že

kvantifikace, zvažující všechna *jména* (reprezentace) předmětů, nikoli přímo tyto *předměty* samotné.¹⁸⁴⁾ Dále jsme se snažili ozřejmit, že zmíněná ›danost‹ předmětu je záležitostí podstatně holistickou, vázanou na jazyk, a to jednak na ohodnocení rovností v rámci jistého systému reprezentací a jednak na užití těchto reprezentací v jistém systému vět. Oba tyto momenty předmětné konstituce – ve zkratce lze říci: *rovnost a substituci* – uvádí nyní do souvislosti princip, který Frege zvolil jako výše požadované obecné zachycení smyslu rovnosti, v *Begriffsschrift* formulovaný takto: »Nyní znamená

┆— (A ≡ B):

symbol A a symbol B mají tentýž pojmový obsah, takže lze A všude dosadit na místo B a obráceně.« [B, 15]

V *Grundlagen* se pak Frege přímo odvolává k Leibnizovi: »Leibniz dále definuje: “Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate.” Tuto definici rovnosti si беру za vlastní.« [GL, § 65] My tento tzv. Leibnizův princip rozepíšeme následovně:

(LP) věť $A = B$ se jmény A, B je přiřazena hodnota pravda tehdy a jen tehdy, jestliže pro libovolnou větu daného kontextu platí, že v ní lze nahradit jedno z uvedených jmen druhým, aniž by se změnila její pravdivostní hodnota (*salva veritate*).

Fregův komentář, totiž že v takto vyjádřené »obecné substituovatelnosti jsou nyní ve skutečnosti obsaženy všechny zákony rovnosti«, dodává také konečně na plauzibilitě volbě dvou různých určení kategorie vlastních jmen, totiž jako výrazů *substituovatelných* na straně jedné a jako výrazů *připustných symbolu rovnosti* na straně druhé. Quinovu slavnou tezi ›být (předmětem) znamená být hodnotou proměnné‹¹⁸⁵⁾ lze nyní chápat jako zkratkovité vyjádření téhož: jeli-

všechno naše poznání začíná [smyslovou] zkušeností« [KrV, A19/B33], je zřejmá. Paralelně k našim úvahám o neurčitosti deixe a potřebě podpůrné role predikátu, resp. s ním spjatých kritérií identity při určení významu singulárního termínu lze číst Kantovo tvrzení, že »názor [reprezentace objektu] bez pojmu nepředstavuje poznání« [KrV, A50/B74]. Názor jakožto objektivní, vědomá představa (*apercepce*) se od neurčitého počítkového ›clusteru‹ liší právě tím, že je doprovoben jazykově artikulovatelným rozlišením P toho, co je (a co není) vnímáno, a je tak ze své podstaty spojen se singulárním soudem (*Anschauungsurteil*) ›toto je P‹. Srv. k tomu také Stekeler-Weithoferův komentář k transcendentální estetice z [SK, § 6.3.1], případně celou kantovskou kapitolu tamtéž.

¹⁸⁴⁾ Rozdílu substituční kvantifikace a kvantifikace přes objekty se budeme věnovat v další podkapitole, tj. v 5.2/.

¹⁸⁵⁾ Viz článek *On What There Is* in: [FLP, k. 1].

kož funkční či větné výrazy nemají zprvu v kontextu rovníčka žádný smysl, nepočítají se ani mezi substituovatelné termy, a výrazy jako “pojem F”, “myšlenka S” nejsou žádnými jmény pojmů a myšlenek coby samostatných entit.

Aby se tomu tak stalo, bylo by *za prvé* zapotřebí udat speciální kritéria identity pro předem popsany obor reprezentantů (nenасыceny výrazů, vět atd.) – což Frege také pro případ funkcí skutečně činí, když jako kritérium identity navrhuje rovnost extenzí¹⁸⁶) a zavedením speciální proměnné dospívá ke kvantifikacím vyšších řádů, jejichž substituenty jsou výrazy hrající roli substitučních rámců pro substituenty řádů nižších –, a *za druhé* specifikovat vhodný větný kontext, v němž budou tyto výrazy reprezentanty předmětů. Tvrdím nyní, že článek *Über Sinn und Bedeutung* není v první řadě míněn jako lingvistická studie o dvou rozličných druzích významu (způsobech užití) našich slov, ale že především ukazuje Leibnizův princip jako regulativ předmětné konstituce, čímž jednak potvrzuje holistickou devízu ›slovo má význam pouze v kontextu věty; a s ní související ontologický relativismus, a jednak tím dává metafoře ›rozpadu‹ souditelného obsahu konkrétní smysl.

5.1.3 Způsob danosti

Nové zkoumání identity v *Über Sinn und Bedeutung* zahajuje Frege následujícími slovy: *›Rovnost vyzývá k přemýšlení skrze otázky, které se na ni váží, a není lehké je zodpovědět. Je vztahem?, vztahem mezi předměty nebo jmény či znaky pro předměty? K poslední z možností jsem se přiklonil ve svém Pojmovém písmu. Důvody, které se pro to zdály mluvit, jsou tyto: $a = a$ a $a = b$ jsou očividně věty různé epistemologické hodnoty: $a = a$ platí a priori a je podle Kanta nazývána analytickou, zatímco věty formy $a = b$ obsahují velice často cenná rozšíření našeho poznání a není je vždy možné založit a priori.‹* [SB, 25]

Pojetí z *Begriffsschrift* se však nezdá být nyní Fregovi dostatečné, neboť uspokojivě nezohledňuje rozdíl mezi znakem a tím, co je označováno. Volba jazykové reprezentace je zprvu zcela libovolná, a v jistém smyslu na ní nezáleží. – Na tom, co je reprezentováno, však ano: *›Takto by se věta $a = b$ netykala věci samotné, nýbrž jen způsobu našeho označení; nevyjadřovali bychom jí žádné skutečné poznání.‹* [SB, 26] Nemáme-li ale k abstraktním předmětům jiný přístup než skrze jejich jazykové reprezentace, jak se pak liší sepsání číslovek “3”, “4” od sebe navzájem či od libovolné čmáranice typu \mathbb{A} , která by přece také mohla zaujmout jejich místo; jinými slovy: co, když ne na tomto sepsání

¹⁸⁶) Podrobnosti viz /6.2.7/.

nezávislá reference k různým platónským formám 3 a 4, činí z prvních dvou výrazů, které šlo původně jistě vybrat jinak, jména různých předmětů, a z **Å** pak jméno žádné? – A odpověď je nasnadě: nikoli libovolná volba symbolu (“3”, “4”), ale způsob jeho užití, případně začlenění do (početní) praxe:¹⁸⁷⁾

»*Odlíšnost může vzniknout jen tak, že rozdíl symbolů odpovídá rozdíl způsobu danosti [Art des Gegebenseins] označovaného. Budiž např. a, b, c přímký spojující vrcholy trojúhelníka se středy protějších stran. Průsečík přímek a a b je pak totožný s průsečíkem přímek b a c. Máme proto různá označení pro tentýž bod a tato jména (“průsečík přímek a a b”, “průsečík přímek b a c”) ukazují současně na způsob danosti, a proto je ve větě obsažen skutečný poznatek.*« [SB, 26]

Ačkoli se zdá být toto rozlišení uváděno jako podstatný pokrok proti *Begriffsschrift*, srovnáním zjistíme, že v ní Frege uvažoval zcela analogicky, a to včetně volby doprovodné geometrické ilustrace:

»*Tak je se zavedením symbolu rovnosti obsahu nutně dána dvojnásobnost významu všech symbolů, neboť mohou být jednou užívány za svůj obsah, jednou za sebe sama. To nejprve vzbuzuje dojem, jako by se zde jednalo o něco, co náleží samotnému symbolu, a nikoli myšlení, a jako by nebylo zapotřebí různých symbolů pro tentýž obsah, a tedy ani žádného symbolu pro rovnost. [...] Nutnost symbolu rovnosti obsahu spočívá tedy v následujícím: tentýž obsah může být plně určen mnoha různými způsoby; to, že je ale v nějakém speciálním případě různými způsoby určení [Bestimmungsweise] skutečně dáno totéž, to tvoří obsah soudu.*« [B, § 8]

Předpoklad, že Frege v *Über Sinn und Bedeutung* rozvíjí úvahy z kapitoly o rovnosti z *Begriffsschrift*, je tedy zjevně zdravý interpretační manévř. Přínos *Über Sinn und Bedeutung* se zdá nejprve spočívat v pročištění terminologie: namísto nediferencované řeči o (ne)souditelném obsahu a způsobech jeho určení rozlišuje nyní Frege jednotně mezi tím, co výraz označuje a co je nazváno významem výrazu na straně jedné, a způsobem danosti tohoto významu na straně druhé: »*Je nyní nasnadě, že je se symbolem (jménem, slovním spojením, grafickým znakem) kromě toho, co označuje a co lze nazývat jeho významem, třeba spojovat to, co bych chtěl nazvat smyslem onoho symbolu a v čem je obsažen způsob danosti. Podle toho by v našem příkladě byl sice význam výrazů “průsečík a a b” a “průsečík b a c” tentýž, nikoli však jejich smysl. Význam*

¹⁸⁷⁾ Srv. Wittgensteinovo: »*Speciální způsob značení může být nedůležitý, důležité však vždy je, že se jedná o možný způsob značení.*« [TLP, 3.421]

slov “Večernice” a “Jitřenka” by byl stejný, nikoli jejich smysl.« [SB, 26sq] Otázka, která nás nyní může přivést k jádru článku *Über Sinn und Bedeutung*, zní: spočívá změna v něm předložené koncepci identity oproti koncepci z *Begriffsschrift* v tom, že je na místo dvojznačného užití symbolu za svůj obsah a za sebe sama postavena dvojznačnost smyslu a významu? Odpověď na ni bude jedním z výsledků zbytku této podkapitoly, konkrétně ji lze najít v oddílu /5.1.6/.

5.1.4 Nepřímý kontext

Z úvodu k *Über Sinn und Bedeutung* je zřejmé, že víceznačnost užití symbolu bude i jeho tématem. Výraz jakožto *služebný* prostředek dorozumění, tj. nikoli samoúčel, ukazuje svým přirozeným, p ř í m ý m užitím v první řadě *ke sdělovanému*, tedy nikoli k sobě či k tomuto užití samotnému. To platí jak pro věty matematiky, tak pro romány či jakoukoli jinou fikci.¹⁸⁸⁾ Právě tuto primární sémantickou roli výrazu nazývá Frege významem. (V obavě z možných konfuzí budeme zpravidla hovořit o f - v ý z n a m u, přičemž “f” odkazuje na Frega.) Na jisté úrovni jazyka se ale sama objeví možnost kontrolovat a redukovat ty z konfliktů, jež vyvstaly jako vedlejší produkt jeho společenské funkce, reflexy stávajícího úzu – jazyk sám se stává tématem jazyka: »Užíváme-li slova obvyklým způsobem, je to, o čem chceme mluvit, jejich význam. Může se ale také stát, že chceme hovořit o slovech samotných nebo o jejich smyslu.« [SB, 28]

Samotný úmysl či záměr však z obrátů jako “mysl A” stejně jako “pojem A” nebo “vlastnost A” jména předmětů nedělá; zprvu jejich prostřednictvím zpravidla chceme poukázat jen na implicitní (empraktické) zvládnutí jistých kritérií užití výrazu A, aniž bychom tím předpokládali jakýkoli ostrý koncept jejich identity, tedy minimální požadavek kladený na předmětnou referenci, tj. f-význam jmenného výrazu.¹⁸⁹⁾ Právě v tomto *pseudopředmětném* modu hovoří Frege o (tom či onom) *způsobu danosti* (f-)významu výrazu a nazývá ho je-

¹⁸⁸⁾ K otázce logické povahy fiktivních předmětů se také dostaneme v podkapitole /6.1/.

¹⁸⁹⁾ Srv. »Říkáme “[ta] funkce” a “[ten] pojem”, výrazy, bez nichž se stěží obejdeme, a přece neodpovídají povaze věci. Podle určitého členu jsou tyto výrazy svojí formou vlastními jmény v logickém slova smyslu, jako by měly označovat předměty, a přece to právě dělat nemají. Právě podstata pojmu a funkce, nenasycenost, je tím zastřena. Jazyk nás nutí k nepřiměřenému vyjádření. Vyhnout se tomuto nepořádku je obtížné; ale lze jej zneškodnit tím, že si budeme jeho nepřiměřenosti vždy vědomi.« [LM_N, 257sq]

ho (f-)smyslem.¹⁹⁰ Odlišnost f-smyslu a f-významu jakožto konceptů různé jazykové úrovně¹⁹¹ zdůrazňuje Frege terminologickou konvencí, podle níž výraz svůj (f-)význam znamená (*bedeutet seine Bedeutung*), ale svůj (f-)mysl vyjadřuje (*drückt aus seinen Sinn*). [SB, 31] Zde lze také vytušit původ Wittgensteinovy známé distinkce *sagen/zeigen*: »Věta ukazuje [*zeigen*] svůj smysl. Věta ukazuje, jak se věci mají, když je pravdivá. A říká [*sagen*], že se tak mají.« [TLP, 4.022] »Věta ukazuje logickou formu skutečnosti.« [TLP, 4.121] »Co lze ukázat, nelze říci.« [TLP, 4.1212]

Fregovým kandidátem na primární funkci věty je přirozeně její pravdivost: *pravdivostní hodnota je tak ztotožněna s f-významem věty a jako její f-smysl je určena myšlenka*. Tu pak lze z definice coby způsob danosti f-významu přirozeným způsobem uchopit jako *pravdivostní podmínky věty*, což bývá sice spojováno v první řadě až s Wittgensteinovým: »*Rozumět větě znamená vědět, za jakých podmínek je pravdivá.*« [TLP, 4.024]; nicméně již v *Grundgesetze* čteme:

»*Každé takové jméno pravdivostní hodnoty [rozuměj: věta] vyjadřuje svůj smysl, svoji myšlenku. Našimi konvencemi jsme totiž určili, za jakých podmínek znamená pravdu. Smyslem tohoto jména, jeho myšlenkou, je to, že jsou tyto podmínky splněny.*« [GG₁, § 32]

Je-li sféra f-smyslu oblastí konstitutivních presupozic objektové (předmětné) řeči (f-významu), v níž samé proto f-smysl není a nemůže být tématem, neznamená to ale – jak nám sugeruje metafyzika *Tractatu* –, že z něj nelze učinit explicitní téma (předmět) řeči jiné, tj. řeči s řádně ošetřeným kontextem a kritérii identity nového užití výrazů. Kontexty, v nichž jsou výrazy užívány jinak než za svůj původní f-význam, speciálně pak za svůj původní f-smysl, nazývá

¹⁹⁰ Jakmile jsou ovšem kritéria identity specifikována, přivádí nás jazyk do choulostivé situace, jak ji lze dobře ukázat na příkladě Fregovy kontroverze s Kerrym v článku *Über Begriff und Gegenstand*. Zde Frege jak známo tvrdí, že výraz “pojem ‘kůň’” neoznačuje pojem, ale předmět. [BG, 195] Podobně by bylo možné říci, že “smysl A” neoznačuje smysl, ale význam. Tímto paradoxně znějícím obratem má však být vyjádřeno jen tolik, že jsme od jednoho užití slova (“kůň”, A) přešli k užití jinému, v němž ovšem toto slovo může figurovat samostatně, tj. na obou stranách znaménka rovnosti. Výrazy jako “pojem”, “smysl”, “vlastnost” pak hrají roli abstraktorů (viz /6.2/), jimiž tento přechod od jednoho kontextu k druhému dáváme explicitně najevo.

¹⁹¹ Stekeler-Weithofer trefně označuje f-smysl za *metalevel enterprise* – viz *Stekeler-Weithofer* [1996a].

Frege kontexty nepřímými. Na změnu v použití nějakého výrazu A z přímého na nepřímé upozorňují právě fráze jako “smysl A”, “pojem A” atd.:

»*Chceme-li hovořit o smyslu výrazu ‘A’, můžeme tak činit jednoduše obratem “smysl výrazu ‘A’”. V nepřímé řeči hovoříme např. o smyslu řeči někoho jiného. Na tom je vidět, že i v tomto způsobu řeči nemají slova svůj obvyklý význam, nýbrž že znamenají svůj obvyklý smysl. Abychom to mohli stručně vyjádřit, řekneme: slova jsou v nepřímé řeči užívána nepřímo a mají svůj nepřímý význam.*« [SB, 28]

Typickými obraty takovýchto kontextů, v nichž je explicitně problematizován úzus či pravdivostní podmínky nějakého objektového jazyka, bývají slova relativizující téma vzhledem k posuzujícímu subjektu, s uvozujícími frázemi jako “vědět”, “věřit”, “říkat”, “být přesvědčen”, “usoudit”, “domnívat se” atd. [SB, 37] Právě na nich také ukazuje Frege konstitutivní roli Leibnizova principu, zobecněného v tzv. principu zaměnitelnosti významu:¹⁹²⁾ záměna výrazů téhož významu nezmění význam výrazu, v němž je provedena. [SB, 32]

5.1.5 Pravdivostní potenciál

Uvážíme-li větu jako

Petr ví, že Jitřenka je Sluncem osvětlené těleso,
vidíme, že může být uvažována jako pravdivá, aniž by totéž platilo o větě

Petr ví, že Večernice je Sluncem osvětlené těleso.

Při předpokládané platnosti identity

Večernice = Jitřenka

se tak dostáváme před problém platnosti LP, resp. principu zaměnitelnosti významu. Obvykle se má za to, že Frege tento princip nekriticky přijímá a článek *Über Sinn und Bedeutung* píše jako jeho nepřilíš přesvědčivou obranu: princip platí, protože v nepřímém kontextu, jako je výše uvedený, neznamenaají slova svůj obvyklý f-význam, ale f-smysl; padá tedy pouze rovnost “Večernice = Jitřenka”. Moderní teoretici s Carnapem v čele oproti tomu princip zaměnitelnosti jednoduše odmítnou a následně pak rozliší ty kontexty, v nichž platí a jež nazývají extenzionálními, od neextenzionálních, v jejichž rámci pak stejným způsobem vymezí kontexty intenzionální, a to skrze analogický princip zaměnitelnosti intenze. Co se týče dvojice pojmů extenze a

¹⁹²⁾ Carnapův *›principle of interchangeability‹* – viz [MN, § 12]. Přesněji bychom možná měli hovořit o *›principu zaměnitelnosti výrazů téhož významu‹*, neboť jsou to v první řadě výrazy, co ve větách zaměňujeme. Výše uvedený tvar je však pohodlnější.

intenzí, jedná se o Carnapem navrhnuté ›zpřesnění‹ Fregova f-významu a f-smyslu. [MN, § 1] To bylo zprvu charakterizováno ekvivalencí relativizovanou k jistému uzavřenému větnému systému (tzv. popisu stavu) a jeho možným variantám [MN, § 5],¹⁹³⁾ Carnapovi následovníci jej pak definitivně vtělili do sémantiky možných světů, s intenzí coby funkcí z těchto světů do říše extenzí. Stalo se navíc běžnou praxí – a činí to i ontologicky opatrný Carnap – chápat uvažovanou distinkci jako vymezení v naivně pojatém prostoru entit, ›klasifikujícím‹ např. *předměty a třídy* jako příklady extenzí, zatímco *vlastnosti* či *propozice* jsou vydávány za typické entity intenzionální.

Vinu na této striktně ontologizující tendenci v interpretaci *Über Sinn und Bedeutung* nese však do značné míry Frege sám, když tam nejspíš z didaktických a popularizačních důvodů uvádí koncepci f-významu (primární sémantické role výrazu) na příkladě pojmenování fyzického předmětu, čímž jako by bral relaci jména a předmětu, který označuje, za vztah základní a neproblematický. Takto ovšem jednak zastírá své rozhodnutí objasnit logickou stránku problému předmětné reference vlastních jmen a jednak tím zpochybňuje sémantický primát věty a pravdy, což jsou – jak víme – dvě strany téže mince deklarovaného úsilí o analytickou aritmetiku. (Jak to ostatně musí být jasné všem pozorným čtenářům *Grundlagen*, k nimž, zdá se, počtem – a bohužel pouze počtem – silní komentátoři *Über Sinn und Bedeutung* nepatří.)

Z jistých míst článku se ovšem skutečně zdá, že Frege o tom, zda pravdu počítat k f-smyslu či f-významu věty, nechává rozhodnout právě princip zaměnitelnosti významu větných částí, zvláště když čteme o ztotožnění f-významu věty s pravdivostní hodnotou jako o pouhé domněnce:

¹⁹³⁾ P o p i s t a v u (*state-description*) pro nějaký jazyk S je systém vět tohoto jazyka obsahující pro každou atomickou větu buďto ji samotnou, nebo její negaci, nikdy obojí. Jeho cílem je zjevně reprezentace možného stavu věci, možného světa, v němž platí ty věty, které jsou v příslušném popisu stavu obsaženy, a věty, jejichž platnost je jednoznačně určena platností těchto vět a jistými sémantickými pravidly (např. pro logické spojky). O větě jazyka S platící v daném stavu pro tento jazyk říká Carnap, že je v tomto stavu pravdivá; o větě jazyka S, která je pravdivá v každém stavu pro tento jazyk pak, že je L-pravdivá. [MN, § 2] Carnap nejprve definuje extenzi a intenzi *kontextuálně* (srv. s naší diskusí Fregovy definice čísla a logické abstrakce v /6.2.4/sqq), tedy skrze frázi ›mít stejnou extenzi (intenzi)‹. Dva singulární výrazy M, N kupř. mají (v daném stavu) stejnou extenzi, jestliže je rovnost $M = N$ (v daném stavu) pravdivá, a stejnou intenzi, je-li L-pravdivá. [MN, § 4] Trochu podrobněji se o Carnapově intenzi zmíníme ještě v oddíle /6.2.8/.

»Je-li správná naše domněnka, že je význam věty její pravdivostní hodnota, musí tato zůstat nezměněna i tehdy, je-li jedna větná část nahrazena výrazem téhož významu, ale jiného smyslu.« [SB, 35]

Podezření, že by tak Frege své názory na úlohu pravdy radikálně změnil, je ale liché; ani zde totiž neopomíjí předeslat, že »je to [tedy] úsilí o pravdu, jež nás vždy nutí pronikat od smyslu k významu« [SB, 33], a v parafrázi na toto místo v jednom z nepublikovaných textů pak říká doslova:

»Jde-li nám tedy o to, zda vlastní jméno [“Etna”] něco označuje, jde nám i o význam celé věty. Na tom ale, že jméno [“Etna”] něco označuje, záleží jen tehdy, jde-li nám o pravdu ve vědeckém slova smyslu.« [LM_N, 250sq]

Ač tedy nikoli bez pochyb (o jejichž úplnou eliminaci se postupně pokusíme), přece však v souladu s dosud uvažovanými nosnými principy Fregova díla můžeme probíranou záležitost formulovat takto: spočívá-li f-význam jména pouze v jeho příspěvku k pravdivosti věty, není to předzhotovená říše entit, co rozhoduje o f-významu věty, ale právě naopak, je to pravdivost věty, která za pomoci normativně chápaného LP (resp. principu zaměnitelnosti) reguluje f-význam jmen v rámci zvoleného větného kontextu. Právě to nám ukazuje Fregův příklad nepřímé řeči, v níž je f-význam téhož výrazu pozměněn s ohledem na svoji (ne)zaměnitelnost tak, jak je řízena LP: f-význam výrazu “Jitřenka”, ať již se jedná o cokoli, nemůže být totožný s f-významem výrazu “Večernice”, neboť jejich záměna může vést ke změně pravdivostní hodnoty věty “Petr ví, že Jitřenka je Sluncem osvětlené těleso”.

Ptáme-li se po bližší specifikaci f-významu obou jmen, stačí si ale uvědomit, že Frege spojil předmětnou referenci s ohodnocením identit pro všechna jména kontextu. Toto ohodnocení se ovšem řídí právě substituovatelností *salva veritate*. S implicitním odkazem k principu zaměnitelnosti, jenž se na rozdíl od LP neomezuje pouze na výrazy jmenné, můžeme (f-)význam jakéhokoli výrazu charakterizovat po Tugendhatově vzoru termínem *p r a v d i v o s t n í h o p o t e n c i á l u* (*Wahrheitswertpotenzial*)¹⁹⁴ takto: dva výrazy téže logické kategorie mají tentýž pravdivostní potenciál (f-význam) tehdy a jen tehdy, jestliže nahrazení jednoho z nich druhým nezmění pravdivostní hodnotu žádné věty.

5.1.6 Kontextuální závislost

Prvním zřejmým důsledkem tohoto možná překvapivého obratu v obvyklém

¹⁹⁴ *Tugendhat* [c1970]. Tugendhatův termín by vlastně měl být správně překládán jako »potenciál pravdivostní hodnoty«. To je ale příliš krkolomné.

čtení Fregova principu zaměnitelnosti významu je kontextuální závislost předmětné konstituce: »*Někdo by mohl tvrdit, že význam slova “Jitřenka” není Venuše, neboť slovo “Venuše” nelze vždy říci místo slova “Jitřenka”.*« [SB, 37] Takto bychom však v důsledku mohli již v rozdílu znaků spatřovat i rozdíl v označovaném: »*Mohli bychom říci: kdyby symbol “2 + 3” označoval totéž [jako symbol 5], museli bychom to přece bezprostředně vědět, a ne to teprve vypočítat.*« [LM_N, 242] Užití vět jako “Petr ví, že Jitřenka je Sluncem osvětlené těleso” či drastičtější:

Petr myslí na slovo Jitřenka

by potom mohlo vést k tomu, že by měl každý výraz svůj vlastní a jedinečný f-význam. »*Správně lze ale usoudit jen tolik, že [...] “Jitřenka” vždy neznamená Venuši, totiž tehdy, jestliže toto slovo nemá svůj přímý význam.*« [SB, 37] Zaměnitelnost dvou výrazů téhož pravdivostního potenciálu se tak zjevně musí vždy implicitně či explicitně vztahovat k jistému omezenému větnému kontextu, tedy nikoli k pomyslné totalitě ›všech možných smysluplných‹ vět či myšlenek, jak o ní Frege později uvažuje pod hlavičkou ›třetí říše‹.¹⁹⁵⁾ Netriviálnost tohoto pozorování doceníme na dvou instruktivních příkladech.

První z nich představuje Dummettův výpad vůči Tugendhatově ztotožnění pojmu f-významu s pojmem pravdivostního potenciálu. Dummett obviňuje Tugendhata nejprve z toho, že činí z pojmu významu (reference) intrajazykovou relaci, zatímco se jedná (či má jednat) o vztah výrazů (referentů) k *externí* realitě [FPL, 200], a obratem uzavírá celou diskusi poznámkou, že je směšné navrhopvat, aby byl dr. Tugendhat nazýván pravdivostním potenciálem jména “Tugendhat”. [FPL, 202]¹⁹⁶⁾ Na Tugendhatovu přímou obranu postačí uvést stručný úryvek ze Stekeler-Weithoferova komentáře k tématu:

»*Frege však přece skutečně říká [...], že výraz jako “Měsíc” pojmenovává Měsíc či výraz “Jitřenka” planetu Venuši; v žádném případě tedy nemluví o pou-*

¹⁹⁵⁾ K Fregově pojmu ›třetí říše‹ se podrobněji vyjádříme v /6.1.6/ a /6.1.7/.

¹⁹⁶⁾ V tomto bodě bohužel Dummettova argumentace až přespříliš připomíná obdobně vylehčená prohlášení těch z Fregových kritiků, kteří nahrazují vstřícnou a leckdy i nezáživnou analýzu Fregova technického aparátu – speciálně pak jeho koncepce předmětu jakožto významu vlastního jména, věty jako jména pravdivostní hodnoty či pojmu jako funkce – žertovnými ilustracemi z běžné jazykové praxe (Bakerova-Hackerova fregovská kniha je nepřebernou pokladnicí takovýchto příkladů – viz např. [FLE, 16]) – , čímž sice – šermující racionalitou a dovolávající se *common sense* – dosahují většího zájmu a ovací publika, bohužel se však jedná právě o onen typ potlesku, »*při němž se filosof červená, zatímco oblíbený vtípek triumfuje a trvá na svém*« (Kant [Prol, A12]).

hém pravdivostním potenciálu! Řeč o něm ale znamená pouze toto: kdykoli a protože (tiše) předpokládáme, že normální oznamovací věty, v nichž se vyskytuje výraz jako “Jitřenka”, mluví o fyzickém předmětu (Venuši) – a např. nikoli o jevu na ranní obloze nebo o smyslu slova –, je v těchto kontextech věc, k níž jméno referuje, jeho [f-]významem, a to proto, že je rovnost mezi různými fyzicky chápanými pojmenováními definována přes identitu objektu. Tato je opět definována skrze principiálně možnou identifikaci objektu v předpokládaném časoprostorovém řádu jeho jevů. Pouze ve vztahu k této metodě nejprve faktické a později také principiálně možné identifikace objektu v toku času, případně s pomocí různých pozorovatelů lze pojmenovat fyzický předmět jako takový (na rozdíl od typického fenoménu, dílčí formy) v deiktickém křestním aktu [...].«¹⁹⁷⁾

Neexistuje tedy nic takového jako bezprostředně daná a přístupná realita významů našich slov. Systematická víceznačnost jakékoli reprezentace, opírající se o fakt holistické povahy reference, nezachytitelné pouhým gestem ruky, ale závislé na rozvržení sítě vztahů k ostatním reprezentacím a na jejich rolích, jež daleko přesahují pevný rámec daný smyslovými stimuly, stojí v pozadí za další z konfuzí dotýkající se tentokrát identity a Leibnizova principu přímo.

David Wiggins se ve své slavné studii *Identity and Spatio-Temporal Continuity* pokouší vyvrátit na úctyhodném počtu příkladech to, že by konkrétní tvrzení typu

(δ) *a* je totéž *P* jako *b*, ale jiné *S*

popírala LP, a to tak, že je buď označí za nepravdivá, nebo uvede na pravou míru za pomoci strategie, která např. na našem příkladech *a* je tentýž titul jako *b*, ale jiný výtisk učíní z “*a*” a “*b*” jména výtisků (máme se ptát: je řeč o výtiscích, nebo o titulech?) a z titulu, jako je např. *Vojna a mír*, pak učiní predikát, na jehož sdílení dvěma různými předměty přirozeně nic problematického není.¹⁹⁸⁾ Wigginsova argumentace je sice korektní, zároveň však na jedno oko slepá, když se totiž neustále pohybuje na úrovni *přímé* objektové řeči (*de re*), aniž by vzala v úvahu otevřenou možnost metajazykové reflexe (*de dicto*), *nepřímého* srovnání dvou různých kontextů a jejich konstituce na bázi téže reprezentativní výbavy, jak je to právě tématem výše uvedené věty: “*a*” a “*b*” jsou nejprve pouhé reprezentace, stojící samy za sebe nebo za nediferencovaný obor kvazipredikátu (např. s kritériem aplikace *›tato kniha‹*). Jméno předmětu se stávají až postupně, přes kritérium identity rozdělující referenci daného sor-

¹⁹⁷⁾ *Stekeler-Weithofer* [*1997*], § 5.3].

¹⁹⁸⁾ Viz *Wiggins* [*1967*], § 1.7, příklad (θ)].

tálu (časoprostorová spojitost v případě knihy jako fyzického předmětu, totožnost obsahu invariantní vůči překladům a přepisům v případě titulu) a výstavbu vhodného kontextu; např. uvážením vět jako

a je zaprášená (knih jako výtisk),
b je autorův šestý počín (knih jako titul).

V každém z výsledných oborů (konkrétních výtisků, abstraktních titulů) LP samozřejmě platí – sám se totiž poté, co oba v záměrně kontroverzní (kontradiktorické?) větě (δ) postavil proti sobě, podílel na jejich konstituci: vedl např. k vyloučení predikátů jako “zaprášený” z řeči o titulech, protože by se pak dva (deiktické) případy téhož titulu mohly svojí zaprášeností lišit, či k vyloučení nepřímé řeči obecně, třeba s ohledem na věty jako

Petr ví, že Schiller napsal hru *Úklady a láska*, a neví, že napsal hru
Luisa Millerová, apod.

Právě příklady vět, v nichž je explicitně vyzdvížena původně implicitní role mluvčího, ukazují, v jakém smyslu je otázka sémantické hodnoty výrazů jazyka spojena s normativními (konstitutivními) principy, a že ji lze tedy sotva převést na problém – do množinového hávu oděné – externí reality, lhotejnost, v jak sofistikované podobě nám bude předložena. To, zda jsou např. věty jako

Petr věří (ví, domnívá se), že $1 + 1 = 2$, nikoli že $2 + 1 = 3$

pravdivé, závisí především na tom, *jaké normativní (doxastické) závazky a oprávnění* spojujeme se slovy “věřit”, “vědět”, “domnívat se” – Wittgensteinovými slovy: s tím, jaká je jejich ›gramatika‹, zahrnující třeba doxastickou ekvivalenci tautologických vět jistého logického systému, nikoli však vět elementární matematiky apod. Zajímavý problém v této souvislosti představuje hojně diskutovaná možnost dvojího čtení explicitního přípisu doxastického závazku:¹⁹⁹⁾ nevěří-li Iocasté, že je Oidipús Láiovým vrahem, ačkoli tomu tak skutečně je, nejsme možná obecně oprávněni přejít od věty

(β) Iocasté nevěří, že je Oidipús Láiovým vrahem

k větě

(γ) Iocasté nevěří, že vrah Oidipova otce je vrah Oidipova otce;
 totiž chápeme-li zmíněný přípis (β) ve smyslu *de dicto* jakožto vztah Iocasté k reprezentujícímu výrazu či jeho smyslu (tj. k smyslu výrazu “Láiov vrah”, případně celé věty či myšlenky, které Iocasté nevěří), avšak z pozice neutrálního pozorovatele (jak ji např. v Sofoklově tragédii reprezentuje věstec Teiresiás, v Cocteauově-Stravinského úpravě vypravěč příběhu či v jiné vražedné kauze třeba ironizující státní zástupce), vztahujícího Iocasté přímo k Oi-

¹⁹⁹⁾ Srv. *Brandom* [ME, k. 8].

díkově osobě, nikoli k tomu, jak je reprezentována (Iocastin manžel, Láíův syn, král, královrah, Kreónův švagr atd.), lze ale pro tvrzení věty (γ) najít oprávnění dostatečné, neboť Oidipús svého otce (byť nevědomky) zabil. Tento úsudek se pak zakládá na *d e r e* čtení přípisu, v obecné formě zachytitelného jako

E (ne)věří (ví, domnívá se) o F, že S(F),

kde S je věta odkazující k F.

Vrátíme-li se k problému Fregovy koncepce identity z *Über Sinn und Bedeutung*, vidíme snad nyní dostatečně jasně, že otázky typu γ je rovnost relací mezi f-smysly či f-významy jsou zavádějící již proto, že Fregovu distinkci smyslu a významu v naivněrealistickém zatemnění myslí chápou jako *absolutní* (vyčerpávající?) typizaci objektů nějak spojených s výrazem, zatímco se jedná o *relativní* charakterizaci dvou různých rovin jazyka a jeho indefinitního použití. Oproti *Begriffsschrift* tak Frege svým rozlišením v první řadě udržel *uniformní užití symbolu v rámci jednoho kontextu* za svůj f-význam, tj. nevyňal identitu z objektového jazyka, zároveň však nesetřel její odlišnou, konstituující povahu: *tautologická* ($a = a$) a *konstitutivní* ($a = b$) identita se liší ve sféře f-smyslu.

5.1.7 Rozpad významu

Chyba naivněrealistické interpretace Frega pramení z toho, že vyzdvihuje jeden typ diskurzu, totiž svět fyzických předmětů jakožto bezprostřední (přímý), a příklady diskurzů dalších, např. abstraktních předmětů, jež jsou však pravou oblastí Fregova zájmu, zvažuje teprve poté jakožto γ méně reálné (objektivní), zoufale na ně roubujíc rozlišení nacvičená na γ přirozených předmětech každodenní reality. Ve vratkém kroku takto převráceného výkladu Fregova díla si pak zpravidla dodává odvahy buďto doprovodnými popěvkami na téma γ mýtus třetí říše či γ naivní doktrína moderního pythagoreismu, nebo ústí v konstrukci nesourodých konglomerátů po vzoru Russellova logiko(-aritmického?) empirismu.

Ve sféře smyslové zkušenosti je ale otázka po tom, co je předmětem smysluplné řeči či *intersubjektivním* f-významem užitých slov, snadno zodpověditelná pouze zdánlivě, jak to snad přesvědčivě ukazují i pozdní Wittgensteinovy úvahy k tématu jednoty a existence významu, stručně shrnuté v odstavci, že *»to, co označují jména jazyka, musí být nezničitelné, neboť musíme být schopni popsat stav, v němž je vše zničitelné skutečně zničeno. A v tomto popisu se budou vyskytovat slova; a to, co jim odpovídá, nemůže být zničeno, neboť jinak by tato slova neměla žádný význam.«* [PU, § 55] Jinde pak čteme: *»Vlastní jméno v obvyklém smyslu je třeba slovo "Nothing". Meč Nothing sestává z*

částí složených určitým způsobem. Jsou-li složeny jinak, Nothung neexistuje. Věta “Nothung má ostrou hranu” má ale očividně smysl, lhостejno zda je Nothung ještě celý, nebo již roztržštěný. Je-li však “Nothung” jméno předmětu, pak tento předmět již neexistuje, jestliže je roztržštěný; a protože by zde jménu neodpovídá žádný předmět, nemělo by ani význam.» [PU, § 39]

Ještě lepší je možná následující příklad. Ptejme se, o čem je např. pravdivá věta “Sókratés je mrtev”. O Sókratovi ? – ten již ale nežije; tedy o Sókratovi historickém, tj. v době, kdy byl ještě naživu? – o tom však zase nemůžeme říci, že je mrtev.

»Je důležité říci, že výraz “význam” je užíván proti jazyku, označujeme-li jím předmět, který slovu “odpovídá”. To totiž znamená, že zaměňujeme význam výrazu s jeho nositelem. Zemřel-li pan N. N., řekneme, že zemřel nositel jména, nikoli význam jména. A bylo by nesmyslné takto mluvit, neboť kdyby přestalo mít jméno význam, nemělo by smysl říkat “Pan N. N. zemřel”.« [PU, § 40]

Právě na řeči o mrtvých, ale třeba i jen nepřítomných lidech či rozbitých věcech je dobře vidět, že často jediné, co o námi diskutovaných předmětech víme, je platnost jistých vět. – To je ale nemůže zbavit jejich plnohodnotné (intersubjektivní) sémantické role, vždyť v čem by spočívala, kdyby závisela pouze na míře dosavadní, či dokonce aktuální smyslové zkušenosti mluvčího s jejich jevovými reprezentacemi.²⁰⁰⁾ Předběžně lze řešení problému načrtnout asi takto: v příslušných větách se zmíněné předměty konstituují v první řadě (rozuměj *a priori*, tj. ve vztahu k obecným zákonům předmětné konstituce) jako *logické* (a intersubjektivní!) *předměty řeči*; právě to jsou Fregovy f-významy. Skrze akt deixe se teprve poté (rozuměj *a posteriori*, tj. ve vztahu k smyslové zkušenosti) některé z nich stanou – či alespoň potencionálně *mohou stát* – *nositeli* příslušných jmen. Tato možnost také dovoluje odlišit *abstraktní předměty aritmetiky* či fiktivní předměty vůbec od *předmětů smyslové zkušenosti*, v nichž navíc k *logické* části předmětné konstituce předmětu jakožto f-významu jména přistupuje také stránka *empirická*, totiž konstituce předmětu jakožto skutečného (reálného) nositele jména. Tím je rovněž zřetelně oddělena sféra zájmu Fregova logicismu od zájmu Kantovy transcendentální filosofie.

²⁰⁰⁾ Zde mají kořeny některé absurdní konsekvence Russellovy teorie *«knowledge by acquaintance»*, jimž se budeme ještě podrobně věnovat v podkapitole věnované deskripci, tj. v /6.1/.

Podíváme-li se nyní na článek *Über Sinn und Bedeutung* výhradně prizmatem *logické* části předmětné konstituce, začne se nám možná zřetelně rýsovat i to, jak vlastně rozumět Fregově metafoře r o z p a d u sémantické role složených výrazů na role výrazů dílčích:

»*Je-li pravdivostní hodnota věty její význam, mají všechny pravdivé věty tentýž význam a totéž platí i pro věty nepravdivé. Vidíme z toho, že je ve významu věty vše jednotlivé seřeno. Nemůže tedy záležet na samotném významu věty; ale ani myšlenka sama o sobě neumožňuje poznání, nýbrž teprve myšlenka spolu se svým významem, tj. pravdivostní hodnotou. Souzení lze uchopit jako pohyb od myšlenky k její pravdivostní hodnotě. To samozřejmě není žádná definice. Souzení je něco jedinečného a nesrovnatelného. Je možné říci, že souzení [Urteilen] je rozlišování částí [Teilen] v rámci pravdivostní hodnoty. Toto rozlišování se uskutečňuje návratem k myšlence. Každý smysl, jenž patří k nějaké pravdivostní hodnotě, by odpovídal vlastnímu způsobu rozkladu. Slovo "část" jsem zde ovšem použil zcela zvláštním způsobem. Přenesl jsem totiž vztah celku a části z věty na její význam, a to tím, že jsem význam slova nazval částí významu věty tehdy, jestliže slovo samo je částí této věty, což je obrat, který je napadnutelný, neboť u významu celek a jedna část neurčují část zbylou a protože u těles je toto slovo již užíváno v jiném smyslu.*« [SB, 35sq]

Především je tedy jasné, že Fregův rozpad pravdivostní hodnoty je jen *façon de parler*, a nemá proto nic společného s eleatskou doktrínou Jednoho, jak se mu pokouší podsunout Gödel.²⁰¹⁾ Je to smysl věty, způsob danosti její pravdivostní hodnoty neboli její pravdivostní podmínky, čím je artikulován vztah mezi sémantickou hodnotou výrazu jazyka a hodnotou jeho částí; a jsou to ty nejjobecnější z pravdivostních podmínek týkající se výhradně formotvorných výrazů, co tvoří Fregovy principy konstituce (rozpadu) logických předmětů a v souladu s jeho logicistickým programem i principy konstituce předmětů aritmetických. Pojmem *pravdivostního potenciálu* jsme si tento rozpad pravdivostní hodnoty na hodnoty dílčích výrazů určili blíže, a to jakožto rezultat *principu zaměnitelnosti významu*, speciálně LP, dále pak WP a ASP. Poslednímu z Fregových základních logických principů, principu abstrakce, bude věnována podkapitola /6.1/.

²⁰¹⁾ *Gödel* [1999], 29].

5.1.8 Atomismus

Problematické místo z *Über Sinn und Bedeutung*, v němž se zdá Frege odvozovat (f-)význam složeného výrazu (věty) z (f-)významu jeho (jejích) částí (viz /5.1.5/), je vlastní příčinou toho, proč je Fregovi obvykle připisován tzv. princip kompozicionality (skladebnosti) významu, obecně formulovatelný asi takto: význam složeného výrazu je jednoznačně určen významy jeho částí. Odtud je pak jen krok k tomu, aby byl Frege názorově řazen k Russellovu-Wittgensteinovu logickému atomismu, tedy doktríně, která je přímým konkurentem námi prezentovaného logického holismu. Její jádro nyní načrtneme v několika stručných bodech:

(1) Věta jazyka je jistý komplexní, strukturovaný celek, jemuž rozumíme tehdy, rozumíme-li jeho částem, v důsledku pak máme-li přímou (smyslovou) zkušenost s významy jeho částí jednoduchých: *»Každá analýza je možná jen ve vztahu k tomu, co je komplexní, a vposledku vždy závisí na přímé obeznámenosti [direct acquaintance] s objekty, které jsou významy jistých jednoduchých symbolů.«* [RLA, 48] *»Každá věta, které jsme schopni rozumět, musí být složena výlučně z konstituent, s nimiž jsme obeznámeni.«* [PP, 58]

(2) Je-li cílem logické analýzy odstranění nedostatků přirozeného jazyka, pak v tom smyslu, že nám s jeho pomocí dovolí jasně reprezentovat logickou strukturu světa: *»V logicky dokonalém jazyce bude pro každý jednoduchý objekt jedno a jen jedno slovo a vše, co není jednoduché, bude vyjádřeno kombinací slov, kombinací, která bude samozřejmě odvozena ze slov pro jednoduché věci, které tam vstupují, přičemž každé jednoduché komponentě bude odpovídat pouze jedno slovo. Takovýto jazyk bude úplně analytický a bude zrcadlit třpyt logické struktury faktů tvrzených a popíraných.«* [RLA, 52] Významy složených výrazů jsou tedy komplexy významů výrazů dílčích, přičemž význam věty je fakt jakožto *extrajazyková část reality, »věc, která činí větu pravdivou, nebo nepravdivou«* [RLA, 36].

(3) Funkce jazyka je zde evidentně redukována na deskriptivní reprezentaci světa předmětů objektivně uspořádaných do struktury faktu: *»Není to tak, že si jej [fakt] myslíme komplexní, nýbrž je to druh pravé objektivní komplexity, a proto bychom ve vlastním řádném postupu měli začít od komplexity světa a dospět ke komplexitě věty.«* [RLA, 51]

(4) Významy částí výrazu nejsou závislé na významu celku, ba naopak: *»Obeznámenost s jednoduchým je předpokládána v porozumění komplexnějšímu.«* [RLA, 59] V reakci na holismus Bradleyův pak Russell výslovně píše: *»Odmítám, že [komplexy] nejsou složeny ze svých konstituent, a co je ještě důležitěj-*

ší, odmítám, že by jejich konstituenty nemohly být vážně uvažovány [samy o sobě, tj.] aniž bychom drželi v paměti, že jsou to jejich konstituenty.«²⁰²⁾

To, že se Fregovy názory na povahu logiky od těch Russellových podstatně liší, musí být pozornému čtenáři jasné z předchozích kapitol a mnohé z již řečeného není třeba znovu opakovat. Zaměříme se nyní podrobněji na samotnou metaforu ›skladebnosti‹. Myslíme-li nejprve na celek věty a jednotlivá slova, z nichž se skládá, je nutné podotknout, že to nejsou jen tato slova samotná, jež komplex věty jednoznačně určují, ale i *způsob*, jímž jsou složena v celek. Taktáž sada slov v různém lineárním uspořádání může dát dohromady věty různých významů či výrazy zcela nesmyslné. To jednak komplikuje formulaci principu kompozicionality, do něhož by bylo třeba tuto závislost významu celku na jeho struktuře vložit, jednak to vyvolává otázky směrem k realistické interpretaci tohoto způsobu složení významů jednoduchých částí věty, jak by se měl zřejmě zrcadlit ve ›třpytu logické struktury faktů‹. Je příznačné, že si smysl Wittgensteinova:

»nikoli: “komplexní symbol ‘aRb’ říká, že a stojí ve vztahu k b”, nýbrž: to, že “a” stojí v určitém vztahu k “b”, říká, že aRb« [TLP, 3.1432]

nejsnáze představíme na větě jako “Petr stojí nalevo od Jana”, kde jsou pro to typografické důvody. *Gramatická a logická struktura* věty však není *grafickou*, natož pak empirickou záležitostí: pro neviditelné pojivo jednotlivých znaků, projevující se např. specifickou *adicitou* predikátu či vynucením určitého typu *flexe*, lze sotva najít smyslový podklad (např. v porovnání věty s prostorovým uspořádáním věcí – viz [TLP, 4.05]) – je dáno výhradně jejich použitím (srv. [TLP, 3.262]), a lze k němu tedy dospět logickou (resp. gramatickou) analýzou (rozkladem) věty, sotva však *světa*. Vinu na tomto zcela běžném a vlastně typickém převrácení přirozeného sledu výkladu však často bohužel nesou sami zakladatelé moderní logiky. Čteme-li např. *Tractatu*, že:

»Věc je samostatná, pokud se může vyskytovat ve všech možných situacích [Sachlage], ale tato forma samostatnosti je formou spjatosti se stavem věci, formou nesamostatnosti. (Není možné, aby slova vystupovala dvěma odlišnými způsoby, samostatně a ve větě.)« [TLP, 2.0122],

jedná se o příkladnou ukázkou toho, jak lze do realistického způsobu mluvy zahalit přihlášku k sémantickému primátu věty, přímo formulovanou až o několik stran později ve zřejmé parafrázi Fregovy kontextuální teze z *Grundlagen*

²⁰²⁾ Russell [1910, 373]; citováno podle Coffa [ST, 95]. Srv. k tomu také Russell [RLA, 58sq].

jako: »*Pouze věta má smysl; pouze v kontextu věty má jméno význam.*« [TLP, 3.3]

Podobně se to má, jak možná již víme, i s Fregovým realisticky formulovaným rozlišením nasycených a nenasyčených entit. Myslíme-li na jednoduché predikáty jako “pes”, “červený” či “skákat”, lze ve sféře (realisticky koncipovaného) významu snadno odmítnout substituční metaforu nenasyčenosti, neboť se zdá, že chceme-li dospět k samostatnému významu věty “Alík je pes”, potřebujeme Alíka a pojem psa stejnou měrou, je tedy lhotejno, kdo z nich koho doplní, a řeč o nenasyčenosti (nesamostatnosti) jednoho z nich tak ztrácí svůj přímý realistický smysl.²⁰³ To však již není případ u výrazů jako “menšř”, “otec” či “zabil”, pro jejichž význam je na rozdíl od jmenných výrazů jako “Alík”, “Brutus” či “Caesar” podstatné udání adicity, což přímo odkazuje k jejich jazykové roli *substitučního rámce*, nemluvě o případě komplexních predikátů jako

$$\begin{array}{l} \text{---} \zeta = 16 \\ \text{└─} \text{q} \text{---} \text{a}^4 = \zeta \\ \text{└─} \text{a}^2 = 4, \end{array}$$

jejichž význam lze evidentně uchopit až skrze Fregovo pojmové písmo přes (substituční) rozpad komplexní věty, sotva však prostým skládáním přirozených (empirických?) pojmů (asociací idejí?) či nějakých mimojazykových entit. Právě takovéto komplexní příklady pojmotvorby ukazují, co měl Frege na mysli, když hovořil o nadřazenosti své logiky systémům současníků a předchůdců (viz /4.1.1/), u nichž jsou pojmy vytvářeny jen kupením předem daného logického materiálu, zatímco vědecky plodná určení pojmu by měla být s to vést hranice zcela nové, což ovšem umožní právě holistická změna perspektivy, díky níž dospíváme k pojmu od vět, resp. soudů v nich artikulovaných.

Frege ovšem nikde neříká, že je metafora skladby při konstituci významu zcela neplodná. Ba právě naopak. *Je bytostným rysem substitute, že jsou významy jedněch frází skládány a tímto složením nasyčovány významy frází jiných.* To vše ale až *poté*, co jsme jedny z nich nahlédli jakožto společné substituční rámce jistých tříd vět a druhé jakožto substituovatelné výrazy použitelné na jedné straně rovnosti. Podstatný je zde primát věty, nikoli popření možnosti využití významů dílčích (nevětných) výrazů jakožto *relativních* atomů při

²⁰³ Vhodnou ilustrací je zde Russellovo dvojznačné užití termínu propoziční (větné?) funkce (*propositional function*) za substituční rámec ψx a entitu (atribut) ψ , dovolující mimo jiné nasytit funkci sebou samou $\psi(\psi)$. Srv. také [PoM, § 85] a Frege [WB, 220].

stavbě (či rekonstrukci) významů výrazů komplexních.²⁰⁴⁾ V této možnosti podle Frega naopak spočívá naše schopnost ovládnout potenciálně nekonečné množství vět, totiž díky neomezené kombinovatelnosti určité konečné výrazové báze, nutně osvojené – kde jinde než – v kontextu věty:

»Možnost toho, že rozumíme větám, které jsme nikdy neslyšeli, spočívá v tom, že je smysl věty vystavěn z částí, které odpovídají slovům. Nalezneme-li ve dvou větách totéž slovo, např. “Etna”, rozeznáme něco společného také v odpovídajících myšlenkách, něco, co těmto slovům odpovídá. Jinak by byla řeč ve vlastním smyslu tohoto slova nemožná.« [WB, 127]

»Je úžasné, co jazyk dokáže. S pomocí několika hlásek a jejich spojení je schopen vyjádřit nepředstavitelně mnoho myšlenek, a to i takových, jež předtím ještě žádný člověk neuchopil ani nevyřkl. Čím je to umožněno? Tím, že jsou tyto myšlenky vystavěny ze stavební kamenů. A tyto kameny odpovídají skupinám hlásek, z nichž je vystavěna věta vyjadřující příslušnou myšlenku, takže výstavbě věty z větných částí odpovídá výstavba myšlenky z částí myšlenky. A část myšlenky můžeme nazvat smyslem odpovídající části věty tak, jako je myšlenka uchopena coby smysl věty.« [LM_N, 243]

5.1.9 Kompozicionalita

Není to svět, ale věta, v čem má řeč o rozpadu a skladbě významu své přímé kořeny, a není to její grafická, ale logická struktura, zračící se v užití, nikoli v typografii slov, co tento rozpad či skladbu určuje. Díváme-li se nyní na tyto dva pojmy jako na úzce spjaté se sémantickým (ontologickým) atomismem, resp. holismem, protežujícím jistě ›entity‹ jakožto sémanticky (ontologicky) primární, je nutné zdůraznit, že principy skladebnosti a zaměnitelnosti významu takto zatíženy nejsou, přesněji řečeno: že jsou ve svých obecných formulacích ontologicky neutrální.

Začneme-li u principu skladebnosti, ihned vidíme, že ponechává nezodpovězenou otázku toho, jak jsou významy sémantických celků ›určeny‹ z významů částí. Obvykle k tomu bývá řečeno následující: Mějme nějaké větné části T_1, T_2, \dots, T_n spolu se způsobem jejich složení (určitou formou zřetězení) Z v komplexní výraz, který zapisujeme jako $Z(T_1, T_2, \dots, T_n)$. Sémantickou hodnotu (význam) libovolného výrazu T značme jako $B\{T\}$. Princip skladebnosti v tomto upřesnění říká, že pro každé (přípustné) Z částí T_1, T_2, \dots, T_n existuje funkce f taková, že

²⁰⁴⁾ Srv. *Brandom* [ME, 365sqq].

$$f(B\{T_1\}, B\{T_2\}, \dots, B\{T_n\}) = B\{Z(T_1, T_2, \dots, T_n)\},$$

tedy funkce určující pro hodnoty dílčích výrazů sémantickou hodnotu celku.²⁰⁵⁾ Tato funkce pak bývá zpravidla identifikována s významem některého z dílčích výrazů, jak to ostatně známe ze sémantiky Fregovy. – Takto je však třeba bližší charakterizace termínu ›určení‹ pouze převedena na specifikaci toho, co rozumíme termínem ›funkce‹. Obvykle se předpokládá, že je to jisté abstraktní přiřazení neboli vztah předmětů k předmětům jiným, s jediným požadavkem *jednoznačnosti* v přiřazení téhož témuž (tj. daným argumentům odpovídá právě jedna hodnota), nikde ovšem již není řečeno, jak je nám takováto funkce *dána* (např. jakožto sémantická role substitučního rámce), jak jsou nám *dány* její argumenty (např. Russellovou ›*direct acquaintance*‹) a jak od nich *dospějeme* k výsledné hodnotě celku (např. nějakým ›efektivním‹ výpočtem, rekurzí).

Uvážíme-li nyní princip zaměnitelnosti významu, tvrdící, že jsou dva výrazy téhož významu v rámci téhož složeného výrazu zaměnitelné beze změny významu tohoto celku, lze snadno nahlédnout vztah významů dílčích a významu celku jako vztah obecně funkcionální, neboť očividně splňuje požadavek jednoznačnosti. V *neutrálním čtení je tedy princip skladebnosti ekvivalentem principu zaměnitelnosti významu*,²⁰⁶⁾ a lze jej proto použít jak směrem ›dolů‹, *analyticky*, jak jsme to demonstrovali v souvislosti s pojmem pravdivostního potenciálu, tak směrem ›nahoru‹, *synteticky*, třeba při logické rekonstrukci (normaci) užití některých výrazů, např. výrokovělogických spojek, opírající se samozřejmě o předchozí analýzu jejich větného úzu. Potíže s výkladem principu zaměnitelnosti (resp. kompozicionality) v *Über Sinn und Bedeutung*, jak jsme je zmínili v diskusi sémantického primátu věty, resp. pravdivostní hodnoty, o jejímž ztotožnění s významem věty hovoří Frege na několika místech jako o pouhé domněnce, jdou zcela na vrub dvojímu využití tohoto principu, které Frege nikde explicitně nezhodnotil ani nediferencoval, i když oběma způsobům – skladbě a rozpadu – přidělil nezastupitelnou roli v celku svého pojmového písma. První z nich však považoval za standardní, obecně přijímaný a neproblematický způsob pojmotvorby, zatímco druhý výslovně spojil se svojí originální logickou koncepcí a zdůraznil jeho sémantickou prioritu. Všimněme si nyní následujícího. Řekli jsme na základě několika vybraných signifikantních míst, že f-význam výrazu je jeho příspěvkem k pravdivosti věty,

²⁰⁵⁾ Srv. *Peregrin* [VS, § 3.7].

²⁰⁶⁾ Technické podrobnosti pro obecný případ kompozicionálního ohodnocení jakéhokoliv systému celků a částí lze nalézt in: *Peregrin* [VS, § 3.3].

jejíž je tento výraz součástí, přesněji: f-význam výrazu je jeho pravdivostním potenciálem. Toto určení se může jevit jako problematické tehdy, je-li oním výrazem samotná věta, totiž vnořená v nějakou větu komplexní. Nezdá se být totiž nikterak zřejmé, proč a zda se její pravdivostní hodnota co do zaměnitelnosti kryje s jejím pravdivostním potenciálem, a v důsledku se tedy musíme ptát stejně jako Frege: ›je pravdivost f-významem (pravdivostním potenciálem) věty?‹, tedy zvážit v otázce formulovanou větu jakožto hypotézu. Tím samozřejmě nezpochybňujeme sémantickou prioritu pravdy, a ve svém článku tak nečiní ani Frege! Čteme-li pečlivě místa, kde o zmíněné ›domněnce‹ hovoří a spojuje ji s platností principu zaměnitelnosti, pak v prvním z nich, které jsme doslova uvedli v /5.1.5/ a které se týká zaměnitelnosti významů větných částí, jež samy nejsou větami, považuje celou věc obratem vyřízenou odkazem k LP. Tím dává více než zřetelně najevo jeho konstitutivní (apriorní, dále nediskutovatelnou) roli ve vztahu k významu nevětných výrazů a prvotnost pravdy je zde výchozím bodem úvahy.²⁰⁷ Teprve o stránku později chce Frege zmíněnou ›domněnku‹ testovat výslovně, ale právě pro případ, ›že je nahrazovaným výrazem samotná věta« [SB, 36]. Již v této nahraditelnosti tkví ovšem další z důvodů pro vnesení této domněnky: V substituovatelnosti výrazu jsme dříve nahlédli jiné jméno pro samostatnost (nasycenost) jeho významu. Poté, co by se tedy potvrdilo, že se pravdivost věty kryje s jejím pravdivostním potenciálem, bylo by o ní možné hovořit jako o pravdivostní hodnotě, tj. jako o samostatném předmětu:

»*Takto budeme donuceni uznat pravdivostní hodnotu věty za její význam. Pravdivostní hodnotou věty rozumím okolnost, že je pravdivá nebo nepravdivá. Další pravdivostní hodnoty nejsou. Z důvodů stručnosti nazývám jednu z nich pravdou a druhou nepravdou. Každou oznamovací větu, v níž jde o význam slov, je tedy třeba uchopit jako vlastní jméno, jehož významem, v případě, že jej má, je buďto pravda, nebo nepravda.*« [SB, 34] »*Tímtéž právem, jakým píšeme " $2^4 = 4 \cdot 4$ ", můžeme tedy psát také " $(2^4 = 4^2) = (4 \cdot 4 = 4^2)$ " a " $(2^2 = 4) = (2 > 1)$ ".*« [FB, 14]

Potud je tedy Fregova ›hypotetická‹ řeč o pravdě jasná. Jiná věc ovšem je, že zbytek článku již nepřináší nic nového. Znovu je ve hře nepřímé užití slov, s původní myšlenkou (f-smyslem) jakožto novopečným f-významem (prav-

²⁰⁷ Míněn je následující text: »*Je-li správná naše domněnka, že je význam věty její pravdivostní hodnota, musí tato zůstat nezměněna i tehdy, je-li jedna větná část nahrazena výrazem téhož významu, ale jiného smyslu. A tak to také skutečně je. Leibniz přímo definuje: "Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt salva veritate."*« [SB, 35]

divostním potenciálem) věty. Co však zůstává stále otevřenou a nepřehlédnutelnou otázkou, je problém vícerého užití věty v jednom kontextu, totiž samostatně a v jiné větě (ingredienčně), a to zvláště v souvislosti s Fregovou logikou výroků, jak jsme o tom již dříve zběžně hovořili v /4.1.3/ pod hlavičkou vztahu ingredienční a samostatné funkce věty a jejich splynutí v tzv. extenzionálních kontextech. Vzestupná valuace rekurzí popsaného systému vět, začínající od pravdivostních hodnot vět elementárních a od počátku respektující princip skladebnosti významu, tedy jeho (relativně) atomistické užití, se zdá být nejjednodušší cestou k tomu, jak v jistém omezeném kontextu zjednat či udržet ›jednotu‹ větného významu.

5.2 LOGIKA PREDIKÁTŮ

Dospěli jsme nyní již dostatečně daleko, abychom mohli dát Fregově pojetí logické konstituce systematičtější podobu, a zároveň tak daleko, aby to bylo pro jasný sled výkladu nezbytné, zvláště máme-li na mysli popis interpretace predikátové logiky, jak jsme jej opustili na konci minulého oddílu. Výkladem formální syntaxe a sémantiky predikátové logiky prvního řádu s rovností kapitoly /5/, věnovanou identitě, zakončíme.

5.2.1 Předmětný obor

Fregův substitučně-funkcionální přístup ke kategorizaci syntaxe, dovolující názorně vyvstat sémantice z rolí, které výrazy v substitučním mechanismu hrají, lze v zobecněné podobě, známé především z tzv. *kategoriálních gramatik*, popsat ve stručnosti takto: Východiskem jsou jisté disjunktí kategorie výrazů, chápané jako *kategorie základní*. *Odvozené kategorie* vznikají následovně: Jestliže ve výrazu

A	kategorie	k
nahradíme jeden nebo více výskytů výrazů		
B_1, B_2, \dots, B_n	kategorií	k_1, k_2, \dots, k_n
zástupnými (řeckými) písmeny		
$\zeta_{1,\alpha}, \zeta_{2,\gamma}, \dots, \zeta_{n,\beta}$		

s indexy odpovídajícími tomu kterému výrazu té které kategorie, náleží výsledný výraz

$$A(B_1/\zeta_{1,\alpha}, B_2/\zeta_{2,\gamma}, \dots, B_n/\zeta_{n,\beta}) \quad \text{kategorií} \quad (k_1, k_2, \dots, k_n) \succ k.$$

Tímto značením dáváme najevo, že po dosazení výrazů kategorií k_1, k_2, \dots, k_n za odpovídající zástupná písmena vznikne výraz kategorie k . Všimněme si, že je zde tiše předpokládána zobecněná podoba ASP pro výrazy substituovaných kategorií vůči kategoriím výrazů, v nichž je substituováno: dosadíme-li jakýkoli výraz kategorie k_i za $\zeta_{i,\alpha}$ ve výrazu kategorie $(\dots, k_i, \dots) \succ k$, povede případné nasycení ostatních zástupných písmen výrazy příslušných kategorií vždy k výrazu kategorie k . Sémantická interpretace odvozených kategorií je nyní nasnadě: výrazům kategorie $(k_1, k_2, \dots, k_n) \succ k$ by měly odpovídat (totální) funkce ze sémantických hodnot výrazů kategorií k_1, k_2, \dots, k_n do hodnot výrazů kategorie k . Oproti Fregovi budeme nyní uvažovat dvě základní kategorie výrazů, a to kategorii věta, značme ji s , a kategorii term (jméno), značme t , pro niž jedinou také zavedeme speciální typ proměnné. Takto zůstaneme výhradně na půdě interpretace logiky prvního řádu. Symbolický aparát pojmového písma také přizpůsobíme moderní notaci.

Mějme nyní nějaký větný systém Σ , tj. výrazy kategorie \mathbf{s} , a systém Π výrazů kategorie \mathbf{t} , které se v nich vyskytují. Dvojici $\langle \Sigma, \Pi \rangle$ nazveme *o b o r e m ř e č i*,²⁰⁸⁾ jestliže platí následující podmínky:

- (i) Σ splňuje WP, tj. každé větě je přiřazena jedna z pravdivostních hodnot W nebo F , nikdy ne obě a nic třetího,
- (ii) Π jakožto třída substituovatelných výrazů splňuje zobecněnou verzi ASP vůči Σ a vůči Π jakožto třídám výrazů, v nichž je substituováno, v tom smyslu, že po náhradě výrazu N z Π ve výrazu $T(N)$ ze Σ , resp. z Π libovolným výrazem M z Π bude výraz $T(N/M)$ opět výrazem třídy Σ , resp. Π .

O této komplexní podmínce, tj. o (ii), případně také o jejích podmínkách dílčích, budeme zpravidla – nepovede-li to ovšem ke konfuzím – hovořit jen jako o ASP. Často bude vhodné uvažovat podmínku (i), tj. WP, jako složenou ze dvou částí, a to z požadavku ohodnocení každé věty ze Σ některou z pravdivostních hodnot, tzv. podmínky (sémantické) úplnosti (ohodnocení) systému Σ , a z požadavku, podle něhož může být každé větě ze Σ přiřazena nejvýše jedna pravdivostní hodnota, tzv. podmínky (sémantické) konzistence či bezespornosti (ohodnocení) systému Σ .

Obor řeči $\langle \Sigma, \Pi \rangle$ nazveme *p ř e d m ě t n ý m o b o r e m*,²⁰⁹⁾ jestliže platí:

- (i) Σ obsahuje nějakou rovnost $N = M$ pro N, M z Π (vzhledem k předpokládané platnosti WP a ASP to automaticky znamená, že jsou rozhodnuty všechny identity mezi termy z Π),
- (ii) vůči rovnosti mezi termy je splněn LP, tj. $N = M$ je přiřazena W tehdy a jen tehdy, jestliže pro libovolné $S(N)$ ze Σ platí, že $S(N)$ je přiřazena W tehdy a jen tehdy, když je přiřazena $S(N/M)$.

Výraz

$$\vdash N = M$$

může nyní ve vztahu k předmětnému oboru sloužit buďto k *metavyjádření* toho, že jsou v něm jména N, M zaměnitelná *salva veritate*, nebo jej lze chápat v přímém modu, a sice jako tvrzení toho, že jsou si rovny *předměty*, jejichž jsou výrazy N, M v *předmětném* oboru $\langle \Sigma, \Pi \rangle$ jmény.

Systém Σ vět, v nichž se nenachází ani negátor (\neg), ani subjunktor (\rightarrow), konjunktory (\wedge), disjunktory (\vee), bisjunktory (\leftrightarrow), ani obecný (\forall) či existenční (\exists)

²⁰⁸⁾ Odvozeno ze Stekeler-Weithoferova termínu “*der formale Redebereich*” – viz [SK, 247].

²⁰⁹⁾ Stekeler-Weithoferův termín (*der Gegenstandsbereich*) – viz [SK, 247].

kvantifikátor, nazýváme elementárním větným systémem. Obor řeči, resp. předmětný obor $\langle \Sigma, \Pi \rangle$, jehož Σ je elementární, budeme nazývat elementárním oborem řeči, resp. elementárním předmětným oborem.

Elementární obor řeči $\Omega = \langle \Sigma, \Pi \rangle$ lze nyní rozšířit na obor řeči komplexní formy $\Omega^* = \langle \Sigma^*, \Pi \rangle$ ve dvou fázích. Nejprve rozšíříme elementární systém Σ pomocí výrokovělogických spojek, kvantifikátoru a nekonečné sady x_1, x_2, \dots proměnných, indexovaných přirozenými čísly, na systém vět komplexní formy Σ^* následující rekurzí:

- (Q1) Σ je částí Σ^* ,
- (Q2) je-li S věta systému Σ^* obsahující výraz N z Π , pak systému Σ^* náleží i věta $\forall x_i.S(N/x_i)$, resp. $\exists x_i.S(N/x_i)$, přičemž x_i je proměnná, která se v S nevyskytuje,
- (Q3) je-li S věta systému Σ^* , pak mu náleží i věta $\neg S$,
- (Q4) jsou-li S a T věty systému Σ^* , pak i věty $S \rightarrow T$, $S \wedge T$, $S \vee T$, $S \leftrightarrow T$.

Indukcí přes rekurzivní výstavbu věty lze dokázat, že ASP platí i pro rozšířený systém Ω^* . V druhé fázi je třeba určit pravdivostní podmínky složených vět ze Σ^* , a to následujícími pravidly, která předpokládají, že je větám tvaru $\forall x_i.S(N/x_i)$, resp. $\neg S$ a $S \circ T$ ze Σ^* (kde \circ zastupuje některou ze spojek $\rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$) přiřazována pravdivostní hodnota tehdy a jen tehdy, je-li již přidělena všem větám $S(N/M)$ pro libovolné M z Π , resp. větám S a T :

- (R1) větě ze Σ^* tvaru $\forall x_i.S(N/x_i)$ bude přiřazena W tehdy a jen tehdy, jestliže je přiřazena i každé větě ze Σ^* tvaru $S(N/M)$ pro libovolné M z Π , jinak jí bude přiřazena F ; větě ze Σ^* tvaru $\exists x_i.S(N/x_i)$ bude přiřazena W tehdy a jen tehdy, jestliže existuje M z Π takové, že je $S(N/M)$ přiřazena W , jinak jí bude přiřazena F ,
- (R2) větě ze Σ^* tvaru $\neg S$ bude přiřazena F tehdy a jen tehdy, je-li větě S ze Σ^* přiřazena W , jinak jí bude přiřazena W ,
- (R3) větě ze Σ^* tvaru $S \circ T$ bude přiřazena W tehdy a jen tehdy, když pro věty S, T ze Σ^* platí: (\wedge) oběma je přiřazena W , (\vee) alespoň jedné z nich je přiřazena W , (\leftrightarrow) oběma je přiřazena stejná pravdivostní hodnota, (\rightarrow) S je přiřazena F nebo je S i T přiřazena W ; v ostatních případech jí bude přiřazena F .

Při ohodnocení postupujeme induktivně podle počtu přidaných logických výrazů. Důkaz toho, že systém Σ^* splňuje WP, je potom triviální, a systém Ω^* je tedy oborem řeči. Jelikož se přenáší i platnost LP, platí, že byl-li obor řeči Ω oborem předmětným, je jím i systém Ω^* .

V rozšířeném větném oboru můžeme vedle kategorií $(t, t, \dots) \succ s$ n -místního predikátu a $(t, t, \dots) \succ t$ n -místního funktoru rozlišovat kategorie větných spojek $s \succ s$ a $(s, s) \succ s$ a kvantifikátoru $(t \succ s) \succ s$ jakožto výrazu, který je třeba doplnit predikátem, abychom získali větu. Tyto výrazy jsou zde ovšem uvažovány jen jako formotvorné: jejich význam stejně jako pojem pravdy a nepravdy je tedy pevný a předpokládán, nikoli konstituován, a nelze jej proto počítat k „předmětům“ uvažovaného modelu predikátové logiky (prvního řádu). Tyto předměty (f-významy výrazů kategorie t) stejně jako totální funkce na nich definované (f-významy n -místních funktorů a predikátů) jsou určeny normací elementárního systému Σ do předmětného oboru $\langle \Sigma, \Pi \rangle$.

5.2.2 Jednoduchý model aritmetiky

Ilustrujme si nyní výše schematizovaný proces předmětné konstituce na příkladě aritmetického systému $A = \langle \Sigma_A, \Pi_A \rangle$. Třída Π_A , nazývaná též třídou číselných termů, necht' je popsána následující rekurzí:

- (1) Π_A obsahuje všechny číslovky “|”, “||”, “|||”, ..., nazývané také *standardními jmény* systému nebo *numerály*,
- (2) náleží-li N a M systému Π_A , pak i $N + M$ a $N \times M$.

Třidu Σ_A elementárních vět tvoří pouze

- (1) rovnosti $N = M$ pro libovolné $N, M \in \Pi_A$,
- (2) nerovnosti $N < M$ pro libovolné $N, M \in \Pi_A$.

Způsob, jak těmto větám přiřadit pravdivostní hodnotu, je známý již ze základní školy – totiž pomocí jistých výpočetních algoritmů, jejichž prostřednictvím nejprve transformujeme složené výrazy na výrazy standardní (numerály), provádíme jejich substituce (s odkazem na LP) a výsledná srovnání. Tuto elementární početní praxi můžeme dále precizovat např. po vzoru Paula Lorenzena a jeho operativní matematiky důkazy (ne)odvoditelnosti nad bázi jistých základních kalkulů, a to konkrétně:

- | | |
|--|--|
| <p>(K) \Rightarrow
 $m \Rightarrow m$</p> <p>(K<) $\Rightarrow < a$
 $a < b \Rightarrow a < b$</p> <p>(K\times) $\Rightarrow \times a = a$
 $a \times b = c, c + b = d \Rightarrow a \times b = d,$</p> | <p>(K=) $\Rightarrow =$
 $a = b \Rightarrow a = b$</p> <p>(K+) $\Rightarrow a + = a$
 $a + b = c \Rightarrow a + b = c$</p> |
|--|--|

pro “ m ” vlastní proměnnou a “ a ”, “ b ”, “ c ”, “ d ” vztahujícími se na slova kalkulu (K). Ohodnocení rovností a nerovností s komplexními termy S , T jako např.

$$(\text{||||} + \text{||}) \times (\text{||} + \text{I}) < (\text{||||})$$

je potom založeno na pravidlech následujícího typu:

$$(U1) \quad S = a, T = b, a \circ b = c \Rightarrow S \circ T = c \quad (\text{kde } \circ \text{ zastupuje } + \text{ a } \times),$$

$$(U2) \quad S = a, T = b, a \circ b \Rightarrow S \circ T \quad (\text{kde } \circ \text{ zastupuje } = \text{ a } <).$$

Na další četné detaily a ospravedlnění, které by bylo třeba k úplnému a rigoróznímu projednání kýžené valuace provést, zde již bohužel není místo, a nezbyvá proto než odkázat na příslušnou literaturu²¹⁰⁾ – pro naši věc by však neměly představovat vážnější problém. Na základě dosud řečeného, speciálně pak pravidel (U1), (U2), by totiž mělo být dostatečně jasné, že systém A kromě WP a (triviálně z konstrukce systémů Σ_A , Π_A) ASP splňuje také LP, a je tedy předmětným oborem. Totéž pak v souladu s dříve řečeným okamžitě platí i pro jeho rozšíření $A^* = \langle \Sigma_A^*, \Pi_A \rangle$.

Výstavba systému A^* na první pohled nevyhovuje požadavkům logické rekonstrukce aritmetiky, neboť jsme se při ohodnocení elementárních vět odvolali k mimologickým kalkulům, explikujícím obvyklou početní praxi. Takto lze ale podle Frega dospět nanejvýš k tzv. *›Kleinkinder-Zahlen‹* (čísłům malých dětí), nikoli k vědeckému zachycení pojmu čísla. [ZAN, 296] My sami se budeme Fregově analýze pojmu čísla plně věnovat až v následující kapitole, systém A^* však doceníme již nyní. Nejenže nám umožní vidět některé z důležitých rysů Fregovy logiky v jasnějších konturách, ale s jeho pomocí dospějeme i ke zřetelným distinkcím novým.

5.2.3 Vyloučený třetí

Platí-li o elementárních větách z A , že je lze (alespoň v principu, tj. bez ohledu na spotřebované místo a čas) jednoznačně vyhodnotit – *rozhodnout* – s pomocí obecně známých a snadno osvojitelných transformačních pravidel, jež lze navíc následovat čistě mechanicky (tj. je toho schopen i stroj), u vět systému A^* tomu tak není. V jeho jazyce je možné vyjádřit taková tvrzení, o jejichž pravdivosti nevíme zhola nic, a není nám ani znám způsob, jakým by o ní mělo a mohlo být rozhodnuto. To platí třeba o tzv. Goldbachově domněnce, podle níž je každé sudé číslo, které je větší než číslo dvě, součtem dvou prvočísel. Je dostatečně známo, že to byla právě takováto nerozhodnutá tvrzení, co podnítilo

²¹⁰⁾ Lze je najít např. in: *Lorenzen* [1965], § 1].

Brouwera ke slavné kritice zákona vyloučeného třetího a formálnělogických principů vůbec, v důsledku potom k vyvolání nejzávažnějšího (možná i jedineho) rozkolu moderních matematiků na filosofickém základě. »Lze připustit,« ptá se Brouwer v článku *De onbetrouwbaarheid der logische principes* (O nespolehlivosti logických principů), »abychom v čistě matematických konstrukcích a transformacích na určitou dobu opustili ideu konstruovaného matematického systému a operovali v odpovídající struktuře jazykové, následující principy sylogismu, sporu a vyloučeného třetího, a mohli se spolehnout na to, že lze každou část argumentu ospravedlnit zpřítomněním si příslušné matematické konstrukce v mysli?« [GAB, 109]

Vzpomeneme-li si na Descarta a jeho kritiku scholastické dialektiky, mohou nám Brouwerova slova znít povědomě a sotva v nich potom spatříme vážnější výzvu. Zdůraznili jsme přece již mnohokrát, že úsudková schémata formální logiky jsou ve svém užití ospravedlněna pouze ve vztahu k určité sémantické bázi, a je proto třeba vždy řádně prokázat, že požadavkům této báze obor aplikace dostačuje. Právě o to jsme se také pro případ elementární aritmetiky pokusili konstrukcí systému A^* za pomoci principů, které dávají fregovské sémantice vyvstat a o něž se budeme tak jako tak muset při budování logického kalkulu opřít. Je třeba mít samozřejmě stále na paměti, že naše konstrukce (aritmetického systému) je pouhou rekonstrukcí (aritmetické praxe); Brouwer jde ovšem ve své kritice formální logiky mnohem dál a odsouvá ji – nikoli nepodoben Descartovi – stranou ve prospěch »matematické kontemplace základní intuice.« [GAB, 70] Takto podlehnuv falešné mentalistické tradici výkladu Kantovy filosofie, tone nakonec v psychologickém pojetí matematiky.

Vraťme se však nyní zpátky k hlavnímu terči Brouwerova útoku proti klasické logice, tj. k zákonu vyloučeného třetího:

»Ten tvrdí, že každá domněnka je buďto pravdivá, nebo nepravdivá; v matematice to znamená, že pro každé domnělé vnoření systému v systém jiný, splňující dané podmínky, můžeme buďto provést takovéto vnoření prostřednictvím konstrukce, nebo nám konstrukce v dokončení procesu, který by k takovémuto vnoření vedl, zabránil. Z toho vyplývá, že otázka platnosti principu vyloučeného třetího je ekvivalentní otázce, zda může existovat neřešitelný matematický problém. Nemáme k dispozici ani náznak důkazu pro občas vyjádřené přesvědčení, že neexistují žádné neřešitelné matematické problémy.« [GAB, 109]

Hilbertův výrok o řešitelnosti každého matematického problému,²¹¹⁾ neboť je to on, k čemu se Brouwer ve svém textu vztahuje, je bezesporu velmi obtížné a problematické – ne-li nemožné – hájit jakožto popisné tvrzení;²¹²⁾ je ale otázka, proč jej přímo spojovat s principem vyloučeného třetího. Činí-li tak Brouwer, a konstruktivisté obecně, je pouze jasné, že se tím odchylují od klasického úzu Fregova. Uvažme např. soud formy

(θ) $\vdash \exists x.S(N/x)$

a jeho konstruktivistický výklad, zavazující se v něm k udání jména M, pro něž lze hájit soud

$\vdash S(M).$

Je bezesporu pravda, že kvantifikujeme-li přes nekonečnou doménu, neopravňuje nás její neúspěšné (vždy konečné) prohledávání, při němž jsme po takovémto jmeně systematicky pátrali, ke vznesení tvrzení opačného, tj.

$\vdash \neg \exists xS(N/x),$

a soud

(κ) $\vdash A \vee \neg A,$

chápaný jakožto příslib obhajoby alespoň jednoho z disjunktů, je tedy obecně neplatný. Nutno však říci, že jsme se na rozdíl od konstruktivistů ve výše uvedeném rozpisu pravdivostních podmínek složených vět k ničemu takovému nezavázali. Jediné, co jsme při jejich formulaci předpokládali, bylo principiální ohodnocení dílčích vět *právě jednou* z pravdivostních hodnot, nikoli *znalost a hájení toho, kterou* konkrétně.²¹³⁾ Touto cestou se také ubírá příslušný induk-

²¹¹⁾ Hilbert jej vyslovil v rámci své slavné přednášky o nevyřešených matematických problémech – viz *Hilbert* [1900], 298].

²¹²⁾ Stejně jako svým slavným (a vysmívaným) zvoláním »*Wir müssen wissen, wir werden wissen*« (*My musíme vědět, my budeme vědět*) [GAH, 387] nemíní ale prokazatelně Hilbert zmínkou o řešitelnosti každého problému jakési proroctví, které by šlo snadno a dílem i oprávněně parodovat jakožto projev »vypínavého lidského rozumu«, ale jak píše: »[...] *mohutný podnět k práci; uvnitř nás slyšíme trvalé volání: Zde je problém, hledej řešení. Můžeš jej najít jen pouhým myšlením; neboť v matematice neexistuje žádné ignorabimus.*« [GAH, 298]

Právě coby projev intelektuálního optimismu přibližují tyto výroky Hilbertovu práci v základech matematiky Kantově kritické filosofii mnohem blíže nežli autory okázalých *ignorabimus* – rádoby skromných výroků o nedokonalosti, neúplnosti a konečnosti lidského poznání.

²¹³⁾ Frege např. výslovně píše: »*Soud*

$\vdash \begin{array}{l} A \\ B \end{array}$

tivní důkaz platnosti WP pro rozšíření Σ^* větného systému Σ nějakého oboru řeči. Jsme-li ve fázi, v níž jsme dokázali platnost WP pro všechny věty s n logických symbolů (induktivní předpoklad), a uvážíme-li např. větu $\exists x_i.S(N/x_i)$ ze Σ^* takovou, že $S(N)$ obsahuje nejvýše n logických symbolů, pak (z indukativního předpokladu) platí, že pro každé M z Π splňuje věta $S(N/M)$ WP, tedy je všem větám $S(N/M)$ přiřazena právě jedna pravdivostní hodnota a *bud' to* je každá z nich *F*, potom je přiřazena i větě $\exists x_i.S(N/x_i)$, *nebo* – nezávisle na tom, zda jsme jej schopni předvést – existuje M takové, že je větě $S(N/M)$ přiřazena *W*, a ta je pak přiřazena i větě $\exists x_i.S(N/x_i)$. Jednoznačné ohodnocení její negace bude následovat ve fázi $n + 1$, ohodnocení disjunkce $\exists x_i.S(N/x_i) \vee \neg \exists x_i.S(N/x_i)$ pak ve fázi $2n + 3$ atd.

Jelikož systém *A* průkazně splňuje WP (pravdivost jeho vět je možné dokonce »efektivně« předvést), je výše naznačenou indukcí *dokázáno*, že *každé*, jakkoli složité větě systému A^* , tedy i Goldbachově domněnce, byla na základě námi popsanych pravdivostních podmínek sice »neefektivně«, avšak definitivně přiřazena právě jedna z pravdivostních hodnot. Pouze na základě předpokládané platnosti WP a pravidel pro ohodnocení složených vět je zřejmé, že pro jakékoli *A* musela být větě tvaru $A \vee \neg A$ přiřazena hodnota *W*. Odtud také deklarovaná obecná platnost vyloučeného třetího pro libovolný předmětný obor.

Z normativity principu WP²¹⁴⁾ jasně vyplývá, proč nemohou být pro Frega nerozhodnuté věty důvodem pro odmítnutí (vyvrácení) vyloučeného třetího. Na jejich příkladech se ale názorně rozevírají nůžky mezi *f*-smyslem a *f*-významem výrazu (věty): rozumět větě, tj. vědět, za jakých *podmínek* je pravdivá, není totéž, jako vědět, *zda* je pravdivá. Odlišné pravdivostní podmínky jsou také to, čím se konstruktivní od klasického čtení vět téže (fregovské) syntaxe liší: typograficky shodnými větami typu (θ) či (κ) je vyjadřován odlišný *f*-mysl. Konfuzím lze přitom odpomoci třeba zavedením nového performátoru \vdash (L jako Lorenzen).

můžeme vznést, aniž bychom věděli, zda je A a B třeba potvrdit, nebo popřít.« [B, 6] Tentýž předpoklad je zjevný rovněž u negace a kvantifikovaných tvrzení (mysleme si existenční kvantifikaci jako nekonečnou disjunkci všech substitučních variant: nyní nevyžadujeme udání jednoho z disjunktů, resp. jmen, ale pouze přidělení hodnoty *W* alespoň jednomu z nich.)

²¹⁴⁾ Srv. k tomu třeba: »V případech, které pro logiku jako jediné připadají v úvahu, je smysl oznamovací věty *bud' pravdivý, nebo nepravdivý a tehdy jej nazýváme vlastní myšlenkou.*« [L_{2N}, 141]

5.2.4 Nepřímá povaha významu

Epistemická prvotnost f-smyslu věty (výrazu) před jejím (jeho) f-významem je jenom dalším projevem zvolené holistické perspektivy. Začínáme větou jakožto určitou smyslům přístupnou posloupností znaků; *pro ni* pak (nikoli izolovaně, ale *via* jistý schematizovaný větný kontext!) specifikujeme podmínky pravdivosti, její f-smysl (srv. konstrukci systému A).

F-smyslem dílčího výrazu je jeho příspěvek k f-smyslu věty: »*Uvažme [...] větu "Etna je vyšší než Vesuv". S touto větou spojujeme smysl, myšlenku, rozumíme ji, můžeme ji přeložit do jiných jazyků. V této větě se vyskytuje vlastní jméno "Etna", přispívající [Beitrag liefern] ke smyslu celé věty. Tento příspěvek je částí myšlenky, je smyslem slova "Etna".*« [LM_N, 250] Názornější je následující příklad. Pravdivé věty

(2×14) je násobek 7

a ($24 + 4$) je násobek 7

našeho systému A* (v nepodstatné transformaci do jiné číselné soustavy) se liší svým f-smyslem, neboť jejich ohodnocení závisí na dvou odlišných kalkulech (K+) a (K×). Tato odlišnost se ale týká jen dílčích výrazů " 2×14 " a " $24 + 4$ ", a to nikoli ve vztahu k jejich různosti grafické (!), nýbrž ke sledu ohodnocení, které se po jejich transformaci na výraz "28" ubírá stejnou cestou – tj. neliší se ve zbylém f-smyslu. Proto řekneme, že se ve svém f-smyslu liší výrazy " 2×14 " a " $24 + 4$ ".

Cesta k f-významu vede přes výraz a jeho f-smysl. Nepřímou, zprostředkovanou povahu předmětné reference vidíme nyní ve zvláště ostrém světle: Zmínili jsme již dříve, že náš přístup k předmětům je podstatně závislý na jejich (jevové, symbolické) reprezentaci a že se reprezentací nestává výraz sám o sobě, jaksi mimoděk, ale jen je-li součástí celého systému výrazů, uvedených do sítě vzájemných vztahů jejich větného užití. Udání předmětu je tedy vázáno nejen na udání jmenného výrazu, ale především na konkrétní ohodnocení – udání f-smyslu – identit celého větného kontextu, v němž se teprve příslušný f-význam vlastního jména konstituuje. Úvahy nad rolí deixe při zachycení předmětné reference nám ukázaly zřetelně, že je to jazyk, co má vždy v otázce určení (f-)významu jmenného výrazu poslední slovo: jediná možná odpověď na dotaz po tom, *co výraz N označuje*, může znít v podstatě pouze tak, že *tentýž předmět, co výraz M, je-li $N = M$ prokazatelně pravdivá identita systému*. Úplná znalost předmětu N obnáší tedy úplnou znalost pravdivostních hodnot všech identit $N = M$ pro libovolné M systému:

»Smysl vlastního jména je uchopen každým, kdo dostatečně ovládl svůj jazyk či celek značení; tím je však význam výrazu v případě, že nějaký má, osvětlen vždy jenom zčásti. K úplnému poznání významu bychom museli být schopni ke každému danému smyslu určit, zda k němu náleží. Toho nedosáhneme nikdy.« [SB, 27]

Rozdíl v kognitivní povaze f-smyslu a f-významu zde znovu vystoupil výrazně do popředí. Myslíme-li třeba na jména fyzických předmětů jako “Jitřenka”, “Večernice”, “Ludvík XIV.”, “muž se železnou maskou” apod., máme zpravidla pouze částečnou, spíše však prázdnou empirickou zkušenost s jejich nositeli a o pravdivosti vět jako “Jitřenka není Večernice”, “Ludvík XIV. je muž se železnou maskou” víme jen z doslechu, případně vůbec ne. Tvrdíme-li však přesto, že těmto větám rozumíme, máme tím na mysli následující: specifikace předmětné identity – např. v podobě spojitosti prostoročasové trajektorie jevo- vých reprezentací fyzických předmětů – nám sice nedovoluje v obecném případě *překontrolovat* splnění příslušných kritérií, díky ní ale (přirozeně ve vztahu k dalším specifickým principům prováděného výzkumu – fyzikálních pozorování, historického zkoumání pramenů atd.) v principu víme, co takováto kontrola obnáší, tedy konkrétně jaká *svědectví* lze považovat za věrohodná, jaká za potvrzující, resp. vyvracející apod. Právě v této možnosti *intersubjektivní kontroly* spočívá také smysluplnost, chcete-li objektivita příslušné teze, neboť je takto podstatným způsobem redukována osobní svévole proponenta, jenž je nyní v přesně vymezeném prostoru toho, co je, a co není možné, povinován čelit případným výtkám a nově se vyskytnuvším nesrovnalostem.

5.2.5 Substituční kvantifikace

Ačkoli jsme v expozici existenční kvantifikace nepožadovali efektivní udání (znalost) substituenty, pro níž je větě, ke které se kvantifikátor vztahuje, přiřazena hodnota W , je námi předvedená koncepce tzv. kvantifikací substituční, tj. vztahuje se na rozdíl od tzv. kvantifikace referenční (objektuální) k jisté třídě jmen, nikoli objektů.

Stanovili jsme, že

(S1) věta $\exists x.F(x)$ je pravdivá tehdy a jen tehdy, jestliže existuje substituo-
vatelné jméno N takové, že $F(N)$.

To má, jak víme z dosavadního textu, ve světle sledovaného cíle předmětné konstituce svoje opodstatnění a referenční formulace kvantifikátoru ve formě:

(O1) věta $\exists x.F(x)$ je pravdivá tehdy a jen tehdy, jestliže existuje předmět N
takový, že mu funkce $F(\xi)$ přiřazuje hodnotu W

se zdá být jen jinou formulací téhož. Namítne-li totiž někdo, že se zde nezohledňuje možnost existence dosud nepojmenovaných předmětů, uvažuje zjevně vedle (potenciálně prázdné!) třídy substituovatelných jmen také doménu D předmětů, jež potom spolu s funkcemi, které jsou na nich definovány, přiřazuje výrazům (jmenným a funkčním) jistého expresivního systému. Tato sémantika se zjevně od námi předvedené liší. Vůči ní je totiž kvantifikace:

(O2) věta $\exists x.F(x)$ je pravdivá tehdy a jen tehdy, existuje-li předmět g z D takový, že mu funkce přiřazená výrazu $F(\xi)$ dává hodnotu W

skutečně výrazem jiných pravdivostních podmínek nežli (S1). Zmíněná *danost* domény D , natož pak na ní definovaných funkcí, je ale právě to, co jsme si stanovili za cíl objasnit a čehož předpokladem si takto popsaná interpretace – již zmíněnými Fregovými slovy – ušetřila tu nejobtížnější část logické práce.

Co ale vůbec znamená – musíme se ptát předtím, než se dáme svést povrchním vyhrožováním intuicí a zdravým rozumem –, že je nám nějaký předmětný obor dán? Právě to, že víme, co považovat za *možnou reprezentaci* (jméno) jeho předmětů. Snad se takovéto užití slova ›jméno‹ odchyluje od obvyklého úzu vyznačování významných exemplářů štítky nějaké fixní nomenklatury, jakožto reflexe živé jazykové praxe je ale tomuto metodicky nadřazeno, stejně jako je kvantifikace substituční nadřazena kvantifikaci referenční (tj. není tomu tak, že by první z nich byla speciální, degenerovaný případ druhé.) *Nepojmenovatelný* předmět pro nás znamená totéž co předmět *nereprezentovatelný*, to jest *nepoznatelný*, čili – a zde se stýká analytická filosofie s filosofií transcendentální – *vůbec žádný*.

Ve sféře abstraktních předmětů, jako jsou čísla, jež jako jediný prostředek reprezentace připouští výrazy jazyka, bývá však existence principiálně nepojmenovatelných množin hájena (či dokonce považována za dokázanou) s odkazem na Cantorovy úvahy o kardinalitě množin, speciálně pak na jeho *diagonální metodu*. Jádro této argumentace lze nahlédnout na následujícím příkladě.

(Nekonečnou) *posloupností* nějakých předmětů oboru D je nazývána taková (jednoargumentová) funkce, jejíž definiční obor (obor argumentů) je právě obor všech přirozených čísel, a oborem hodnot jsou předměty oboru D . Reálná čísla bývají např. tradičně identifikována s posloupnostmi racionálních čísel jisté vlastnosti. *Číselnou posloupností* dále nazývejme funkci, jejíž hodnoty náleží výhradně oboru přirozených čísel. Předpokládejme nyní, že je nám dán obor všech číselných posloupností a že je lze *všechny* uspořádat do řady

(σ) $f_1, f_2, f_3, \dots,$

tj. očíslovat přirozenými čísly. Uvažme nyní *číselnou posloupnost* F takovou, že

$$F(n) = f_n(n) + 1.$$

Ta se zjevně od každé posloupnosti f_n liší nejméně v jednom z argumentů, totiž na *diagonále* $f_n(n)$. To znamená, že posloupnost F nebyla očíslována a v řadě (σ) vůbec není. Tím ale dostáváme spor s výše zmíněným předpokladem očíslování *všech* číselných posloupností přirozenými čísly.

Cantor na základě toho usuzuje, že má třída všech posloupností vyšší mohutnost (kardinalitu) nežli spočetná třída všech přirozených čísel, a dále ukazuje, že kardinalita všech číselných posloupností je jenom první mohutností v nekonečné řadě dalších nespočetných nekonečen. Jelikož každý výrazový systém S vystavěný nad jistou konečnou sadou základních symbolů s_1, s_2, \dots, s_k lze uspořádat v řadu tak, že vezmeme všechny kombinace základních znaků, počínaje jednoprvkovými s_1, s_2, \dots, s_k , přes dvouprvkové $s_1s_1, s_1s_2, s_1s_3, \dots, s_1s_k, s_2s_1, \dots, s_ks_k$, tříprvkové atd., a vyškrtáme z nich ty, které do S nepatří,²¹⁵⁾ – a je to tedy systém spočetný; lze navíc údajně z výše předloženého argumentu usoudit na existenci *principiálně nepojmenovatelné* posloupnosti čísel. To je však hrubý omyl! Usoudit můžeme nanejvýš na existenci funkce nepojmenovatelné *relativně* k nějakému pevnému výrazovému systému. Co ale znamená takové tvrzení existence, není-li řečeno, jak je nám obor všech posloupností dán? Není spíše než druhý z předpokladů, tj. uspořádání všech posloupností v řadu, pochybný předpoklad první, tj. ona (definitivní) danost oboru číselných posloupností?²¹⁶⁾

Rekonstruujeme nyní výše zmíněný argument v metodicky správném sledu. Chceme-li mluvit o oboru všech číselných posloupností, musíme začít ve sféře reprezentací. Řekneme nejprve, že (možné) jméno (determinované)

²¹⁵⁾ Právě odkaz k onomu ›vyškrtání‹ může být ovšem kamenem úrazu. Chceme-li např. z posloupnosti jmen *částečně rekurzivních funkcí* vybrat ty, které jsou jmény totálních (obecně rekurzivních) funkcí, jsme v teorii rekurze konfrontováni s důkazem, že třída jejich *indexů* není rozhodnutelná (obecně rekurzivní), ba co víc, že není ani semirozhodnutelná (rekurzivně spočetná), což mimo jiné právě znamená, že neexistuje ›efektivní‹ (rekurzivní) procedura, která by tuto třídu postupně generovala (uspořádala, očíslovala). Spočetnost jmen obecně rekurzivních funkcí je potom zdůvodňována pouze odkazem k tomu, že podmnožiny spočetných množin jsou také spočetné! Terminologické a věcné detaily viz Švejdar [2002].

²¹⁶⁾ Srv. s Wittgensteinovým: »To, co je na pojetí: “všechna reálná čísla nelze uspořádat do řady”, či dokonce “množina ... není spočetná” nebezpečně a klamně, spočívá v tom, že je zde záležitost tvorby a určení pojmu prezentována jako přírodní jev.« [BGM, část II, § 19].

číselné posloupnosti je jistý konstrukční předpis, dovolující jednoznačně transformovat libovolnou číslovku (numerál) po konečně mnoha krocích opět na nějakou číslovku. Vzpomeneme-li na systém A elementární aritmetiky, vidíme, že této charakterizaci vyhovují všechny výrazy kategorie $t \succ t$. Systém všech takovýchto jmen $z A$ budeme značit Λ_A .

Předměty oboru A ovšem nebyly číselné posloupnosti, ale přirozená čísla, což mimo jiné znamená, že pro jména posloupností nebylo specifikováno žádné kritérium identity. To lze obecně stanovit takto: jména $F(\zeta)$ a $G(\zeta)$ číselných posloupností jsou jmény téže posloupnosti tehdy a jen tehdy, jestliže pro každou číslovku N platí, že $F(N)$ lze transformovat na stejnou číslovku jako $G(N)$. To budeme dále zapisovat jako $F(N) = G(N)$ s vědomím, že se jedná o rovnost předmětů jiného oboru.

Mějme nyní nějaký výrazový systém S jmen číselných posloupností nad pevnou sadou základních symbolů s popisem všech jejich přípustných kombinací. Příkladem může být právě systém Λ_A nad bázi “|”, “+”, “×”, “(”, “)” či definice (jména) primitivně rekurzivní funkce, jak ji známe z teorie rekurze. Systém S nyní uspořádáme známým způsobem do řady f_1, f_2, f_3, \dots a uvažme popis (jména) posloupnosti $F(N) = f_N(N) + 1$ pro N libovolnou číslovku. Kdyby již ve zmíněné řadě bylo jméno takovéto posloupnosti, tj. kdyby pro některé N platilo $F = f_N$, pak by

$$f_N(N) = F(N) = f_N(N) + 1,$$

což není možné. Jelikož výraz $F(\zeta)$ vyhovuje výše uvedenému popisu možného jména (determinované) číselné posloupnosti, vyplývá z toho jen jediné: posloupnost F není popsána definatoricky přípustnými prostředky systému S ! Diagonální metoda nám tedy ukazuje, že pojem možného jména číselné posloupnosti nelze vyčerpávat podobně schematicou definicí (kalkulem nad fixní sadou znaků) jako v případě číselných termů systému A , tj. že zde hrají svou roli *kritéria materiální* (nenásledovatelná čistě mechanicky), relativizující stavbu a podobu systému také v (deiktické, situační) závislosti k *dosud* zkonstruovanému. V tomto smyslu neuzavřené, tj. dalším specifikacím otevřené výrazové systémy, případně těmito výrazy reprezentované obory, bývají nazývány *indefinitní*.²¹⁷⁾ Budeme-li o nich hovořit jako o nespočetných, neříkáme tím nic o existenci nepojmenovatelných předmětů ani o hierarchii nekonečen, nýbrž jen naznačujeme přechod k *jinému* užití obrátů jako “všechny číselné

²¹⁷⁾ Viz Lorenzen [1965], 34; zde také následuje diskuse Cantorovy diagonální metody a jeho důkazu nespočetnosti množiny všech funkcí.

posloupnosti”, “mějme danu třídu všech reálných čísel” apod.²¹⁸⁾ Tím samozřejmě *nevyhlučujeme*, že je lze používat i Cantorovým způsobem, pak se však (Wittgensteinovými slovy) jedná o zcela jinou jazykovou hru.²¹⁹⁾

5.2.6 Jazyk logiky predikátů

Výstavbu logiky, s jejíž pomocí by bylo možné pořádat úsudky v rámci nějaké stávající jazykové praxe, jsme již úvodem knihy rozdělili na popis formální syntaxe jako nauky o ›grafické‹ stavbě přípustných (možných) vět a popis formální sémantiky jako nauky o přípustné (možné) interpretaci, obsahu těchto vět. *Větná schémata*, primárně užívaná v zástupné roli naznačení logické formy uvažovaných vět, se s postupným vývojem úspěšného logického systému, jakým Fregova predikátová logika nesporně je, stávají více a více předměty vlastního zkoumání – tak je tomu třeba v rámci studia deduktivních kalkulů, jak se pro případ některých speciálních kalkulů aritmetických ustanovilo v nové a veleúspěšné oblasti matematiky, tzv. *metamatematice*. V tomto samostatném použití budeme namísto o větných schématech hovořit o *formulích*, a to jako o posloupnostech znaků, slovech předem popsaného umělého neboli formálního jazyka. Hovoříme-li zde v této souvislosti o ›jazyku‹, činíme tak nutně s vědomím jisté licence. Na rozdíl od vět nejsou formule nositelé smyslu, nemohou být smysluplně tvrzeny, tedy ani pravdivé, či nepravdivé. Odvozeně však lze o jejich pravdivosti hovořit, a to prostřednictvím interpretace, přiřazení obsahu dosud bezobsažným symbolům. Obsah však, jak víme, je pevně vázán na výraz, jímž je vyjadřován. Výchozím bodem uvažované formální sémantiky, uvažovanou interpretací, musí být tedy smysluplná věta, resp. větný systém, patřičně normovaný příslušnými sémantickými principy – jinak řečeno: to, co jsme nazvali oborem řeči.

Popišme nyní nejprve univerzální formální jazyk \mathcal{A} predikátové logiky prvního řádu (dále jen predikátové logiky). Tvoří jej dvě disjunktní třídy výrazů, které po řadě odpovídají kategorii n -místných predikátů a kategorii n -místných funktorů interpretovaných vět:

²¹⁸⁾ Srv. [BGM, část II, § 22]: »*Kdybychom řekli: “Úvahy o diagonální metodě ukazují, že pojem ‘reálné číslo’ má mnohem méně společného s pojmem čísla kardinálního, než bychom pod vlivem jistých analogií byli ochotni věřit,” mělo by to svůj dobrý a poctivý smysl. Ve skutečnosti jsme svědky pravého opaku: když je ‘množina’ reálných čísel porovnávána s kardinálními čísly údajně podle své velikosti.*«

²¹⁹⁾ K této kapitole obecně srv. Wittgensteinovy poznámky z [BGM, část II], případně [PG, část II, k. VII].

- (i) $P_i^{(n)}$ ($n > 0, i \geq 0$) predikátových konstant, kde n určuje četnost (adicitu) a i slouží v rámci formule nebo třídy formulí k odlišení výrazů stejné četnosti,
- (ii) $f_i^{(n)}$ ($n \geq 0, i \geq 0$) funktorových konstant; výrazy, kde se $n = 0$, nazýváme také jmennými konstantami.

Na každý formální jazyk \dot{A}_R predikátové logiky se díváme jako na podmnožinu jazyka \dot{A} . Pro jazyk \dot{A}_R definujeme nyní třídu \hat{A}_R všech jeho formálních termů a \check{A}_R všech jeho formulí. Předpokládejme nejprve, že máme k dispozici třídu \check{A} proměnných, a to

- (i) x_i ($i \geq 0$) všech objektových proměnných,
- (ii) y_i ($i \geq 0$) všech volných proměnných.²²⁰⁾

Třídu \hat{A}_R formálních termů popíšeme nyní takto:

- (T1) všechny jmenné konstanty z \dot{A}_R a všechny volné proměnné jsou formálními termy,
- (T2) jsou-li t_1, t_2, \dots, t_n formálními termy, je formálním termem také $f_i^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ pro $f_i^{(n)}$ z \dot{A}_R .

Třída \check{A}_R formulí bude pak určena takto:

- (F1) jsou-li t_1, t_2, \dots, t_n výrazy z \hat{A}_R , je $P_i^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ pro $P_i^{(n)}$ z \dot{A}_R formulí, a to tzv. formulí elementární,
- (F2) jsou-li X a Y formule, jsou jimi také $\neg X, X \wedge Y, X \vee Y, X \rightarrow Y, X \leftrightarrow Y$,
- (F3) je-li X formule obsahující výraz t z \hat{A}_R , pak pro objektovou proměnnou x_i , která se v X nevyskytuje, jsou $\forall x_i.X(t/x_i)$ a $\exists x_i.X(t/x_i)$ formulemi; o objektové proměnné x_i říkáme, že je v á z á n a příslušným kvantifikátorem či také že se nachází v jeho dosahu.

Termy a formule, v nichž se vyskytuje nějaká volná proměnná, nazýváme otevřenými, v opačném případě uzavřenými. Matricí formule nazýváme výraz, který obsahuje objektovou proměnnou, jež se nenachází v dosahu žádného kvantifikátoru. Tak v konstrukci formule $\forall x_i.X(y_k/x_i)$ z

²²⁰⁾ Název ›objektová‹ proměnná slouží k vymezení vůči proměnné ›volné‹. Objektovou proměnnou proto musíme odlišovat od proměnné předmětné, která se svým názvem vymezuje vůči proměnné funkční. Touto druhou distinkcí je naznačen typ výrazů, které proměnná přijímá. V logice vyšších řádů máme funkční proměnné, které lze opět rozdělit na objektové a volné.

formule X podle pravidla (F3) je výraz $X(y_k/x_i)$ maticí. Otevřenou maticí nazýváme matici, která ještě obsahuje volné proměnné.

5.2.7 Interpretace logiky predikátů

Mějme nyní nějaký elementární obor řeči $\Omega = \langle \Sigma, \Pi \rangle$. Dvojici $M = \langle \Omega, I \rangle$ budeme nazývat interpretací pro jazyk \mathring{A}_R při valuaci V , jestliže jsou ohodnocení I a valuace V taková přiřazení výrazů výrazům, pro něž platí následující podmínky (S1)-(S7):

- (S1) I přiřazuje každému výrazu $f_i^{(0)}$ z \mathring{A}_R nějaké jméno N z Π ,
- (S2) V přiřazuje každé volné proměnné y_i z \mathring{A} nějaké jméno N z Π ,
- (S3) I přiřazuje každému výrazu $P_i^{(n)}$ z \mathring{A}_R nějaký n -místný predikát $S(N_1/\zeta_1, N_2/\zeta_2, \dots, N_n/\zeta_n)$,
pro $S(N_1, N_2, \dots, N_n)$ náležící Σ a N_1, N_2, \dots, N_n náležící Π ,
- (S4) I přiřazuje každému výrazu $f_i^{(n)}$ z \mathring{A}_R nějaký n -místný funktor $M(N_1/\zeta_1, N_2/\zeta_2, \dots, N_n/\zeta_n)$,
pro $M(N_1, N_2, \dots, N_n)$ a N_1, N_2, \dots, N_n náležící Π .

Přiřazení nějakého výrazu B z Ω^* (věty, jména, predikátu či funktoru) nějakému výrazu A z \mathring{A}_R , \mathring{A}_R či \mathring{A}_R skrze I nebo V značme nyní pomocí (metajazykové) rovnosti jako $IV(A) \approx B$,

- (S5) jestliže byl výrazům t_1, t_2, \dots, t_n z \mathring{A}_R a výrazům $P_i^{(n)}$, resp. $f_i^{(n)}$ z \mathring{A}_R , kde $n > 0$, přiřazen skrze I či V nějaký výraz z Ω , ohodnocují I a V elementární formule z \mathring{A}_R a termy z \mathring{A}_R výrazy z Ω^* takto:
 $IV(P_i^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)) \approx I(P_i^{(n)})(\zeta_1/IV(t_1), \zeta_2/IV(t_2), \dots, \zeta_n/IV(t_n))$,
 $IV(f_i^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)) \approx I(f_i^{(n)})(\zeta_1/IV(t_1), \zeta_2/IV(t_2), \dots, \zeta_n/IV(t_n))$,
- (S6) jsou-li X, Y výrazy z \mathring{A}_R , jimž byly skrze I a V přiřazeny nějaké věty ze Σ^* , probíhá ohodnocení výrazů $X \circ Y$ z \mathring{A}_R (\circ zastupuje některý z výrazů $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) větami ze Σ^* následovně:
 $IV(X \circ Y) \approx IV(X) \circ IV(Y)$,
 pro \neg je nutné položit zvlášť:
 $IV(\neg X) \approx \neg IV(X)$.

Pro danou valuaci V značme nyní jako V_i takové přiřazení výrazů z Π volným proměnným z \mathring{A} , které se liší od V nanejvýš výsledkem $V(y_i)$ ohodnocení i -té proměnné, a nazýváme jej *alternativní i -valuací* V . Znakem $V_{i;a}$

symbolizujme takovou alternativní i -valuaci, která za i -tou volnou proměnnou dosazuje výraz a , který je buďto z Π , nebo je objektovou proměnnou,²²¹⁾

- (S7) byla-li formulí $X(Y_k)$ skrze I a každou $k \in V$ alternativní k -valuaci V_k přiřazena nějaká věta ze Σ^* , pak platí
- $$IV(\forall x_i . X(Y_k/x_i)) \approx \forall x_i . IV_{k^*}(X(Y_k)),$$
- $$IV(\exists x_i . X(Y_k/x_i)) \approx \exists x_i . IV_{k^*}(X(Y_k)).$$

Za splnění těchto podmínek lze nyní snadnou indukcí dokázat, že každé formulí z \dot{A}_R byla přiřazena nějaká věta ze Σ^* , a my tedy pro libovolnou formulí X můžeme psát

$$\vdash IV(X)$$

jako (pravdivé, či nepravdivé) vyjádření toho, že jí byla ohodnocením I a valuací V přiřazena pravdivá věta ze Σ^* . Alternativně můžeme hovořit také o s p l n ě n í formule X interpretací M při valuaci V , což bývá symbolicky zapisováno jako

$$M \models X[V].$$

Často zde také říkáme, že je formule X v interpretaci M při valuaci V pravdivá či že jí byla přidělena pravda.

Máme-li v jazyce \dot{A}_R nějaký symbol $P_j^{(2)}$, pak interpretaci M pro jazyk \dot{A}_R nazveme i n t e r p r e t a c í s r o v n o s t í, jsou-li splněny tyto podmínky:

- (G1) $M \models P_j^{(2)}(y_i, y_i)[V]$ platí pro libovolné V ,
- (G2) jestliže pro nějakou posloupnost výrazů s_i, t_i ($1 \leq i \leq n$) z \dot{A}_R a nějaké V platí
- $$M \models P_j^{(2)}(s_i, t_i)[V],$$
- pak pro libovolné $f_m^{(n)}, P_m^{(n)}$ z \dot{A}_R platí:
- $$M \models P_j^{(2)}(f_m^{(n)}(s_1, s_2, \dots, s_n), f_m^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n))[V],$$
- $$M \models P_m^{(n)}(s_1, s_2, \dots, s_n) \leftrightarrow P_m^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)[V].$$

Je zřejmé, že vůči výrazu $I(P_j^{(2)})$ v oboru řeči $\Omega \uparrow \dot{A}_R$, jenž vznikne z Ω restrikcí na věty přiřazené skrze I , V formulím z \dot{A}_R , platí zaměnitelnost *salva veritate*, a může být tedy interpretován jako znak rovnosti. $\Omega \uparrow \dot{A}_R$ je (relativně k tomuto znaku) předmětným oborem. Přirozenější způsob zvládnutí rovnosti spočívá ovšem v zařazení pevného znaku “=” mezi logické symboly, rozšíření bo-

²²¹⁾ Z čistě technických důvodů, jež lze snadno pochopit z formulace bodu (S7), se zde neomezujeme pouze na výrazy z Π , ale připouštíme i objektové proměnné. Alternativním řešením by bylo rozšířit v bodě (S2) valuaci rovněž na objektové proměnné, jež by pak byly přiřazovány samy sobě, a dále konstruované ohodnocení nevnímat jako ohodnocení formulí, ale jejich maticí.

du (F1) popisu elementární formule jazyka \hat{A}_R coby části univerzálního formálního jazyka \hat{A} predikátové logiky prvního řádu s rovností o klauzuli

(F1') jsou-li t_1, t_2 výrazy z \hat{A}_R , pak je $t_1 = t_2$ elementární formulí,

a v redefinici interpretace pro jazyk \hat{A}_R predikátové logiky s rovností jako dvojice $M = \langle \Omega, I \rangle$, kde Ω je elementární předmětný obor a bod (S5) je rozšířen o klauzuli

(S5') byl-li výrazům t_1, t_2 z \hat{A}_R skrze I či V přiřazen nějaký výraz z Ω , pak platí

$$IV(t_1 = t_2) \approx IV(t_1) = IV(t_2).$$

Od interpretace s rovností je už jenom krok k tzv. přímým interpretacím, které přiřazují konstantám, formálním termům a formulím přímo sémantické hodnoty odpovídajících výrazů, tj. termům *předměty*, funktorovým, resp. predikátovým konstantám *funkce*, resp. *množiny* a *relace* na těchto předmětech definované a formulím *pravdivostní hodnoty*. Přímá byla ostatně také námi popsána interpretace logiky výroků, přiřazující (elementárním) větným schémátům pravdivostní hodnoty (viz /3.2.5/). Nesmíme ale zapomínat, že se i v tomto případě jednalo jen o jistou zkratku za interpretaci nepřímou, větnou, neboť je to vždy jen a jen věta, k čemu se pravdivostní hodnota vztahuje.²²²⁾ Obvyklé množinové pojetí interpretace tuto jazykovou závislost významu zcela ignoruje a namísto z předmětného oboru ohodnocuje formální jazyk z říše entit garantovaných teorií množin nad bázi základní třídy předmětů, tzv. nosiče modelu, jehož konstituci dále netematizuje.

5.2.8 Kalkulizace logiky predikátů

Mějme nějakou třídu T formulí jazyka \hat{A}_R predikátové logiky (s rovností). Interpretaci M pro jazyk \hat{A}_R predikátové logiky (s rovností) nazveme *model* M třídy T , jestliže splňuje každou formuli X z T při libovolné valuaci V . Tento fakt budeme zapisovat jako

$$M \models T.$$

Abychom zkrátili formulace dalších definic, předpokládejme dále, že je z kontextu jasné, k jakému jazyku a interpretacím se vždy vztahujeme.

²²²⁾ Znovu vzpomeňme Fregovo: »Pravdivostní hodnotou věty rozumím okolnost, že je tato věta pravdivá nebo nepravdivá.« [SB, 34]

Formuli X nazveme logicky pravdivou (tautologickou) formulí, jestliže je libovolná interpretace M jejím modelem, tj. platí-li $M \models X[V]$ pro libovolné M a V . Toto zapisujeme také jako

$$\models X.$$

O formulí X řekneme, že je (formálně) sémantickým důsledkem (ne nutně konečným) třídy formulí T , jestliže je každý model třídy T také modelem formule X . To budeme zapisovat jako

$$T \models X.$$

Přechod od vět A_1, A_2, \dots, A_n k větě A nějakého oboru řeči Ω^* nazveme logicky platným úsudkem, jestliže existují formule X_1, X_2, \dots, X_n, X takové, že

$$\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \models X,$$

a taková interpretace $M = \langle \Omega, I \rangle$ a valuace V , že

$$IV(X_1) \approx (A_1), IV(X_2) \approx (A_2), \dots, IV(X_n) \approx (A_n), IV(X) \approx (A).$$

O takovémto úsudku můžeme také říci, že je přechodem podle logicky platného úsudkového pravidla

$$X_1, X_2, \dots, X_n \Rightarrow X.$$

Jestliže je přechod od vět A_1, A_2, \dots, A_n k větě A nějakého oboru řeči Ω^* úsudkem podle logicky platného úsudkového pravidla a věty A_1, A_2, \dots, A_n jsou v Ω^* pravdivé, pak řekneme, že A z vět A_1, A_2, \dots, A_n logicky vyplývá.²²³⁾ V těchto definicích je dostatečně zřetelně dáno najevo, že chceme-li aplikovat úsudkový aparát predikátové logiky (s rovností) na věty nějakého kontextu, je třeba nejprve prokázat, že v něm máme obor řeči (předmětný obor), tedy bázi možné interpretace této logiky. Oprávněnost schematického usuzování v takto ošetřeném kontextu je potom triviálním důsledkem platnosti principů, kterou jsme od přípustné interpretace vyžadovali, tj. principů WP, ASP a LP.

Kalkulací nebo též axiomatizací predikátové logiky (s rovností) rozumíme takový »efektivně«²²⁴⁾ zadaný systém sestávající z formulí (či jejich schémat) coby axiomů kalkulu a z úsudkových pravidel, jenž dovoluje syntakticky odvozovat všechny tautologické formule jazyka \mathcal{A} a jenom je.²²⁴⁾ S pomocí znaku \vdash od-

²²³⁾ Pojem vyplývání lze snadno zobecnit i pro nekonečnou třídu vět, vyjdeme-li při jeho definici přímo z pojmu sémantického důsledku.

²²⁴⁾ Důraz na *efektivní*, v důsledku tedy *syntaktické* zadání souboru základních formulí (axiomů) a pravidel systému je zde zásadní. Třída všech tautologických formulí je sice jasně vymezena již svojí sémantickou charakteristikou, ta však není spojena s žádnou efektivní procedurou, algoritmem, který by pro danou formuli umožnil rozhodnout, zda

voditelnosti ve zmíněném kalkulu můžeme tento požadavek formulovat ve větě

$$\vdash x \text{ tehdy a jen tehdy, když } \models x,$$

jejíž jednu část (směr \Rightarrow) tvoří (slabá) věta o korektnosti a část druhou (směr \Leftarrow) (slabá) věta o úplnosti daného kalkulu *vůči pojmu logicky pravdivé formule*. Fregova *Begriffsschrift* obsahuje vůbec první úplnou a korektní axiomatizaci predikátové logiky s rovností, jak ji blíže popíšeme později v /7.1.3/.

Predikátovělogický kalkulu je dále významně užíván také k tzv. relativním dedukcím umožňujícím z dané třídy formulí T dedukovat *všechny* její sémantické důsledky a *jenom* je. Označíme-li odvození formule x v kalkulu, který vznikne z kalkulu predikátové logiky přidáním třídy T jako dalších (mimologických) axiomů, symbolicky jako

$$T \vdash x,$$

pak se relativní odvozování opírá o silnější variantu výše uvedené věty, totiž

$$T \vdash x \text{ tehdy a jen tehdy, když } T \models x.$$

Tato věta bývá nazývána *silnou verzí vět o korektnosti a úplnosti* daného kalkulu (vůči pojmu sémantického důsledku), neboť svoji slabou verzí triviálně implikuje. Často se větou o úplnosti nazývá *celá* uvedená ekvivalence, tedy včetně věty o korektnosti; my to tak budeme také používat.

O libovolné třídě T formulí bývá zvykem hovořit jako o (formální) teorii²²⁵ a o formuli x , pro niž platí $T \vdash x$, jako o (formálním) teorii této teorie. Formální teorie T jazyka \mathcal{A}_R se nazývá (deduktivně) *bezespornou* či *konzistentní*, jestliže existuje formule x z \mathcal{A}_R taková, že neplatí $T \vdash x$ (toto je ekvivalentní požadavku neodvoditelnosti sporné formule $x \wedge \neg x$, neboť z ní lze dokázat formuli libovolnou), a (deduktivně) *úplnou*, jestliže je bezesporná a pro libovolnou *uzavřenou* formuli x z \mathcal{A}_R platí

$$T \vdash x \text{ nebo } T \vdash \neg x.$$

je, či není tautologická. To, že třída tautologických formulí není rekurzivní, dokázal Church in: [1936]. Odtud máme tzv. *Churchovu větu o nerozhodnutelnosti predikátového počtu*. Díky existenci úplného a korektního kalkulu s rekurzivní třídou axiomů a úsudkových pravidel o ní však platí, že je alespoň rekurzivně spočetná, neboť tento kalkulu představuje proceduru, která všechny tautologické formule a pouze je systematicky generuje. Detaily in: Švejdar [2002].

²²⁵ K upřesnění pojmu ›formální teorie‹ se ještě dostaneme v /7.2/.

Není-li bezsporná teorie úplná, pak z definice existuje uzavřená formule X taková, že z T nelze dokázat X ani její negaci; takováto formule se nazývá *n e - z á v i s l o u* na teorii T .

6 ČÍSLO

Rekonstrukce aritmetiky jakožto vědy o čísle vyžaduje analýzu pojmu čísla. Výhradně logická rekonstrukce aritmetiky vyžaduje analýzu čísla jako logického předmětu:

»Za základní problém aritmetiky můžeme považovat otázku: jak uchopujeme logické předměty, speciálně čísla?« [GG₂, 265]

Otázka ›co je číslo?‹ rezonuje celým Fregovým dílem. Pro případ čísla kardinálního jí byly věnovány *Grundlagen der Arithmetik*, avšak jejich mizivý ohlas a neuspokojivé pokusy současníků nedaly ustát tomu, aby se k ní Frege nevyjadřoval i v dalších letech: *»Je to vlastně skandál,«* píše koncem století ve stejném duchu jako dříve v úvodu *Grundlagen*, *»že nemá věda jasno ohledně podstaty čísla. To, že nemáme žádnou obecně uznávanou definici čísla, bychom ještě mohli přejít, kdyby alespoň ve věci samé panovala jednota. Ale věda nerozhodla dokonce ani o tom, zda je číslo skupinou věcí nebo figurou, kterou na tabuli namalovala lidská ruka, zda je něčím duševním, o jehož vzniku nás má informovat psychologie, nebo zda je předmětem logickým, zda je stvořené a může zaniknout, nebo zda je věčné. Není to skandál?«* [ZS, III]

Bylo by naivní domnívat se, že Fregův apel a jeho hluboká, svým zaměřením však převážně negativní, vymezující se zkoumání (podmínek) poznání předmětů matematiky našla nějakou širší odezvu a že jsou snad v dnešní době obecně sdíleným statkem. Nejenže se velká část (příležitostně) filosofujících matematiků a logiků okázalým hlásáním jakési lidové verze platonismu à la Kronecker (čísla od milého pánaboha) chová tak, jako by Frege a Kant snad vůbec ani nežili, navíc však s oblibou dochucuje tuto podomácku uvařenou směs myšlenkami moderního formalismu (existuje vše, co je konzistentní), což nás při bytostné neslučitelnosti obou doktrín musí s železnou nutností přivádět k tázání po širším, vědecko-filosofickém oprávnění takovýmito proklamacemi ›obohacených‹ textů.

Hrot ostří obecně platné části Fregovy kritiky ovšem poněkud otupuje vědomí toho, že se zde v horizontu tradice západní filosofie nejedná o jev výjimečný, nýbrž *typický*. Uvažme např. následující vysvětlení předmětu teorie množin z knihy, v jejímž úvodu se autor výslovně hlásí k matematickému platonismu:

»Co jsou množiny? – Nelze očekávat, že o otázce: co jsou množiny? dosáhneme úplného souhlasu. Můžeme však vzít jisté věci, u nichž panuje shoda, že množinami jsou (ať jsou jinak čímkoli), a studovat je. Většina aktivních matematiků rozeznává 'množiny čísel' jako množiny, tj. soubory, jejichž prvky jsou čísla (nějakého pevného druhu); a dále množiny, jejichž prvky jsou právě ta-

kovéto množiny, a množiny těchto množin atd. Tento způsob myšlení vede k tomu, co je obvykle nazýváno teorií typů...»²²⁶⁾

›Tento způsob myšlení‹ je ale právě onen způsob myšlenkové práce, jenž Platón předhazuje představitelům empirických i abstraktních věd, když o nich říká, že zaměření pouze na objekty svého zkoumání předpokládají tyto jako známé a zřejmé »*a už je nepovažují za nutné zdůvodňovat sobě ani ostatním*« [Rep, 510-511], a to místo toho, aby se vydali cestou dialektiky (logiky), která jakožto vědomá reflexe, analýza významu (vědecké) promluvy a úsudku »*odstraňuje všechny předjaté předpoklady, aby se tak upevnila*« [Rep, 533]. Předmětná, na objekt cílená řeč je pro vědu přirozená; není-li však doprovázena spekulací a reflexí vlastní historie, metod a cílů, nese s sebou nebezpečí hypostaze nezávisle existujících předmětných říší, systematicky hřešící zneužíváním určitých běžných forem řeči. Dovolávají-li se tyto naivní, *protofilosofické* úvahy ›aktivních matematiků‹ Platónova či Fregova jména, má to obvykle konvenční, povrchní základ, neboť oba filosofové projevovali stálý, ba dokonce *programový* (sic!) zájem na výzkumu stávajícího jazykového úzu.²²⁷⁾ My nyní tomu, jak Frege tuto jazykovou analýzu pro případ základních aritmetických pojmů uskutečňuje v *Grundlagen*, nejprve předešleme výklad Fregovy analýzy tvrzení *existence* a *objektivitu* (abstraktních) předmětů, abychom pak v další kapitole shledali v jeho metodě *logické abstrakce* základní stavební kámen či lépe řečeno: explicitní vyjádření jejich konstituce. Vlastním východiskem nám bude srovnání Fregova holismu, akcentujícího nepřímou povahu větného významu, s Russellovým realistickým pojetím sémantiky a jeho neotřesitelnou vírou v teorii poznání přímou obeznámeností.

6.1 DESKRIPCE

Sémantický dualismus smyslu a významu je jedním z významných rysů, jímž se holismus Fregův liší od sémantické koncepce Russellova atomismu. Konflikt s Russellovou teorií poznání přímou obeznámeností (*knowledge by direct acquaintance*) s významy výrazů bylo ostatně možné již dávno tušit. Russell také jasně říká:

›Obeznamenost s jednodušším je předpokládána v porozumění komplexnějšímu, avšak logika, s níž bych chtěl bojovat, tvrdí, že k tomu, abychom úplně po-

²²⁶⁾ Drake [1974].

²²⁷⁾ Platónovým nástrojem v tomto pojmověanalytickém úsilí je *dihairesis* – metoda dělení pojmů – jakožto úhelný kámen programu nové dialektiky. K rekonstrukci Platónovy logiky srv. *Stekeler-Weithofer* [GPL, § 1].

znali jednu věc, musíme znát všechny její vztahy a vlastnosti, ve skutečnosti všechny věty, v nichž je ona věc zmíněna [...].« [RLA, 59]

Víme, že ústřední devízu Russellovy epistemologie, totiž že porozumění větě předpokládá porozumění jejím částem, Frege sám za jistých podmínek akceptoval, a potud by se tedy mohlo zdát, že na obou stranách panuje shoda.²²⁸⁾ Ta se však promění v iluzi okamžik poté, prozkoumáme-li, co má být onou inteligibilní hodnotou výrazu, již má být vlastně rozuměno. Když Russell ve svém dopise roku 1904 v komentáři Fregovy nauky o soudu a jeho smyslu označuje význam soudu za jistý ›komplexní předmět‹ [WB, 242], považuje Frege obratem za nutné rozvést, že *»Mont Blanc se svými sněžnými poli není částí myšlenky, že je Mont Blanc vyšší než 4 000 metrů. [...] Smysl slova “Měsíc” je částí myšlenky, že je Měsíc menší než Země. Měsíc sám (tj. význam slova “Měsíc”) není částí smyslu slova “Měsíc”; neboť pak by byl také částí myšlenky.«* [WB, 245] Russellova odpověď je více než výmluvná:

»Věřím, že Mont Blanc sám, přes všechna svá sněžná pole, je částí toho, co je vlastně tvrzeno ve větě “Mont Blanc je vyšší než 4 000 metrů”. Netvrdíme zde myšlenku, neboť ta je soukromé psychologické povahy: tvrzen je objekt myšlenky a tím je dle mého mínění jistý komplex (objektivní věta, mohli bychom říci), jehož součástí je Mont Blanc. Nepříznáme-li to, dospějeme k závěru, že o Mont Blancu samotném nevíme zhola nic. Proto pro mě význam věty není pravda, ale určitý komplex, jenž je (v daném případě) pravdivý.« [WB, 250sq]

Ve stručnosti lze tedy Russellův postoj shrnout asi takto: Fregovu dvojici smyslu a významu je nutné zredukovat pouze na pojem jediný, jímž je u největších výrazů v podstatě jejich význam fregovský. Větě pak odpovídá komplex významů výrazů dílčích, který také přebírá kognitivní roli f-smyslu – jinými slovy: je tím, čemu na výrazu rozumíme, a to proto, že máme přímou zkušenost s jeho konstituenty. Důvod pro tuto simplifikaci předkládá Russell jediný: podezřelou, neobjektivní povahu f-smyslu.

²²⁸⁾ Tato paralela vede někdy k tomu, že je Frege považován za atomistu ve sféře f-smyslu (*Coffa* [ST, 80sq]), pro což lze snad najít i oporu v přímém (či alespoň přímějším) vztahu smyslu k výrazu a jeho syntaktické struktuře. My jsme však jednak již dříve uvedli na pravou míru Fregovu řeč o skladbě výrazů známého smyslu do dosud neslyšených vět a pojali jsme ji jen jako výraz atomismu relativního. Sám Frege se však navíc výslovně vyjádřil tak, že *»rozkladem singulární myšlenky získáme části uzavřeného a nenasyceného druhu, které se sice osamoceně nevyskytují, avšak každá část jednoho druhu tvoří s každou druhého druhu myšlenku«* [EL_N, 204].

Ptá-li se o deset let později (1914) Jourdain Frega, *»zda ve světle toho, co se zdá být faktem, totiž že Russell ukázal, jak lze větu analyzovat do tvaru, v němž se o jménu předpokládá jen to, že má “Bedeutung” a nikoli “Sinn”, považujete “Sinn” za pouhou psychologickou vlastnost jména«* [WB, 126], můžeme tušit nejen to, že byla Russellova teorie obecně přijata, ale i to, že s ní musel být spojen podstatně komplikovanější výkon nežli jen prvoplánově realistický manévr proti psychologické sémantice.

6.1.1 Poznání deskripce

Nivelizace pojmové distinkce smyslu a významu s sebou přirozeně znovu přináší ty problémy, kvůli nimž byla zavedena: Aby mohla být objektivita (intersubjektivita) poznání garantována mimojazykovou povahou jeho předmětu (neboť *»jediná trvalá věc – pokud je jméno správně užíváno – je objekt, k němuž se jméno vztahuje«* [PP, 54]), je nutné přímou obeznámenost s oním předmětem spojit také s obeznámeností úplnou: *»Jsmeli obeznámeni s jednotlivinou, jsme s ní obeznámeni úplně [...].«* [RLA, 59] Porozumění významu věty vyřčené někým jiným je potom vysvětleno znalostí téhož mimojazykového (objektivního) komplexu – významu zmíněné věty.

Přirozená námitka směrem k Russellově teorii významu nyní zní: jak ale můžeme rozumět větám, v nichž se vyskytují jména předmětů, s kterými jsme se nikdy přímo nesetkali a které možná ani ›objektivně‹ neexistují či neexistovaly, které jsou také proto každému z nás prezentovány různě, a – abychom užili fregovské formulace – v čem vůbec spočívá rozdíl mezi větami “Scott je autorem *Waverleyho*” a “Scott je Scott”, je-li významem obou komplex tvořený týmiž komponentami? Russellovo řešení těchto problémů,²²⁹⁾ k němuž se také vztahuje výše uvedená otázka Jourdainova, je spjato s jeho naukou o deskripci, obecně známou až z technických fines prezentovaných roku 1905 v článku *On Denoting*. Klíčem k tomuto řešení byl opět Fregův vynález logické analýzy: To, že rozumíme větám, s významy jejichž konstituent nejsme obeznámeni přímo, poukazuje dle Russella pouze k tomu, že se nejedná o konstituenty v logickém slova smyslu. Skutečná (logická) struktura věty se od povrchové struktury liší:

»Jméno v úzkém logickém smyslu slova, s jednotlivinou jakožto významem, může být použito pouze na jednotlivinu, s níž je mluvčí obeznámen, neboť není možné jmenovat něco, s čím obeznámeni nejsme. [...] Nejsme obeznámeni se

²²⁹⁾ Russell v průběhu let zastával ve zmíněných otázkách řadu vzájemně si odporujících stanovisek, jejichž vývoj je zčásti vyličen in: *Coffa* [ST, k. 6].

Sókratem, a tudíž ho nemůžeme jmenovat. [...] Takto je velmi obtížné nalézt nějaký případ jména v přísné logickém smyslu. Jedinými slovy, která jsou takto užívána, jsou slova jako “toto” nebo “tamto”. Výraz “toto” lze užít jakožto jméno pro jednotlivinu, s níž jsme obeznámeni v daný okamžik.« [RLA, 56]

Sama o sobě by mohla být tato argumentace uváděna spíše jako *reductio ad absurdum* Russellovy teze o poznání přímou obeznámeností nežli na její podporu. To by však nesměla být kromě hlásání logické analýzy spojena také s konkrétními výsledky na tomto poli.

Zaměříme-li se na pojem označování (denotace), můžeme dle Russella rozlišit dva typy frází, jimiž lze označit předmět, a to (i) vlastní jméno (*proper name*) vztažené k předmětu přímou obeznámeností a (ii) určitou deskripci (*definite description*) popisující předmět jakožto ten jediný (*the so-and-so*) dané vlastnosti, a tedy bez podmínky besprostřední zkušenosti. Oběma těmito tzv. označujícími (singulárním) frázím odpovídají v Russellově pojetí dva typy poznání věcí: (i) již zmíněné poznání obeznámeností (*knowledge by acquaintance*) a (ii) poznání deskripcí (*knowledge by description*) [PP, k. 5]:

»Tvríme-li např. něco o Juliu Caesarovi, je zřejmé, že před naší myslí nestojí Julius Caesar sám, neboť s ním nejsme obeznámeni. V myslí máme nějakou deskripci Julia Caesara: “[ten] muž, jenž byl zavražděn 15. března”, “[ten] zakladatel Římské říše” nebo snad pouze “[ten] muž, jehož jméno bylo Julius Caesar”. (V poslední deskripci je Julius Caesar zvuk nebo tvar, s nímž jsme obeznámeni.) Takto tedy naše tvrzení neznamená přesně to, co se znamenat zdá, nýbrž cosi, co místo Julia Caesara obsahuje jeho deskripci, zcela složenou z jednotlivin a obecnin, s nimiž jsme obeznámeni. | Hlavní význam poznání deskripcí spočívá v tom, že nám umožňuje překonat hranice naší privátní zkušenosti.« [PP, 58sq]

Nejvýznamnějším specifikem poznání předmětů deskripcí – a vlastním jádrem Russellovy analýzy – je ovšem spjatost s tím, co Russell v protikladu k poznání věcí (*knowledge of things*) nazývá poznáním pravd (*knowledge of truths*) [PP, 44]: »O předmětu řekneme, že je “znám skrze deskripci”, jestliže víme, že je “ten jediný dané vlastnosti”, tj. když víme, že existuje jeden a pouze jeden předmět mající danou vlastnost [...].« [PP, 53] Poznání předmětu deskripcí je tedy vázáno na znalost vět potvrzujících, že je to předmět jediný. Jeho jedinečnost potom nutně vstupuje do vět, které toto poznání transparentně vyjadřují, tedy: logická struktura věty obsahující určitou deskripci zahrnuje tvrzení jedinečné existence předmětu dané vlastnosti.

Zapišeme-li symbolicky deskriptivní frázi “ta jediná věc, která je P” pro P libovolný predikát jako

$$ixPx,$$

pak Russellova analýza věty formy “ta jediná věc, která je P, je Q”, ve zkratce “Q(ixPx)”, vypadá takto:

$$\exists x(Px \wedge \forall y(Py \rightarrow y = x) \wedge Qx).$$

Logický rozdíl mezi větami Q(N) a Q(ixPx), kde N je jméno a ixPx určitá deskripce, je tedy markantní. Co do své logické formy představují obě gramaticky podobné věty tvrzení zcela odlišné stavby. Takto bude znít také Russellova odpověď na otázku po rozdílu vět jako

Scott je Scott

a Scott je autorem *Waverleyho*.

Předpokládáme-li, že “Scott” je vlastní jméno a “autor *Waverleyho*” určitá deskripce, pak mají obě tvrzení zcela odlišnou strukturu, neboť – uvážíme-li komplexní predikát “Scott = ξ ” – je první z nich prostou (tautologickou) rovností

$$\text{Scott} = (\text{Scott})$$

$$\approx \text{Scott} = \text{Scott},$$

zatímco druhé je tvrzením existenčním

$$\text{Scott} = (ix(\text{autor_}W(x)))$$

$$\approx \exists x(\text{autor_}W(x) \wedge \forall y(\text{autor_}W(y) \rightarrow y = x) \wedge \text{Scott} = (x)).$$

Právě spojitost s existencí učinila také v Russellových očích z teorie deskripce objev mimořádného filosofického významu. Věnujme proto nejprve otázce (tvrzení) existence menší logický exkurz.

6.1.2 Existence

Již zavedení kvantifikátoru do aparátu pojmového písma učinilo z existence téma, které si žádá alespoň povšechné zmínky. My jsme jej také v dosavadním výkladu zcela neignorovali a nepřímou jsme se mu věnovali ve vztahu k problému vyloučeného třetího v /5.2.3/ a problému substituční kvantifikace v /5.2.5/. Frege sám se otázkou existence, resp. existenčních výpovědí výslovně zabýval v *Grundlagen* v souvislosti s výpovědí číselnou (o čemž se ještě zmíníme v /6.2.3/) a podrobněji pak v nevydané rozmluvě s teologem Pünjerem, jejíž protokol se nachází v *Nachgelassene Schriften* spolu s rozvedením následující ›Streitfrage‹:

»Uvažme věty “*Tento stůl existuje*” a “*Existují stoly*”. Otázka nyní zní, zda lze se slovem “*existuje*” ve větě první spojovat tentýž obsah jako se slovem “*existují*” ve větě druhé.« [DE_N, 68]

Reformulujeme-li celý problém tak, že nás zajímá logický rozdíl mezi tvrzeními typu “N existuje” pro případ, kdy je N jméno pojmové a kdy jméno vlastní, mohlo by se zdát, že je jeho řešení obsaženo již v otázce samé, a proto se raději ptejme, zda v obou případech nehraje existence tutéž predikativní roli jako výraz “dřevěný” ve větách

stoly jsou dřevěné a tento stůl je dřevěný,

tedy zda onen logický rozdíl ve zmíněných tvrzeních existence není jen prostou obdobou rozdílu mezi elementární predikací a obecným soudem hypotetickým. (Srv. [DE_N, 68sq].) Fregova odpověď je dle očekávání záporná: na rozdíl od věty typu

lidé existují nedává věta Leo Sachse existuje

dobrý smysl. Důvody není obtížné najít. Předmět jakožto f-význam (pravdivostní potenciál) jmenného výrazu je ve své existenci (konstituci) určen pouze úspěšným, tj. jistě principy respektujícím ohodnocením určitého větného systému. Tvrzení existence předmětu N lze takto chápat jen dvěma možnými způsoby. Buďto (i) jakožto metajazykové vyjádření toho, že se konstituace systému, v němž výraz “N” figuruje, zdařila, tedy analogicky k tvrzení

výraz “N” má f-význam,

nebo (ii) předpokládat příslušná kritéria jakožto *a priori* daná (splněná) a v objektové řeči pak příslušnou větu vnímat coby explicitní vyjádření triviality typu

$$N = N$$

[DE_N, 66(88)], tj. jakožto přípis vlastnosti, kterou z interních důvodů splňuje libovolný f-význam vlastního jména, a kterou tedy nelze žádnému předmětu bezesporně odepřít. (Jestliže N neexistuje, čemu je potom vlastnost existence odepírána?) [DE_N, 70]

V případě věty “lidé existují” je tomu ovšem jinak, což možná nejprve zastírá fakt, že se takováto věta v přirozeném jazyce zpravidla nevyskytuje a setkáme se s ní spíše v podobě komplexnějších výrazů jako “létající ryby existují” či “létající lidé neexistují” apod. Logicky relevantní obsah existenční výpovědi tohoto typu neleží podle Frega v bezobsažném objektovém predikátu, ale *»ve formě částečného soudu. Každý částečný soud je soud existenční, ježž je možné převést do formy s frází “existuje”.* Např. “některá tělesa jsou lehká” je totéž co “existují lehká tělesa”, “někteří ptáci neumějí létat” je totéž co “existují ptáci, kteří neumějí létat” atd. Obtížnější je to v případě, kdy máme převést soud s “existuje” na soud částečný. Slovo “některý” nemá samo o sobě žádný smysl; je to formotvorné slovo jako “všichni”, “každý”, “žádný” atd., jež má

vykonávat svou logickou funkci v kontextu věty. Tato funkce spočívá v tom, že dává dva pojmy do určitého logického vztahu.« [DEN, 70]

Význam kvantifikátoru je tedy relací mezi dvěma pojmy.²³⁰⁾ Obecně se lze na kvantifikátor dívat jako na predikát n -ární. Typicky je však uvažován jen jako výraz unární, tedy ve významu pojmové vlastnosti, jejíž aplikaci pak zpravidla tvoří nějaký komplexní pojem, jako třeba ›lehká tělesa‹ či ›ptáci, kteří neumějí létat‹ atd. Ve vztahu k unárnímu kvantifikátoru se ostatní kvantifikátory nazývají kvantifikátory zobecněnými.

Začneme-li mluvit o vlastnostech a vztazích pojmů, jak jsme to právě učinili pro případ kvantifikátoru, doporučuje Frege naléhavě (znovu) uvážít následující rozlišení:

(1) *»Pojmy a předměty se nacházejí ve vztahu subsumpce: předmět spadá pod nějaký pojem; např. Jena je univerzitní město.*

[(2)] *Pojmy se většinou skládají z dílčích pojmů, pojmových znaků. Černý hedvábný šátek má znaky černý, hedvábný a šátek. Předmět spadající pod tento pojem má tyto znaky za vlastnosti. To, co je ve vztahu k pojmu znakem, je vlastností pod tento pojem spadajícího předmětu.*

[(3)] *Zcela odlišné od subsumpce je podřazení pojmu prvního stupně jinému pojmu prvního stupně, např. ve větě “každý čtverec je pravouhelník”. Znaky nadřazeného pojmu (pravouhelník) jsou také znaky pojmu podřazeného (čtverec).*

[(4)] *Řeknu-li “existuje alespoň jedna druhá odmocnina z čísla 4”, nevyprávám nic o čísle 2 či -2 , nýbrž o pojmu druhá odmocnina z čísla 4. Rovněž neudávám žádný znak tohoto pojmu, ale tento pojem již musí být ve vši úplnosti znám. Nevyzvedávám zde žádnou část pojmu, nýbrž udávám určitou jeho kvalitu, kterou se odlišuje např. od pojmu sudé prvočíslo větší než číslo 2. [...] Zcela podobně jako se Jena vztahuje k univerzitnímu městu, vztahuje se druhá odmocnina ze 4 k existenci. Máme zde vztah mezi pojmy, ale nikoli mezi pojmy prvního stupně jako u podřazení, nýbrž mezi pojmem prvního stupně a pojmem stupně druhého, vztah, který se podobá subsumpci předmětu pod pojem prvního stupně. [...] Můžeme říci, že pojem prvního stupně spadá (nikoli pod, ale) do pojmu druhého stupně. Rozdíl mezi pojmy prvního a druhého stupně je zrovna tak ostrý jako rozdíl mezi předměty a pojmy stupně prvního; neboť předmět nemůže nikdy zastupovat pojem; předmět tedy nemůže nikdy spadat*

²³⁰⁾ Degenerované případy lze uměle ošetřit: »[...] “existují lidé” je totéž co “existují lidé, kteří jsou sami se sebou totožní”, a totéž co “někteří lidé jsou sami se sebou totožní” nebo “některé samy se sebou totožné předměty jsou lidé”.« [DEN, 71]

pod pojem druhého stupně; nebylo by to nepravdivé, nýbrž nesmyslné.« [WB, 150sq]

Chápeme-li věty typu

$$\neg\forall x F(x), \quad \forall x \neg F(x), \quad \forall x \forall y F(x,y), \quad \neg\forall x \begin{array}{l} F(x) \\ \neg G(x) \end{array} \quad \text{atd.}$$

jako příklady aplikace kvantifikátorů coby predikátů druhého řádu

$$\forall x \Phi(x), \quad \text{resp.} \quad \exists x \{\Phi(x), \Psi(x)\}$$

na predikáty $F(\zeta)$, $G(\zeta)$ (pro Φ , Ψ speciální proměnné za predikáty řádu prvního, M , D symboly (komplexních) kvantifikátorů a x proměnnou kvantifikátorem vázanou), vystupuje netriviální pojetí existenčního tvrzení zřetelně vpřed. Podobně jako kdysi Kant v odmítnutí ontologického důkazu Boží existence, v němž je tato odvozena z pojmu nejdokonalejší bytosti, který – aby tomuto vymezení analyticky, tj. z definice dostal – musí údajně zahrnovat i znak existence, popírá Frege,²³¹ že by (netriviální) existence mohla být znakem pojmu (prvního řádu), a dodává, že má-li být nazývána (netriviální) vlastností, pak nikoli vlastností předmětů, ale pojmů. Ve větě $\exists x.F(x)$ však není tvrzena existence pojmu k predikátu $F(\zeta)$, nýbrž existence předmětů pod tento pojem spadajících, tj. jeho neprázdnost. Na tom ovšem nic problematického není, neboť konstitutivní principy WP, LP a ASP připouštějí i takové ohodnocení větného systému, v němž je věť $F(N)$ přiřazena hodnota nepravda pro každé N substitovatelné, stejně jako ohodnocení, při němž tomu tak není.

6.1.3 Presupozice

Ve věci existenčních tvrzení můžeme být opět svědky toho, jak Russell akceptuje obecně logické výsledky Fregovy analýzy, aby z nich posléze vyvodil závěry pro Frege zcela nepřijatelné. Russell na jednu stranu souhlasí s tím, že tvrdit (ne)existenci předmětu nemá smysl [RLA, 111], »protože nelze mít konstituentu faktu [proposition], která v něm není« [RLA, 99]. Na druhou stranu mu jeho radikálně-empirické pojetí poznání dovoluje – ba přímo jej zavazuje – o věcech přímo nezakoušených pochybovat. Věty jako “Romulus neexistoval” či “Pýthagorás existoval” proto smysl mít musí.

Myšlenka poznání deskripcí vytrhla Russellovi trn z paty. Singulární výraz, vyskytující se ve smysluplných existenčních větách typu “ N (ne)existuje”, není podle ní totiž jméno:

²³¹ Frege na Kantovu zásluhu o logickou analýzu pojmu existence upozorňuje v jednom z dopisů Peanovi – viz [WB, 176].

»Kdyby to bylo jméno, otázka existence by vůbec nevznikla, protože jméno musí buď něco jmenovat, nebo to není jméno, a neexistuje-li žádná osoba jako Romulus, nemůžeme mít jméno pro člověka, který není, takže jednoduché slovo "Romulus" je vlastně druh redukované či zkrácené deskripce, a považujeme-li jej za jméno, dostaneme se do logických potíží. Uvědomíme-li si, že je to deskripce, uvědomíme si zároveň, že každá věta [proposition] o Romulovi ve skutečnosti zavádí větnou funkci [propositional function] obsahující deskripci jako (dejme tomu) "x byl nazýván 'Romulus'". Takto jsme okamžitě přivedeni k větné funkci, a řekneme-li "Romulus neexistoval", míníme tím, že tato větná funkce není pravdivá pro žádnou hodnotu proměnné x.« [RLA, 100sq]

Ve světle předchozí kapitoly vidíme, že pointa celého Russellova výkladu spočívá v převedení uvažovaných vět z problematické kategorie tvrzení individuální existence na výrok neprázdnosti jistého pojmu. »Řeknu-li "Autor Waverleyho existuje", míním tím, že existuje entita c taková, že "x napsal Waverleyho" je pravdivé, když x je c, a nepravdivé, když x není c. "Autor Waverleyho" jakožto konstituenta zde zcela zmizel, takže když řeknu "Autor Waverleyho existuje", neříkám nic o autoru Waverleyho.« [RLA, 108] Tento závěr se týká větného užití deskripce obecně: »Vyskytuje-li se deskripce [...] ve větě, není tam žádná konstituenta, která by jí odpovídala jakožto celku. Ve správné analýze věty je deskripce rozložena a mizí.« [RLA, 105] Deskripce je takto tím, čemu Russell říká *n e ú p l n ý s y m b o l*, »věc, která nemá význam samostatně, ale pouze v kontextu« [RLA, 111].

Fregovo pojetí určité deskripce porovnáno s Russellovým vykazuje opět na první pohled možná až nápadně shodné rysy, bližší zkoumání nás však přesvědčí o tom, že je výrazem zcela odlišné perspektivy v náhledu na věc. Frege deskripci uvažuje v souvislosti s tím, co nazývá ›definici předmětu pomocí pojmu, pod něž spadá‹:

»Výraz "[ten] největší pravý zlomek" nemá např. žádný obsah, protože určitý člen si zde nárokuje odkaz k určitému předmětu. Oproti tomu pojem "zlomek, který je menší než 1 a má tu vlastnost, že žádný zlomek menší než jedna není větší než on", je zcela neproblematický a k důkazu toho, že žádný takový zlomek neexistuje, tento pojem dokonce potřebujeme, ačkoli obsahuje spor. Kdybychom však tímto pojmem chtěli určit předmět, který pod něj spadá, bylo by předem nutné ukázat dvojí:

1. že pod tento pojem nějaký předmět spadá,
2. že pod něj spadá pouze jeden jediný předmět.

Jelikož je již první věta nepravdivá, nemá výraz “největší pravý zlomek” smysl.« [GL, pozn. § 74]

Z textu lze seznat, že pro Frege nepředstavuje deskripce únikový prostředek z pasti, do níž se Russell dostal svým dogmatickým lpěním na poznání přímou obeznámeností, ale je pro něj především nástrojem významného rozšíření oboru řeči o nová jména utvářená z výrazů kategorie $t \succ s$, tj. predikátů, a pomocných výrazů vyjadřujících nárok na odkaz právě k jednomu předmětu. Tento nárok (*referential purport*) však nemusí znamenat automatický úspěch (*referential succes*), a to v následujícím smyslu: Neplatí-li jedna z vět

(S1) $\exists x.Px$,

(S2) $\exists x(Px \wedge \forall y(Py \rightarrow x = y))$,

pak předmětný obor, jehož jmenný systém je rozšířen o výraz $ixPx$, přestává splňovat WP. (Neplatí-li $\exists x.Px$, pak musí platit $\neg.\exists xPx$, zároveň by však mělo platit $P(ixPx)$, tedy i $\exists x.Px$; analogicky pro druhý případ.) Referenční selhání, neúspěch, nesouvisí tedy s nepřímým, zprostředkovaným poznáním deskripcí určovaného předmětu, ale s principiálním (ne)splněním jistých plošných (sémanticko-holistických) formálních kritérií, bez jejichž platnosti postrádá větné užití určitých deskripcí v roli substituovatelných termů zcela smysl. (Bereme-li ovšem jako Frege za *kritérium smyslu* právě splnění WP.) Výše zmíněné podmínky existence a jedinečnosti S1 a S2 nejsou tedy jako u Russella součástí tvrzení obsahujícího deskripci, tj. nejsou v něm explicitně *spolutvrzeny*, nýbrž jsou tímto tvrzením *presuponovány*. – Hrají roli předpokladů (presupozic) smysluplného větného užití určité deskripce, resp. jejího přidání do třídy substituovatelných jmen.²³² Pouze ty určité deskripce, pro něž platí S1 a S2, budeme nazývat (sémanticky) *k o r e k t n í m i*. Analýzou věty $Q(ixPx)$ coby tvrzení $\exists x(Px \wedge \forall y(Py \rightarrow y = x) \wedge Qx)$ nás Russell sice odkazuje ke zmíněným presupozicím zbavuje, ovšem za cenu toho, že výraz $ixPx$ zcela vyloučí ze třídy singulárních výrazů, a to i v případě, že jsou zmíněné podmínky splněny! Ani tehdy není tedy věta $Q(ixPx)$ výpovědí o předmětu $ixPx$ a jejím popřením mu jednoduše neodpíráme vlastnost Q, nýbrž tvrdíme disjunkci, podle níž předmět x takový, že Px , buďto neexistuje, nebo není jediný, nebo pro něj ne-

²³² Je známo, že v tomto bodě se Strawsonova analýza užití určitých deskripcí podaná v rámci kritiky koncepce Russellovy in: *Strawson* [⟨1950⟩] shoduje s analýzou Fregovou. Té také vyhovuje Strawsonova explikace pojmu presupozice, jak byla později formulována např. in: *Strawson* [⟨1954⟩]. Podle Strawsona: A *presuponuje* B (B je presuponováno A) *tehdy a jen tehdy, jestliže* A je buď pravdivé, nebo nepravdivé (tj. splňuje WP) pouze za předpokladu pravdivosti B.

platí Qx. Ve vztahu k problému předmětné konstituce tak nepředstavuje Russellova teorie poznání deskripční žádný pokrok, neboť otázku předmětné reference neřeší, nýbrž odsouvá směrem k danosti oboru předmětné proměnné x, resp. y. Neotřesitelná víra v poznání předmětů přímou obeznámeností, tedy neschopnost prohlédnout podstatně holistickou povahu předmětné reference, přivádí Russella přes redukci větné role vlastního jména na prosté zastupování individuí postupně až k úplnému znehodnocení tvrzení rovnosti:

»Jméno samo je pouhým prostředkem ukázání na věc a nevyskytuje se v tom, co tvrdíme, proto má-li jedna věc dvě jména, tvrdíme pokaždé totéž, lhostejno jaké z obou jmen použijeme, za předpokladu, že to jsou opravdu jména, a nikoli skryté deskripce. | Takto máme jen dvě alternativy. Je-li “c” jméno, je věta “Scott je c” buďto nepravdivá, nebo tautologická. Ale věta “Scott je autor Waverleyho” není ani to, ani ono, a proto není totožná s žádnou větou formy “Scott je c”, kde “c” je jméno. Toto je jiný způsob, jak ukázat, že se deskripce od jména liší.« [RLA, 103]

Tomu, kdo četl Fregův článek *Über Sinn und Bedeutung* prizmatem logické konstituce předmětů, tedy kdo nahlédl konstitutivní roli identity a její spjatost s kategorií f-smyslu, jistě nečiní problém odmítnout Russellovu argumentaci jako nepřesvědčivou a mylnou. Každý předmět je výsledkem položení různých reprezentací jakožto reprezentací téhož. To, v čem se jméno od korektní deskripce liší, není naše obeznámenost s označovaným předmětem, která je pouze otázkou náhody, tedy subjektivní, a ve vztahu k neempirickým předmětům, jako jsou třeba čísla, nedává ani smysl, ale odlišné postavení obou typů výrazů v celku předmětné konstituce.

6.1.4 Kanonický designátor

Jméno je výraz primární, konstituující, vytyčující hranice oboru – *o existenci jím označovaného předmětu proto nelze pochybovat*. Určitá deskripce oproti tomu již jistý předmětný obor *předpokládá* – k němu, resp. k systému substitovatelných, předměty konstituujících jmen se také vztahuje vázaná proměnná v podmínkách S1, S2.²³³⁾ Toto je zároveň *logická, objektivní charakterizace* obou typů výrazů.²³⁴⁾

²³³⁾ Srv. *Stekeler-Weithofer* [GPL, § 10.1].

²³⁴⁾ Abychom, jak bývá na tomto místě zvykem, hovořili v názorných příkladech: *polka's gibt nur a Kaiserstadt, 's gibt nur a Wien* nás zcela nadbytečně informuje o jedinečné existenci Vídně, zatímco v tanci tvrzená jedinečná existence císařského města představuje cenné rozšíření našich znalostí habsburské monarchie.

Je-li výraz $ixPx$ korektní deskripce systému, znamená to, že existuje standardní jméno N takové, že platí

(T1) $P(N)$,

(T2) $P(M) \rightarrow M = N$, pro M libovolné.

Výraz $ixPx$ lze nyní začlenit do vztahu s ostatními jmény jednoduše tak, že větě $ixPx = N$ přiřadíme W a ohodnocení dalších vět, v nichž se výraz $ixPx$ vyskytuje, pak ponecháme výhradně konstitutivním principům WP , LP a ASP . Jelikož ohodnocení existenčních vět jako $S1$, $S2$ nezávisí na efektivním udání jména N takového, že platí $T1$, $T2$, je zde zjevně podstatná pouze principiální existence standardního jména, jakési pevné adresy (kanonického designátoru) v prostoru toho, o čem je řeč a k čemu lze korektní deskripci *via* pravdivostní podmínky artikulované presupozicemi $S1$, $S2$ jednoznačně vztáhnout.²³⁵⁾

K a n o n i c k é d e s i g n á t o r y, dláždící předmětný obor v celé jeho šíři, se co do pestrosti svého určení obor od oboru liší, jak se jen může lišit vymezení možného jména. Tak pro obor přirozených čísel jsou jimi *schematicky* generovatelné číslovky “1”, “2”, “3”, ..., pro případ čísel reálných (např.) *indefinitně* charakterizovaná jména koncentrovaných posloupností racionálních čísel,²³⁶⁾ fyzické předměty jsou zaváděny udáním časoprostorových souřadnic spolu s doprovodným sortálním predikátem (nestačí říci ›toto zde‹, ale ›tento králík zde‹) atd. Na pozadí této pestrosti lze velmi snadno nahlédnout, v jakém smyslu nespočívá rozdíl jména a deskripce v (*absolutní*) míře našeho přístupu k relevantním smyslovým stimulům či síle jejich působení na naši mysl ve vzpomínkách, ale především v rozdílné úloze těchto dvou výrazových typů při konstituci kategoriálně odlišných předmětných oborů, a proč je tedy rozdílem *relativním*. Podstatným znakem jmenného výrazu není to, jak je složitý či zda ›konotuje‹. Vždyť např. u jmen reálných čísel jakožto číselných posloupností je třeba nejprve prokázat vlastnost koncentrovanosti, tedy mít relativně náročnou *matematickou znalost*, a lze jim proto jen stěží upřít (od jména k jménu se lišící) (f-)smysl.

Jelikož otázka naší obeznamenosti s (empirickým) předmětem není – jak upozornil Frege – převeditelná na znalost jeho jediné reprezentace, ale celého systému reprezentací, nemůže hrát podstatnou roli ani v úvahách o logické konsti-

²³⁵⁾ Srv. *Brandom* [ME, 440sqq].

²³⁶⁾ Číselná posloupnost f racionálních čísel se nazývá *k o n c e n t r o v a n á* (Cauchyho), jestliže platí:

$$\forall \varepsilon \exists N \forall m, n (m > N \wedge n > N \rightarrow |f(m) - f(n)| < \varepsilon),$$

kde N , m , n probíhají přes přirozená kladná čísla, zatímco ε přes kladná racionální.

tuci předmětů, tj. v otázkách konstrukce formální sémantiky. Jako epistemologický problém náleží spíše nějaké období Kantovy transcendentální analytiky. Omezení termínu označování (denotace), tj. v důsledku významu vůbec na předměty vnějšího světa, vnímané smysly, je pouze protežováním jednoho diskurzu na úkor druhých, pro což lze možná najít důvody *pragmatické*, v žádném případě ale *logické* ospravedlnění. Každá smysluplná řeč vyžaduje kategorii výrazů, jimiž jsou, obrazně řečeno, fixovány ›postavy‹ příběhu a jejichž f-význam z principiálních důvodů zpochybnit nelze. Z *logického* hlediska se tak řeč o *skutečných* lidech či předmětech pramálo liší od libovolné *fikce*, neboť nám (pro daný okamžik) záleží pouze na tom, *jak* jsou určitá slova užívána, nikoli zda se toto užití osvědčí tváří v tvář další možné zkušenosti a bude jej případně potřeba změnit. (Vyškrtnutí “Pýthagora” či “Mojžíše” ze systému vlastních jmen historických osobností apod.) Jediné, co nás na porozumění příběhu – na jeho sémantice – zajímá, je jeho logická struktura, nikoli osobní, empirická zkušenost vypravěče. V některých výrazech nejprve rozpoznáváme vlastní jména protagonistů, řekněme:

Sherlock Holmes,
přízračný pes,
Sir Henry,

Sir Charles Baskerville,
vousatý muž v bryčce,
entomolog Stapleton,

v jiných určité deskripce:

dědic baskervillského panství,

vrah Sira Charlese.

Explicitně vyřčené obvykle implicitně zúplňujeme – jednak v souladu s našimi logickými pravidly, jako je např. LP, a jednak podle pravidel analytických (např. pravidel pro užití predikátorů) – o věty, které z něj logicky nebo materiálně vyplývají. Zpravidla potom předpokládáme, že příběh popisuje jakýsi minimální model, tj. předmětný obor, zahrnující pouze objekty výslovně pojmenované, nikoli třeba matku Sherlocka Holmese, a doplňující distribuci v příběhu uvažovaných vlastností, vztahů a rovností tak, že nerozhodnutým případům přiřadí hodnotu F. V závěru příběhu např. zjistíme, že kromě Sira Henryho je synovcem, a tedy i dědicem Sira Charlese také Jack Stapleton, jenž byl i oním tajemným mužem v bryčce, maskován falešným plnovousem. Jelikož Sir Charles zemřel na srdeční mrtvici po spatření hrůzostrašného psa, závisí na tom, jak rozumíme pojmu ›vražda‹, zda byli vrazi dva (pes a Stapleton, který jej natřel fosforem), jeden, či dokonce žádný. Příběh – redukováná verze Doylova *Psa baskervillského* – má v každém případě přesně pět postav, první deskripce je nekorektní, u druhé nejspíš připustíme korektnost (*vrah* je Stapleton). Bylo-li dále třeba řečeno, že Sir Charles a Sherlock Holmes jsou vášniví

kuřáci, o Siru Henrym se však v tomto ohledu mlčí, pak předpokládáme, že vášnivý kuřák není atd.

Na text se ovšem můžeme dívat také jinak, totiž jako na část delšího vyprávění, které jej dále rozvíjí a zpřesňuje. Takto pojatý příběh pak nepopisuje jeden jediný model, ale celou třídu modelů – možných stavů světa k tomuto textu relativizovaných, představujících jeho potenciální zúplnění.²³⁷⁾

6.1.5 Deskriptor

Zaměříme-li se na určitou deskripci optikou distinkce (f-)smyslu a (f-)významu, je zjevné, že to, co Frege v pasáži z *Grundlagen*, kterou jsme citovali v /6.1.3/, nekorektním deskripcím odpírá a o čem hovoří jako o »smyslu«, se týká jejich užití ve větách v souladu s pravdivostním principem WP, a souvisí tedy spíše s f-významem nežli s f-smyslem věty. Možné konfuze jdou zcela na vrub časové následnosti rozlišení z článku *Über Sinn und Bedeutung* po nedi-ferencované terminologii *Grundlagen*. Nejasnosti lze však velmi snadno eliminovat: Pouze korektní deskripce pojmenovává právě jeden předmět oboru a ten je také jejím f-významem. Způsob určení (danosti) potenciálního denotátu je ovšem jednoznačně zachycen již presupozicemi S1, S2, a to nezávisle na tom, zda je deskripce korektní (úspěšná) či nikoli, tj. nezávisle na tom, jaký je zrovna předpokládáný předmětný obor (»možný svět«). – I nekorektní deskripce má proto f-smysl:

»Snad můžeme dodat, že každé gramaticky správně utvořené jméno má vždy smysl. Avšak tím ještě není řečeno, zda tomuto smyslu odpovídá také význam. Slova „nebeské těleso nejvíce vzdálené od Země“ mají sice smysl, zda ale mají význam, je velmi pochybné.« [SB, 28]

Obecně pojatá smysluplnost korektních deskripcí, jak o ní Frege hovoří v *Grundlagen*, resp. jak ji tam upírá deskripcím nekorektním, je záležitostí jejich výskytu ve větách splňujících WP. S ohledem na zaměnitelnost, resp. skladebnost f-významu nelze větám s nekorektními deskripcemi přiznat právě jednu z pravdivostních hodnot. Oproti tomu f-smyslu takovéto věty netraťí.

Výskyt výrazů, jež si svojí formou, f-smyslem, neúspěšně nárokují f-význam, je podle Fregy dán *»nedokonaloostí jazyka, již není ostatně prosta ani symbolická řeč analýzy: také v ní se vyskytují spojení symbolů, která vzbuzují zdání, že něco znamenají, avšak nemají přinejmenším do této doby žádný význam, např. divergentní nekonečná posloupnost. Tomu se lze vyhnout např. zvláštní*

²³⁷⁾ Srv. *Stekeler-Weithofer* [1996a, § 4].

konvencí, podle níž znamená divergentní nekonečná posloupnost číslo 0. Od logicky dokonalého jazyka (pojmového písma) je třeba požadovat, aby každý výraz, jenž je utvořen z již zavedených symbolů gramaticky správným způsobem, také skutečně označoval nějaký předmět, a aby jako vlastní jméno nebyl zaveden žádný symbol, kterému by nebyl garantován význam.» [SB, 41]

Označuje-li Russell a spolu s ním i mnozí jiní filosofové Fregovu konvenci dodatečného ošetření neúspěšné deskripce jedinečným denotátem za »*umělou a nevystihující přesnou analýzu daného problému*«,²³⁸⁾ je to jen neuvážením specifik Fregovy logické koncepce. V jejím rámci deskripce především představuje velice silný prostředek rozšíření oboru vlastních jmen. Podmínka existence a jedinečnosti ovšem faktický průběh tohoto rozšíření podstatně komplikuje: To, zda je výraz korektní deskripcí, je záležitostí sémantickou, a evidentně nerozhodnutelnou. Budeme-li tedy jednoduše předpokládat, že třída substituovatelných jmen sestává navíc i ze *všech korektních deskripcí* (či jako Hilbert a Bernays: ze všech *dokazatelně korektních deskripcí*),²³⁹⁾ nemáme k dispozici žádný algoritmus, jenž by nám dovolil v obecném případě rozhodnout, zda daný výraz či věta náleží systému pojmového písma, a (syntaktická) transparence, s níž byla konstrukce Fregova pojmospisu ohlašována, tak přichází vniveč.

Právě proto, aby mohla být deskripce začleněna do systému pojmového písma *efektivně*, chápe ji Frege jednoduše jakožto výrazotvorný operátor – *d e s k r i p t o r*, jenž aplikován na libovolný predikát dá jako výsledek správně utvořené jméno. Jedná se tedy o výraz kategorie $(t \succ S) \succ t$. Na úrovni fregovské sémantiky to ovšem znamená, že f-význam deskriptoru přiřazuje nějaký předmět nejen pojům, pod něž spadá jeden jediný předmět, ale pojům všem. To je v *Grundgesetze* řešeno konvencí, podle níž je deskripcí *pojmu* přiřazen (i) v případě, že jsou splněny podmínky S1 a S2, *předmět pod něj spadající*, (ii) není-li splněna podmínka existence S1, *prázdná třída*, a (iii) není-li splněna podmínka jedinečnosti S2, *třída předmětů pod něj spadajících*. [GG₁, § 11]²⁴⁰⁾

²³⁸⁾ Russell [*<1905>*].

²³⁹⁾ Hilbert-Bernays [*<1934>*, 385]; k výkladu různých metod užití určitých deskripcí srv. Carnap [MN, § 7, 8].

²⁴⁰⁾ V *Grundgesetze* je ovšem deskripce definována nikoli jako operace na pojmech, nýbrž na jejich rozsazích (resp. průbězích hodnot). To však v tuto chvíli nehraje žádnou roli.

Takto by tedy měl být zajištěn denotát každé určité deskripci, ale pozor: pouze za podmínky, že se zdaří ohodnocení celého větného systému, v němž je vytváření nových jmen touto ›neomezenou‹ deskripcí povoleno. Vidina hladkého průběhu takto popsané valuace se však zdá být ohrožena výskytem stejného jevu, na nějž později narazíme při vytváření jmen tříd (rozsahů pojmu) ›neomezenou‹ abstrakcí, na které, jak uvidíme, Fregův systém historicky ztroskotal. Jelikož Frege uvažuje jen jediný univerzum diskurzu s jediným typem předmětné proměnné, znamená to, že předmět určený deskripcí $ixPx$ musí být již předem obsažen v oboru hodnot proměnné x predikátu P – takto je tedy specifikován *s odkazem k sobě samotnému*. To by na jednu stranu nemělo překvapit – vždyť zde hovoříme o určité deskripci charakterizované v protikladu ke kanonickým designátorům právě s odkazem ke stávajícímu oboru předmětů, k němuž žádné předměty ›nepřidává‹. Zavedením výše uvedené konvence pro f -význam deskriptoru se však situace poněkud komplikuje, neboť v ní předpokládáme, že jsou v uvažovaném předmětném oboru také třídy. Tím se však dostáváme opět k problému abstrakce tříd, a celou věc tedy musíme odložit na později.

6.1.6 Mýtus subjektivního

Je vlastně ironické, že to byla právě výtka subjektivity, s níž Russell Fregovu teorii (f -)smyslu odmítl, když nedokázal sám udat přesná a objektivní kritéria toho, kdy jsme oprávněni říci, že předmět skutečně známe (jak moc a z jaké vzdálenosti si jej musíme ›očíchat‹), a kdy je již naše znalost zprostředkovaná. Vágnost řeči o obeznamenosti dovedla Russella nakonec k názoru, že ani deixí předvedené předměty jako ›tento stůl‹ nám nejsou dány přímo, »*neboť můžeme smysluplně pochybovat o tom, zda tam stůl vůbec je, zatímco o smyslových datech pochybovat nemůžeme. Mé poznání stolu je tím, co budu nazývat “poznání deskripcí”*. Stůl je “fyzický objekt, který způsobuje taková a taková smyslová data.”« [PP, 47] Jistota smyslových dat má tedy být nejspíš jistotou subjektivní (privátní) zkušenosti.

Kdybychom z Fregových pozic chtěli nyní jen heslem zhodnotit příčiny tohoto smutného konce Russellovy ›realistické‹ sémantiky v rozboru smyslových počítků, bylo by nejnazší citovat Kantovu inverzi známé Occamovy břitvy, tzv. zákon specifikace: ›*neredukuj rozmanitost entit více nežli třeba*‹ (*entium varietates non temere esse minuendas*),²⁴¹ jenž by mohl být ostatně uváděn jako kámen úrazu většiny empiristů. Chatrnost základní konceptuální výbavy při-

²⁴¹ Viz [KrV, A656/B684].

vádí totiž naivní realismus na stejné dno jako psychologismus – chybí zde rozdíl mezi *myšlením* a *představováním*, mezi *smyslem* a *představou*. V komentáři ke knize Husserlově, jež se jako spisy Russellovy také utápěla v problémech přímého a spolehlivého poznání,²⁴²⁾ Frege k této nivelizaci píše:

»Vše je převedeno na subjektivní. Ale právě tím, že není činěn rozdíl mezi subjektivním a objektivním, dostává také obráceně subjektivní nádech objektivního. Hovoří se např. o té či oné představě, jako bychom je mohli – oproštěny od svých nositelů – vidět na veřejnosti. A přece nemá nikdo představu někoho jiného, nýbrž jen svoji vlastní, a nikdo dokonce ani neví, do jaké míry se jeho představa – např. červeného – shoduje s představou někoho jiného; neboť to, co je vlastní představě, kterou spojují se slovem “červený”, nemohu vyjádřit [slovy!].« [RPA, 317]

Smyslový vjem, vzpomínka, představa, to všechno je něco, co vyžaduje nositele, co (nějaký konkrétní) člověk má, co ale právě proto *nemůže sdílet* s jinými. »K tomu by bylo zapotřebí sjednotit smyslové vjemy náležící dvěma různým vědomím ve vědomí jediném. I kdyby ale bylo možné nechat z jednoho vědomí představu zmizet a v druhém ji objevit, přece zůstává ještě nezodpovězená otázka, zda by se jednalo o tutéž představu.« [G, 67] Právě nepřítomnost jakéhokoli kritéria identity je tím, co (z gramatiky tohoto slova) dává představě přívlástek *s u b j e k t i v n í*. Jistě, můžeme říci třeba: “mají tutéž představu”, totiž ve smyslu: “mají představu téhož”, pak ale máme na mysli typ, cosi intersubjektivního, co z definice spojeno se soudem “toto je P” dovoluje zmíněné tvrzení popřít či potvrdit. O výroku “mám takové a takové smyslové vjemy” lze potom v principu *smysluplně pochybovat* zrovna tak jako o výroku “toto je stůl”, neboť je z definice přístupný porozumění druhých! Potom však není nejmenšího metodologického důvodu, proč výroky týkající se smyslových dat upřednostňovat výrokům o stolech. A na druhou stranu: chceme-li si takovýto výrok ponechat v bezpečí obsahu našeho vědomí, nelze jej zase – jak zdůrazňuje Frege – vůbec artikulovat slovy. Sotva lze číst výše zmíněnou Fregovu argumentaci bez reminiscence na četné pasáže Wittgensteinových *Filosofických zkoumání*.²⁴³⁾

²⁴²⁾ Srv. *Coffa* [ST, 101sq].

²⁴³⁾ Srv. [PU, § 370sq] k užití slova “představa” (»*Otázka stojí: jak srovnáváme představy.*« [PU, § 376]) a [PU, § 244sq] k analýze pojmu bolesti (»*Druhý nemůže mít moje bolesti.*” – *Které jsou moje bolesti? Co je zde kritériem identity? Přemýšlej, díky čemu je možné v případě fyzikálních předmětů říci: “Tato židle není tatáž, kterou jsi včera viděl, ale vypadá přesně tak.”* [...]« [PU, § 253]). K výše řečenému je vhodné

Velká, ne-li převážná část naší znalosti světa je znalost zprostředkovaná, nepřímá. Přívlastek ›objektivní‹ jí ale můžeme upřít jen stěží, tedy alespoň nechceme-li jej zcela pokazit v jeho dobrém a úctyhodném významu, jak se to povedlo Russellovi s jeho finální redukcí objektivního – v původně zamýšleném významu obecně (smyslům!) přístupného – na subjektivní coby nezprostředkované v ryzím významu tohoto slova. Klíč ke zdůvodnění objektivní poznání neleží ale ve zkoumání míry jeho zprostředkovanosti, nýbrž v samotném faktu, že bylo vůbec zprostředkováno a jak se to stalo, totiž *jazykem* a v *jazyce*. Podstatu tohoto novodobého koperníkovského obratu ve filosofii, který by bezpochyby mohl nést Fregovo jméno, pozoruhodně vyjadřuje Davidson, když v jednom ze svých rozhovorů říká:

»Empiristé [...] se domnívají, že člověk nejprve ví, co je v jeho vlastní mysli, pak, má-li štěstí, co je ve vnějším světě, a pak, má-li ještě větší štěstí, zjistí, co je v mysli někoho jiného. Já to vidím jinak. Nejprve zjistíme, co je v mysli někoho jiného, a tím máme i vše ostatní.«²⁴⁴

Nutná objektivita (intersubjektivita) významu, jíž vnitřní obrazy, vzpomínky a představy z definice nedostačují, nás také přivádí k hlubšímu náhledu nutnosti oddělení logických od empirických zkoumání, rozdílu mezi formální, logickou sémantikou a běžnou předmětnou řečí, mezi f-významem jména a jeho případným nositelem: Z logického hlediska se Sherlock Holmes od Alberta Einsteina neliší – jsou jenom postavami odlišných příběhů²⁴⁵) s více či méně ostře formulovanými intersubjektivními kritérii identity. Právě z tohoto důvodu také výraz “Sherlock Holmes” označuje objektivní předmět – f-význam jmenné fráze Doylových povídek –, jehož oblíba může vyvolat srovnání rozvášněných čtenářů stejně jako polednice neurózu, a nikoli tedy jen pouhou představu, jež by ostatně mohla jen stěží kouřit dýmku nebo psát monografie o různých druzích tabákového popela. Je totiž rozdíl mezi *něčí* představou (např. některého z čtenářů) a představou *něčeho* – totiž osoby detektiva jistých vlastností. Totéž lze říci o abstraktních předmětech matematiky: »Nikoli moje představa je čís-

dotat, že to byl již Otto Neurath, kdo se vzeprl pozitivistické ideji atomárních (tzv. protokolárních) sentencí, jež není třeba verifikovat (neboť se údajně opírají o absolutně jistou, protože bezprostřední zkušenost), a to s poukazem na to, že »každý jazyk jako takový je inter-subjektivní«, a tedy podrobitelný korekci. Viz Neurath [1932].

²⁴⁴ Borradori [1994], 50; citát převzat z Peregrin [VS, 166].

²⁴⁵ Což ovšem není nutné chápat absolutně: můžeme třeba uvažovat v diskurzu toho, zda byl Sherlock Holmes lepší houslista nežli Albert Einstein, když víme, že detektiv byl lepší určitě.

lo, nýbrž já sám si vytvářím jednu či vícero představ o jednom a tomtéž čísle, nebo se o to alespoň pokouším. [...] Pro povahu zkoumání představuje zásadní rozdíl, je-li jeho předmětem představa čísla samotná nebo zda je tato pouze představou o nějakém vlastním předmětu.» [RPA, 331-332]

Na rozdíl od představy není (f)-smysl slov majetkem jednotlivce, stejně jako nemůže být majetkem jednotlivce pravda (f-význam věty). *»Kdyby byl smysl jména něco subjektivního, byl by subjektivním také smysl věty, v němž se toto jméno vyskytuje, tedy myšlenka, a myšlenka, již si tento člověk spojuje s onou větou, by se lišila od myšlenky, s níž si ji spojuje někdo jiný; společný poklad myšlenek, společná věda by pak byla nemožná. Spor mezi tím, co řekl ten a co zas ten druhý, byl by nemožný, neboť by každý vyjadřoval myšlenku svoji.« [WB, 128]*

Myšlenka, f-smysl je něčím veřejně přístupným, *»nenáleží jednotlivci tak výlučně jako představa představujícímu si, nýbrž je všem těm, kteří ji chápou, stejným způsobem k dispozici« [L₂, 145]. Sdílí-li ale myšlenka s fyzickými předměty obecnou přístupnost, přesto se od nich liší: »Myšlenky není možné vidět, nahmatat, nevoní ani nechutnají a není je ani slyšet.« [G, 67] To ovšem platí stejnou měrou o třídách (množinách) předmětů, Russellových konglomerátech významů, nemluvě o číslech a abstraktních předmětech obecně, jejichž objektivitu zpochybňovat nechceme. Je proto nutné diferencovat:*

»Rozlišuji objektivní od toho, na co si je možné sáhnout rukou, od prostorového, skutečného. Zemská osa či střed hmoty slunečního systému jsou objektivní, ale nerad bych je nazýval skutečnými tak jako samotnou Zemi.« [GL, § 26]

Jelikož tedy *»myšlenky nejsou ani věci vnějšího světa«, světa skutečných předmětů, »ani představy«, tj. obyvatelé říše subjektivního, »musí být uznána třetí říše. Její obyvatelé mají společně s představami to, že nemohou být vnímání smysly, s věcmi oproti tomu to, že nepotřebují nositele, k jehož obsahu vědomí náleží.« [G, 69] Třetí říše je tedy sférou objektivního, nepřístupného smyslům.*

6.1.7 Sémantický platonismus

Nespočívá však ona deklarovaná objektivita třetí říše – jak často slyšíme z úst mnoha interpretů – v úplné nezávislosti na člověku či lidstvu vůbec? Nedostal se nakonec Frege ve snaze o minulé Skyllu psychologismu do chřtánu

Charybdy ontologického platonismu? Rozhodně ne!²⁴⁶⁾ Vždyť také výslovně říká:

»Objektivní je [...] zákonité, pojmové, souditelné, to, co lze vyjádřit slovy. [...] Objektivitou rozumím tedy nezávislost na našem vnímání, nazírání a na našich představách, na rozvrhu vnitřních obrazů ze vzpomínek dřívějších počítků, nikoli však nezávislost na našem rozumu [sic!]; neboť zodpovědět otázku, co věci jsou, nezávisle na rozumu, by znamenalo soudit, aniž bychom soudili, práť kožich, aniž bychom jej namočili.« [GL, § 26]

Třetí říše je tedy sférou sdělitelného, závislého na jazyku. To ji však nezabavuje samostatnosti v určitém dobře popsatelem smyslu. Uvedme nyní tuto zdánlivou rozporuplnost Fregovy koncepce objektivního, a tím i nařčení z ›navivního platonismu‹,²⁴⁷⁾ na pravou míru.

Čteme-li v *Grundlagen* či v jiných Fregových spisech výrazně platonisticky znějící prohlášení typu: »matematik podobně jako geograf nemůže libovolně vytvářet, nýbrž jen objevit, co tu již jednou je, a pojmenovat to« [GL, § 96], je třeba zároveň pečlivě prozkoumat kontext, v němž jsou pronášena. Typicky je to v souvislosti s otázkou tzv. tvůrčích definic.²⁴⁸⁾ V nich jsou abstraktní předměty konstruovány způsobem, jež Frege demonstruje na příkladech Hankelově. Ten uvažuje nad možným řešením rovnice $x + b = c$ takto: »Je nasnadě, že pro $b > c$ neexistuje v řadě 1, 2, 3, ... žádné číslo, které by uvažovanou rovnost řešilo: odčítání je potom nemožné. Nic nám ovšem nebrání, abychom v takovémto případě pohlíželi na rozdíl $(c - b)$ jako na symbol, který úlohu řeší a s nímž lze operovat právě tak, jako by to bylo numerické číslo z řady 1, 2, 3, ...« [GL, § 95]

»Zrovna tak bychom mohli říci,« komentuje Hankelův text Frege, že »mezi dosud známými čísly neexistuje žádné, které by současně vyhovělo oběma rovnostem $x + 1 = 2$ a $x + 2 = 1$, ale nic nám nebrání zavést symbol, který by úlohu řešil. Někdo řekne: úloha je přece sporná. Jistě, požadujeme-li jako řešení reálné nebo komplexní číslo, ale rozšířme přece náš číselný systém a vytvořme čísla, která požadavkům vyhoví!« [GL, § 96] »O co snažší by bylo vše,« uvažuje Frege nad analogickým příkladem v *Grundgesetze*, »jestliže bychom mohli požadované předměty vytvářet jen tak bez všeho! Když bychom nevěděli, zda existuje číslo, jehož druhá mocnina je -1 , vytvořili bychom si je. [...] Když bychom nevěděli, zda existuje přímka, která prochází určitými body,

²⁴⁶⁾ Speciálně k tématu platonistického výkladu Frega viz Kolman [2000].

²⁴⁷⁾ Viz třeba Baker-Hacker [FLE, 361].

²⁴⁸⁾ "Schöpferische Definition" – viz [GG₂, § 143].

vytvořili bychom si ji. To je bohužel příliš pohodlné na to, aby to mohlo být správně. Tvoření musí být vedeno v určitých uznaných mezích.« [GG₂, § 140]

Postulovat řešení jisté rovnice či sepsat pár znaků na papír k vytvoření nových předmětů či k jejich přidání k předmětům stávajícím očividně nestačí. K tomu je minimálně zapotřebí vystavět, případně rekonstruovat celý předmětný obor, a to přes specifikaci možného jména (kanonického designátoru) v kontextu možných vztahů a vlastností. Meze, které je zde třeba uznat, nejsou ovšem ničím jiným nežli principy předmětné konstituce. To je ostatně z druhé, polemické části *Grundgesetze* více než patrné, i když je výslovně zmíněn jen zákon sporu. [GG₂, § 139] Frege si zde mimo jiné v souvislosti s Dedekindovým »vytvářením« iracionálních čísel pomocí tzv. »řezů« na systémech čísel racionálních²⁴⁹⁾ klade »otázku, zda je tvoření vůbec možné; zda tehdy, je-li možné, je možné neomezeně; nebo zda při něm musí být respektovány určité zákony. V posledním z případů je teprve nutné dokázat, že podle oněch zákonů vyvstává oprávnění tvořit, a to před tím, nežli smí být tvůrčí akt uskutečněn [...]« [GG₂, § 139] a zmiňuje, že »my sami jsme v prvním díle (§ 3, § 9, § 10) stvořili nové předměty, totiž průběhy hodnot. Co jsme tam skutečně učinili? nebo lépe: co jsme tam neučinili? Nevyjmenovali jsme vlastnosti a neřekli jsme: stvořili jsme předmět, který má tyto vlastnosti, ale spíše jsme řekli: jestliže funkce (prvního řádu s jedním argumentem) a nějaká jiná funkce jsou uzpůsobeny tak, že obě nabývají pro stejné argumenty stejných hodnot, pak můžeme místo toho říci: průběh hodnot první funkce je totožný s průběhem hodnot funkce druhé.« [GG₂, § 146]

Ohodnocení jistého větného systému rozpisem určitých pravdivostních podmínek a v souladu s principy předmětné konstituce je také skutečným objevem, totiž *objevem možnosti koherentní předmětné řeči* – něčeho, co se vůbec nemuselo zdařit, čehož je ostatně právě Fregův systém průběhů hodnot smutným dokladem. Pro nás je však nyní podstatný Fregův vztah k aktu lidského tvoření abstraktních předmětů, jak je závěrem vyjádřen ve větě: »V každém případě není naše tvoření, chceme-li jej tak nazývat, ničím bezmezným, svévoleným, nýbrž je jednou provždy stanoven způsob postupu a podmínky jeho přípustnosti.« [GG₂, § 147]

S takto popsanou svobodou uvnitř pevně (*a priori*) daného prostoru toho, co je a co není přípustné, jsme se však v předchozích kapitolách setkávali na každém kroku: v popisu epistemického rozdílu mezi *f-smyslem* a *f-významem*, v rozdílu mezi *ustanovením verifikačních kritérií* a *kontrolou jejich splnění*, me-

²⁴⁹⁾ Týká se spisu: *Dedekind* [«1872»].

zi *evaluaci větného systému* a jeho *rozhodnutelností*, mezi *klasickým tvrzením existence* a jeho *efektivní variantou závazku* udání substituovatelného jména. Zmínili jsme, že ačkoli u mnoha vět aritmetického systému A^* neznáme jejich pravdivostní hodnotu, přesto jsme oprávněni k tvrzení vyloučeného třetího. – Každá věta je buďto pravdivá, nebo nepravdivá. V rámci takto vymezeném jistými pravdivostními podmínkami má samozřejmě řeč o objevu kořenu nějaké rovnice či pravdivostní hodnoty Goldbachovy domněnky velmi dobrý smysl a přitom dostává Fregovu pojetí (na jazyku závislé) objektivitu: pravdivost aritmetických vět je zjevně *nezávislá na našem vědění*, nikoli však na našem *rozumu*, který rozvrhl příslušné pravdivostní podmínky a poukázal na jejich splnění systémem A^* . Co takovýto připsal objektivitu konkrétně znamená, se musíme naučit prací s konstitutivními principy jako jsou WP, ASP, LP apod., případně s induktivními důkazy platnosti těchto principů pro rozšíření elementárních větných systémů (viz /5.2.3/). Chceme-li v této samostatnosti přesto spatřovat platonismus, pak jej alespoň po vzoru Stekeler-Weithoferově nazýváme v protikladu k *platonismu ontologickému*, popírajícímu jakoukoli závislost objektivního na člověku, *platonismem sémantickým*, jenž pouze »*důrazňuje kategoriální rozdíl mezi konstitucí říše objektů, vztahů a možných pravd, a tím, co již bylo nebo může být o těchto objektech dokázáno v nějakém speciálním důkazovém systému*«. ²⁵⁰⁾

6.2 ABSTRAKCE

Nyní již můžeme přejít k Fregově původní studii na téma »co je číslo?«, jak se s ní v *Grundlagen* setkáváme nejprve v podobě historicko-kritického rozboru převládajících názorů a proudů v oblasti filosofie matematiky, na něž pak navazuje návrh vlastní, spolu s neformálním náčrtem základních kroků programu logického založení aritmetiky. Ty jsou v systému pojmového písma detailně rozvedeny až v *Grundgesetze*, jež budou tvořit výhradní téma kapitoly příští. My se teď soustředíme na obecnou, ideovou část Fregových úvah, v nichž je číslo odvozeno ze (sortálního) pojmu a současně rozhodně odmítnuta množinová, agregativní koncepce aritmetiky s odkazem na její nutné upadnutí do tenat psychologické abstrakce, nespoutané žádnými intersubjektivními, jazykem kontrolovatelnými kritérii.

²⁵⁰⁾ Stekeler-Weithofer [1992], § 2].

6.2.1 Psychologická abstrakce

Největším neduhem studia základů aritmetiky je podle Frega podobně jako v logice příklon k psychologické explanaci, zpravidla pramenící z filosofické nekompetentnosti na straně jedné a hrubého podcenění tématu na straně druhé: *»Pojem celého kladného čísla je považován za tak neproblematický, že může být vědecky vyčerpávajícím způsobem vysvětlen i dětem a že se v něm bez dalšího přemýšlení a znalosti toho, co k tomu jiní napsali, každý vyzná. Takto se zde notně nedostává oně první podmínky, jak se něčemu naučit: totiž vědění vlastní nevědomosti.«* [GL, III] Obliba psychologických obrátů v matematických knihách má potom snadné vysvětlení: *»Když se někdo cítí být povinován podat definici, aniž by toho byl schopen, popíše alespoň způsob, jakým k příslušnému předmětu nebo pojmu dospěl. Tento případ poznáme snadno podle toho, že v dalším výkladu není již tato definice použita.«* [GL, VIII]

Fregovým nejzamílovanějším – protože typickým – příkladem lehkomyšlnosti ve volbě základních pojmů je definice Weierstrassova: *»číslo je posloupnost stejnorodých věcí.«* Frege uvažuje: *»Ale proč by někdo nemohl stanovit, že má být číslo posloupnost stejnorodých věcí? Pochybnosti se ovšem vyskytnou. Zjistíme totiž, že smysl slova “posloupnost” není ještě pevně určen. Máme na mysli prostorové uspořádání nebo také časové či snad prostoročasové? Dále není jasné, co máme rozumět pod slovem “stejnorodý”. Jsou např. tóny nějaké melodie stejnorodé již coby tóny, nebo jen mají-li stejnou výšku? Předpokládejme ale, že bylo podáno takové vysvětlení, že tato nejistota zmizela. Železniční vlak je posloupností stejnorodých předmětů, které se po kolejích pohybují vpřed. Možná nás napadne, že lokomotiva stejnorodá není. Na tom však nezáleží. A tak nám sem přisviští od Berlína číslo.«* [LM_N, 233sqq]

To, co Weierstrassovo pojetí čísla spojuje s koncepcemi dalších Fregem kritizovaných matematiků, mezi něž patří i taková jména jako Cantor, Dedekind či Husserl, je jeho přímé odvození od pojmu agregátu, tj. nějakého uskupení předmětů. *»Vzbudíme-li člověka, který o věci nikdy nepřemýšlel, otázkou “co je číslo”, bude v prvním zmatku vykřikovat podobné výrazy jako Weierstrass: “množina”, “hromada”, “posloupnost věcí”, “předmět sestávající ze stejnorodých částí” atd., přičemž to, zda je slovo “stejnorodý” přidáno či vynecháno, na věci nic nemění, protože tím není určeno vůbec nic.«* [GG₂, § 149]

Za názorný příklad toho, jak přímá cesta vede od množinového pojetí čísla k mentální artistice v manéři obsahu vědomí, slouží Fregovi Husserlova *Philosophie der Arithmetik*, začínající tezí, že *»pojem čísla zahrnuje [...] stejné fenomény jako pojem mnohosti [Vielheit]«* [PA, 15]. Pojem mnohosti je pak ná-

sledně charakterizován prostřednictvím psychického aktu kolektivního spojení [*kollektive Verbindung*] příslušných částí [PA, 20], přičemž ke konkrétním číslům lze údajně dospět od konkrétních souhrnů tak, že *»odhlédneme od zvláštních vlastností shromážděných obsahů a podržíme si každý z nich jen jako nějaké něco či jedno, načež získáme reflexi kolektivního spojení téhož formu náležející příslušně mnohosti: jedna [eins] a jedna, atd., a jedna, s níž máme asociovánu příslušnou číslovku«* [PA, 82]. Ve své recenzi Husserlovy knihy Frege píše:

»Nejnaivnější názor je ten, podle něhož je číslo něco jako hromada, hejno, v němž jsou věci obsaženy se vším všudy. Po něm následuje pojetí čísla jako vlastnosti hromady, agregátu či jak se tomu ještě říká. Při něm bývá pocítěna potřeba tyto předměty očistit od jejich odlišností. Nami uvažovaný pokus patří k těm, jež toto očistění provádějí v psychologickém prádelním kotli. Ten má tu výhodu, že v něm věci získají zvláštní přizpůsobivost, díky níž již do sebe v prostoru tak prudce nenarážejí a jsou zbaveny mnoha nepříjemných rozdílů a zvláštností. K tomuto účelu poskytne dobrý louh nyní tolik oblíbená směs psychologie a logiky.« [RPA, 315sq]

Obdobně, ale v mnohem ostřejším duchu, reaguje Frege na pojetí Cantorovo, podle jehož centrální definice:

»Abstrahujeme-li u dané množiny M, která sestává z určitých dobře rozlišených konkrétních předmětů nebo abstraktních pojmů nazvaných prvky množiny a kterou si samu o sobě myslíme jako jedinou věc, jak od povahy prvků, tak od uspořádání jejich danosti, vznikne v nás jistý obecný pojem [...], jež nazýváme mohutností množiny M nebo této množině příslušejícím kardinálním číslem.« [GAC, 411]

Cantor také zastává Husserlovo ›jedičkové pojetí‹ čísla: *»Jelikož se z každého prvku m, odhlédneme-li od jeho povahy, stává "jedna" [Eins], je kardinální číslo množiny M samo určitou množinou skládající se ze samých jedna, množinou existující jakožto intelektuální obraz či projekce dané množiny M v našem duchu.«* [GAC, 283] Ve Fregově náčrtu k recenzi Cantorových sebraných pojednání *Zur Lehre vom Transfiniten* (K teorii transfinitního) najdeme detailní a názornou karikaturu slabin množinově-psychologického výkladu:

»Jedná-li se o číslo, chovají se matematici vůči kleci plné myši různě. Někteří – a k těmto, zdá se, patří pan Biermann – zahrnou do čísla myši i s chlupy, jiní zase – a k těm snad mohou počítat pana Cantora – sledávají výskyt chlupů v čísle nevhodným, a proto od nich abstrahují. Dále nalézají na myších mnoho jiného nevhodným a nehodným zahrnutí do čísla. Nic není jednoduššího: od

všeho lze abstrahovat. Ano, vlastně není na myších vhodného zcela nic: roztomilost očí o nic více než délka ocásků či ostrost zoubků. Abstrahuje se tedy od myši povahy (strany 12, 23, 56). Od jaké povahy řečeno není; snad tedy od všech jejich vlastností, včetně těch, díky nimž je nazýváme myšmi, zvířaty, prostorovými bytostmi, díky čemuž se třeba odlišují od čísla 2. | Pan Cantor požaduje ještě víc: abychom dosáhli kardinálního čísla, musíme abstrahovat také od řádu jejich danosti. Co pod tím máme rozumět? Nu, srovnáme-li v jednom určitém okamžiku polohu našich myší, vidíme, že v libovolném páru je jedna severněji druhé, nebo že jsou vůči severu stejně. Totéž platí o východu a západu i o tom, jak jsou vysoko či nízko. Ale pokračujme: srovnáme-li myši s ohledem na jejich stáří, zjistíme opět, že z každého páru je jedna starší než druhá nebo že jsou obě stejného věku. Můžeme je také srovnávat co do délky tělesné, jednou s ocáskem, jindy bez, s ohledem na výšku jejich hlasu, jejich tělesnou váhu, sílu svalů a z mnoha dalších hledisek. Díky všem těmto vztahům mají řád. [...] Shromáždíme tedy jednou několik mužů k nazírání tužky a požádejme je, aby vši silou abstrahovali od povahy a řádu danosti jejich elementů. Poté, co jsme jim poskytli dostatek času k tomuto obtížnému dílu, zeptejme se prvního z nich: “Jaký obecný pojem (s. 56) ve Vás vznikl?” Jelikož není matematikem, odpoví: “čisté bytí”. Druhý spíše míní: “čisté nic”, třetí – pravděpodobně žák pana Cantora – “kardinální číslo jedna”. Čtvrtému zůstal snad jen pocit zármutku nad tím, že už je po všem, pátému – asi žáku pana Cantora – pošeptal vnitřní hlas, že tuha a dřevo, části tužky, jsou “konstitutivními elementy”, a vznikl v něm obecný pojem zvaný kardinální číslo dvě. Nu, ale proč by nemělo u jednoho vzniknout to a u druhého zas ono? Já ovšem následkem toho pochybuji, zda lze páně Cantorovým definicím přirůknout onu ostrost a určitost, o nichž jejich autor tak pochvalně mluví. Možná je problém v tom, že jsme náš pokus provedli právě s tužkou. Někdo třeba řekne: “Tužka přece není množina!” Proč ne? Zírejme tedy na Měsíc! “Měsíc také není žádná množina.” Škoda. Kardinální číslo jedna by také rádo někde a nějak vzniklo a Měsíc se zdál být tak vhodným porodním asistentem. Vezměme tedy hromadu písku! Ach, tady ho již někdo začíná přebírat. “Přece to nechcete celé přepočítávat. To je přísně zakázáno! Musíte číslo získat jedním jediným aktem abstrakce.” (S. 15, pozn.) “Avšak abych mohl odhlédnout od povahy písečného zrnka, musím ho přeci nejprve nahlédnout, uchopit, seznámit se s ním?” “To je zcela zbytečné, jak by pak vznikla nekonečná kardinální čísla.” « [CT_N, 78sq]

Velký kus první, destruktivní části *Grundlagen* se skrývá v ironické zkratce předcházejících řádek a mnohé z názorů, jichž se přímo či nepřímo dotýkají,

můžeme tímto vylehčeným způsobem považovat za vyřízené. Vlastní, konstruktivní partii svého spisu o čísle předesílá Frege tři následující zásady:

- (1) »*Je třeba od sebe ostře odlišovat psychologické od logického, subjektivní od objektivního,*
 [(2)] *po významu slov je třeba se ptát v kontextu věty, nikoli izolovaně,*
 [(3)] *je třeba mít na zřeteli rozdíl mezi pojmem a předmětem.*« [GL, XI]

V jakém smyslu jsou tyto principy reakcí na výše popsané psychologizující trendy, jsme již zmínili dříve (viz /4.1.4/), proto se nyní obrátíme přímo k Fregově analýze čísla.

6.2.2 Agregát

Přidržíme-li se druhého z Fregových principů, kontextuální zásady, můžeme začít třeba takto: Ptáme-li se, co je číslo (Frege užívá sugestivně termínu »*Anzahl*«, počet), a to ve vztahu k jeho použití, lze bez váhání říci, že je to odpověď na otázku »*kolik?*« (udání počtu, *Zahlangabe*).²⁵¹⁾ Kýžená specifikace se tedy týká tzv. čísla kardinálního. Ptejme se nyní dále, čeho že se týká číselná výpověď (»*o čem je vypovídáno udání čísla*« [GL, § 45]). K výskytu číselovek ve větách přirozeného jazyka Frege nejprve poznamenává:

»*V jazyce se čísla většinou objevují v adjektivní formě a v přívlastkovém spojení, podobně jako slova tvrdý, těžký, červený, která znamenají vlastnosti vnějších předmětů. Je tedy nasnadě otázka, zda musíme jednotlivá čísla uchopit stejně a zda následkem toho může být pojem čísla postaven do jedné řady třeba s pojmem barvy.*« [GL, § 21]

Uvážíme-li věty jako “všichni trpaslíci jsou pracovití” a “všech trpaslíků je sedm”, ukáže se jejich sémantická odlišnost ihned po bližším srovnání, neboť užití slova “sedm” na rozdíl od “pracovitý” není míněno *distributivně*: každý z trpaslíků, konkrétně třeba Šmudla, je jistě pracovitý, ale není 7. Číslo se zjevně nevztahuje k čítaným předmětům *individuálně*, ale spíš úhrnem k jejich *kolektivu* jakožto celku. Je tedy nasnadě otázka: netýká se nakonec číselná výpověď přece jen přímo počítané množiny, agregátu předmětů?

To, v čem se naivněmnožinové pojetí čísla dopouští chyby, je stejná bezstarostnost ohledně pojmu *agregátu*, jakou osvědčilo již u pojmu *předmětu*. »*U slova “množina” [Menge] myslíme nejprve na nahromadění předmětů v prostoru, jak je to např. patrné u výrazu “spousta lidí” [Menschenmenge], a*

²⁵¹⁾ K překladu Fregovy terminologie srv. slovník v /8.2/.

snadno pak zůstaneme spolu s J. St. Millem [²⁵²] *u dětského pojetí čísla jakožto samotné hromady či agregátu nebo alespoň jejich vlastnosti a pokládáme pak spolu s K. Fischerem počítání za agregativní myšlení. Zapomíná se přitom zcela na to, že lze počítat také události, metody, pojmy, z nichž žádnou hromadu udělat nelze.*« [FTA, 96]

Ve sféře smyslové zkušenost není ovšem zdaleka jasné, jaká že vazba činí nějaké předměty agregátem, když pouhá fyzická blízkost selhává třeba na čípernosti, s jakou se počítané předměty dokáží rozprchnout (třída králíků), a příklon k jednotlicímu aktu vědomí, jenž násilím shání neposedné čítance v řad alespoň stínovou formou jejich mentálních reprezentací, je sice pochopitelným, těžko však akceptovatelným řešením. A přitom je to právě tápání v otázce určení pojmu agregátu, co stojí za nepřeborným množstvím konfuzí a matoucích rozlišení logiky tříd, vhodně reprezentovaných již zmíněným Schröderovým logicko-lingvistickým exkurzem na téma “jméno”:

»“*Armáda*” je obecným jménem [*Gemeinname*, pojmové slovo], pokud toto slovo může označovat zrovna tak armádu německou, francouzskou, anglickou atd., a současně je to jméno kolektivní [*Kollektivname*], totiž ve vztahu k jednotlivým vojákům, kteří se svojí výzbrojí tuto armádu tvoří. Zrovna tak je “*knihovna*” zároveň obecné i kolektivní jméno, první z nich jakožto knihovna pana A, společnosti B atd., druhé jakožto zahrnující jednotlivé knihy, které se v ní nacházejí.» [VA₁, 72]

Vedle vlastního jména a obecného jména tak máme i jméno jednotlivé (*Einzelname*) a kolektivní a jistě nás nepřekvapí, když se u této dvojice dočteme, že »*ji lze sotva ospravedlnit jinak než gramaticky či psychologicky, neboť – s výjimkou ničeho (0), jednoho, bodu a okamžiku – může být všechno pojmenovatelné zařazeno z nějakého hlediska pod kolektivní jméno*« [VA₁, 78]. Z Fregova pohledu se zde Schröder prohřešuje hned proti dvěma výše uvedeným zásadám, a to podobně hrubým způsobem jako školák, podle něhož jsou »strom« a »les« ve vzájemném vztahu jednotliviny k obecnině.

V připravovaném komentáři k Schoenfliesově pojednání o paradoxech teorie množin, v němž měl být podle přiloženého plánu podán detailní rozbor množinového pojetí logiky,²⁵³) Frege analyzuje pojem agregátu takto: »*Agregát je něco jako hejno, celek, jehož části jsou si vzájemně podobné. Ale protože sho-*

²⁵²) Millova koncepce čísla je diskutována mimo jiné v [GL, § 23].

²⁵³) Fregova osnova končí výmluvným: »*Mengenlehre erschüttert. Meine Begriffsschrift in der Hauptsache unabhängig davon.*« (*Teorie množin v troskách. Mé pojmové písmo na ní podstatně nezávisí.*) [SP_N, 191]

da není nikdy úplná a na druhou stranu lze vždycky najít ohled, v němž se ony části shodují, je jejich podobnost jakožto charakteristický znak [Merkmal] nevhodná. Nakonec můžeme říci, že každý předmět, v němž lze rozlišit části, je agregát, tedy třeba planetární systém, hromada písku, zrnko písku, hudební skladba, korporace. K tomu, aby mohly být nějaké předměty uznány za části celku, musí být vzájemně vázány nějakým vztahem či vzájemným působením. Takové vztahy mohou být prostorové, časové, fyzické, psychické, právní, ale i tónové intervaly. A nejspíš by muselo být v každém z případů pro "část" zavedeno vlastní slovo; neboť hlava je očividně částí člověka v jiném smyslu nežli je člověk částí korporace. Často se také stává, že je část agregátu rovněž agregátem. Zrnko písku je částí hromady písku, molekula kyseliny křemičité je částí zrnka stejně jako hromady písku.» [SP_N, 196sq]

Lze snad nyní z takto popsané nejednoznačnosti v určení částí agregátu usoudit na prchavou povahu pojmu čísla či jeho subjektivní, psychologické pojetí, které jej relativizuje k zájmu, s nímž na příslušný soubor hledíme? Nikoli: »Při výše uvedeném určení agregátu jen mjííme v matematice jinak vyžadovanou ostrost. Agregát proto také nejspíš není matematický pojem.« [SP_N, 197] Východisko poskytuje právě druhá, kontextuální zásada:

»Abychom do věci vnesli jasno, bude dobré uvážít číslo v kontextu věty, kde je jeho původní způsob užití zvláště patrný. Jestliže po spatření týchž vnějších jevův mohu stejným právem říci "toto je skupina stromů" a "toto je pět stromů" či "zde jsou čtyři kompanie" a "zde je pět set mužů", nedochází při tom ani ke změně jednotlivého, ani ke změně celku, nýbrž mění se jen moje pojmenování. To je ale znak toho, že došlo k nahrazení jednoho pojmu pojmem jiným. Tím je nám dána na srozuměnou odpověď na první otázku předchozího paragrafu, totiž že udání čísla obsahuje výpověď o pojmu.« [GL, § 46]

Vlastně zde jen znovu opakujeme téma neurčitosti reference. Samotná smyslová reprezentace nepostačuje k určení souboru předmětů stejně jako nepostačovala k určení předmětu jediného. Deiktické gesto směrem ke kupě předmětů a dotaz ›kolik?‹ je nutné doprovodit určením pojmu (via sortální predikát): ›kolik čeho?‹, jinak otázka pozbývá smyslu.

»Nežřetelněji je to snad vidět na čísle 0. Řeknu-li: "Venuše má 0 měsíců", pak zde není žádný měsíc či agregát, o němž může být činěna nějaká výpověď; ale pojmu "Venušin měsíc" je tím přiřazena vlastnost, totiž ta, nic pod sebou nezahrnovat. Řeknu-li: "císařův kočár je tažen čtyřmi koni", přiřkládám tak číslo čtyři pojmu "kůň, který táhne císařův kočár".« [GL, § 46]

Právě na případě čísla jedna a nuly lze slabinu agregativního pojetí zvláště dobře ilustrovat – buď totiž není co shromažďovat, nebo je předmět od příslušné hromady k nerozeznání. Na vysvětlenou původu Schröderova paradoxu, o němž jsme již dříve stručně referovali v /1.4.2/, Frege v přímé zmínce o Schröderově kumulativní charakterizaci tříd píše: *»To vedlo ke kalkulu tříd [Gebietekalkul], k pojetí třídy jakožto sestávající z jednotlivých věcí, jakožto uskupení individuí; neboť skutečně, co jiného by mělo utvářet třídu, jestliže jsme zcela odhlédli od pojmu, od společných vlastností! Také jednotlivá věc je pak třída. Základním vztahem se z povahy věci stává vztah části k celku. Vše je nepochybně velmi názorné; avšak škoda: je to neplodné a není to logika. Jenom tím, že jsou třídy určovány vlastnostmi, které mají mít jejich prvky, jenom tím, že jsou užívány obraty jako “třída předmětů, které jsou b”, je možné obecně vyjádřit myšlenky, v nichž jsou udány vztahy mezi třídami; jen tak lze dospět k logice. Skutečnost, že se toto pojetí tříd od onoho prvního odlišuje a je s ním zcela neslučitelné, zůstává zprvu ovšem zcela skryta.«* [SV, 452sq]

Sečteno, podtrženo: *»Tím, že jsem číslo charakterizoval jako to, co přísluší pojmu, naznačuji, že celek, o který se zde jedná, je držen pohromadě skrze znaky, nikoli sounáležitostí omezenému prostoru, která může ve zvláštních případech přistoupit jako doprovodný podnět, obecně je však bezvýznamná. Takto se nám stává pochopitelným i číslo nula, kterému by jinak zcela chyběl nositel; neboť kde máme hromadu, na níž by bylo možné toto číslo objevit? To však jen jako příklad k tomu, jak převést aritmetiku na logiku.«* [FTA, 96sq]

6.2.3 Adjektivní strategie

Poučení Fregovou ontologií pojmu a předmětu můžeme být nejprve na rozpácích, jak rozumět tomu, že je číslem vypovídáno něco o pojmu, když je to právě pojem, co může být o něčem vypovídáno a co ve větách jako “lidé jsou smrtelní” zastává nanejvýš roli subjektu gramatického. Frege v této souvislosti doporučuje srovnání *připisu čísla* tvrzení (připisu) *existence*. [GL, § 53] I zde se můžeme ptát, o čem tato tvrzení jsou, a to ve smyslu: co znamenají, jakou mají (podpovrchovou) sémantickou strukturu. [DEN, 68] A Fregovu odpověď již známe: netriviální tvrzení existence je výpovědí o pojmu, totiž o jeho (ne)prázdnotě.

»V tomto ohledu nese existence podobnost s číslem. Tvrzení existence není přece nic jiného nežli popření čísla nula. Jelikož je existence vlastností pojmu, nedosahuje ontologický důkaz Boží existence svého cíle. Zrovna tak málo jako existence je ale znakem pojmu Boha jedinečnost.« [GL, § 53]

Kvantifikace nám tedy umožňuje vyjádřit jistá tvrzení ohledně kvanta předmětů spadajících pod aplikovaný pojem; platí-li “ $\exists x.F(x)$ ”, spadá pod pojem $F(\zeta)$ alespoň jeden předmět; platí-li “ $\neg.\exists xF(x)$ ”, nespadá pod něj žádný – neboli Fregovými slovy: \triangleright pojmu $F(\zeta)$ přísluší číslo 0 \langle . Přirozeně se nyní nabízí možnost specifikovat tuto frázi i pro libovolná další n . [GL, § 55] Výše zmíněnou jedinečnost, a tedy frázi \triangleright pojmu $F(\zeta)$ přísluší číslo 1 \langle , lze např. vyjádřit jako “ $\exists xFx .\wedge \forall x\forall y(Fx \wedge Fy \rightarrow x = y)$ ”. Takto můžeme zavést posloupnost tzv. numericky definitivních kvantifikátorů

$$\exists_{n x}.\Phi x,$$

tj. predikátů druhého řádu, jejichž aplikace na predikát “ $F(\zeta)$ ” dá jako výsledek pravdivou větu tehdy a jen tehdy, přísluší-li pojmu $F(\zeta)$ specifické číslo n . První dva kvantifikátory již máme, tj.

$$\exists_{0 x}.Fx \approx \neg.\exists xF(x)$$

$$\exists_{1 x}.Fx \approx \exists xFx .\wedge \forall x\forall y(Fx \wedge Fy \rightarrow x = y),$$

a další definujeme rekurzí, tj. odkazem ke kvantifikátoru $\exists_{i x}.\Phi x$, který již byl definován:

$$\exists_{i+1 x}.Fx \approx \exists x(Fx \wedge \exists y(Fy \wedge x \neq y)).$$

Dospěli jsme takto k logicky uspokojivému zachycení čísla? Frege je přesvědčen, že nikoli. Vedle *adjektivního* užití čísla ve frázi jako \triangleright Beethovenových symfonií je devět \langle či v její normované verzi \triangleright pojmu Beethovenova symfonie přísluší číslo 9 \langle vyskytuje se číslovka v aritmetických větách v *substantivní* formě, a to zpravidla po stranách znaménka rovnosti. Adekvátní analýza čísla musí být schopna poskytnout jednotné vysvětlení, toho však *adjektivní strategie*,²⁵⁴ postupující od užití adjektivního k užití substantivnímu, podle Frega schopná není: *»S pomocí našich definic nelze dokázat, že se musí $a = b$, když pojmu F přísluší číslo a a rovněž i b. Výraz “číslo, které přísluší pojmu F ” by takto byl neospravedlivý a nešlo by ani dokázat rovnost čísel, protože bychom nebyli schopni uchopit žádné konkrétní číslo. 0 a 1 jsme vysvětlili pouze zdánlivě, ve skutečnosti jsme stanovili jen smysl obrátů “číslo 0 přísluší”, “číslo 1 přísluší”; ale to nám nedovoluje rozlišit 0 a 1 jako samostatné, znovurozpoznatelné předměty.«* [GL, § 56] *»Ve větě “pojmu F přísluší číslo 0” je 0 jen částí predikátu, díváme-li se na F jako na příslušný subjekt.«* [GL, § 57]

Fregova argumentace proti adjektivní strategii je ovšem velmi nepřesvědčivá: jednak předpokládá to, co měla sama ukázat, totiž že lze číslo uchopit jen jako samostatný předmět a že třeba aritmetické rovnosti nemají také skrytě adjek-

²⁵⁴) Termín Dummettův – viz [FPM, 99].

tivní strukturu, a jednak se mylí v tom, že na základě výše uvedených definic není možné podat jak v citátu uvedené, tak četné další důkazy aritmetických vět, přirozené v rámci specifického a podstatně komplikovanějšího pojmového aparátu.²⁵⁵⁾ Frege sám již nic dalšího k adjektivní strategii neříká a přímo přechází ke strategii substantivní, tj. vychází z toho, že je číslovka vlastním jménem. Teprve později, po ztroskotání svého systému v důsledku Russellova paradoxu, odkazuje na toto rozcestí, kde se vydal od čísla nesamostatného, jehož symbol je nedílnou součástí adjektivní fráze, k číslu jakožto f-významu vlastního jména. [GG₂, 255] Ani potom se ale nedomnívá, že by šlo tímto způsobem vybudovat aritmetiku.

6.2.4 Substantivní strategie

Novým východiskem je Fregovi opět pozorování, že číslo souvisí s pojmem, tedy věta “číslo n přísluší pojmu F ”, nyní ovšem čtena jakožto vyjádření rovnosti

číslo příslušející pojmu F je číslo n .

»Např. větu “Jupiter má čtyři měsíce” můžeme převést na “číslo [počet] Jupiterových měsíců je čtyři”. Výraz “je” zde nesmí být čten jako pouhá kopula, podobně jako ve větě “obloha je modrá”. To je vidět na tom, že lze říci: “číslo Jupiterových měsíců je číslo čtyři”. Výraz “je” tu má stejný smysl jako výrazy “je roven”, “je totožný s”. Máme tedy rovnost, která tvrdí, že výraz “číslo Jupiterových měsíců” označuje tentýž předmět jako slovo “čtyři”.« [GL, § 57] Spojení subjektivního užití s adjektivním má zajišťovat právě volba základní číselné fráze “číslo příslušející pojmu F ”.

Cíl uchopení čísla jakožto znovurozpoznatelného předmětu udává již předvídatelně směr dalšímu vývoji zkoumání: »*V našem případě musíme vysvětlit smysl věty “číslo příslušející pojmu F je totožné s číslem příslušejícím pojmu G ”; tzn. reformulovat obsah této věty tak, aby v ní nebyl použit výraz “číslo příslušející pojmu F ”. Tím bude udáno obecné kritérium rovnosti čísel.*« [GL, § 62] – Ptáme-li se, kdy jsou počty předmětů spadajících pod dva různé pojmy F a G stejné, lze po názorné demonstraci na praktickém příkladě rovnání příborů do párů »jedna vidlička – jeden nůž« [GL, § 70] odpovědět, že tehdy, lze-li si ony předměty vzájemně přiřadit tak, aby každému, jenž spadá pod pojem F , odpovídal právě jeden spadající pod pojem G , a *vice versa*. Pojem jednojednoznačného (vzájemně jednoznačného) přiřazení, jehož v této souvis-

²⁵⁵⁾ Toto ukázal podrobně Dummett, viz [FPM, 103sqq].

losti využil i Cantor,²⁵⁶ nazývá Frege *rovnocíselností* (*Gleichzahligkeit*) (značme \cong). Cantor ovšem nehovoří o pojmech, ale o třídách, a nazývá je ekvivalentními (symbolicky \sim), jestliže lze prvky jedné jednojednoznačně přiřadit prvkům druhé. Tento výměr však uvádí až poté, co definoval kardinální číslo psychologickou abstrakcí na třídách, tj. s pomocí aktu odhlédnutí od různosti a uspořádání jejich prvků. Věta

(kardinální číslo třídy M = kardinální číslo třídy N) *tehdy a jen tehdy, když* ($M \sim N$)

je tedy v jeho systému teorémem. Frege oproti tomu hovoří o větě

(číslo příslušející pojmu F = číslo příslušející pojmu G) *tehdy a jen tehdy, když* ($F \cong G$)

jako o definici, a to navíc jako o definici zvláštního a neobvyklého typu, »*jejž logici dosud nevzali dostatečně v potaz*« [GL, § 63]. Zvláštností této definice je její konstruktivní charakter, nám splývající s dříve vysvětleným konstitutivním charakterem identity: »*Relace rovnosti není jen vztahem čísel. Mohlo by se tedy zdát, že nemusí být pro tento případ zvláště definována. [...] Proti tomu je třeba poznamenat, že nám není pevně dán pojem čísla, nýbrž že má být teprve naší definicí určen. Naším úmyslem je vytvořit takový obsah soudu, jejž by bylo možné uchopit jako rovnost, po jejichž stranách by byla čísla. Nechceme tedy definovat rovnost speciálně pro tento případ, nýbrž prostřednictvím již známého pojmu rovnosti získat to, co má být jako rovné pojednáno.*« [GL, § 63] Jako paradigmatický příklad, na němž máme uvažovaný způsob určení pojmu nahlédnout, uvádí Frege definici (konstituci) pojmu směru přímky z pojmu rovnoběžnosti:

»*Soud "přímka a je rovnoběžná s přímkou b", symbolicky $a // b$, lze uchopit jako rovnost. Učiníme-li tak, získáme pojem směru a řekneme: "Směr přímky a je roven směru přímky b." Nahrazujeme tedy symbol $//$ obecnějším $=$, a to tak, že zvláštní obsah prvního z nich rozdělujeme mezi a a b.*« [GL, § 64]

Výsledná definice má tedy podobu:

(směr přímky a = směr přímky b) *tehdy a jen tehdy, když* ($a // b$).

Tento postup, obecně charakterizovatelný jako přechod od ekvivalence nějakých předmětů (rovnoběžnosti přímek, rovnocíselnosti pojmů) k rovnosti nějakých předmětů nových, právě definovaných, je znám jako *definice abstrakcí*, a to nikoli coby technikou *psychologickou*, ale *logickou*. Paul

²⁵⁶ Frege v [GL, § 63] odkazuje na Cantor [1883, 3]. Srv. také Cantor [GAC, 283, 380, 412].

Lorenzen, který ji v návaznosti na Frega podrobněji rozpracoval²⁵⁷⁾ a při své práci na konstruktivním založení aritmetiky (zvláště pak analýzy) systematicky aplikoval, její využití popisuje takto:

»Metoda abstrakce nám poskytuje možnost hovořit tak, jako bychom mluvili o nových předmětech (abstraktních objektech) – ačkoli hovoříme jen novým způsobem o stávajících předmětech (konkrétních objektech). Např. mluvíme “abstraktně” o číslech, pojmech (relacích) a stavech věcí, namísto abychom “konkrétně” mluvili o číslóvkách, predikátorech (vícemístných predikátorech) a výrocích.« [LKW, 161]

6.2.5 Logická abstrakce

Jádro abstrakční techniky, ospravedlňující naši řeč o abstraktech, a zakládající tedy i jejich ontologický status, si lze ozřejmit na učebnicovém příkladě konstrukce racionálních čísel ze zlomků, tj. dvojic čísel m, n , kde m a n jsou výrazy z Π_A , tedy termy oboru přirozených čísel. O m, n můžeme hovořit také jako o dvojici čísel, neboť předpokládáme, že máme k dispozici obor elementární aritmetiky $A = \langle \Sigma_A, \Pi_A \rangle$, resp. že zvládneme základní aritmetické operace a pojem rovnosti přirozených čísel. Na zlomcích definujeme relaci \sim takto:

$$m, n \sim p, q \text{ tehdy a jen tehdy, když } m \times q = p \times n,$$

kdy pravá strana se vztahuje k oboru A . Snadno se lze přesvědčit, že je tato relace ekvivalencí, tj. že platí

$$m, n \sim m, n \text{ (reflexivita),}$$

$$\text{jestliže } m, n \sim p, q, \text{ pak } p, q \sim m, n \text{ (symetrie),}$$

$$\text{jestliže } m, n \sim p, q \text{ a } p, q \sim r, s, \text{ pak } m, n \sim r, s \text{ (tranzitivita).}$$

Ekvivalence zlomků očividně neznamená, že jsou si rovny ve smyslu:

$$\text{jestliže } m, n \sim p, q, \text{ pak } m = p \text{ a } n = q,$$

vždyť platí např. $1, 2 \sim 2, 4$, tj. ekvivalentní zlomky mohou být rozdílné. Přejít od ekvivalence k rovnosti spočívá právě v tom, že od těchto rozdílů abstrahujeme, a to nikoli psychologicky, po vzoru nesoustředěné mysli, ale logickou restrikcí kontextu na takové výroky o zlomcích, v nichž záměna jednoho zlomku zlomkem ekvivalentním nezmění jejich pravdivost, tj. pro něž platí

$$\text{jestliže } m, n \sim p, q, \text{ pak } A(m, n) \rightarrow A(p, q).$$

Takovéto výroky se nazývají invariantními vzhledem k ekvivalenci \sim . Příkladem invariantního výroku je třeba “ m, n je celé číslo”, definujeme-li nejprve

$$m, n \text{ je celé číslo tehdy a jen tehdy, když } \exists x(m = x \times n).$$

²⁵⁷⁾ Srv. Lorenzen [$\langle 1962 \rangle$], Lorenzen [LKW, 161sq] a Lorenzen [$\langle 1965 \rangle$, kap. I, II].

Omezíme-li se na kontext invariantních výroků, je zřejmé, že z ekvivalence nějakých dvou výrazů vyplývá v tomto kontextu také jejich substituovatelnost *salva veritate*. Abychom však od pouhé ekvivalence mohli přejít k rovnosti, zbývá ještě ukázat, že ze zaměnitelnosti výrazů *salva veritate* vyplývá jejich ekvivalence. K tomu stačí dokázat, že je samotný výrok

$$m, n \sim p, q$$

invariantní vzhledem k \sim , což je ale triviálním důsledkem symetrie a tranzitivity této relace. Jsou-li nyní zlomky m, n a p, q zaměnitelné v invariantních výrociích *salva veritate*, znamená to mimo jiné, že pro libovolný zlomek r, s platí

$$m, n \sim r, s \text{ tehdy a jen tehdy, když } p, q \sim r, s,$$

a tedy také

$$m, n \sim p, q.$$

V invariantním kontextu můžeme nyní použít novou zlomkovou notaci a namísto $A(m, n)$ psát třeba $A(m/n)$. Tím naznačujeme, že jsme od ekvivalence přešli k rovnosti, od zlomků k novým (abstraktním) předmětům (racionálním číslům), od jednoho kontextu k jinému. Výraz, kterým to dáváme najevo, v tomto případě “/”, nazýváme **abstraktořem**.

Že takto pojatá abstrakce (od invariantních výroků) odpovídá definitorickým intencím Fregovým, je zřejmé právě z oněch míst v *Grundlagen*, kde uvažuje o zavedení směrů přímek *via* jejich rovnoběžnost. Čteme:

»*Abychom ospravedlnili náš pokus o definici směru přímky, musíme tedy ukázat, že je možné výraz ‘směr přímky a’ nahradit výrazem ‘směr přímky b’ vždy tehdy, kdykoli je přímka a rovnoběžná s přímkou b. To máme jednodušší o to, že nám zprvu není o směru přímky známa žádná jiná výpověď nežli tvrzení jeho rovnosti se směrem přímky jiné. Musíme tedy pouze prokázat jejich zaměnitelnost v takovýchto rovnostech nebo v obsazích, jež by mohly být částmi takovýchto rovností. Všechny ostatní výpovědi o směrech musí být teprve zavedeny a pro tyto definice požadujeme pravidlo zachování zaměnitelnosti směru přímky směrem přímky s ní rovnoběžné.*« [GL, § 65]

Znovu zde tedy máme téma *kontextuální závislosti* předmětné konstituce, tentokrát však nazírané ve světle nerozlišení jistých stávajících (a odlišných) předmětů relativně k určité ekvivalenci a výrokům k této ekvivalenci invariantním, spolu s využitím těchto předmětů jakožto reprezentací předmětů nových, (v relaci k těmto) abstraktních. Na zajímavé vyjádření této konstrukce, tj. zrodu nových předmětů, resp. jejich identity z ekvivalence upozorňuje Stekeler-Weithofer ve svém komentáři k Hegelově logice v souvislosti s Hegelo-

vou definicí rovnosti jakožto *popření nerovnosti*, totiž právě jakožto upuštění od jistých (vždy možných) rozlišení.²⁵⁸⁾

Obecný rozdíl mezi *konkrétním* a *abstraktním* je nepochybně vágní a ve vztahu k metodě abstrakce jej zprvu uvažujeme pouze v relativním smyslu: V rámci nějaké speciální vědy považujeme určité předměty za (neproblematicky) konstituované – představují její základní obor, z něhož pak abstrakční technika dovolí volbou vhodné ekvivalence vyvstat předmětům novým, z nich odvozeným, a v tomto smyslu méně konkrétním, abstraktnějším. Tohoto typu je např. přechod od *přirozených čísel* k *čísłům racionálním*, od *koncentrovaných posloupností racionálních čísel* k *čísłům reálným* apod. Operativní matematika pak posouvá bázi svého zkoumání až k *čísłovkám*, nechává tedy vyvstat i obvykle netematizovaný standardní model aritmetiky ze zaměnitelnosti odlišných numerálů (2 ~ II) vzhledem k základním operacím (nikoli třeba k historickým tvrzením o vzniku aritmetických notací).

I pro operativní koncepci matematiky jsou však numerály posledními předměty, jejichž konstituci dále neuvažuje. Konstituce těchto ›posledních‹ předmětů je otázkou *primární abstrakce*, tj. otázkou konstituce *primárních tříd*, závislé na naší praktické schopnosti provádět jistá kvalitativní rozlišení ve zprvu rozostřené sféře smyslových stimulů. Náš sluch je např. schopen rozlišovat zvuky určité výšky a intenzity a klasifikovat je do určité, dejme tomu dvanáctitónové škály (kvalifikovat falešný zpěv jako zpěv určité melodie), či je navzdory četným rozdílům normovat jako výrazy (*token*) téhož fonému (nikoli třeba jen hrdelní výkřik). Primární abstrakce se od *abstrakce sekundární*, užívané interně v korpusu nějaké vědy, liší právě tím, že nezačíná *diskrétní třídou předmětů* s vhodnou relací ekvivalence, ale jen v *difuzním prelingvistickém prostoru*²⁵⁹⁾ s emprakticky zvládnutými rozlišujícími kritérii.

Rovněž rozdíl mezi *reprezentací* a *reprezentovaným*, jenž hraje v pojmu předmětné konstituce roli analogickou rozdílu *konkrétního* a *abstraktního* u logické abstrakce, zde ztrácí své ostří, neboť uvažované *token* není myslitelné jinak nežli jako *token* jistého *typu* (stejně jako reflektovaná představa musí být představou něčeho, nikoli jen barevnou mapou), tj. není v žádném ohledu samostatným předmětem, tedy výsledkem předmětné konstituce! V tomto smys-

²⁵⁸⁾ *Stekeler-Weithofer* [HAP, 140sqq, 245sqq]. S trochou nadsázky by se dalo říci, že téma (logické) abstrakce je fixní idejí celé *Stekeler-Weithoferovy* hegelovské knihy.

²⁵⁹⁾ Quine užívá termín “*prelinguistic quality space*” [WO, § 17], Hegel zase hovoří o “*Bandbreite des Daseins*” – viz *Stekeler-Weithofer* [HAP, 148].

lu jsou také primární obory pouhými potenciálními reprezentacemi, neboť reprezentují nanejvýš samy sebe. V tom také spočívá jejich konkrétnost – chápeme-li ji jako jakousi empirickou bezprostřednost. Abstraktnost z nich odvozených předmětů není totiž otázkou ontologickou (nadzemské povahy abstrakt), nýbrž jen rozšířením zástupné funkce výrazu na všechny výrazy tomuto ekvivalentní (výrazy téže ekvivalenční třídy), o nichž pak můžeme v přeneseném smyslu říci, že reprezentují tentýž (abstraktní) předmět.

To, co se při abstrakci mění, není svět ani výraz sám, nýbrž jen jeho užití. Právě tuto změnu dáváme najevo abstrakty jako ›směr přímky x ‹, ›pojmem x ‹, ›vlastnost x ‹, ›číslo x ‹ atd. Přejdem od věty $A(n)$ k větě $A(\text{číslo } n)$ např. ukazujeme, že se jedná o tvrzení aritmetické, tj. invariantní k transformovatelnosti číselných termů na stejné numerály (viz /5.2.2/). Proto jsou také věty jako “číslo n je zelené” na rozdíl od “ n je zelené” nesmyslné, nikoli třeba jen nepravdivé: »*Místní určení čísla nemá žádný smysl; z toho však vyplývá jen to, že není prostorovým předmětem, nikoli, že není předmětem vůbec.*« [GL, § 61]

6.2.6 Průběh hodnot

Viděli jsme, že metoda abstrakce je významným matematickým nástrojem. V té formě, v jaké byla akceptována moderní matematikou, se ovšem od Fregeovy techniky v podstatném liší. Je totiž redukována na vytváření jistých množin – tzv. tří d a b s t r a k c e, tj. tříd sobě ekvivalentních předmětů – na bázi garantované teorie množin s množinou jakožto základním, nedefinovaným a údajně nedefinovatelným pojmem. Množina sama je ovšem abstraktum, a nadto pojem nelogický, odvozený; jsme tedy svědky závažné metodické chyby, na níž Frege marně bezpočtukrát upozorňoval.

Když Frege v *Grundlagen* projednal možnost zavedení čísel přímou abstrakcí z ekvivalence rovnočíslnosti \cong definicí

(D1) (číslo příslušející pojmu F = číslo příslušející pojmu G) *tehdy a jen tehdy, když* ($F \cong G$),

uvádí ovšem následující pochybnost: Předmětné univerzum, k němuž se vztahují proměnné jeho logiky, nezahrnuje jen čísla, ale i jiné předměty, vůči nimž musí být vymezen pojem rovnosti. Výše uvedená definice ovšem specifikuje ohodnocení rovnosti pouze pro jména předmětů, jež nám jsou dány ve formě číslo příslušející pojmu F .

Věta

Julius Caesar = číslo příslušející pojmu

tak zůstává nerozhodnuta. [GL, § 55, 66] Tento neblahý důsledek požadavku úhrnného univerza všech předmětů řeči pak Frege vede k následující explicitní

definici čísla:

(D2) číslo příslušející pojmu F = rozsah pojmu ›rovnočíselný pojmu F ‹.
[GL, § 68]

Tímto má Frege problém Julia Caesara za vyřešený, neboť dobyvatel Galie není (zjevně?) rozsahem pojmu. Navíc se toto řešení zdá být přirozené, neboť analýza čísla jako něčeho, co přísluší pojmu, si přímo říká o uchopení čísla jakožto *vlastnosti* všech pojmů stejnépočetné extenze, tedy pojmů rovnočíselných. Substantivní strategie pak Fregovi velí uchopit toto číslo jako předmět, proto od zmíněné vlastnosti přechází k jejímu *rozsahu*, sám ale ještě v *Grundlagen* poznamenává, že »by namísto “rozsah pojmu” mohlo být jednoduše řečeno “pojem”« [GL, § 68]. Teprve postupem času odmítá Frege tuto nejednoznačnost definitivně. – Na cestě k prvnímu dílu *Grundgesetze* vznikají články *Funktion und Begriff, Über Sinn und Bedeutung* a *Über Begriff und Gegenstand*, v nichž je neostrý aparát *Grundlagen* důkladně cizelován. Číslo je jednoznačně rozsahem pojmu a rozsah je předmět, nikoli pojem. Logické založení pojmu čísla závisí nyní na logickém statu *pojmu rovnočíselnosti*, resp. jednoznačného přiřazení a *pojmu rozsahu*.

V článku *Funktion und Begriff* upozorňuje Frege při vymezení pojmu jakožto funkce na to, že s ohledem na její nenasyčenou povahu by bylo mylné považovat tvrzení

$$x^2 - 4x = x(x - 4)$$

za vyjádření rovnosti funkcí

$$x^2 - 4x \quad \text{a} \quad x(x - 4):$$

»Píšeme-li $x^2 - 4x = x(x - 4)$, neporovnáváme tak jednu funkci s druhou, nýbrž jen jejich hodnoty. A rozumíme-li této rovnosti tak, že je platná pro libovolný argument dosazený za x , vyjádřili jsme jí obecnost rovnosti. Můžeme ale rovněž namísto toho říci “průběh hodnot funkce $x(x - 4)$ je roven průběhu hodnot funkce $x^2 - 4x$ ” a mít to za rovnost průběhů hodnot.« [FB, 9sq]

Průběh hodnot (*Wertverlauf*) je zjevně zobecněním rozsahu pojmu pro libovolnou funkci. Vidíme také, že je zaváděn zcela v duchu Lorenzenova popisu logické abstrakce, totiž jako jisté *façon de parler*, které se ovšem v rámci konstruované logické stavby musí opírat o nějaký zákon: »To, že je nyní možné uchopit obecnost rovnosti funkčních hodnot jako rovnost, totiž jako rovnost mezi průběhy hodnot, není, zdá se mi, možné dokázat, nýbrž je nutné nahlédnout jako základní logický zákon.« [FB, 10] Takto se tedy jednou zavržená *definice abstrakcí* znovu stává součástí snahy o zachycení pojmu čísla. Přes zjevnou spřízněnost Fregova určení ›čísla příslušejícího pojmu‹ s Cantorovým

vymezením ›mohutnosti (*Mächtigkeit*) množiny‹ jakožto »*obecného pojmu, pod nějž spadají všechny množiny, které jsou s touto ekvivalentní, a jenom ty*« [GAC, 380], se obě definice liší, neboť první z nich je založena na zákonu *logické abstrakce*, zatímco druhá využívá jen vágně formulovanou *abstrakci psychologickou*.

Fregův logicistický plán nyní začíná nabývat konkrétních obrysů: Cílem je vytvoření předmětného oboru průběhů hodnot, z něhož bude možné vyčlenit kardinální čísla určitým predikátem "Anzahl_ζ" ve smyslu výše uvedené definice (D2). Ohodnocení tohoto oboru bude založeno pouze na logických principech, k nimž bude počítán rovněž princip abstrakce průběhů hodnot, tzv. ›*Grundgesetz V*‹ *Základních zákonů* [GG₁, § 47]:

(GV) větě "αFα = εGε" je přidělena tatáž pravdivostní hodnota jako větě "∀x(Fx = Gx)".

Průběh hodnot funkce F(ζ), abstraktum získané z ekvivalence obecné rovnosti hodnot pro libovolný argument, je tedy značen předepsáním řecké samohlásky, nad níž je ›*spiritus lenis*‹ (jemný přídech), a náhradou zástupného písmene ζ toutéž samohláskou, ovšem bez přídechu. [GG₁, § 9] Jelikož Frege neodlišuje predikátové výrazy od funkčních (funktorů), je zákon formulován pouze s pomocí rovnosti. Dnes bychom od sebe odlišovali abstrakci funkcí (známou především ve formě Churchovy lambda abstrakce)

$$\lambda x Fx = \lambda y Gy \quad \text{tehdy a jen tehdy, když} \quad \forall x(Fx = Gx)$$

a abstrakci množin (abstrakci tříd)

$$\{x; Fx\} = \{y; Gy\} \quad \text{tehdy a jen tehdy, když} \quad \forall x(Fx \leftrightarrow Gx).$$

Zákon sám, jak naznačuje úvod ke *Grundgesetze*, přijímal Frege se značným váháním: »*Spor může, pokud vím, vzplanout jen ohledně mého základního zákona průběhů hodnot (V), jenž nebyl možná logiky dosud vůbec vysloven, ačkoli se v souladu s ním myslí, např. hovoří-li se o rozsazích pojmů. Považuji ho za čistě logický. V každé případě je tímto označeno místo, kde musí padnout rozhodnutí.*« [GG₁, VII] Přesto ani po ztroskotání svého systému neviděl Frege jiný způsob, jak dospět na čistě logické bázi k číslům, nežli přes zákon abstrakce: »*A přece ani teď nejsem s to nahlédnout, jak by mohla být vědecky založena aritmetika, jak by mohla být čísla uchopena jako logické předměty a vůbec uvažována, kdyby nebylo – přinejmenším za jistých podmínek – povolenno přejít od pojmu k jeho rozsahu.*« [GG₂, 253]

Dříve než přejdeme k vlastnímu nárysu systému z *Grundgesetze*, proberme ještě ve stručnosti některé techničtější detaily a nejasnosti Fregova pojmosloví úzce související s abstrakcí.

6.2.7 Funkce jako abstraktum

Pojem f-významu, Fregem (nešťastně) exemplifikovaný na vztahu jména a předmětu, vyvolává tradičně otázky ohledně jeho aplikace na nenasycené výrazy.²⁶⁰⁾ Mnozí interpreti, pomateni Fregovou obraznou řečí o nesamostatnosti funkce, navrhují, že by pro tuto charakteristiku měla být funkce identifikována spíše s f-smyslem nežli s f-významem nenasycené fráze, neboť f-význam podle nich nenasycené výrazy buď vůbec nemají, nebo mu u nich lépe odpovídá příslušný průběh hodnot (rozsah pojmu). Z mnohého, co bylo dosud řečeno, je okamžitě zřejmé, v čem jsou tyto návrhy absurdní; úplně jim však oprávnění upírat nelze, neboť Fregovy názory na povahu funkce zřetelně kolísají. Jádrem problému lze nyní výstižně shrnout a vyjádřit v dotazu, jakou ekvivalenci na nenasycených výrazech dospíváme k funkci jakožto abstraktní entitě.

V nepublikovaném manuskriptu, koncipovaném jakožto rozvedení některých myšlenek článku *Über Sinn und Bedeutung*, a to právě s ohledem na výrazy nenasycené (pojmová slova), zdůrazňuje Frege již úvodem, že u těchto výrazů má být *smysl a význam* také rozlišován a že nesmí být v žádném případě identifikován s rozdílem mezi *pojmem a předmětem*. [ASB_N, 128] Svou ›duální‹ sémantickou koncepci ozřejmuje v dopise Husserlovi tímto schématem:²⁶¹⁾

věta	vlastní jméno	pojmové slovo	
↓	↓	↓	
smysl věty (myšlenka)	smysl vlastního jména	smysl pojmového slova	
↓	↓	↓	
význam věty (pravdivostní hodnota)	význam vlastního jména (předmět)	význam pojmového slova (pojem)	→ předmět spadající pod pojem.

Ke svému pojetí funkce (pojmu) a její identity Frege ve zmíněném článku píše:

²⁶⁰⁾ Přehled o polemice na toto téma, jak léta probíhá v sekundární literatuře, lze získat např. z Dummett [FPL, k. 7].

²⁶¹⁾ [WB, 96]. Frege ke schématu píše: »U pojmového slova je nutné směřem k předmětu učinit o jeden krok navíc než u vlastního jména a tento krok může chybět – tzn. pojem může být prázdný –, aniž by se tím pojmové slovo stalo vědecky nepoužitelné. Vedl jsem tento krok stranou, abych naznačil, že se děje na téže úrovni, že mají předměty a pojmy tutéž objektivitu [...].«

»I když je relace rovnosti myslitelná jen mezi předměty, přece se mezi pojmy vyskytuje relace jí podobná, kterou jakožto relaci pojmů nazývám relací druhého stupně, zatímco onu rovnost nazývám relací stupně prvního. Řekneme, že se předmět a rovná předmětu b (ve smyslu úplné totožnosti), když a spadá pod každý pojem, pod nějž spadá b, a naopak. Něco podobného dostaneme pro pojmy, prohodíme-li role pojmu a předmětu. Mohli bychom pak říci, že se ve výše zmíněné relaci nachází pojem Φ a pojem X, jestliže každý předmět spadající pod pojem Φ spadá pod pojem X, a naopak.« [ASB_N, 131]

Zde tedy Frege explicitně přijímá tzv. extenzionální charakterizaci funkce, což je ovšem zcela v souladu s naším výměrem f-významu jakožto pravdivostního potenciálu. Vzpomeňme, že jsme jej definovali pro libovolný, tedy i nenасыcený výraz! Frege také píše:

»Pojmové slovo znamená pojem, je-li toto slovo užíváno tak, jak je to v logice účelné. Na vysvětlenou zde připomínám okolnost, která se zdá mluvit výrazně ve prospěch logiků rozsahu oproti obsahu, totiž že lze ve větě zaměňovat pojmová slova téhož rozsahu, aniž by tím utrpěla její pravda, tedy že také ve vztahu k usuzování a logickým zákonům se pojmy chovají rozdílně pouze tehdy, liší-li se svým rozsahem.« [ASB_N, 128]

Konfuze funkce s jejím průběhem přes shodná, extenzionální kritéria identity ve výkladu Fregovy logiky nevzniká, zvláště když jsme dostatečně jasně zakotvili leckdy jen povrchně chápanou opisnou řeč o nesamostatnosti (funkce a samostatnosti jejího průběhu) v substituční roli výrazů: Výraz $\alpha F \alpha$ je (jak ještě uvidíme) substituovatelné jméno a může se vyskytovat po obou stranách předmětné rovnosti. V případě funkce by příslušná rovnost byla výrazem jiného typu (stupně) a funkční výraz by jako substituovatelný term vyžadoval specifickou (funkční) proměnnou.²⁶²⁾

Rovněž podezření, že takto bere za své Fregova kritika extenzionálních teorií, jako jsou Boolova či Cantorova, je neoprávněné, neboť průběh hodnot není ›libovolná podmnožina‹ nosiče (univerza) či jeho kartézského součinu, nýbrž ›podmnožina‹ vymezená společným znakem, tedy vázaná na jazyk a jeho možnosti.

Na druhou stranu je třeba říci, že Frege ve svých spisech mnohokrát vzbuzuje dojem, že jsou jeho kritéria pro rozlišení téže funkce v rozdílných výrazech mnohem jemnější nežli jen shodný průběh hodnot. Hovoří např. o

²⁶²⁾ Fregova logika vyšších řádů je jistě v mnoha ohledech ›naivní‹ (neopatrná), proto zde nemá přílišný význam zabíhat do dalších podrobností, které by nás širší a obtížností problému nutně zavedly daleko od tématu.

$$x^2 - 4x$$

a

$$x(x - 4)$$

jako o *dvou* funkcích téhož průběhu hodnot [FB, 9sq], jinde zase padne zmínka o *všech* funkcích téhož průběhu hodnot [GG₁, § 10] apod. Na základě toho by se skutečně zdála být funkce podobná f-smyslu: výraz “ $x^2 - 4x$ ” se od výrazu “ $x(x - 4)$ ” neliší tím, jakou hodnotu po dosazení pro daný argument získáme, ale způsobem (konstrukcí), jak k této hodnotě dospějeme. (Srv. /5.2.4./.) Pavel Tichý z této²⁶³⁾ a mnoha dalších víceznačností Fregových spisů vytěžil pojem *k o n s t r u k c e* a založil na něm i celý originální logický systém, jenž odstraňuje a řeší mnohé z problémů, jež Tichý ve svém velmi detailním rozboru Fregova díla²⁶⁴⁾ nachází. Sotva nás nejspíš překvapí, že se na Tichého objemném seznamu Fregových nejednoznačně vymezených pojmů vedle funkce objevuje také f-smysl.

6.2.8 Smysl jako abstraktum

Frege ve vztahu k představě vymezuje f-smysl jako objektivní entitu. Z tohoto rozlišení vyvstává také potřeba vystihnout proklamovanou objektivitu nějakým intersubjektivním kritériem – ekvivalencí výrazů (speciálně vět) téhož f-smyslu (speciálně myšlenky):

»Zdá se mi, že je třeba mít objektivní kritérium toho, jak rozpoznat myšlenku znovu jako tutéž, neboť bez toho není logická analýza možná. K tomu, abychom nyní rozhodli, zda věta A vyjadřuje tutéž myšlenku jako věta B, zdá se mi být možný jedině následující prostředek [...]. Jestliže totiž jak předpoklad, že je A nepravdivá a B pravdivá, tak předpoklad, že je A pravdivá a B nepravdivá, vedou k logickému sporu, aniž bychom k jeho zjištění potřebovali vědět, zda je pravdivý obsah A či obsah B, a aniž by k tomu bylo zapotřebí jiných než čistě logických zákonů, nemůže potom k obsahu A, lze-li jej soudit jako pravdivý, či nepravdivý, náležet nic, co by nenáleželo také k obsahu B [...].« [WB, 105sq]

Toto vymezení, i když možná v menší míře než dříve zmíněná relace ekvipolence,²⁶⁵⁾ se zdá být v souladu s Carnapovou podmínkou rovnosti intenze coby zaměnitelnosti vůči tzv. L-ekvivalenci výrazů. Podle Carnapa jsou dva výrazy

²⁶³⁾ Viz Tichý [FFL, k. 2].

²⁶⁴⁾ Tichý [FFL].

²⁶⁵⁾ Viz /3.1.4/: *»Dvě věty A, B mohou stát k sobě navzájem v takovém vztahu, že každý, kdo uzná obsah věty A jako pravdivý, musí uznat bez dalšího jako pravdivý také obsah B, a obráceně, že každý, kdo uzná obsah B, musí uznat i obsah A [...].« [KUN, 213sq]*

A, B L - e k v i v a l e n t n í (vzhledem k sémantickému systému S) tehdy, je-li jejich logická ekvivalence

$A \leftrightarrow B$	pro věty,
$A = B$	pro vlastní jména,
$\forall x(Ax \leftrightarrow Bx)$	pro predikáty a
$\forall x(Ax = Bx)$	pro funktoři

L - p r a v d i v á, což znamená: ohodnocená pravdou »*pouze na základě sémantických pravidel systému S, bez odkazu k (mimojazykovým) faktům*« [MN, 10]. Jelikož takto popsaná rovnost smyslů dvou výrazů znamená vlastně jen to, že jsou si jejich významy rovny nezávisle na stavu empirického světa, nemají ovšem neempirické obory důvod mezi smyslem a významem rozlišovat, neboť jim nutně splývají. Logicky ekvivalentní věty navíc vyjadřují dle výše uvedené definice tentýž smysl, což platí speciálně i pro *všechny* tautologie (resp. kontradikce). Jejich ohodnocení ovšem na stavu světa (popisu stavu) vůbec nezávisí; jsou bezpodmínečně pravdivé (resp. nepravdivé), tedy – slovy *Tractatu* – nejsou výrazem žádných pravdivostních podmínek, a říkají-li všechny totéž (mají-li stejný smysl), pak proto, že neříkají vůbec nic; jsou beze smyslu – *sinnlos*. [TLP, 4.461]

To, že se Fregova koncepce smyslu jako způsobu danosti významu nemůže s Wittgensteinem inspirovaným pojetím smysluplnosti jakožto závislosti na možném stavu světa (jinými slovy: artikulovatelnosti jistého rozdílu, jímž lze určitý stav odlišit od jiných) krýt přinejmenším co do svých intencí, jež byly v případě Fregově zcela na straně matematiky (»*“17 – 3” označuje totéž číslo, ale “17 – 3” nemá tentýž smysl jako “16 – 2”*« [LM_N, 251]), *nota bene* Fregem propagované matematiky analytické (!), se zdá být zřejmé. Fregova rozpolcenost co do identifikovatelnosti f-smyslu je ovšem tak velká, že v jedné z částí svých *Logische Untersuchungen* mluví o ›A‹ a ›negaci negace A‹ jako o dvou myšlenkách [V, 157], zatímco v části přímo navazující výslovně říká, že ›A‹ vyjadřuje totéž (má tentýž smysl) co ›non (non A)‹.²⁶⁶ [GF, 49]

S ohledem na tuto zmatečnost a také na to, že se výše uvedené kritérium znovurozpoznání myšlenek nenachází v žádném z Fregových publikovaných spisů, ale jen v korespondenci nebo nedokončených skicách, lze sice souhlasit s tím, že Frege žádné obecné kritérium rovnosti f-smyslu nepodal. – To má ovšem velmi daleko k Bakerově-Hackerově tvrzení, že nás tím nutí k »*uznání*

²⁶⁶ Tichý zde znovu vidí příležitost pro aplikaci pojmu konstrukce, která v této souvislosti – totiž v historii snah o explikaci Fregova pojmu smyslu – představuje jakési vylepšení Carnapova konceptu ›intenzionálního izomorfismu‹.

existence myšlenek jakožto nadpozemských zprostředkovatelů mezi větou a tím, o čem je« [FLE, 353], entit, které jsou »ve své identitě a existenci nezávislé na lidském aktu tvrzení, a jsou tedy, v jistém smyslu, k tvrzení v externím vztahu« [FLE, 358sq]. Vzpomeneme-li na rozdíl mezi f-významem a f-smyslem jakožto pojmy dvou různých jazykových úrovní, nebude obtížné přitakat Stekeler-Weithoferovi, když směrem k Bakerovým-Hackerovým vývodům říká:

»Takovéto kritérium [po způsobu předmětné identity] se u Frega nenachází z dobrých důvodů. Neboť to, jak lze v různých větách (resp. jejich vyjádřeních) rozpoznat jednu a tutéž myšlenku, lze smysluplně vysvětlit vždy jenom "lokálně", v závislosti na situaci, oboru řeči (tématu a hledisku) a třeba i na předcházejícím kontextu. Nadto se toto rozpoznávání myšlenek opírá vždy také o soudnost. Tento názor je u Frega vyjádřen ovšem vždy pouze nepřímou, třeba když říká, že nám vysvětlení mohou dát prostředek, jak rozhodnout, co k myšlence patří a co ne, přestože jeho aplikace může být při organické povaze jazyka leckdy obtížná.«²⁶⁷⁾

Podobnou úvahu lze provést i ve vztahu ke kritériím identifikujícím funkci.

Avšak ani zbylá část Bakerova-Hackerova oceňování Fregovy nauky stigma-tem ontologického platonismu, tj. nařčení z vyznávání na lidstvu nezávislé existence myšlenek, se nezakládá na příliš hluboké analýze Fregova textu. Stručně: Fregovská myšlenka je tím, čemu na větě rozumíme, a možnost vzájemné domluvy je prostě a jednoduše fakt. Myšlenka je tedy nutný intersubjektivní korelát věty a jako taková »je všem těm, kteří ji chápou, stejným způsobem k dispozici« [L₂, 145]. Jednotlivec si proto nemůže spojovat s větou myšlenku zcela náhodně, ale nanejvýš tuto »objevit« účastí na společné jazykové praxi: »Když někdo uchopí myšlenku nebo si ji myslí, nevytváří ji, nýbrž s ní, která tu již je, vstupuje do vztahu odlišného od vidění věci a vlastnění představ.« [G, 69, pozn.] Platonisticky (synteticky) vyhlížející vyjádření Fregova jsou tedy »pouhou« analytickou artikulací důležitého pojmového rozdílu! Možnost domluvy není vysvětlena postulováním říše věčných myšlenek, ale právě naopak.

Navíc: tvrdí-li snad někde Frege, že je myšlenka na svém jazykovém vyjádření nezávislá (viz třeba [L₂, 145]), lze při uvážení výše popsané koncepce sémantického platonismu snadno pochopit, že to není výrazem externího vztahu myšlenky k jazyku, nýbrž jen uznáním (i) možnosti různé artikulace téhož a

²⁶⁷⁾ Stekeler-Weithofer [1987], 165sq]. Citovaný Fregův text je z [L₂, 153].

(ii) nezávislosti pravdivosti myšlenky na tom, zda byla někým reálně vyslovena či jen myšlena, ale na možnosti tohoto vyjádření, pro něž (!) jsou také popsány pravdivostní podmínky.

Říká-li dále Frege, že je myšlenka – např. ta vyjádřená Pýthagorovou větou – věčná či nadčasová (*zeitlos wahr*) [G, 69], dává tím najevo cosi o užití (>grammatice<) slova “myšlenka”, konkrétně zbytnosti časové specifikace její pravdivosti či platnosti, tedy o (ne)invarianci empirických predikátů (výrokových forem) vůči abstraktoru ›myšlenka x<. Případná platonistická interpretace této řeči je založena na nekritickém (nebo výmluvněji: předkritickém!), tedy nepřilíš bystrém čtení a užívání obrátů jako “myšlenka *byla* pravdivá již předtím, než ji někdo objevil” apod. Právě v této souvislosti je vhodné připomenout Kantův pojem *n e k o n e č n é h o s o u d u*. Tento druh soudu přes možnou kladnou formu náleží vždy k soudům záporným; typicky se jedná o tvrzení jako “myšlenky jsou *nečasové* (věčné)”, “čísla *nejsou zelená*”, “duše je *nesmrtelná*”. V takovýchto soudech nedochází k vymezení pojmu uvnitř nějakého předem konstituovaného oboru, jako třeba ve větách “prvočísla (větší než 2) nejsou sudá” apod., nýbrž je daný predikát zcela vyloučen z aplikace na daný obor (»*v nekonečných soudech není [negací] afikována kopula, nýbrž predikát*« [Log, A163]), tj. je zasazen mimo tento obor do nekonečné (indefinitní) sféry všech možných předmětů řeči (»*Nekonečný soud neukazuje pouze to, že subjekt není obsažen ve sféře predikátu, nýbrž že leží někde mimo něj v nekonečné sféře [...].*« [Log, A161]).

Nepoužíváme-li např. v řeči o číslech predikáty jako “zelený”, “vonící po třechních” apod., neznamená to, že bychom tak činit nemohli, nýbrž že tak činit nechceme, protože tím vzhledem k aritmetickému významu číselnek nedostáváme žádný praktický rozdíl. Zvládnutí aritmetických kalkulů, jak jsme je dříve zmínili, spočívá právě v tom, že odhlédneme (abstrahujeme) od jejich konkrétní grafické podoby, např. barvy, a soustředíme se pouze na rysy operativní. –Tuto původně praktickou dovednost můžeme potom v teoretické zkratce vyjádřit nekonečnými soudy jako “číslo 5 není zelené”, “číslo 5 není fyzický předmět” či “čísla (aritmetické pravdy) jsou věčná”, jejichž zneužití k realistickým proklamacím o existenci (ideálního typu bytí!?) skutečně vyžaduje notnou dávku logické necitlivosti a nevkusu.

7 FORMA

Grundgesetze představují Fregeův finální pokus o uskutečnění plánu logického založení aritmetiky. Prezentaci konkrétní podoby Fregeova systému bude také věnován celý první díl této kapitoly. V další podkapitole, v diskusi odvíjející se od Russellova paradoxu a jeho důsledků pro Fregeovo dílo, odhalíme na příkladě Fregeovy polemiky s Hilbertem a také porovnáním Fregeova konstruktivního přístupu k aritmetice se strukturalismem Dedekindovým jako jednu z příčin kolapsu systému *Grundgesetze* Fregeovo zanedbání vlastního rozlišení mezi formální a materiální teorií.

7.1 GRUNDGESETZE

V předchozí kapitole jsme zmínili, že lze Fregeův cíl logického založení aritmetiky identifikovat s konstrukcí takového předmětného oboru, jenž by byl ohodnocen jen na základě čistě logických principů a v němž by pak bylo možné (i) vhodným predikátem vydělit třídu čísel (aritmetických předmětů) ve smyslu výše uvedené Fregeovy definice, (ii) definovat základní aritmetické pojmy a (iii) ukázat platnost všech obvyklých aritmetických zákonů. Frege také od počátku svůj systém předkládá výčtem konvencí pravdivostního ohodnocování vět, z čehož je dostatečně jasné, že se jedná o systém sémantický. Sama idea pojmového písma, umožňujícího přehlednou kontrolu logicky platných úsudků a ve spojitosti s bodem (iii) také efektivní odvození aritmetických pravd, vede však Fregea výsledně k fixování základních pravdivostních podmínek ve formě základních logických pravd (zákonů) a k následnému vtělení těchto podmínek do axiomatického (deduktivního) systému pravidel syntaktické transformace *základních zákonů aritmetiky*. My tento *syntaktický systém* popíšeme s historickou věrností do té míry, v jaké nám poslouží k reprodukci konkrétních logicistických výsledků, a to v rozsahu daném Fregeovým neformálním výkladem z *Grundlagen*. Základem našeho výkladu bude ovšem *systém sémantický*, jehož rekonstrukci také tuto podkapitolu uzavřeme.

7.1.1 Základní pravdivostní funkce

V *Grundgesetze* nachází Fregeovo léta cizelované pojmosloví svou definitivní podobu. Každý správně utvořený výraz systému označuje buďto *funkci*, nebo *předmět* – hovoříme zde potom o *jménech funkčních* (*Funktionsname*) a *jménech vlastních* (*Eigename*). *Věta* je také vlastním jménem, a to jedné ze dvou různých pravdivostních hodnot – *pravdy* (*das Wahre*) nebo *nepravdy* (*das Falsche*), symbolicky W a F. Vycházíme tedy z jedině základní výrazové ka-

tegorie, a to kategorie vlastních jmen (termů) t. Funkční jména vznikají z vlastních jmen nahrazením jednoho nebo více výskytů jednoho nebo více vlastních či funkčních jmen odpovídajícím řeckým písmenem, jež nemá samostatný význam, nýbrž jen vyznačuje místo (*Argumentstelle*), kam má být substituováno jméno *argumentu* (*Argument*). Místem pro argument (dále jen *a_místem*) rozumíme všechny výskyty téhož zástupného písmene; nasycením všech *a_míst* ve jménu funkce získáme jméno *hodnoty* (*Wert*). Jelikož tedy hodnotou rozumíme vždy předmět, je funkční jméno jakožto dále substituovatelný výraz co do svého typu (kategorie) určeno jen typem a počtem svých *a_míst*.²⁶⁸) Funkční jména značí Frege schematicky velkými řeckými písmeny $\Phi, \Psi, \Omega, \dots$, jména předmětů $\Gamma, \Delta, \Theta, \dots$ Tato písmena nenáleží pojmovému písmu, jsou jenom užita v jeho diskusi. (Viz Fregova poznámka pod čarou z [GG₁, § 5].)

Frege speciálně rozlišuje *a_místa* (resp. argumenty) prvního druhu (*Art*), značená písmeny ζ, ξ, \dots , za něž jsou dosazována vlastní jména (resp. předměty). Funkční jména (resp. funkce), jež obsahují pouze *a_místa* prvního druhu, se nazývají *prvního stupně* (*Stufe*); jedná se o výrazy kategorií $(t, t, \dots) \succ t$. *A_místa* pro funkční jména prvního stupně jsou značena φ, ψ, \dots , přičemž Frege speciálně rozlišuje *a_místa* druhého druhu pro funkční jména prvního stupně s jedním *a_místem* a *a_místa* třetího druhu pro funkční jména prvního stupně se dvěma *a_místy*. [GG₁, § 23]

Obecně platí, že funkční jméno obsahující pouze *a_místa* pro funkční jména *n*-tého stupně, je stupně *n + 1*; Frege však z této potenciálně nekonečné hierarchie funkcí, resp. jejich jmen uvažuje nejvýše funkce třetího stupně. U funkce druhého stupně s jedním *a_místem* je její druh, tj. počet *a_míst* funkčního jména, pro něž je její jméno určeno, naznačen pomocí *markýrovacích proměnných* β, γ, \dots , konkrétně

$$\Omega_{\beta}(\varphi(\beta)) \quad \Omega_{\beta\gamma}(\varphi(\beta, \gamma)).$$

²⁶⁸) V obvyklé matematické praxi jsou běžně uvažovány funkce, jejichž hodnotami jsou opět funkce. Typickým příkladem je derivace $d\varphi(x)/dx$, třeba když píšeme

$$d x^3/d x = 3x^2$$

jako vyjádření toho, že je funkce $3x^2$ výsledkem aplikace derivace na funkci x^3 . Frege oproti tomu na derivaci nahlíží jako na funkci dvou argumentů, z nichž jedním je derivovaná funkce a druhým číslo dosazené za proměnnou výsledné derivace, tj.

$$d \varphi(x)/d x (x = \zeta),$$

v konkrétním případě např.

$$d x^3/d x (x = 3) = 3x^2(x = 3) = 3 \cdot 3^2 = 27.$$

Srv. [GG₁, § 22].

Užitím indexů dáváme najevo, že β, γ, \dots nejsou a místa uvažované funkce (nejsou v ní ›volná‹), ale funkce, jež má být substituována za φ . Neindexovaný výraz

$$\Omega(\varphi(\beta))$$

chápeme jako jméno funkce dvou argumentů, a to prvního a druhého druhu. Funkce, jež přijímá argumenty různých stupňů (předměty považujeme za argumenty stupně nula), nazývá Frege ›ungleichstufig‹, tedy ›různého stupně‹. [GG₁, § 22] Příkladem takovéto funkce je derivace.

První skupinu základních funkcí systému tvoří nám známé funkce logické, v souladu s požadavkem totality redefinované pro celý předmětný obor. Jsou to

— ζ	funkce vodorovného pruhu, přiřazující W opět hodnotu W ; všem ostatním předmětům hodnotu F [GG ₁ , § 5],
— \top ζ	funkce pruhu popření (negace), přiřazující W hodnotu F ; všem ostatním předmětům hodnotu W [GG ₁ , § 6],
$\zeta = \xi$	funkce rovnosti, přiřazující stejným předmětům hodnotu W ; různým hodnotu F [GG ₁ , § 7],
\top ξ └ ζ	funkce podmínkového pruhu, nabývající hodnoty F pro ζ -argument W a ξ -argument jiný než W ; pro ostatní argumenty nabývá hodnoty W . [GG ₁ , § 12]

Všechny tyto funkce jsou funkce do pravdivostních hodnot, tedy pojmy. Jeli-kož platí rovnosti

$$(V1) \quad (\text{—} \top \text{—} \zeta) = (\top \text{—} \zeta) = (\text{—} \top \zeta) = \top \zeta \quad [GG_1, \text{§ } 6],$$

$$(V2) \quad \begin{array}{c} \text{—} \text{G} \top \text{—} \xi \\ | \quad \perp \quad \text{—} \zeta \quad \perp \\ \quad \quad \quad \perp \quad \zeta \end{array} \quad J = \quad \top \xi \quad [GG_1, \text{§ } 12],$$

lze se na pruh popření (*Verneinungsstrich*) i pruh podmínkový (*Bedingungsstrich*) dívat jako na složené z pruhů vodorovných (*Wagerechter*). Frege zde hovoří o složení (*Verschmelzung*) vodorovných pruhů. [GG₁ § 48] Podobný jev se týká i kvantifikátoru, jenž je uvažován jako funkční jméno druhého stupně s jedním a místem druhého druhu, tj. jako výraz kategorie ($t > t$) $> t$. Rovněž u funkce kvantifikátoru se jedná o funkci, jejímiž hodnotami jsou výhradně hodnoty pravdivostní:

— q — $\varphi(a)$ funkci $\Phi(\zeta)$ přiřadí W , jestliže tato přiřazuje W každému svému argumentu; jinak F .

Jak již bylo řečeno a jak lze rovněž snadno ověřit, platí

$$(V3) \quad (\text{—} \neg q \text{—} \varphi(a)) = (\neg q \text{—} \varphi(a)) = (\text{—} \neg q \neg \varphi(a)) = \neg q \neg \varphi(a) \quad [GG_1, \text{§ } 8].$$

Kromě německých písmen a, b, c, \dots , tzv. vázaných proměnných, jejichž užití na místě a míst prvního druhu musí vždy předcházet symbol —p— s příslušným písmenem nad jamkou (*Höhlung*), užívá Frege i písmen latinských a, b, c, \dots , tzv. volných proměnných, k označení libovolného předmětu. Tyto symboly neoznačují (*bezeichnen*), neznamenají (*bedeuten*) předmět, nýbrž jej pouze naznačují (*andeuten*). [GG₁, § 17] Oba typy znaků nazývá Frege předmětnými písmeny (*Gegenstandsbuchstabe*); vedle nich zavádí také latinská a německá písmena funkční (*Funktionsbuchstabe*), a to d, e, \dots, f, g, \dots a f, g, \dots, F, G, \dots pro funkce prvního stupně [GG₁, § 19sq] a $M, N, \dots, \mu, \nu, \dots$ pro funkce stupně druhého. Tato písmena jsou při své aplikaci opět indexována příslušným počtem markýrovacích proměnných [GG₁, § 25], jak je tomu např. u poslední základní funkce do pravdivostních hodnot, a to funkce třetího stupně, jejímiž argumenty jsou funkce druhého stupně s argumenty druhého druhu, tedy f-význam výrazu kategorie $((t > t) > t) > t$:

$\text{—t— } \mu_{\beta}(d(\beta))$ funkci $\Omega_{\beta}(\varphi(\beta))$ přiřadí W , jestliže tato přiřazuje W každému svému argumentu; jinak F . [GG₁, § 25, 29]

7.1.2 Abstraktor a § 10

Dosud byly všechny uvažované funkce pojmy, což znamená, že jména vzniklá jejich nasycením označovala výhradně pravdivostní hodnoty. Abstraktor je první výrazotvorný operátor, u něhož tomu tak není. Stejně jako kvantifikátor náleží sice do kategorie $(t > t) > t$ a taktéž sestává z vázaného písmene, tentokrát řecké samohlásky $\alpha, \varepsilon, \dots$, a předepsané césury, představované odpovídající samohláskou doplněnou o *spiritus lenis*, význam mu však nelze dát jen prostou stipulací ve formě

$\alpha\varphi\alpha$ přiřazuje funkci $\Phi(\zeta)$ předmět $\acute{\alpha}\Phi\alpha$,²⁶⁹⁾

nýbrž je zapotřebí zvláštního zákona:

“ $\acute{\alpha}\Phi\alpha = \acute{\varepsilon}\Psi\varepsilon$ ” má stejný (f-)význam jako “ $\text{—q— } \Phi(a) = \Psi(a)$ ”.

Výrazu “ $\acute{\alpha}\Phi\alpha$ ” je tedy dán význam v kontextu věty, a to konkrétně rovnosti, neboť se jedná o výraz jmenný. Fregovi však před očima znovu vyvstává problém z *Grundlagen*: stačí tento zákon, tj. GV, k ohodnocení všech identit – či obecně – všech vět systému, v nichž figuruje jméno průběhu hodnot?

»Máme pouze prostředek, jak vždy znovurozpoznat průběh hodnot, je-li označen jménem “ $\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ ”, díky němuž již jako průběh hodnot rozpoznatelný je. Stále však nemůžeme rozhodnout, ani zda je předmět průběhem hodnot, když nám

²⁶⁹⁾ Srv. Fregovu diskusi z [GG₁, § 9].

jako takový dán není, a případně které funkci přísluší, ani nejsme s to v obecnosti rozhodnout, zda má daný průběh hodnot nějakou danou vlastnost, nevíme-li, zda je tato vlastnost spojena s vlastností příslušné funkce.« [GG₁, § 10]

Toto vše musí být pro příslušný větný obor ošetřeno, a to vždy znovu s každým jeho rozšířením o nové výrazy. S ohledem na uvažovaný typ výrazu, tj. jméno předmětu, nás přirozeně zajímají pouze jména funkcí s a_místy prvního druhu. V § 10 argumentuje Frege přibližně v následující linii. Funkce, jež v danou chvíli přicházejí v úvahu, jsou:

$$\zeta = \xi \qquad \text{—} \zeta \qquad \text{—} \zeta \qquad \text{—} \zeta$$

Z vlastnosti sloučení vodorovných pruhů (V1) a (V2) je zřejmé, že za argument u funkcí podmínkového pruhu a pruhu popření lze vzít vždy pravdivostní hodnotu, tj. že lze převést tíhu výše požadované specifikace ohodnocení vět, v nichž se některé z vyjmenovaných funkčních jmen vyskytuje, pouze na funkci vodorovného pruhu. Jelikož tato funkce je ekvivalentní funkci

$$(\zeta = \zeta) = \zeta,$$

můžeme se omezit jen na případ rovnosti.

Jedinými předměty, které jsou v systému vedle průběhů hodnot uvažovány, tj. pro něž jsou zavedena jména, jsou pravda a nepravda. Tak např. $\text{—}a = a$ a všechny ostatní tautologie (predikátové logiky s rovností) označují *W*. Jde tedy o to, jak ohodnotit výraz

$$(\theta) \quad S = \acute{a}F\alpha,$$

kde je *S* jméno *W* nebo *F*. Jelikož každá správně utvořená věta systému, tedy i věta *S* z (θ) , začíná vodorovným pruhem nebo je rovností, nemohla být ze syntaktických důvodů výrazu (θ) skrze *GV* přiřazena některá z pravdivostních hodnot. Kdyby se nám nyní podařilo identifikovat pravdu a nepravdu jako nějaké průběhy hodnot $\acute{e}W(\epsilon)$ a $\acute{e}F(\epsilon)$, byl by problém vyřešen, neboť pro každou z ohodnocených vět *S* by pak nutně platila jedna z rovností:

$$S = \acute{e}W(\epsilon), \quad S = \acute{e}F(\epsilon),$$

a pro výraz (θ) by tak byla stanovena kritéria pravdivosti, tj. byl by ohodnocen. Frege dále uvažuje takto: Jelikož pravda a nepravda jsou předměty umělé, je v jistém smyslu lhostejné, co za ně konkrétně budeme považovat. Vezměme nyní pojem

$$W(\zeta) \quad \text{—} \zeta,$$

pod nějž spadá jen *W*, a pojem

$$F(\zeta) \quad \zeta = (\text{—}a = a),$$

pod nějž spadá pouze *F*, a zkusme vzít “ $\acute{e}W(\epsilon)$ ”, “ $\acute{e}F(\epsilon)$ ” za jména pravdy a nepravdy. Otázka, kterou si nyní Frege klade, zní: Nedostaneme se tímto zto-

tožněním jistých průběhů hodnot s hodnotami pravdivostními do rozporu s některým z pravdivostních principů?

Aby výše zmíněnou konvenci obhájl, argumentuje Frege takto: Zavedeme-li paralelně s průběhy hodnot prostřednictvím jmen jako “ $\acute{h}\Phi(\eta)$ ” ještě nějaké jiné předměty, ovšem se stejnými kritérii znovurozpoznání, tj. stanovíme-li

“ $\acute{h}\Phi(\eta) = \acute{h}\Psi(\eta)$ ” má stejný význam jako “ $\neg\text{—}\Phi(a) = \Psi(a)$ ”,

pak tvrzení rovnosti těchto nových předmětů a průběhů hodnot zůstávají nerozhodnuta, a nemohou se tak navzájem dostat do sporu. Vezměme nyní pro nějaké funkce $\Lambda(\zeta)$ a $M(\zeta)$ příslušné nové předměty $\acute{h}\Lambda(\eta)$, $\acute{h}M(\eta)$ a definujme funkci $X(\xi)$ takto:

$$X(\acute{h}\Lambda(\eta)) = W,$$

$$X(W) = \acute{h}\Lambda(\eta),$$

$$X(\acute{h}M(\eta)) = F,$$

$$X(F) = \acute{h}M(\eta),$$

$$X(N) = N \text{ pro ostatní } N.$$

Za předpokladu, že funkce $\Lambda(\zeta)$, $M(\zeta)$ nenabývají pro všechny argumenty stejných hodnot, musí pro libovolné funkce $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ platit:

“ $X(\acute{h}\Phi(\eta)) = X(\acute{h}\Psi(\eta))$ ” má stejný význam jako “ $\neg\text{—}\Phi(a) = \Psi(a)$ ”.

Pro předměty $X(\acute{h}\Phi(\eta))$ jsou tedy určena stejná kritéria znovurozpoznání jako pro průběhy hodnot, přičemž výrazy “ $X(\acute{h}\Lambda(\eta))$ ”, “ $X(\acute{h}M(\eta))$ ” jsou jmény pravdy a nepravdy. Vezměme tedy namísto funkcí $\Lambda(\zeta)$, $M(\zeta)$ funkce $W(\zeta)$ a $F(\zeta)$. Je-li splněn výše zmíněný předpoklad rozdílných hodnot na některém argumentu, pak pro předměty $X(\acute{h}W(\eta))$, $X(\acute{h}F(\eta))$ a $\acute{e}W(\epsilon)$, $\acute{e}F(\epsilon)$ platí stejná kritéria znovurozpoznání a nic nestojí v cestě tomu, abychom za jména pravdivostních hodnot považovali přímo výrazy “ $\acute{e}W(\epsilon)$ ”, “ $\acute{e}F(\epsilon)$ ”. Takto má Frege záležitost s úplným a konzistentním ohodnocením rovností systému za vyřízenou. Kámen úrazu je ovšem v onom *›splnění výše zmíněného předpokladu‹*.

Aby funkce $W(\zeta)$ a $F(\zeta)$ nenabývaly pro všechny argumenty stejných hodnot, nesmí být totiž věť “ $\neg\text{—}F(a) = W(a)$ ” přiřazena hodnota pravda – neboli ekvivalentně: jelikož pod pojem $W(\zeta)$ spadá pouze pravda a pod $F(\zeta)$ pouze nepravda, musí být pravda a nepravda odlišné předměty. *Toto je ale třeba teprve prokázat!* V případě totiž, že pravdivostní podmínky ohodnocují systém nekonzistentně – což je ovšem právě případ *Grundgesetze* –, jsou pravda a nepravda coby interní předměty systému totožné.

Frege tedy sice na rozdíl od svých současníků postřehl *›umělou‹* (normující) povahu svých principů a s tímto pozorováním spjatou potřebu důkazu toho, zda jsou pro dosažení předem vytyčených cílů způsobilé, jako by ale zapomínal, že předmětná řeč (o průbězích hodnot, funkcích, hodnotách a argumentech atd., namísto o jejich jménech), kterou často používá, je plně oprávněná, a tedy bezpečná pouze tehdy, je-li příslušný předmětný obor, v tomto případě obor

průběhů hodnot, řádně konstituován. Argumentace vedená v situaci, kdy ještě nevíme, zda o tom, o čem mluvíme, vůbec mluvit můžeme, je pochopitelně velmi nepřehledná a vede snadno k omylům právě toho druhu, jemuž jsme se chtěli vyvarovat, v tomto případě k inkonzistenci celého systému.

7.1.3 Axiomatický systém *Grundgesetze*

Funkce určité deskripce, o níž Frege hovoří jako o funkci určitého členu (*ein Ersatz für den bestimmten Artikel der Sprache*) [GG₁, § 11],²⁷⁰⁾ je poslední ze sady základních funkcí, již jsme museli zmínit, abychom mohli předvést Fregeův axiomatický systém základních zákonů tak, jak byl ve své původní podobě spolu s několika pravidly připraven k pojmospisnému rozvoji dalších aritmetických zákonů. V definici operátoru určité deskripce využívá Frege toho, že již má k dispozici abstrakci průběhů hodnot, a nepojímá tak jeho f-význam jako funkci na pojmech, nýbrž na jejich rozsazích, v důsledku tedy na předmětech (argumentech prvního druhu) obecně. Jedná se o následující funkci z kategorie $t > t$:

∃ ξ existuje-li k argumentu předmět Δ takový, že $\xi(\Delta = \varepsilon)$ je tímto argumentem, pak je Δ hodnotou této funkce; jestliže takový předmět neexistuje, pak je hodnotou sám argument.

Tímto je seznam základních funkcí, jak jej Frege uvádí v § 31, završen a my můžeme přejít k axiomům. Předem je nutno říci, že jsme sice úvodem všechny správně utvořené výrazy systému rozdělili na jména vlastní a jména funkcí, z pohledu vlastního pojmového písma, tj. nástroje schematického odvozování, je však toto rozdělení coby ryzí výraz Fregeovy formální ontologie (sémantiky) zbytné, ba dokonce zavádějící. Nenasycené výrazy, tj. výrazy obsahující a_místa reprezentovaná řeckými písmeny se v něm totiž neobjeví. Naopak, objeví se v něm – totiž v syntaktických částech jeho základních jednotek, vět, tj. jmen pravdivostních hodnot – výrazy, jež vlastní f-význam vůbec nemají, nicméně je s nimi výhodné pracovat při popisu správně utvořené věty systému, popisu jejích pravdivostních podmínek a formulaci úsudkových pravidel. S tím jsme se ostatně již setkali v podkapitole věnované logice predikátů u pojmu *matrice*. Frege zcela analogicky zavádí pojem př e d m ě t n ě m a r k y (*Gegenstandsmarke*), kterou rozumí výraz, jenž vznikne z vlastního jména nahrazením v něm obsaženého vlastního nebo funkčního jména příslušným předmětným nebo funkčním písmenem. Rozumí se, že vlastní jméno je obsaženo samo v sobě, proto jsou předmětná písmena rovněž markami.

²⁷⁰⁾ V němčině běžný termín “*Kennzeichnungsfunktion*” Frege nepoužívá.

Podobně je definován pojem marky funkční (*Funktionsmarke*). [GG₁, § 17, 26] Latinskou markou (*lateinische Marke*) nazývá Frege marku, jež vznikla dosazením výhradně latinských písmen. Podrobněji se touto terminologií a výkladem, v němž je užitá, zabývat nebudeme, podotkneme však, že rozšířením Fregova termínu marky na ostatní typy písmen lze velmi elegantní indukcí definovat všechny kategorie správně vytvořených výrazů systému, jak to lze mimo jiné najít v Tichého fregovské knize ([FFL, 80sq]).

Uveďme nyní seznam všech osmi Fregových základních zákonů (v šesti skupinách) [GG₁, § 47] a stručný popis všech dvanácti úsudkových pravidel [GG₁, § 48], úhrnem dávajících axiomatický systém \mathcal{G} z *Grundgesetze*. Všechny základní zákony stejně jako odvozené věty začínají svislým úsudkovým pruhem. »*Reprezentaci soudu v pojmovém písmu prostřednictvím znaku "┆" nazývám větou pojmového písma nebo stručně větou.*« [GG₁, § 5, 26] Dalším významným metajazykovým znakem je symbol pro definici, tzv. dvojitý pruh definice (*Definitions-doppelstrich*): »*Definice bude vždy reprezentována ve formě rovnosti s představeným "┆┆". Na levé straně rovnítka bude vždy stát definiens, na pravé straně definiendum. První bude složeno z již známých znaků.*« [GG₁, § 27]

Základní zákony aritmetiky

$$(I) \quad \begin{array}{l} \text{┆} \\ \text{┆} \quad \text{┆} \quad \text{---} \quad a \\ \quad \quad \text{┆} \quad \text{---} \quad b \\ \quad \quad \quad \quad \text{---} \quad a \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{┆} \\ \text{┆} \quad \text{---} \quad a \\ \quad \quad \quad \quad \text{---} \quad a \end{array} \qquad [GG_1, \text{§ } 18]$$

$$(IIa) \quad \begin{array}{l} \text{┆} \quad \text{---} \quad f(a) \\ \text{┆} \quad \text{┆} \quad \text{---} \quad f(a) \\ \quad \quad \quad \quad \text{---} \quad q \end{array} \qquad [GG_1, \text{§ } 20] \qquad (IIb) \quad \begin{array}{l} \text{┆} \quad \text{---} \quad M_\beta(f(\beta)) \\ \text{┆} \quad \text{┆} \quad \text{---} \quad M_\beta(d(\beta)) \\ \quad \quad \quad \quad \text{---} \quad t \end{array} \qquad [GG_1, \text{§ } 25]$$

$$(III) \quad \begin{array}{l} \text{┆} \quad g \quad \text{┆} \quad \text{---} \quad d(a) \quad \text{┆} \\ \text{┆} \quad \text{┆} \quad \text{---} \quad d(b) \quad \text{┆} \\ \quad \quad \quad \quad \text{---} \quad g(a = b) \end{array} \qquad [GG_1, \text{§ } 18] \qquad (IV) \quad \begin{array}{l} \text{┆} \quad \text{---} \quad (\text{---} \quad a) = (\text{---} \quad b) \\ \text{┆} \quad \text{┆} \quad \text{---} \quad (\text{---} \quad a) = (\text{---} \quad b) \end{array} \qquad [GG_1, \text{§ } 20]$$

$$(V) \quad \text{┆} \quad (\acute{\epsilon}f(\acute{\epsilon}) = \acute{\alpha}g(\acute{\alpha})) = (\text{---} \quad f(a)) = g(a) \qquad [GG_1, \text{§ } 20]$$

$$(VI) \quad \text{┆} \quad a = \text{┆} \acute{\epsilon}(a = \acute{\epsilon}) \qquad [GG_1, \text{§ } 18]$$

P r a v i d l a

- (R1) *Sloučení vodorovných pruhů.* Přejít od výskytu dvou vedle sebe položených vodorovných pruhů k jednomu; za vodorovný pruh jsou považovány obě strany pruhu popření, oba pruhu po stranách jamky kvantifikátoru a tři části podmínkového pruhu.
- (R2) *Záměna spodních členů.* Libovolná permutace spodních členů subjunkce.²⁷¹⁾
- (R3) *Obrat.* Záměna spodního a horního členu subjunkce při současně změně jejich pravdivostních hodnot (tj. přiřazení pruhu popření).
- (R4) *Sloučení stejných spodních členů.*
- (R5) *Proměna latinského písmene v německé (Generalizace).* Funkční i předmětná generalizace, tj. přechod od volné proměnné k proměnné vázané, kvantifikované.
- (R6) *Úsudek A (Modus ponens).* Přejít od dvou vět, z nichž druhá se od spodního členu první liší jen předepsaným svislým pruhem, k hornímu členu první.
- (R7) *Úsudek B (Tranzitivita subjunkce).* Ze dvou vět, v nichž jsou horní člen první a spodní člen druhé totožné, lze přejít k větě mající stejný spodní člen jako první a stejný horní jako druhá.
- (R8) *Úsudek C (Vyloučený třetí).* Z vět, které se shodují v horním členu a spodní člen jedné se od spodního členu druhé liší jen předepsaným pruhem popření, lze usoudit na společný horní člen.
- (R9) *Náhrada latinských písmen (Substituce za volnou proměnnou).* Náhrada všech výskytů latinského písmene (volné proměnné) jménem či latinskou markou odpovídajícího druhu.
- (R10) *Náhrada německých písmen.* Přejmenování německých písmen, tj. vázané proměnné.
- (R11) *Náhrada řeckých samohlásek.* Přejmenování řeckých samohlásek, tj. vázaných písmen abstrakce.
- (R12) *Náhrada definice.* Proměna znaku definice ve znak soudu.

Frege v textu výslovně zmiňuje, že při sestavení rozsáhlého seznamu užitých úsudků byl veden praktickými důvody pohodlného odvozování. Teoretická přednost střídmosti aplikovaných pojmů byla záležitostí *Begriffsschrift*. V ní

²⁷¹⁾ V subjunkci $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \dots)$ lze považovat všechna A_i ($1 \leq i \leq n$) za její spodní členy a B za její horní člen. Pro libovolné i ($1 < i \leq n$) je také $A_i \rightarrow (A_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \dots)$ horní člen k A_1, \dots, A_{i-1} . Viz [GG1, § 12].

předvedený úplný axiomatický systém predikátové logiky prvního řádu s rovností, značme jej \mathfrak{S}_{PL} , je v \mathcal{G} obsažen. Výrokovělogické axiomy \mathfrak{S}_{PL} lze v \mathcal{G} dokázat z (I), (R2), (R3) a (R6). Jediným predikátovým axiomem \mathfrak{S}_{PL} , nechápeme-li přirozeně užitá latinská písmena funkční jako proměnné, ale jako písmena schematická, je (IIa). ([B, § 22], formule (58)) Dva axiomy rovnosti, totiž

$$(52) \quad \begin{array}{l} \vdash \\ \quad \vdash f(b) \\ \quad \quad \vdash f(a) \\ \quad \quad \quad \vdash a = b \end{array} \quad [\text{B, § 20}]$$

$$(54) \quad \vdash a = a \quad [\text{B, § 21}]$$

lze dokázat z (III).²⁷²⁾ Jako jediné úsudkové pravidlo \mathfrak{S}_{PL} uvádí Frege MP [B, 9], [GG₁, 26], implicitně však užívá pravidlo generalizace:

$$(G) \quad \begin{array}{l} \vdash \Phi(a) \\ \quad \vdash A \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \vdash \Phi(a) \\ \quad \vdash A \end{array}$$

»je-li A výraz, v němž se a nevyskytuje« [B, 21]. Jelikož Frege v *Begriffsschrift* ještě netypizuje užitá písmena jako v *Grundgesetze*, systematicky je však nechává zastupovat libovolný, tedy i nenasycený typ obsahu [B, § 11], reprezentují formule (58) a pravidlo (G) také predikátovou logiku vyšších řádů, jak je v \mathcal{G} explicitně zastoupena axiomy (IIb) a pravidlem (R5).

Úplnost predikátové logiky prvního řádu dokázal až roku 1930 Kurt Gödel.²⁷³⁾ Ten také o rok později podal důkaz neúplnosti aritmetiky (existenci nedokazatelných formulí vzhledem k přiměřeně silnému aritmetickému systému), a tím i důkaz neúplnosti predikátové logiky vyšších řádů²⁷⁴⁾ pro standardní, tj. množinovou sémantiku. Pro nestandardní, tzv. henkinovskou sémantiku, která je spřízněna s naším substitučním pojetím, ovšem úplnost platí, což bylo později dokázáno Leonem Henkinem.²⁷⁵⁾

7.1.4 Odvozené funkce

Podobně jako v *Begriffsschrift*, kde se v aplikaci na pojem řady omezil pouze na kvantifikaci přes funkce prvního stupně, nevyužívá Frege ani v *Grundgesetze* vyšší nežli druhořádové kvantifikace, a to navíc v rudimentární formě přes jednoargumentové funkce. Tento typ kvantifikace je však zužitkován při defi-

²⁷²⁾ Podrobné odvození viz *Kutschera* [⟨1989⟩, § 7.1.3].

²⁷³⁾ *Gödel* [⟨1930⟩].

²⁷⁴⁾ *Gödel* [⟨1931⟩].

²⁷⁵⁾ *Henkin* [⟨1950⟩].

hou. *Tato zástupnost však neplatí pro jiné argumenty než průběhy hodnot!* [GG₁, § 35]

Je zřejmé, že téhož postupu by šlo využít také pro funkce s více argumenty, kdybychom ovšem měli k dispozici způsob, jak přecházet k jejich průběhům hodnot. K tomu by se zdálo zapotřebí zavést buďto *speciální abstrakci*, jak je tomu pro případ vícemístných predikátů v Russellových-Whiteheadových *Principiích*, kde je pak nad symbolikou

$$xyR(x, y)$$

logika relací rozvíjena paralelně k logice tříd $xR(x)$, nebo nedefinovaný pojem *uspořádané dvojice* $x;y$, jak je tomu u Peana, spolu s následnou definicí relačního abstraktu $xyR(x, y)$ jako třídy

$$z(\exists x\exists y(w = x;y \wedge R(x, y))).^{276)}$$

Frege se vyhnul oběma těmto přirozeným rozšířením svého systému tím, že definoval průběh hodnot funkce se dvěma argumenty neboli *dvojitý průběh hodnot* (*Doppelwertverlauf*) pomocí sukcesivní aplikace jednoduchého abstraktoru.

Z funkce

$$\Phi(\zeta, \xi)$$

tak nejprve získává jednoargumentovou funkci

$$\acute{\epsilon}\Phi(\acute{\epsilon}, \xi)$$

a teprve z ní dvojitý průběh

$$\acute{\alpha}\acute{\epsilon}\Phi(\acute{\alpha}, \acute{\epsilon}).^{277)}$$

Funkci

$$\Omega_{\beta\gamma}(\varphi(\beta, \gamma))$$

druhého stupně je tedy pro vhodné argumenty možné nechat zastupovat funkci

$$\Omega_{\beta\gamma}(\beta i(\gamma i \zeta))$$

stupně prvního. Pojem *uspořádané dvojice* definuje Frege později jako

$$(:) \quad \Vdash \acute{\epsilon}(oi(ai\acute{\epsilon})) = o;a \quad \text{[GG}_1\text{, § 144].}$$

S aparátém rozšířeným o dvojitý průběh hodnot, jež pro relace jakožto funkce dvou a více argumentů do pravdivostních hodnot nazývá *rozsahe m r e l a c e* (*Umfang der Beziehung*) [GG₁, § 36], přistupuje nyní Frege k rekonstrukci základních pojmů, jež podle plánu z *Grundlagen* potřebuje pro definici kardinálního čísla. Systematicky přitom upřednostňuje řeč o rozsazích (resp. průběžích hodnot) řeči o pojmech, pro *Grundlagen* charakteristické.

²⁷⁶⁾ Pojetí relace jako třídy uspořádaných dvojic pochází od Peirce. Viz [CP, 3.220].

²⁷⁷⁾ Russellova výše uvedená notace je vlastně adaptací této notace Fregeovy.

Na okraj poznamenejme, že takto popsaná relace bezprostředního následníka nepostihuje následnost transfinitních kardinálních čísel – ta jsou totiž podle ní předchůdci a následníky pouze sebe sama. Frege také – jak naznačuje jeho řeč z *Grundlagen*²⁸¹⁾ – směřuje svoji definici k číslům přirozeným (tj. konečným kardinálům), její obecnou aplikovatelnost na jakékoli číslo však později užívá k charakterizaci (ne)konečného čísla jako přirozeného čísla (resp. člena řady přirozených čísel) jisté vlastnosti. My budeme hovořit o přirozených číslech výhradně ve smyslu konečných kardinálů. Jediný nekonečný kardinál, který Frege uvažuje (ačkoli mu byla Cantorova myšlenka nekonečné hierarchie známa a nikoli proti myslí),²⁸²⁾ je \aleph_0 .

Rozsah relace, v níž jsou dvě čísla tehdy a jen tehdy, jsou-li bezprostředními následníky ve smyslu výše uvedené definice, vypadá nyní takto:

$$(f) \quad \begin{array}{l} \vdash \text{áé} \\ \text{X} \\ \text{X} \\ \text{Y} \end{array} \begin{array}{l} \text{W} \\ \text{T} \\ \text{q} \\ \text{r} \end{array} \begin{array}{l} \text{T} \\ \text{T} \\ \text{T} \\ \text{T} \end{array} \begin{array}{l} | \\ \text{a} \\ \text{= } \alpha \\ | \\ \text{a} \\ \text{= } \alpha \\ | \\ \text{a} \\ \text{= } \alpha \\ | \\ \text{a} \\ \text{= } \alpha \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Z} = \mathbf{f} \\ [\\ \text{J} = \varepsilon \\ \backslash \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ [GG_1, \text{§ } 43]. \end{array}$$

Zřejmě platí

$$\vdash \varepsilon i(\alpha i \mathbf{f}) \quad [GG_1, \text{§ } 103, \text{věta (110)}].$$

Na základě výše uvedených definic lze nyní v \mathcal{G} dokázat některé jednoduché věty, jež Frege uvedl již v *Grundlagen*. Zvláště významné je tvrzení

$$(5) \quad \begin{array}{l} \vdash \text{T} \\ \text{T} \\ \text{T} \end{array} \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{f} \\ \text{I} \end{array} \begin{array}{l} \text{f} \\ \text{f} \\ \text{f} \end{array} \quad [GG_1, \text{§ } 95, \text{věta (90)}],$$

podle něhož je relace \mathbf{f} vzájemně jednoznačná, tj. každé číslo má nejvýše jednoho bezprostředního následníka a předchůdce.²⁸³⁾ Rovněž lze dokázat větu

$$(6) \quad \begin{array}{l} \vdash \text{T} \\ \text{T} \\ \text{T} \\ \text{T} \end{array} \begin{array}{l} \text{q} \\ \text{T} \\ \text{T} \\ \text{T} \end{array} \begin{array}{l} \text{a} \\ \text{i} \\ \text{a} \\ \text{b} \end{array} \begin{array}{l} \text{a} \\ \text{= } \mathbf{f} \\ \text{= } \mathbf{f} \\ \text{= } \mathbf{f} \end{array} \quad [GG_1, \text{§ } 100, \text{věta (107)}],$$

tedy to, že má každé číslo kromě nuly bezprostředního předchůdce.²⁸⁴⁾ K důkazu existence bezprostředního následníka libovolného čísla to ovšem nestačí.

²⁸¹⁾ Viz [GL, § 76]: »Věta: „existují pojem F a předmět x , který pod něj spadá, takové, že číslo příslušející pojmu F je n a číslo příslušející pojmu 'spadající pod pojem F , ale nerovnáající se x ' je m “ má stejný význam jako „ n následuje v řadě přirozených čísel [natürliche Zahlenreihe] bezprostředně za m “.«

²⁸²⁾ Viz [GL, § 86].

²⁸³⁾ Viz [GL, § 79, věta (5)].

²⁸⁴⁾ Viz [GL, § 78, věta (6)].

»Abychom mohli dokázat, že za každým číslem [...] číselné řady bezprostředně následuje nějaké číslo, musíme vykázat pojem, jemuž toto číslo přísluší.« [GL, § 79] S tímto požadavkem se také dostáváme do druhé fáze specifikace řady čísel, fáze, v níž hraje ústřední roli pojem relace (obecného) následníka v (libovolné) řadě.

7.1.6 Ancestral

Fregova základní úvaha vypadá následovně: jestliže jsme popsali řadu bezprostředně po sobě následujících přirozených čísel (resp. pojmů, jimž přísluší) od nuly až po číslo n , má tato řada přesně $n + 1$ členů, tj. pojmu $\succ \xi$ náleží číselné řadě končící n přísluší číslo $n + 1$, jež chceme zachytit. Rozepíšeme-li tento pojem jako $\succ n$ následuje v číselné řadě za ξ nebo je rovno ξ , je ihned zřejmé, že je především třeba vysvětlit relaci

ζ následuje v číselné řadě za ξ .

To se může zdát zprvu jako jednoduchý úkol: přirozené číslo s následuje za přirozeným číslem r v číselné řadě tehdy a jen tehdy, jestliže existují předměty $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ takové, že $\Gamma_0 = r, \Gamma_n = s$, a platí

$$\Gamma_0 i(\Gamma_1 i \mathbf{f}), \Gamma_1 i(\Gamma_2 i \mathbf{f}), \dots, \Gamma_{n-1} i(\Gamma_n i \mathbf{f}),$$

tedy když lze dospět od čísla r k číslu s konečným, v tomto případě n -násobným iterováním (aplikací) relace bezprostředního následníka. Takto lze definovat dosažitelnost jednoho čísla z druhého pro libovolný konkrétní konečný počet n kroků. Každý případ je ovšem vyjádřen jinou větou (čítající $n + 1$ proměnných a n konjunktů), zachycující speciální relaci n -tého následníka. Výraz obecného případu libovolného následníka, o němž nám ovšem jde, k dispozici není.

Jak víme z úvodu *Begriffsschrift*, byla to právě logická charakterizace libovolné iterace (Frege hovoří o aplikaci: *Anwendung*) nějaké základní relace, jež stála v základech Fregovy logicistické ideje, a tím i nové logiky, za tímto účelem vytvořené. Třetí část tohoto spisu obsahuje také obecná zkoumání z teorie řad, jež jsou pak přímo aplikována v *Grundlagen* i *Grundgesetze* při řešení výše zmíněných problémů. Problém definice číselného následníka z číselného následníka bezprostředního můžeme za pomoci vžitých termínů uchopit jako konkrétní případ definice *a n c e s t r á l n í* relace (relace předka) ze základní relace *p a r e n t á l n í* (relace rodiče): předky (*ancestor*) jsou přímí rodiče (*parent*), jejich rodiče, rodiče jejich rodičů atd. Frází $\succ \Gamma$ následuje ve Ψ -řadě za Δ vyjadřuje Frege okolnost, že jsou předměty Γ a Δ k sobě v ancestrálním vztahu (následnické relaci), který je určen parentální relací Ψ (relací bezprostředního následníka). To, že se obecně nemusí jednat o relaci jednoznačnou,

podle něhož konečná čísla nejsou svými vlastními následníky. Spolu s tím je nyní zřejmé, že je nulou začínající číselná řada nekonečná. Frege tak může definovat první nekonečný kardinál (*Endlos*) jako

$$\Vdash | \{ \aleph_i(\{ \aleph_f \}) = \infty \quad [GG_1, \text{ § 122}],$$

neboť $\aleph_i(\{ \aleph_f \})$ je rozsah pojmu konečného čísla.²⁹⁰ Po této definici pak následují důkazy vět

$$\vdash \infty_i(\infty_j f) \quad [GG_1, \text{ § 125, věta (165)},$$

$$\vdash \aleph_i(\infty_j \aleph_f) \quad [GG_1, \text{ § 125, věta (167)}].$$

Jimi jsme také vyčerpali formální prezentaci Fregova neformálního výkladu z *Grundlagen*.

7.1.7 Předmětný obor *Grundgesetze*

Podívejme se nyní na Fregovy *Grundgesetze* přímo jako na konstrukci předmětného oboru průběhů hodnot, který dále nazýváme G. Po vzoru Stekeler-Weithoferových *Grundprobleme* (viz [GPL, § 10.5]) zjednodušíme podstatně Fregův systém a vezmeme funkci $\zeta j \xi$ spolu s rovností za jediné základní relace; místo “ $\zeta j \xi$ ” pišme dále “ $\zeta \in \xi$ ”.

Jazyk systému G je jazykem teorie množin s “ \in ” jako jediným mimologickým predikátem. Rekurzí nejprve definujeme třídu termů Λ_G systému G takto:

- (1) termy jsou všechny správně utvořené formule predikátové logiky prvního řádu s rovností v jazyce tvořeném pouze dvojmístnou predikátovou konstantou “ \in ”,
- (2) je-li $T(y)$ term s volnou proměnnou y , pak pro řecké písmeno ε , které se v $T(y)$ nevyskytuje, je $\varepsilon T(y/\varepsilon)$ také term,
- (3) je-li $T(y)$ term s volnou proměnnou y a U je také term, pak i $T(y/U)$.

Nyní popíšme vlastní větný systém $G = \langle \Sigma_G, \Pi_G \rangle$. Systém substituovatelných jmen Π_G tvoří všechny uzavřené termy z Λ_G , tj. ty, které neobsahují žádný výskyt volné proměnné. Systém vět Σ_G je pro libovolná jména T, U z Π_G tvořen všemi výrazy

$$(1) \quad T \in U,$$

$$(2) \quad T = U.$$

Na ohodnocení Σ_G jsou kladeny četné podmínky: (1) Jelikož systém Π_G obsahuje všechny výrazy z Σ_G a z jeho rozšíření Σ_G^* , můžeme pomocně hovořit také o ohodnocení některých substituovatelných jmen, konkrétně těch, která ne-

²⁹⁰ Srv. [GL, § 84].

začínají řeckým písmenem. (Toto ohodnocení přirozeně v obou systémech, tj. v Π_G a Σ_G^* koinciduje.) Takto nyní od začátku předpokládáme, že je všem termům z Λ_G , které jsou uzavřenými tautologickými formullemi predikátové logiky prvního řádu s rovností, přiřazena hodnota W . (2) Pravdivostní podmínky vět formy $N = M$ jsou určeny (i) splynutím rovnosti s logickou ekvivalencí (bisubjunkcí), (ii) skrze GV a konvenci, díky níž jsou výrazy $\acute{\epsilon}W(\epsilon)$, $\acute{\epsilon}F(\epsilon)$ pokládány za jména W a F – viz /7.1.2/ – a (iii) skrze LP . (3) Věty formy $N \in M$ mají být ohodnoceny v souladu s rozpisem Fregovy definice (i) relace náležení, tj. uvažované větě je přiřazena hodnota W , existuje-li jméno tvaru $\acute{\epsilon}T(\epsilon)$ takové, že $T(\epsilon/y)$ nezačíná řeckým písmenem a výrazům $M = \acute{\epsilon}T(\epsilon)$ a $T(N)$ je přiřazena W ; jinak F .

Úkolem systému G (případně jeho rozšíření G^*) je konstituce abstraktních předmětů – průběhů hodnot. Té je však možné dosáhnout jen za předpokladu splnění WP , ASP a LP ; a proto je nutné předvést, že bylo těmto principům učiněno zadost. Již pouhý pokus o nárys strategie takovéhoho důkazu (sémantické úplnosti a konzistence) dává vzhledem k mnohonásobné provázanosti ohodnocení výše uvedených elementárních vět tušit,²⁹¹⁾ že celá věc není zřejmá jaksi ›sama od sebe‹, jako by výše uvedené podmínky – artikulující ›nejobecnější zákony pravdivosti‹ – nešlo ani nesplnit, a bylo tak rovnou možné hovořit o průbězích hodnot či o funkcích namísto o jejich jménech. Nejenže není vůbec jasné, zda výše uvedené podmínky přiřazují každé větě vůbec nějakou pravdivostní hodnotu, jak se to Frege snažil zajistit svojí konvencí identifikace pravdy a nepravdy s jistými průběhy hodnot, nelze však ani vyloučit, že nějaké větě nepřijazují hodnoty obě. Právě to ale ukázal Russellův paradox.

²⁹¹⁾ Kdyby byly elementární věty systému jednoznačně ohodnoceny nezávisle na sobě, byl by daný systém i jeho rozšíření konzistentní triviálně. Wittgensteinův požadavek z *Tractatu*, totiž že »z jedné elementární věty nelze usoudit na jinou« [TLP, 5.134], stejně jako návrh vyloučení identity z pojmového písma, míří zjevně tímto směrem. Identitou vládoucí Leibnizův princip je totiž tím elementem, jenž spojuje ohodnocení jedné elementární věty s ohodnocením jiných. Právě na něm ale také spočívá logická konstituce předmětů.

7.1.8 Russellova antinomie

Russellův dopis Fregovi z 16. 6. 1902:

Vážený pane kolego!

Již půldruhého roku znám Vaše “Základní zákony aritmetiky”, ale teprve nyní se mi podařilo najít čas na důkladnější studium, které jsme měl v úmyslu Vašim spisům věnovat. Shledal jsem, že jsem s Vámi ve všech hlavních věcech zcela zajedno, zvláště v zavržení každého psychologického momentu v logice a v ocenění významu pojmového písma pro základy matematiky a formální logiky, které lze ostatně stěží rozlišit. V mnoha jednotlivých otázkách našel jsem u Vás diskuse, rozlišení a definice, o kterých u ostatních logiků není ani zmínka. Zvláště ve věci funkce (§ 9 Vašeho Pojmového písma) jsem samostatně dospěl do detailu k týmž názorům. Pouze v jediném bodě jsem narazil na obtíž. Tvrdíte (s. 17), že i funkce může být neurčitým elementem. [292] Myslel jsem si to dříve také, avšak nyní o tomto názoru pochybuji, a to s ohledem na následující spor. Budiž w predikát: být predikátem, který nemůže být predikován sám sobě. Může být w predikován sám sobě? Z každé odpovědi vyplývá opak. Proto musíme usoudit, že w není predikát. Právě tak neexistuje žádná třída (jako celek) takových tříd, které samy sobě jakožto celku nenáleží.

Chystám se dokončit knihu o principech matematiky a rád bych v ní o Vašem díle podrobněji pohovořil. Vaše knihy již mám nebo si je brzy koupím; ale byl bych Vám velmi vděčný, kdybyste mi mohl zaslat separáty Vašich článků v různých časopisech. Kdyby to ale nebylo možné, vyrobím si je v knihovně.

Exaktní rozpracování logiky je ve fundamentálních otázkách, kde symboly sehlávají, velmi zaostalé; u Vás jsem našel to nejlepší, co je mi z naší doby známo, a proto si dovoluji vyjádřit Vám svůj nejhlubší respekt. Je politováníhodné, že jste ještě nedosáhl uveřejnění druhého dílu Vašich Základních zákonů; doufáme, že se tak stane.

*S uctivým pozdravem,
Váš nejoddanější
Bertrand Russell*

Výše uvedený spor vypadá v Peanově notaci takto:

$$w = \text{cls} \cap x \exists (x \sim \varepsilon x) . \supset : w \varepsilon w . = . w \sim \varepsilon w .$$

Peanovi jsem o tom napsal, ale zůstal mi dlužen odpověď.

²⁹²⁾ Russell odkazuje k textu: »Naopak může být také argument určitý, funkce neurčitá.« [B, § 9], v němž Frege připouští nahrazení funkčního výrazu proměnnou.

Fregova odpověď z 22. 6. 1902:

Vážený pane kolego!

Vřelý dík za Váš zajímavý dopis z 16. června! Těší mne, že jste se mnou v mnohém srozuměn a že máte v úmyslu podrobně pojednat o mém díle. [...] [293]

Váš objev sporu mne nanejvýš překvapil a skoro bych řekl, že mnou otrásl, neboť je tím zpochybněn základ, na němž jsem se domníval vystavět aritmetiku. Zdá se tak, že přeměna obecné rovnosti na rovnost průběhů hodnot (§ 8 mých Základních zákonů) není vždy dovolena, že můj Zákon V (§ 20, s. 36) není pravdivý a že mé vývody v § 31 nedostačují k tomu, aby byl ve všech případech zajištěn význam povoleným spojením znaků. Musím ještě o věci děle přemýšlet. Věc je o to vážnější, že spolu s mým Zákonem V se, jak se zdá, nehroutí pouze základ mé aritmetiky, nýbrž jediný možný základ aritmetiky vůbec. A přece, nemohu jinak, musí být možné takové podmínky pro přeměnu obecné rovnosti v rovnost průběhů hodnot stanovit a zachránit tak to podstatné z mých důkazů. Každopádně je Váš objev velice pozoruhodný a bude mít možná v logice za následek velký pokrok, jakkoli nevíтанý se zdá být na první pohled.

Mimochodem, výraz “predikát je predikován sám sobě” se mi nezdá být přesný. Predikát je zpravidla funkce prvního stupně, vyžadující za argument nějaký předmět, nemůže být tedy sám sobě argumentem (subjektem). Raději bych řekl: “pojem je predikován svému vlastnímu rozsahu”. Je-li funkce $\Phi(\zeta)$ pojem, označují jeho rozsah (nebo příslušnou třídu) pomocí “ $\epsilon\Phi(\epsilon)$ ” (oprávnění k tomu se nyní ovšem stává pochybným). V “ $\Phi(\epsilon\Phi(\epsilon))$ ” nebo “ $\epsilon\Phi(\epsilon)\epsilon\Phi(\epsilon)$ ” máme pak predikaci pojmu $\Phi(\zeta)$ jeho vlastnímu rozsahu.

Druhý díl mých Základních zákonů má co nevidět vyjít. Budu mu ovšem muset připojit dodatek, v němž Váš objev zhodnotím. Kéž bych jen našel ten správný úhel pohledu.

S uctivým pozdravem,

Váš nejoddanější

G. Frege

²⁹³ V dopise na tomto místě následuje výčet článků, které Frege Russellovi zasílá, dále zmínka o omylem zaslané prázdné obálce a oprava jedné chyby z *Begriffsschrift*.

7.1.9 Frege's Way Out

Rekonstruujeme nyní Russellův objev v rámci našeho systému G. Nejprve je jasné, že “ $\neg.y \in y$ ” je správně utvořenou otevřenou formulí predikátové logiky, a výraz “ $\acute{e}(\neg.\varepsilon \in \varepsilon)$ ” tedy správně utvořeným termem systému. Navíc se jedná o term uzavřený, a tedy substituovatelný, což znamená, že výraz

$$(A) \quad \acute{e}(\neg.\varepsilon \in \varepsilon) \in \acute{e}(\neg.\varepsilon \in \varepsilon)$$

je správně utvořenou větou systému a měla by mu být podle WP přidělena jedna z pravdivostních hodnot. Z podmínek pro ohodnocení vět formy $N \in M$ nyní vyplývá toto: jelikož je výraz na místě M tvaru $\acute{e}T(\varepsilon)$, kde $T(\varepsilon/y)$ je formulí, závisí pravdivost věty (A) na pravdivosti věty $T(\acute{e}(\neg.\varepsilon \in \varepsilon))$, tzn. věty

$$(B) \quad \neg(\acute{e}(\neg.\varepsilon \in \varepsilon) \in \acute{e}(\neg.\varepsilon \in \varepsilon)).$$

Větě (A) má být tedy přidělena pravda tehdy a jen tehdy, je-li přidělena větě (B). Podle pravidla pro ohodnocení negace pak ale nemůže být G korektní a úplný zároveň. Není to tedy jen tak, že by Fregovy pravdivostní podmínky neohodnocovaly věty systému dostatečně. G není jen neúplný, ale korektně *nezúplnitelný*. Všimněme si navíc, že tato situace nijak nezávisí na tom, že byly do systému substituovatelných termů zařazeny také věty, tj. že bude trvat i poté, co Π_G omezíme pouze na uzavřené termy začínající řeckým písmenem.

Pro systém \mathcal{G} , v němž pravdivostní podmínky ohodnocení vět z G nacházejí své přímé vyjádření, lze nyní ukázat vlastnost deduktivní inkonzistence. V dodatku ke *Grundgesetze*, jež Frege napsal po odhalení paradoxu, je předvedena následovně:

Triviálním důsledkem definice (i) a zákona (V) je věta

$$(1) \quad \vdash f(a) = a i \acute{e} f(\varepsilon) \quad [GG_1, \text{ § 55, věta (1)}],$$

z níž lze za pomoci zákona (III) snadno usoudit na věty

$$(82) \quad \begin{array}{l} \vdash F(f(a)) \\ \quad \vdash F(a i \acute{e} f(\varepsilon)) \end{array} \quad (77) \quad \begin{array}{l} \vdash F(a i \acute{e} f(\varepsilon)) \\ \quad \vdash F(f(a)) \end{array} \\ [GG_1, \text{ § 91, věta (82)}], \quad [GG_1, \text{ § 91, věta (77)}].$$

Dosadíme-li nyní za “ $f(\zeta)$ ” výraz “ $\top \zeta i \zeta$ ”, za “ $F(\zeta)$ ” výraz “ $\neg \zeta$ ” a za “ a ” výraz “ $\acute{e}(\top \varepsilon i \varepsilon)$ ”, dostaneme věty

$$(C) \quad \begin{array}{l} \vdash \vdash \acute{e}(\top \varepsilon i \varepsilon) i \acute{e}(\top \varepsilon i \varepsilon) \\ \quad \vdash \acute{e}(\top \varepsilon i \varepsilon) i \acute{e}(\top \varepsilon i \varepsilon) \end{array} \quad (D) \quad \begin{array}{l} \vdash \vdash \acute{e}(\top \varepsilon i \varepsilon) i \acute{e}(\top \varepsilon i \varepsilon) \\ \quad \vdash \acute{e}(\top \varepsilon i \varepsilon) i \acute{e}(\top \varepsilon i \varepsilon) \end{array}$$

Z tautologie

$$(I_g) \quad \begin{array}{l} \vdash \vdash a \\ \quad \vdash \vdash a \\ \quad \quad \vdash a \end{array} \quad [GG_1, \text{ § 49, věta (Ib)}]$$

a věty (C) pak pomocí MP získáme větu (B) a z (B) a (D) potom stejným způsobem její negaci (A), tj.

$$(A) \quad \vdash \neg(\neg \varepsilon i \varepsilon) i \neg(\neg \varepsilon i \varepsilon) \quad (B) \quad \vdash \neg(\neg \varepsilon i \varepsilon) i \neg(\neg \varepsilon i \varepsilon).$$

V \mathcal{G} je takto odvoditelná věta i její negace, tedy spor. Z tautologie

$$(Ia) \quad \begin{array}{l} \vdash \\ \quad \vdash \\ \quad \quad \vdash b \\ \quad \quad \quad \vdash a \\ \quad \quad \quad \vdash a \end{array} \quad [GG_1, \text{ § 49, věta (Ia)}]$$

lze potom aplikací MP na (A) a (B) odvodit libovolnou správně utvořenou větu b systému \mathcal{G} . Ten je tak ve své deduktivní roli zcela znehodnocen.

Frege se ještě v dodatku ke *Grundgesetze* narychlo pokouší najít příčiny krachu. Podezřelá je zejména věta (1) a v jejím odvození (viz [GG₁, § 55]) užitý zákon (V), resp. jeho část (Vb) vyjadřující přechod od rovnosti průběhů hodnot k rovnosti obecné:

$$(Vb) \quad \begin{array}{l} \vdash \\ \quad \vdash f(a) = g(a) \\ \quad \quad \vdash \neg f(\varepsilon) = \neg g(\varepsilon) \end{array} \quad [GG_1, \text{ § 52, věta (Vb)}].$$

Frege s pomocí zákonů predikátové logiky vyšších řádů, tj. bez užití zákona abstrakce, odvozuje větu

$$(\chi) \quad \vdash \neg \forall w \neg \forall \alpha \begin{array}{l} \vdash f(\alpha) = g(\alpha) \\ \quad \vdash M_\beta(\neg f(\beta)) = M_\beta(\neg g(\beta)) \end{array} \quad [GG_2, 260, \text{ věta } (\chi)],$$

podle níž »pro každou funkci druhého stupně s jedním argumentem druhého druhu existují pojmy, kterým jako svým argumentům přiřazuje tutéž hodnotu, ačkoli pod tyto pojmy spadají různé předměty« [GG₂, 260] – jinými slovy: neexistuje jednojednoznačné přiřazení všech pojmů (prvního řádu) všem předmětům.²⁹⁴⁾ Speciálně to platí také pro funkci $\varepsilon \varphi \varepsilon$, tedy – jak Frege podotýká –

²⁹⁴⁾ Jak vyplývá z Russellova dalšího dopisu Fregovi, vedla právě tato věta k objevu antinomie: »Na spor jsem přišel následujícím způsobem. Cantor ukázal, jak přirozeně víte, že neexistuje nejvyšší kardinální číslo. Důkaz je následující: [peanovská formule, kterou na tomto místě Russell uvádí a kterou vynecháváme, zachycuje ideu Cantorova důkazu toho, že potenční množina (systém všech podmnožin) $P(M)$ množiny M má vždy větší kardinální počet než tato množina samotná; uvažovaný argument vypadá takto: Předpokládejme, že máme nějaké jednojednoznačné přiřazení R všech prvků M nějakým prvkům z $P(M)$. Obecně mohou být v tomto přiřazení některé prvky z M prvky svých obrazů, některé zase ne; množinu prvků z M , které nejsou prvky svých obrazů, označuje Russell jako w . Tato množina nyní pod hrozbou sporu nemůže být obrazem žádného prvku z M (necht' $R(a) = w$, pak z $a \in w$ plyne $a \notin w$, a *vice versa*), a nemůže tedy existovat ani žádné jednojednoznačné přiřazení množiny M všem prvkům množiny

je-li vůbec přípustná. Takto bychom získali tvrzení existence dvou pojmů, jejichž rozsah by byl stejný, ačkoli by pod ně spadaly odlišné předměty, a tedy i neplatnost (Vb). Jelikož kritický případ, na němž je Fregeův zobecněný argument založen, představuje právě onen předmět, který je oběma pojmům přiřazen jako hodnota, konkrétně tedy jejich rozsah, navrhuje Frege reformulovat zákon (V) jako

$$(V') \quad \vdash (\acute{e}f(\acute{\epsilon}) = \acute{\alpha}g(\acute{\alpha})) = \begin{array}{l} \neg \text{q} \vdash \text{---} f(a) = g(a) \\ \quad \vdash \text{---} a = \acute{e}f(\acute{\epsilon}) \\ \quad \quad \vdash \text{---} a = \acute{\epsilon}g(\acute{\epsilon}) \end{array} \quad [\text{GG}_2, 262, \text{v\acute{e}ta } (V')].$$

Z této věty vyplývá (Va), tj. přeměna obecné rovnosti v rovnost průběhů hodnot, nikoli však (Vb), z jejíž varianty

$$(V'b) \quad \begin{array}{l} \vdash \text{---} f(a) = g(a) \\ \quad \vdash \text{---} a = \acute{e}f(\acute{\epsilon}) \\ \quad \quad \vdash \text{---} \acute{e}f(\acute{\epsilon}) = \acute{\alpha}g(\acute{\alpha}) \end{array} \quad [\text{GG}_1, 262, \text{v\acute{e}ta } (V'b)],$$

nelze spor odvodit výše uvedeným způsobem, jelikož věta (1) platí pouze v podmíněné verzi

$$(1') \quad \begin{array}{l} \vdash \text{---} f(a) = a \acute{e}f(\acute{\epsilon}) \\ \quad \vdash \text{---} a = \acute{e}f(\acute{\epsilon}) \end{array} \quad [\text{GG}_2, 264, \text{v\acute{e}ta } (1')].$$

Úprava systému \mathcal{G} spočívající v náhradě zákona (V) zákonem (V') bývá v literatuře označována jako *Frege's Way Out*. Ani tento systém však není bezesporný, jak později ukázali Leśniewski²⁹⁵⁾ a Quine.²⁹⁶⁾ Fregeovo dvaadvacetileté mlčení, jež následovalo po Russellově objevu, však ukazuje, že do této v rychlosti načrtnuté renovace (*In the Jaws of the Press*)²⁹⁷⁾ žádné naděje nevkládá. Další z historicky skutečně akceptovaných návrhů řešení, které jsou v dodatku ke *Grundgesetze* a také v korespondenci s Russellem diskutovány, Frege z rozličných důvodů odmítá. Přitom zvláště slibnou se zdá být zvažovaná možnost, *»že existují pojmy, jež nemají žádný rozsah – alespoň v obvyklém smyslu slova«* [GG₁, 257]. Ontologizující formulace zde ovšem Fregeovi zabra-

ny $P(M)$.] *Existují ovšem pojmy, jejichž rozsah zahrnuje všechno; těm by tedy mělo příslušet nejvyšší kardinální číslo. Zkusil jsem zkonstruovat jednojednoznačnou relaci mezi všemi předměty a všemi třídami; když jsem na tuto svoji relaci aplikoval Cantorův důkaz, zbyla mi třída $Cls \cap x \exists (x \sim \epsilon x)$, ačkoli všechny třídy již vyčísleny byly.*« [WB, 215sq] K závěru Russellova popisu srv. Russell [PoM, § 349].

²⁹⁵⁾ Leśniewského důkaz je předložen in: *Sobociński* [1949]. Jeho princip je reprodukován in: *Kutschera* [1989], § 8.2.

²⁹⁶⁾ *Quine* [1955].

²⁹⁷⁾ Viz *Quine* [1955], 148.

ňuje vidět, že jeho systém troskotá již ze syntaktických důvodů, neboť výrazů, které produkuje, je »příliš mnoho« na to, aby mohly být konzistentně ohodnoceny, a není zde žádný přirozený zákon, podle něhož by každá správně utvořená věta (toho či onoho systému) měla vyjadřovat smysluplnou a pravdivou myšlenku či nenasycený výraz pojem, aniž by se osvědčily v nějakém koherentním celku.²⁹⁸⁾ Přitom lze právě z výše uvedené poznámky vytěžit program syntaktické revize systému, a to buďto (i) ve formě redukce tvorby abstraktních termů, o níž Quine typicky pojednává²⁹⁹⁾ jako o návrhu omezení množinového zákona komprehenze

$$(LC) \quad \exists z \forall x (x \in z \leftrightarrow \phi x)$$

pouze na některé predikáty ϕ systému; nebo (ii) omezení tvorby oněch predikátů. Touto druhou cestou se vydává teorie typů.

7.2 STRUKTURA

Fregovu unáhlenost v definitivním užívání sémantických pojmů, jež ještě nebyly pevně ukotveny, lze vidět i ve vlastní diskusi paradoxu. Frege při výše předvedeném odvození sporu uvádí jednotlivé věty bez svislého pruhu, neboť – jak říká – »alespoň jedna z vět (77) a (82) je nepravdivá, a tedy i věta (I), z níž vyplývají«. Totéž se týká zákona (V), o němž ostatně již v dopise Russellovi píše jako o *nepravdivém*, nikoli však jeho revize (V'), před níž svislý pruh předepisuje. Co ale tedy vlastně znamená, že je *Grundgesetz V* nebo nějaký jiný logický zákon pravdivý či nepravdivý? Jaká kritéria pravdivosti má Frege vlastně na mysli? Má jimi snad být konzistence nějakého deduktivního systému jako je \mathcal{G} nebo \mathcal{S}_{PL} ?

Významnou a mnohé vysvětlující se v této souvislosti ukazuje být Fregova polemika s Hilbertem. Vzhledem k šíři a samostatnému významu této rozpravy bude však muset čtenář zainteresovaný pouze na výkladu Russellovy antinomie projevit jistou míru trpělivosti.

7.2.1 Korespondence s Hilbertem

David Hilbert publikoval roku 1899 spis *Grundlagen der Geometrie*, který se již svým názvem zdál být zaměřen k podobnému cíli jako Fregovy *Grundlagen der Arithmetik*, totiž k zajištění metodicky spolehlivých základů matema-

²⁹⁸⁾ Toto je třeba mít na paměti při analýze všech tzv. sémantických paradoxů. Je třeba se např. ptát: Proč, podle jakých kritérií by gramaticky správně utvořená věta "já lžu" měla vůbec vyjadřovat nějaký soud? Srv. *Stekeler-Weithofer* [GPL, § 7.13].

²⁹⁹⁾ Viz třeba *Quine* [STL, § 5].

tiky, v tomto případě pro její oblast geometrickou. Hilbert se již v úvodu knihy hlásí k Euklidově axiomatické metodě a oznamuje, že jeho základní axiomatická sada stejně jako její antický pravzor »vyjadřuje jisté základní, vzájemně související skutečnosti našeho názoru [Anschauung]« [GLG, § 1]. Zdánlivá harmonie s klasickým přístupem však netrvá dlouho. Po úvodních (a nenázorných) slovech: »Mysleme si tři různé systémy předmětů: předměty prvního systému nazývejme body a značme je A, B, C, \dots ; předměty druhého systému nazývejme přímky a značme je a, b, c, \dots ; předměty třetího systému nazývejme roviny a značme je $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; [...]«, nenechává již Hilbert své axiomy pouze vyjadřovat jisté geometrické vztahy, nýbrž je těmito axiomy přímo definuje. O II. skupině axiomů, tzv. axiomů uspořádání (*Anordnung*), píše: »Axiomy této skupiny definují pojem "mezi" a na základě tohoto pojmu umožňují uspořádání bodů na přímce, v rovině a prostoru. | *Vysvětlení.* Body nějaké přímky stojí k sobě navzájem v určitých vztazích, k jejichž popsání slouží zejména slovo "mezi".« [GLG, § 3] V § 9 pak dokazuje bezespornost svých axiomů pomocí modelu založeného na oboru Ω algebraických čísel určité vlastnosti; úvodem k tomu píše: »Mysleme si dvojici čísel (x, y) oboru Ω jako bod [...].« [GLG, § 9] V § 10 je nato dokázána nezávislost axiomu IV o rovnoběžkách³⁰⁰ prostřednictvím geometrického (neeuclidovského) modelu, v němž axiom IV jakožto jediný z celé sady neplatí.

Hilbertův netradiční přístup podnítl Frega k sepsání dopisu, v němž nejprve formuluje několik námitek, jež mohou sloužit jako přehledná ukázka kánonu klasické výstavby vědy: »Souhrn matematických vět bych chtěl rozdělit na definice a všechny věty ostatní (axiomy, základní zákony, teorémy). Každá definice obsahuje symbol (výraz, slovo), který předtím ještě neměl žádný význam; ten je mu dán až skrze definici. Poté, co se tak stalo, je již možné učinit z definice samostatnou větu, kterou lze užívat stejně jako axiom. Je ale nutné trvat na tom, že v definici se nic netvrdí, nýbrž stanovuje. Za definici nesmí být tedy prohlášeno nic, co vyžaduje důkazu či jiného zdůvodnění své pravdivosti. [...] Axiomy a teorémy nikdy nemohou určovat význam symbolu či slova, které se v nich vyskytuje; tento význam musí být pevně dán již předem. [...] Kdybych Váš axiom II 1 [³⁰¹] v této podobě uvedl, předpokládal bych přitom, že význa-

³⁰⁰ »IV (euklidovský axiom). Budiž a libovolná přímka a A na ní neležící bod; pak v rovině určené přímkou a a bodem A existuje nejvýše jedna přímka procházející A a neprotínající přímkou a .« [GLG, § 7]

³⁰¹ Axiom II 1 z § 3 zní: »Jsou-li A, B, C body nějaké přímky, a B leží mezi A a C , pak B leží také mezi C a A .«

my výrazů “něco je bodem nějaké přímky” a “B leží mezi A a C” jsou úplně a jednoznačně známy předem, v případě výrazu posledního obecně za libovolné interpretace písmen A, B, C. Axiom tedy nemůže sloužit k tomu, aby třeba přesněji vysvětlil slovo “mezi”, a samozřejmě není možné dávat tomuto slovu ještě nějaký význam dodatečně, jak to naznačujete na straně 20. ^[302] Je-li tento význam odlišný od významu slova “mezi”, dopouštíte se zde nanejvýš povážlivé dvojznačnosti.« [WB, 62sq] V narážce na Hilbertův důkaz bezespornosti pak Frege dodává: »Axiomy nazývám věty, které jsou pravdivé, nemohou však být dokázány, neboť jejich poznání plyne z pramene zcela odlišného od logického pramene poznání, a to z pramene, jež můžeme nazývat názorem prostoru. Z pravdy axiomů vyplývá, že si navzájem neprotiřečí. Zde tedy není třeba žádných dalších důkazů.« [WB, 63]

Hilbert ve své odpovědi nejprve hájí definatorickou roli svých axiomů: »Říkáte, že mé vysvětlení z § 3 není definice pojmu “mezi”, neboť chybí pojmové znaky. Ale tyto znaky jsou přece podrobně zachyceny axiomem II 1-II 5. Chceme-li však brát slovo definice v obvyklém smyslu slova, musíme říci: “mezi” je vztahem bodů nějaké přímky, který má následující znaky: II 1 ... II 5. Dále říkáte: “Zcela jiného druhu jsou ale nejspíš vysvětlení z § 1, v nichž není význam slov “bod”, “přímka”, ... udáván, ale předpokládán jako známý.” Zde nejspíš leží kardinální bod našeho nedorozumění. Já totiž nechci předpokládat jako známé zhora nic; své vysvětlení z § 1 považuji za definici pojmů bod, přímka, rovina, když k němu opět připojíme všechny axiom skupin I-V jako pojmové znaky. Pokouší-li se někdo o jiné definice bodu, třeba skrze opisy jako bezrozměrný atd., pak musím arci takovémuto počínání co nejrozhodněji odporovat; je totiž hledáno něco, co nemůže být nikdy nalezeno, neboť nic takového není, a vše se ztrácí ve zmatku a neurčitosti a zvrhává se ve hru na schovávanou.« [WB, 65sq] V dalším textu pak Hilbert formuluje pasáž, která je hojně citována jako jakýsi manifest nového, formalistického pojetí vědy:

»Chcete-li mé axiom nazývat raději znaky těch pojmů, které jsou zachyceny skrze má “vysvětlení” a takto i existují, nebudu ničeho namítat, snad jen, že to odporuje zvyku matematiků i fyziků – bezpochyby musím mít možnost plné volnosti také v kladení znaků. Neboť jakmile jsem axiom sepsal, existuje a je “pravdivý”; a tím nyní přecházím k dalšímu důležitému bodu Vašeho dopisu. Píšete: “Axiomy nazývám věty... Z pravdy axiomů vyplývá, že si navzájem ne-

³⁰²⁾ V § 9 Hilbert píše: »Čísla oboru Ω jsou všechna reálná; vezmeme-li v úvahu, že je lze uspořádat podle velikosti, můžeme snadno najít taková určení pro naše body a přímky, že platí všechny axiom II uspořádání.«

protiřečí.” *Velmi mě zaujalo, že ve Vašem dopise čtu právě tuto větu, neboť já sám, kdykoli o těchto věcech přemýšlím, píši a přednáším, tvrdím právě naopak: jestliže si libovolně stanovené axiomy vzájemně neprotiřečí s úhrnem svých důsledků, jsou pravdivé, předměty těmito axiomy definované existují. Toto je pro mě kritérium pravdy a existence. Věta “každá rovnice má kořen” je pravdivá neboli existence kořenu je dokázána, jakmile lze k ostatním axiomům připojit axiom “každá rovnice má kořen”, aniž by bylo možné odvodit nějakými úsudky spor.*« [WB, 66]

Tímto je tedy ustanoveno formalistovo kritérium smysluplnosti věty (věť): deduktivní konzistence.

Hilbertův výklad toho, jak užívá slova “pojmový znak”, přivádí Frega na stopu skutečných cílů jeho knihy. V dalším dopise píše:

»Podle I 7 ^[303] existují na každé přímce alespoň dva body. Co byste tedy řekli na tohle:

“Vysvětlení. Mysleme si předměty, které nazýváme bohy.

Axiom 1. Každý bůh je všemohoucí.

Axiom 2. Každý bůh je všudypřítomný.

Axiom 3. Existuje alespoň jeden bůh?”

Zde je třeba vzít v úvahu moje rozlišení pojmů prvního a druhého stupně. Říkám “moje”, neboť mi není známo, že by jej někdo v dostatečné ostrosti provedl přede mnou. V souvislosti s výrazem “existuje” máme co do činění s pojmem druhého stupně, který na rozdíl od pojmů všemohoucí a všudypřítomný, které jsou stupně prvního, nelze vzít za znak pojmu prvního stupně. [...] Znaky, které udáváte svými axiomy, jsou všechny vyššího než prvního stupně; tzn. neodpovídají na otázku “které vlastnosti musí mít předmět, aby to byl bod (přímka, rovina atd.)?”, nýbrž obsahují např. vztah druhého stupně, třeba pojmu bod k pojmu přímka. Zdá se mi, že vlastně chcete definovat pojmy druhého stupně, ale nerozlišujete je jasně od pojmů stupně prvního.« [WB, 73sq]

V této logické korekci se také skrývá klíč k porozumění Hilbertově spisu: Hilbert svými axiomy nezachycuje (nedefinuje) geometrické pojmy či celou euklidovskou geometrii, ale strukturální rysy této teorie, tj. např. typ relace (symetrická, tranzitivní), v níž se nacházejí body či přímky k sobě navzájem, neprázdnost užitých pojmů apod.; tedy něco, co se může vyskytovat i mezi jiný-

³⁰³⁾ Axiom I 7 zní: »Na každé přímce existují alespoň dva body, v každé rovině existují alespoň tři body, které neleží na téže přímce, a v prostoru existují alespoň čtyři body, které neleží v téže rovině.«

mi, např. aritmetickými předměty. Toto činí evidentně zcela v duchu pozdější Carnapovy ideje ›*Strukturwissenschaft*‹, podle níž »*se věda zabývá pouze strukturálními vlastnostmi předmětů*« [Aufb, § 10]. Hilbert explicitně píše:

»*Každá teorie je samozřejmě jen kostrou či schématem pojmů spolu s jejich nutnými vzájemnými vztahy a základní prvky si lze myslet libovolně. Jestliže si pod svými body myslím nějaké systémy předmětů, např. systém: láska, zákon, komín, ... a následně za vztah těchto předmětů k sobě navzájem považuji pouze souhrn svých axiomů, pak mé věty, např. věta Pýthagorova, platí i o těchto předmětech. Jinými slovy: každá teorie může být aplikována na neomezené množství systémů základních prvků. Je potřeba pouze použít vzájemně jednoznačnou transformaci a zajistit, aby pro transformované předměty platily tytéž axiomy.*« [WB, 67]

Stále však zůstává otázkou, proč takovouto teorii nazývat zrovna *geometrií*, když ji lze stejně dobře aplikovat na jakýkoli obor jiný, a v čem *jinakost* tohoto oboru vlastně spočívá, když jej v případě, že splňuje tytéž axiomy, nelze od prvního nijak odlišit.

7.2.2 Formální a materiální teorie

Alwin Korselt se poté, co Frege přenesl výše načrtnutou polemiku na stránky časopisu, pokoušel hájit Hilbertův způsob definice geometrických pojmů s tím, že »*moderní matematika neoznačuje axiomem určitá fakta naší zkušenosti, nýbrž je pouze naznačuje*«, přičemž Hilbertovu nauku charakterizoval jako teorii formální, bezobsažnou. Hlavní osten Fregovy výtky vůči tomuto postupu je ale skryt právě v námitce, že – přes deklarovanou formálnost a obecnou zástupnost libovolného systému téže struktury – Hilbert systematicky a pro porozumění výkladu zásadním způsobem užívá geometrických výrazů se starým a úctyhodným významem. »*Uvažme příklad: “Každý Anej bazuje alespoň dvěma Ellah.” Již slyším rozhořčené výkřiky: “Jak může někdo napsat takový nesmysl, z něhož vstávají vlasy na hlavě! Co je to Anej? Co je to Ellah?” Ale prosím vás! To je axiom, nikoli starého euklidovského typu, ale typu moderního. Definuje pojem Anej. Co je to Anej, je zcela nepatřičná otázka. [...] Nenajdeme-li v tomto axiomu žádnou myšlenku, nevadí. Věta není žádným popisem známých skutečností, nýbrž je nanejvýš naznačuje, a sice velmi jemně, např. onen známý zkušenostní fakt, že každý buřt má alespoň dva konce nebo že každé dítě mává alespoň dvěma praporky.*« [UG₂, 297sq] Racionální jádro Korseltovy argumentace nachází Frege v příměru zástupné funkce proměnných a schematických písmen:

»Přijmeme-li, že slova “bod”, “přímka” atd. nic neoznačují, nýbrž mají jen propůjčovat obecnost stejně jako písmena v aritmetice, bude pro vzhled do pravého stavu věci velmi užitečné, když k tomuto účelu písmena skutečně využijeme. Potom zavedeme následující. Namísto “bod A leží v rovině α ” budeme psát: “A je v p-relaci k α ”. Namísto “bod A leží na přímce a ” budeme psát: “A je v q-relaci k a ”. Namísto “A je bod” budeme psát “A je Π ”. Hilbertův axiom I 1 zní nyní takto: “Je-li A Π a B také Π , pak existuje něco, k čemu jsou A i B v q-relaci.” [304] Zde je nutné rozlišovat dva typy obecnosti. Obecnost zprostředkovaná písmeny “A” a “B” se omezuje jen na pseudoaxiom, zatímco obecnost zprostředkovaná písmeny “ Π ” a “q” se vztahuje na obecnou poučku (čistý pojem teorie, formální teorii), jejíž je pseudoaxiom pouhou nesamostatnou a sám o sobě nesmyslnou částí.« [UG₂, 388]

Fregův rozbor Hilbertovy axiomatiky nás nyní přivádí k jednoznačnému závěru: (Pseudo)axiomy jsou větná schémata či přesněji formule formálního jazyka, v němž hrají výrazy Π a q roli *predikátových konstant* (obecnost schematických písmen) a písmena A, B roli *proměnných* (obecnost proměnných). Korseltova charakterizace Hilbertova systému jako formální teorie je tedy zcela v souladu s naší definicí téhož termínu z /5.2.8/. Právě z povahy větného schématu vyplývá možnost rozličné interpretovatelnosti Hilbertových pseudoaxiomů, tj. dodání různého smyslu týmž výrazům; právě »proto ovšem nevyjadřují žádnou myšlenku, nýbrž jsou samy o sobě beze smyslu. Z tohoto důvodu připojují předponu “pseudo”« [UG₂, 389]. Z téhož důvodu nelze také o pseudoaxiomech hovořit jako o pravdivých či nepravdivých.

»Přehlédneme-li celek Hilbertových definic a axiomů, jeví se nám srovnatelný se systémem rovnic o více neznámých; neboť v jednom axiomu se zpravidla vyskytuje vícero neznámých výrazů “bod”, “přímka”, “rovina”, “ležet”, “mezi” atd., takže jen celek, nikoli jednotlivé axiomy nebo jejich skupiny, určuje neznámé. Avšak stačí k tomu onen celek?« [UG₁, 370]

Hovořit jen tak bezevšeho v souvislosti s formální teorií o definování nějaké interpretace je neuvážené, neboť nejprve je třeba prokázat »řešitelnost systému základních vět s ohledem na jejich neznámé, a sice jednoznačnou řešitelnost, má-li být systém takzvaných základních vět definicí, která neznámým přiděluje význam« [UG₂, 386]. Formální teorie však právě pro svoji interpretovatelnost různými obory řeči není schopna určit jedinečnou interpretaci, která ji splňuje při libovolné valuaci proměnných, tj. svůj model, ale v nejlepším případě pou-

³⁰⁴) Původní znění axiomu I 1 je: »Dva různé body A, B určují vždy přímku a [...].«

ze třídu modelů. S každou interpretací totiž, která teorii splňuje, tedy s každým jejím modelem, ji splňují všechny interpretace s tímto modelem izomorfní, tj. interpretace téže struktury. Jednoznačná řešitelnost je ovšem jedna věc a to, čím je vlastně formální teorie ›řešena‹, věc druhá:

»Kdo říká, že je tento systém [axiomů] pro ony neznámé řešitelný a že je řešitelný jednoznačně? Jak by toto řešení vůbec vypadalo v případě, že je možné? Každý z výrazů “bod”, “přímka” atd. by musel být vysvětlen v nějaké větě, v níž by všechna ostatní slova byla známa.« [UG₁, 370]

Jinými slovy: i když přijmeme strukturalistický koncept *formální geometrie* jako oprávněný, musíme si být vědomi toho, že právě v řeči o její aplikaci a řešeních ji v případě ›aplikace přirozené‹ – jednoho z mnoha možných řešení, nicméně řešení, které jí dalo název – vztahujeme ke *geometrii materiální*, vět-né, tj. oboru řeči, který je její (kanonickou) interpretací a modelem.

Obecně nám nyní nečiní potíže rozlišit teorii Hilbertova typu, *formální teorii*, coby libovolnou třídu formulí jazyka predikátové logiky, od teorie Fregova typu, *materiální teorie*, coby její (vět-né, nepřímé) interpretace a modelu. Euklidovská geometrie či námi rekonstruovaný předmětný obor elementární aritmetiky A jsou právě takovýmito materiálními teoriemi. Specifikem Hilbertova pojetí teorie je to, že odmítá udat (definovat) základní obor, přes nějž je kvantifikováno, a nechává jej tedy přístupný rozličným výkladům. Proto však také není formální teorie schopna obor své aplikace zachytit jednoznačně, ale nanejvýš – v tom z nejpříznivějších případů – ›až na izomorfismus‹, totiž v případě tzv. *kategorické teorie*, jejíž modely tvoří výhradně vzájemně izomorfní interpretace. Teorie Fregova typu je oproti tomu vždy určena systémem Σ (jednoznačně a úplně) ohodnocených vět a systémem Π jmenných výrazů, jež se v nich vyskytují.

7.2.3 Konzistence jako kritérium smyslu

Moderní terminologie eliminuje nebezpečí víceznačného užití slova ›definice‹ v Hilbertově a Fregově (klasickém) stylu tak, že pro Hilbertův formální koncept rezervuje termín tzv. *definice implicitní*. U ostatních termínů, jako jsou *věta*, *teorie*, *úsudek*, *důkaz*, je ovšem běžný úzus značně nekritický a v podstatných rysech, často bez uvážení všech důsledků, kopíruje Hilbertovo (rané) indiferentní stanovisko. My však musíme brát důsledně v potaz, že formule není věta (a nemůže být tedy pravdivá či nepravdivá) a že »úsudek nese-stává z [bezobsažných] symbolů. Můžeme jenom říci, že je někdy v přechodu od skupiny symbolů k nové skupině úsudek externě reprezentován. Úsudek

proto nenáleží do oblasti symbolů, nýbrž vynášení soudů, prováděném na základě dříve vynesených soudů podle logických zákonů. Každá premisa je určitá myšlenka uznaná za pravdivou a v závěrečném soudu je rovněž uznána za pravdivou nějaká konkrétní myšlenka. Pro různé interpretace tu není místo.« [UG₂, 387] V souladu s Fregovým územ jsme také v /5.2.8/ definovali úsudek jako přechod mezi větami, nikoli formullemi, ovšem s tou úpravou, že si stejně jako dříve pro Fregův pojem ›úsudku‹ coby odvozování z pravdivých vět rezervujeme termín ›vyplyvání‹. Pro hilbertovské přechody mezi formullemi můžeme zavést podobně jako Korselt termín *f o r m á l n í h o ú s u d k u*. Frege k tomu píše:

»Co je to formální úsudek? Je možno říci: v jistém ohledu je každý úsudek formální, pokud probíhá podle obecných úsudkových zákonů [úsudkových schémat, pravidel]; v jiném ohledu není každý úsudek formální, pokud premisy stejně jako závěr mají takové myšlenkové obsahy, které se se svým speciálním způsobem spojení vyskytují pouze v tomto úsudku. Ale snad máme slovu “formální” rozumět jinak. Snad nemá být posloupnost formálních úsudků vlastním úsudkovým řetězcem, nýbrž jen jeho schématem.« [UG₂, 387]

Takto můžeme zavést i pojem *f o r m á l n í h o d ů k a z u* formule X z třídy formulí T coby konečné posloupnosti formulí X_1, X_2, \dots, X_n , kde $X_n \approx X$ a libovolná formule X_i ($1 \leq i \leq n$) je buďto z T , nebo na ní lze usoudit nějakým logicky platným úsudkovým schématem z některých formulí menšího indexu. Odvození $T \vdash X$ nějaké formule X z třídy formulí T v nějakém logickém kalkulu, konkrétně \mathfrak{S}_{PL} , nazýváme tedy formálním důkazem³⁰⁵ toho, že je X teoremem formální teorie T . *»Původce takovéto [rozuměj: formální] teorie nechce svými symboly vyjadřovat žádné myšlenky, nýbrž jen hrát podle jistých pravidel. Pravdivost zde vůbec nepřichází v úvahu. Slovo “teorie” je tu vlastně nepatřičné; mělo by se říkat “hra”.*« [UG₂, 384, 396] Touto hrou je právě odvoditelnost v kalkulu predikátové logiky a jejími pravidly pravidla onoho kalkulu.

V převedení sémantických úvah na otázky deduktivní odvoditelnosti viděl Hilbert nový způsob založení matematiky, který nazýval *m e t o d o u a x i o m a t i c k o u*. Jako jeden z prvních si plně uvědomil, že mnoho definic základních matematických pojmů a základních zákonů s nimi spjatých ústí v paradoxy a bludné kruhy právě s ohledem na svoji naivněmnožinovou (sémantickou) povahu, tedy z důvodů nekontrolovatelného přibírání dalších zákonů,

³⁰⁵ Tento termín užívá Hilbert in: [NM, 165].

beze všeho považovaných za (přirozeně) platné a pravdivé. Jako lék a jediné možné rigorózní zvládnutí tohoto neutěšeného stavu vytyčil proto metodu stanovení vhodných axiomů a důkazu jejich deduktivní bezespornosti, tj. neodvoditelnosti sporné formule. Tato metoda, argumentoval Hilbert, zaznamenala úspěch již na poli teorie množin, a to právě tváří v tvář Russellově antinonii: *»Stanovením vhodných axiomů omezil Zermelo na jednu stranu libovůli v definování množin a na druhou stranu přípustnost výroků o jejich prvcích, čímž se mu podařilo rozvinout teorii množin tak, že v úvahu připadající spory odpadly, přičemž její nosnost a aplikovatelnost zůstala přes přijatá omezení zachována.«* [AxD, 152] Zkoumání bezespornosti tvoří ovšem jenom část Hilbertova obsáhlého vědoslovného konceptu, jenž bývá pro konečnou (finitní) povahu deduktivní odvoditelnosti (konečnou aplikaci konečně mnoha úsudkových pravidel na konečně mnoho premis) nazýván *programem finitistickým*:

»Abych stručně charakterizoval celý obor otázek, jmenuji problém principiální řešitelnosti každé matematické otázky, problém následné kontrolovatelnosti výsledku matematického zkoumání, dále otázku kritéria jednoduchosti matematického důkazu, otázku vztahu mezi obsahem a formalismem v matematice a konečně problém rozhodnutelnosti matematické otázky konečným počtem operací.« [AxD, 153]

Právě a teprve z formální povahy Hilbertových zkoumání lze seznat, proč klade na pojem bezespornosti takový důraz: Jednak je zřejmé, že s pádem bezespornosti nějaké formální teorie padá i tato teorie samotná, neboť predikátový kalkul dovoluje ze sporné formule odvodit cokoli. Na druhou stranu má bezesporná formální teorie skrze přímý ekvivalent věty o úplnosti zaručenou existenci modelu a z věty o korektnosti plyne, že tento model je rovněž modelem libovolného teorému dané teorie – v tom také tkví skutečný praktický význam axiomatické metody, o němž jsme se již zmínili v /1.2.1/, a vlastní oprávnění k termínům jako je např. *»formální důkaz«*: při jeho použití na věty *»nemusíme procházet celý úsudkový řetězec, nýbrž přejít bezprostředně od první premisy k poslednímu závěru«* [UG₂, 387]. – Máme zde tedy čistě figurativní, syntaktické transformace, na něž lze pohlížet jako na pouhou hru, zároveň ovšem víme, že se jejich oprávnění opírá o (nededuktivní) důkazy věty o úplnosti. Řeč o převedení sémantických úvah na syntaktické tak musíme brát s jistou licencí.

Máme-li nyní nějakou bezespornou formální teorii T, můžeme pro její formální jazyk definovat cosi jako koncept *formální (hilbertovské) pravdivosti* tak, že

(i) její axiomy označíme za pravdivé a pro každou uzavřenou formuli X daného jazyka stanovíme, že (ii) je pravdivá, jestliže $T \vdash X$ a že (iii) je nepravdivá, jestliže $T \vdash \neg X$. Z korektnosti kalkulu vyplývá, že pravdivé a nepravdivé formule tvoří disjunktní třídy, které jsou v případném modelu teorie ohodnoceny v souladu s právě rekonstruovaným hilbertovským pojetím. Zaručeno však není, že daná teorie rozhoduje všechny uzavřené formule daného jazyka, jinými slovy: že je (deduktivně) úplná. Teprve u takovéto formální teorie je ovšem převedení sémantických úvah o pravdivosti vět (jejího modelu) na syntaktické úvahy odvoditelnosti jim odpovídajících teorémů plně ospravedlnitelné.

Zmínili jsme, že deduktivní bezespornost je nutnou a postačující podmínkou existence modelu formální teorie. Otázkou nyní zůstává, *jak* bezespornost nějaké teorie prokázat. Právě tohoto bodu se dotýká další část Fregovy polemiky s Hilbertem. Frege píše:

»Snad v nejpříkřejším rozporu stojí naše názory na kritérium existence a pravdy. Ale možná, že Vašemu stanovisku úplně nerozumím. Abychom si vše ujasnili, předkládám následující příklad:

Předpokládejme, že bychom věděli, že si věty

- “1. A je inteligentní bytost;
- 2. A je všudypřítomný;
- 3. A je všemohoucí”

vzájemně neprotiřečí s úhrnem svých důsledků; mohli bychom z toho usoudit, že existuje všemohoucí, všudypřítomná a inteligentní bytost? Já to za evidentní nepovažuji. Ten princip by zněl třeba takhle:

jestliže si věty

- “A má vlastnost Φ ”
- “A má vlastnost Ψ ”
- “A má vlastnost X ”

obecně neprotiřečí se souhrnem svých důsledků (pro libovolné A), existuje předmět, který všechny tyto vlastnosti Φ , Ψ , X má. Tento princip mi nepřijde evidentní a sotva by z něj, i kdyby byl pravdivý, mohl být nějaký užitek. Existuje přitom nějaký jiný prostředek, jak prokázat bezespornost, nežli předvedením předmětu, který dané vlastnosti úhrnem má? Jestliže však takový předmět máme, pak nepotřebujeme oklikou přes bezespornost prokazovat, že nějaký existuje.« [WB, 74sq]

Frege zde naráží na následující: Formální teorie, která má model, nemůže být sporná – toho ostatně Hilbert využil v důkazu bezespornosti své formální geometrie, když odkázal na její algebraický model, a v důkazu nezávislosti eu-

klidovského (pseudo)axiому, když se odvolal na model neeuclidovský. Důkaz bezespornosti *konstrukcí modelu* je ovšem právě to, čemu se chtěl Hilbert deklarovaným omezením na čistě syntaktické úvahy vyhnout! Je totiž vůbec obtížné zodpovědět, jak jinak než s pomocí konstrukce modelu důkazy bezespornosti vést. Pro mnoho axiomatických teorií, jako je např. Zermelova teorie množin, zůstává problémem již sama tato konstrukce, a tedy i jejich bezespornost. I kdyby se však ona konstrukce – stejně jako konstrukce modelů neomezeně mnoha jiných, v důsledku toho bezesporných teorií – povedla, zůstává ještě otázka, co si s nimi pak *prakticky* počít. Ve zkratce můžeme říci: hranice smyslu jsou hranice možného, a je skutečně velmi pochybné, zda tyto hranice končí až tam, kde začíná spor.³⁰⁶⁾

Aniž bychom se tyto problémy pokoušeli dále řešit, poznamenejme jen, že sama Hilbertova originální idea *m e t a m a t e m a t i k y* – nové matematiky, v níž se »v protikladu k čistě formálním způsobům úsudku vlastní matematiky aplikuje materiální [obsažné, inhaltlich] usuzování, a sice k prokázání bezespornosti axiomů« [NM, 174], ukazuje, jak velký posun Hilbertovy názory znamenaly v průběhu let následujících po názorové výměně s Fregem a jak málo se kryje finitismus Hilbertových pozdních let s formalistickými teoriemi matematiky, jež Frege za svého života často a oprávněně kritizoval.

7.2.4 Logika s abstrakcí

Vraťme se nyní zpět k Fregovým *Grundgesetze* a Russellově paradoxu. Viděli jsme, že systém \mathcal{G} představuje rozšíření kalkulizace logiky predikátů podané v *Begriffsschrift*, a to o zákon abstrakce. Již tím je naznačen rozdíl mezi konstruovaným systémem a teorií množin, neboť *množina* jakožto abstraktum je odvozena z logicky primární *výrokové funkce* (predikátu) a *vztah náležení*, základní pojem teorie množin, z logického primitivu *funkcionální aplikace*. Fregův systém je tedy logikou obohacenou o zákon abstrakce coby nový formotvorný prvek, jinými slovy: *l o g i k o u s a b s t r a k c í*.

Ta jako logika nemá přirozeně na rozdíl od (naivní, obsažné) teorie množin žádný vlastní předmět, je normativní vědou, stanovující zákony ohodnocování vět, tedy potenciálních interpretací příslušných větných schémat. A nyní se ptejme: Jsou Fregovy základní zákony aritmetiky právě souborem takovýchto pravdivostních principů ohodnocování vět? Kdyby ano, pak by u nich samotných s ohledem na jejich normativitu vůbec nevznikala otázka pravdivosti, jak

³⁰⁶⁾ Má např. věta “je možné (bezesporné) smrkat palcem u nohy” smysl? A což teprve věta “existuje možný svět, v němž...”...

ji Frege směrem k nim mnohokrát nastoluje a demonstruje předepisováním svislého pruhu. Zapišeme-li např. soud

┆— prší nebo neprší,

nevyjadřujeme tím zákon vyloučeného třetího nebo náš WP, nýbrž pouze uvádíme větu, která je pravdivá právě a jen s odkazem na tento princip. Obecnosti, která pravdivostnímu principu nutně náleží, vyhovuje lépe užití schématu

$A \vee \neg A$

a deduktivní povaha systému \mathcal{G} coby kalkulu logiky s abstrakcí také nasvědčuje tomu, že takovýto výklad Fregových osmi axiomů nejlépe trefuje cíl.

Uvažujme dál. Větná schémata, jak bylo mnohokrát řečeno, nemohou být samozřejmě pravdivá či nepravdivá, a to již z toho důvodu, že je lze interpretovat různě, tedy pravdivými i nepravdivými větami. Tautologická schémata ovšem, tj. právě schémata vět, kterým je pouze na základě logického pravdivostního principu přiřazena *vždy* hodnota W , se zdají být výjimkou, neboť u nich tato poslední námitka padá. Jejich ohodnocení hodnotou W se však přesto zakládá na stejné chybě, jakou Frege vytýkal Hilbertovi, neboť k tomu, aby tautologické schéma vyjadřovalo nějakou myšlenku, obsah, a mohla mu být tedy přidělena pravdivostní hodnota, muselo by se vztahovat k *jediné* interpretaci. – Ono se ale vztahuje k interpretacím *všem*, neboť je ve všech splněno při libovolné valuaci. Kořeny této Fregovy nedbalosti lze vysledovat v jeho řeči o »nejobecnějších zákonech pravdivosti« a v logicky necitlivé myšlence univerza diskurzu napříč kategoriemi.

Částečně rekapitulujme již řečené: Jsou-li např. předmětem psychologie mentální procesy, je podle Frega předmětem logiky pravda. *Pravda* jakožto f -význam věty je také skutečně vtělena do formální sémantiky, v níž pravdivostní hodnoty W a F zaujímají roli interních předmětů konstruovaného modelu logiky a jako takové jsou přiřazovány schematickým písmenům *logiky výroků*. Logika artikulující nejobecnější zákony pravdivosti se tak zdá pojednávat o těchto předmětech stejným způsobem, jako živočichopis o králících. S jejím rozšířením na *logiku predikátů* přibývá ovšem k pravdivostním hodnotám ještě celý *obor hodnot předmětné proměnné*, jež mohou tvořit libovolné předměty jednotlivých specializovaných věd či jakékoli smysluplné řeči vůbec. Logika se samozřejmě netýká žádného z nich konkrétně, ale – chceme-li to tak vyjádřit – všech stejnou měrou a snad právě odtud také pochází Fregova myšlenka jednotného univerza diskurzu: všechny předmětné obory, možné interpretace, jsou sloučeny v interpretaci *jedinou*, jakýsi *úhrnný obor všech předmětů smysluplné řeči*, a tento obor je považován za vlastní předmět logiky, to, o čem lo-

gika je, tedy za jedinou interpretaci (vlastní obsah) tautologických schémat, interpretaci, která z těchto schémat ve Fregových očích činí pravdivé věty. Jelikož *číslo* je něco, co se týká pojmového rozlišení v jakémkoli předmětném oboru – jinými slovy: jakékoli předměty, fyzické či abstraktní, lze počítat –, je také logickým předmětem, tedy za podmínky, že se podaří rozšířit univerzální diskurz o věty týkající se libovolného průběhu hodnot. Posledním a jak se ukázalo i nejproblematictější krokem je tedy rozšíření logiky predikátů o *zákon abstrakce*.

Původ Russellova paradoxu v přidání zákona abstrakce je zjevný, ne tak již prohlášení tohoto zákona za nepravdivý. Uvažujeme-li jej jako princip ohodnocení vět, je toto označení nepatřičné, neboť o něm lze nanejvýš říci, že se neosvědčil. Zvažme jej ale jako větné schéma. Na jednu stranu je jasné, že přidání zákona abstrakce ke kalkulu predikátové logiky dovoluje v každém případě odvodit spor; pro další úvahy ovšem představuje rozdíl, zda k němu měl být připojen jako logický axiom, to jest jako *schéma tautologické*, či jen jako *mimologický axiom* nějaké formální teorie. Odtud se totiž budou odvíjet další úvahy sémantické, které však měly těm syntaktickým předcházet, a my se ve vztahu k zamýšlenému předmětnému oboru G musíme opožděně ptát: Jedná se o popis (vymezení) *konkrétní interpretace predikátové logiky* nebo o popis *možné interpretace logiky s abstrakcí* (obsahující abstraktor jakožto nový formotvorný operátor) či snad o popis *univerzální interpretace této logiky*, vzniklé sloučením všech těchto interpretací do jediného všeobjímajícího diskurzu? Tato poslední varianta se zdá být nejpravděpodobnější a z mnoha důvodů také neudržitelná. Respektující běžný úzus s jeho implicitním a smysluplným předpokladem omezeného kontextu, odvrhněme nyní Fregovu myšlenku globální interpretace a jednotného univerza diskurzu vůbec a s metodickou skromností začněme nejprve náčrtem toho, jak k nějaké (lokální) interpretaci (předmětnému oboru) predikátové logiky sestrojít takovou, v níž bude možné hovořit o *množinách* předmětů této interpretace, tj. jejímiž předměty budou množiny předmětů interpretace výchozí.

Pro libovolný předmětný obor $\Omega = \langle \Sigma, \Pi \rangle$ nechť předmětný obor $\Omega_\varepsilon = \langle \Sigma_\varepsilon, \Pi_\varepsilon \rangle$ průběhů hodnot oboru Ω sestává z třídy jmen Π_ε , již tvoří:

1. všechna jména z Π ,
2. všechny výrazy $\acute{e}A(\varepsilon)$ pro libovolný jednomístný predikát $A(x)$ z oboru Ω (vícemístné predikáty pro jednoduchost uvažovat nebudeme),

a z třídy vět Σ_ε tvořené:

1. všemi výrazy $N = M$ pro libovolné $N, M \in \Pi_\varepsilon$,

2. všemi výrazy $N \in M$ pro libovolné $N, M \in \Pi_\varepsilon$.

Dále předpokládejme, že systém Ω neobsahuje žádné termy začínající řeckým písmenem ani věty se symbolem “ ε ” a že výrazy P, Q označují vždy jména z Π , tedy nikoli abstraktní termy. Ohodnocení vět ze Σ_ε pak definujeme následovně:

1. větě $P = Q$ je přiřazena stejná hodnota jako v systému Ω ,
2. větám $P \in Q, P = \varepsilon A(\varepsilon), \varepsilon A(\varepsilon) \in P, \varepsilon A(\varepsilon) \in \varepsilon B(\alpha)$ je přiřazena F ,
3. větě $P \in \varepsilon A(\varepsilon)$ je přiřazeno totéž co větě $A(P)$ v systému Ω ,
4. větě $\varepsilon A(\varepsilon) = \varepsilon B(\alpha)$ je přiřazeno totéž, co větě $\forall x(A(x) \leftrightarrow B(x))$ v Ω .

Systém Ω_ε nyní splňuje WP, ASP a LP. GV v něm platí pro množinové termy, a to ve vztahu k systému Ω . Jelikož jsme všechny rovnosti $P = \varepsilon A(\varepsilon)$ pro $P \in \Pi$ ohodnotili hodnotou F , není žádný předmět původního oboru identifikován s některou množinou, a Ω tak představuje obor tzv. *u r e l e m e n t ů* (praprvků) oboru Ω_ε .

Tomu, abychom takto popsaný obor Ω_ε považovali za vymezení možné interpretace logiky s abstrakcí (pochopitelně v nějaké korektní verzi), brání relativizace GV k jinému předmětnému oboru. Sloučení obou oborů do jednoho si ovšem – pod hrozbou paradoxu – vynucuje úpravu celého systému, počínající zavedením speciální proměnné X pro abstraktní termy, tedy rozdělením jmenových výrazů do dvou sort, a příslušnou relativizací ASP a LP vůči nim. Výraz jako “ $\varepsilon A(\varepsilon) \in \varepsilon B(\alpha)$ ” potom nebude správně utvořená věta, neboť ta může vzniknout jen dosazením výrazů odpovídajících sort do “ $x \in X$ ”. Takto lze postupovat i dále, tj. rozšiřovat systém o jména dalších a dalších typů předmětů, tedy množin množin, množin množin množin, ..., s paralelním zaváděním nových a nových typů předmětných proměnných. Tímto směrem se také ubírá řešení paradoxu, které přijímá Russellova teorie typů, ovšem ve Fregově stylu globálního, nyní již hierarchizovaného předmětného univerza. Možnost eliminace sporu stratifikací univerza Russell Fregovi přímo nabídl, když mu v jednom z dopisů napsal:

»Spor by bylo možné řešit za pomoci předpokladu, že průběhy hodnot nejsou předměty obvyklého druhu; tzn. $\varphi(x)$ je (s výjimkou zvláštních případů) nasytitelná buďto předmětem, nebo průběhem hodnot předmětů, nebo průběhem hodnot průběhů hodnot atd. Tato teorie je analogická Vaší o funkcích prvního, druhého atd. stupně. U x by bylo zapotřebí, aby u byl průběh hodnot předmětů stejného stupně jako x ; v důsledku toho by byl x nesmysl.« [WB, 226]

Fregu ovšem Russellův návrh odmítá s tím, že se obává mnohonásobného rozvětvení aparátu. Ač totiž sám ve svém systému zavedl analogickou typizaci

funkcí, byla to právě možnost jediné předmětné proměnné, vztahující se k libovolnému průběhu hodnot, co v praxi umožnilo využívat jen počáteční segment celé nekonečné funkční hierarchie. V odpověď Russellovi píše tedy jen, že »úplně stanovení všech zákonů, podle nichž by bylo možné obecně rozhodnout, které předměty jsou přípustné jako argumenty kterých funkcí, se mi zdá být nadobycí obtížné. Nadto pochybuji o oprávnění nevlastních předmětů samých.« [GG₂, 255] Nutno poznamenat, že z technického hlediska popisu možné interpretace nepředstavuje zavedení nových typů proměnných a rozlišení různých jmenných sort v logice rozšířené o abstraktní termíny zásadně odlišný či obtížnější problém než zcela analogická úprava, kterou je třeba učinit v konstrukci sémantiky pro logiku vyšších řádů, tj. logiku kvantifikující přes funkční výrazy.

7.2.5 Číslo po paradoxu

Russell, který podobně jako Frege považoval za nutné poskytnout teorii typů nějaké ospravedlnění, vyžaduje pro její přijetí takový argument, který by uspokojil logický *common sense*. Ten měla zajistit myšlenka »bludného kruhu«, do něhož nás mají zavádět jisté typy tzv. »impredikativních« definic:

»Analýza paradoxů, kterým se chceme vyhnout, ukazuje, že všechny jsou důsledkem jistého druhu bludného kruhu. Uvažovaný bludný kruh vyvstává z předpokladu, že soubor objektů může obsahovat prvky, jež mohou být definovány pouze prostřednictvím tohoto souboru jakožto celku. [...] Princip, který nám umožní vyhnout se neoprávněným celkům, může být formulován takto: "Cokoli obsahuje vše ze souboru, nesmí být jedním ze souboru"; nebo konverzí: "Jestliže předpoklad, že určitý soubor tvoří celek, má za důsledek, že tento soubor má některé prvky definovatelné pouze s pomocí tohoto celku, pak řečený soubor celek netvoří." Toto budeme nazývat "principem bludného kruhu", neboť nám umožní vyhnout se bludným kruhům obsaženým v předpokladech neoprávněných celků.« [PM, 37]

Fregův GV

$$\acute{e}A(\epsilon) = \acute{o}B(\alpha) \cdot \leftrightarrow. \forall x(A(x) \leftrightarrow B(x))$$

se zdá tohoto kruhu dopouštět, neboť v něm užitá proměnná x se vzhledem k požadavku platnosti ASP vztahuje i na teprve zaváděná jména průběhů hodnot. Korektní, p r e d i k a t i v n í definice může využívat jen předmětů, které již byly definovány (zkonstruovány), obsahuje tedy vždy pouze proměnné nižšího indexu. Tuto ideu sdílí teorie typů s *matematickým konstruktivismem*

Weylovým a Lorenzenovým, jemuž je ovšem Russellem zastáváný logicismus zcela cizí.

Aniž bychom chtěli sledovat další osudy Fregovy logické charakterizace čísla, řekněme k ní ještě tolik, že pro teorii typů představuje v podstatě jedinou možnou alternativu. Zavedeme-li znak Λ jako symbol pro prázdnou třídu, tj. definicí $\Lambda = \{x; x \neq x\}$, snadno nahlédneme, že jak alternativa Zermelova:

$$\Lambda; \{\Lambda\}; \{\{\Lambda\}\}; \dots,$$

tak von Neumannova:

$$\Lambda; \{\Lambda\}; \{\Lambda, \{\Lambda\}\}; \dots$$

prostupují napříč hierarchiemi, a jsou tedy nepoužitelné. Výhoda definice fregovské, totiž její omezenost na jediný předmětný typ, je ale draze vykoupena: jelikož předpoklad konečnosti typu m implikuje i konečnost každého typu vyššího, tedy speciálně typu $m + 2$, v němž lze fregovská čísla pro typ m zkonstruovat, je Russell přinucen rozšířit svůj systém o tzv. *axiom of infinity* (axioma nekonečna (*axiom of infinity*)), postulující nekonečnost základního univerza (typu 0). Tento axiom je v pozdější (Tarského) verzi formulován jako:

$$(AI) \quad \exists x^2(\exists y^1(y^1 \in x^2) \wedge \forall y^1(y^1 \in x^2 \rightarrow \exists z^1(y^1 \subset z^1 \wedge z^1 \in x^2))).$$

Je zřejmé, že v teorii typů obzvláště trpí (externí) plauzibilita konstruované aritmetiky – každý typ $m > 0$ má svou vlastní prázdnou třídu, každý typ $m + 1$ může mít vlastní nulu, jedničku atd. a každý typ $m + 2$ vlastní třídu přirozených čísel. Toto je přirozeně jen jedna z nesčetné řady obtíží, jimž musí Fregeova rozlišení v teorii typů čelit, a jeho nezáměr o další vývoj zkoumání, která sám započal, lze tedy snadno pochopit.

Podíváme-li se do Fregových náčrtů a poznámek z let následujících po odhalení Russellova paradoxu, pátrajícíce po jeho názorech na povahu čísla, zaznamenáme zpravidla jen výraz bezradnosti a zklamání: *»Mé úsilí o vyjasnění toho, co nazýváme číslem, skončilo neúspěchem. Necháváme se příliš snadno zmást jazykem a právě v tomto případě je zmatení zvláště zlé.«* [T, 1073] Hlavním viníkem ztroskotání *Grundgesetze* je tedy podle Fregea přirozený jazyk: *»Vlastností jazyka zvláště nepříznivou pro spolehlivé myšlení je jeho sklon vytvářet jména, jimž neodpovídá žádný předmět. Stane-li se tak v básni, které každý jakožto básni rozumí, není to nevýhoda. Něco jiného však je, stane-li se tak při výkladu, který si nárokuje přísnou vědeckost. Zvláště pozoruhodným příkladem toho je vytváření jména po vzoru “rozsah pojmu a”, např. “rozsah pojmu stálice”. Díky určitému členu se zdá, že tento výraz označuje nějaký předmět, ale žádný takový předmět, který by za něj v souladu s jazykem*

mohl být označen, neexistuje. Odtud pochází paradoxy teorie množin, které tuto teorii zničily. Já sám jsem při pokusu o logické založení čísla podlehl tomuto klamu tím, že jsem chtěl uchopit čísla jako množiny. Je obtížné vyvarovat se obecně užívaného výrazu, neznáme-li ještě chyby, které se mohou objevit. Je velice obtížné, ne-li nemožné přezkoumat každé slovo, které nám jazyk poskytne, co do jeho logické neškodnosti. Proto spočívá velká část práce filosofa – nebo by alespoň spočívat měla – v boji s jazykem.» [EM_N, 288-289]

V neurčitém a nejistém duchu zvažuje Frege i možnost návratu k adjektivní strategii:

»Jelikož číselný údaj, zakládající se na počítání, obsahuje výpověď o pojmu, musí v logicky dokonalém jazyce věta, v níž je číselný údaj udáván, obsahovat dvě části, totiž jednak symbol pojmu, o němž je výpověď činěna, a jednak symbol pojmu druhého stupně. Tyto pojmy druhého stupně jsou uspořádány v řadu a existuje pravidlo, podle něhož lze ze známého pojmu získat pojem následující. A přesto v nich nemáme čísla aritmetiky, tedy předměty, nýbrž pojmy. Jak lze bezpečnou cestou dospět od oněch pojmů k číslům aritmetiky? Nebo snad žádná čísla aritmetiky neexistují? Nejsou číslovky třeba jen nesamostatnými částmi symbolů oněch pojmů druhého řádu?« [AD_N, 277]

Na konci života Frege logicistickou ideu zcela opouští a dává za pravdu Kantovi v tom, že i v aritmetice je zapotřebí názoru: *»Musel jsem se vzdát mínění, že je aritmetika odvětvím logiky a že z toho důvodu musí být v aritmetice vše čistě logicky dokázáno. | Za druhé jsem se musel vzdát mínění, že aritmetika nemusí zakládat své důkazy na názoru, přičemž názorem zde rozumím geometrický pramen poznání, pramen totiž, z něhož plynou axiomy geometrie.«*

[NG_N, 298] Frege se tedy rozhoduje založit aritmetiku na geometrii. Fragment statí, kterou na toto téma píše, je však příliš stručný a nejasný, a slouží proto spíš zájmům historickým. V tomto ohledu není bez zajímavosti skutečnost, že onen návrat ke Kantovi sdílí pozdní Frege s pozdním Hilbertem. *»Již Kant učil,«* čteme v Hilbertově přednášce *Über das Unendliche* (O nekonečnu), *»že matematika disponuje obsahem zajištěným zcela nezávisle na vši logice, a nemůže být proto nikdy založena na logice samé, pročez také musely snahy Fregeovy a Dedekindovy ztroskotat. Spíše je jako předpoklad logických úsudků a zdařilého průběhu logických operací dáno něco již v představě: určité, mimo-logické konkrétní objekty, které v názoru jakožto bezprostřední prožitek předcházejí veškerému myšlení.«* [UU, 170sq]

Tento operativní moment, vycházející z Hilbertova finitismu, dal také další podnět matematickému konstruktivismu, jenž pak v operativní variantě Loren-

zenově nastoupil Fregem započatou cestu spojitého založení vědeckých tvrzení z analýzy běžné řeči a praktické zkušenosti vůbec. Co se týče dalšího vývoje logických zkoumání aritmetiky, vzala na sebe velký díl zodpovědnosti a úspěchů právě Hilbertova metamatematika. Jeden z jejich nejpozoruhodnějších výsledků, Gödelovy věty o neúplnosti, se týká prominentní teorie Hilbertova typu, tzv. Peanovy (axiomatizace) aritmetiky. Její odvození z Dedekindova spisu *Was sind und was sollen die Zahlen* ukazuje, že Hilbertův strukturalismus a snaha o implicitní zachycení jistého předmětného oboru má svého předchůdce dokonce v oblasti elementární aritmetiky.

Stručný nárys Dedekindova výkladu ze jmenovaného spisu, v němž je podobně jako u Frega vyhlášen plán logické charakterizace přirozených čísel, nám nyní poslouží nejen k lepšímu vstřebání rozdílu mezi formální a materiální teorií, ale i k porozumění některým specifikám Fregovy definice čísla. Předvedením Peanovy aritmetiky a obsahu Gödelových vět coby nejvýznamnějších výsledků pofregovského studia základů aritmetiky tuto podkapitolu, a tím i vlastní část knihy uzavřeme.

7.2.6 Peanova aritmetika

Na rozdíl od Frega, jenž přirozená čísla konstruuje, předpokládá Dedekind jejich systém spolu s následnickou funkcí jako pevně daný. Svůj zájem zaměřuje na úplnou strukturální charakterizaci posloupnosti N přirozených čísel. V dopise Kefersteinovi, jenž bývá často uváděn jako významný dokument procesu axiomatizace aritmetiky,³⁰⁷⁾ popisuje směr svého tázání takto:

»Jaké jsou vzájemně nezávislé základní vlastnosti posloupnosti N , tj. ty vlastnosti, které nejsou odvoditelné navzájem a z nichž vyplývají ostatní? Jak zbavit tyto vlastnosti jejich specificky aritmetického charakteru tak, aby byly subsumovány pod mnohem obecnější pojmy a takové akty porozumění, jež jsou nutné pro všechno myšlení, ale zároveň i postačující k tomu, aby zajistily spolehlivost a úplnost důkazům a umožnily konstrukci bezesporných pojmů a definic?«

S takto formulovanou vůdčí idejí zavádí Dedekind nejprve za pomoci základního množinového aparátu (primitivním pojmem je *systém* – viz [WZ, § 1]) pojem *zobrazení* nějakého systému S coby funkce φ , která každému předmětu x přiřazuje předmět $\varphi(x)$. Systém všech předmětů přiřazených funkcí φ systému S značí Dedekind jako $\varphi(S)$ nebo též S' a nazývá jej *obrazem* S . [WZ, § 3,

³⁰⁷⁾ Srv. Wang [c1957]; tento článek také obsahuje anglický překlad podstatné části dopisu.

(21)] Zobrazení systému S , které nepřirazuje žádným dvěma různým předmětům předměty stejné, nazývá *podobným*. [WZ, § 3, (26)] V dnešní terminologii se mu říká *prosté* a snadno lze nahlédnout korelaci mezi ním a Fregovým pojmem vzájemně jednoznačné relace. Řetězcem (vzhledem k zobrazení φ) nazývá Dedekind takový systém K , jehož obraz K' je jeho podsystémem, tj. kde všechny prvky K' jsou také prvky K , což symbolicky značí jako $K' \subseteq K$. [WZ, § 3, (37)]

Jelikož to, že je systém nekonečný, lze zachytit tvrzením existence prosté funkce, která jej zobrazuje na jeho vlastní část [WZ, § 5, (64)],³⁰⁸⁾ nabízí se nyní popsat systém přirozených čísel N jako řetězec vzhledem k nějakému podobnému zobrazení (\succ funkci bezprostředního následníka $s(\cdot)$), a to řetězec, v němž existuje prvek (\succ číslo 0), který jako jediný nenáleží obrazu N' . Tato charakteristika však strukturu N nepopisuje úplně, neboť ji splňuje jakýkoli jiný systém S , jenž kromě nulou počínající nekonečné posloupnosti jejich následníků obsahuje i předměty jiné, jen když jsou vhodně uspořádány příslušnou následnickou funkcí (aby zůstala prostá, nepřiradila nic nule atd.). Dedekind tedy stojí před stejným problémem jako Frege, totiž jak zachytit následnictví, s jehož pomocí by pak oddělil nepatřičné předměty t od přirozených čísel n coby systému N následníků nuly (Dedekind ovšem začíná jedničkou). V dopise Kefersteinovi píše:

»Pouhá slova “dostat se tam konečně mnoha kroky” nejsou také k ničemu. [...] Jak lze tedy bez předpokladu jakékoli aritmetické znalosti formálně a bez výjimky rozlišit prvky n od t ? Pouze s pomocí řetězců (37 a 44 mého spisu), a přece úplně! Budu-li se chtít vyhnout svému výrazu “řetězec”, řeknu: prvek n systému S náleží posloupnosti N tehdy a jen tehdy, jestliže je n prvkem každé části K systému, která má dvě vlastnosti: (i) že prvek 0 [³⁰⁹⁾] náleží K a (ii) že obraz $\varphi(K)$ je částí K . V mé technické terminologii: N je průnikem [Gemeinteil] 0_0 nebo $\varphi_0(0)$ všech řetězců K (νS), jimž náleží prvek 0 . Hned po přidání této podmínky je posloupnost N plně určena ve své povaze.«

Výsledky svého zkoumání následnické řady čísel shrnul Dedekind do sady vět, resp. formulí [WZ, § 10], jež byla později převzata Peanem a je známa (v modifikované verzi) pod jménem Peanovy axiomy. Jejich moderní podoba, užívající znak s (jakožto funktorovou konstantu $f_0^{(1)}$) pro následnickou funkci a 0

³⁰⁸⁾ Tj. druhořádovou formulí: $\exists f(\forall xy(f(x) = f(y) \rightarrow x = y) \wedge \exists z\forall y(f(y) \neq z))$. Takto je vyjádřeno tzv. D e d e k i n d o v o n e k o n e č n o (nekonečnost).

³⁰⁹⁾ Dedekind užívá znaku “1”, který však stále nahrazuji, abych se vyhnul možným zmatkům.

(jako jmenovou konstantu $f_0^{(0)}$) pro nulu, sestává z formulí:

$$(P1) \quad \forall x_1 x_2 (s(x_1) = s(x_2) \rightarrow x_1 = x_2),$$

$$(P2) \quad \forall x_1 (\neg . s(x_1) = 0),$$

$$(P3) \quad \forall x_1 (x_1 = 0 \vee \exists x_2 . x_1 = s(x_2)),$$

a matematické indukce, umožňující z toho, že vlastnost Φ platí pro 0 a že je dědičná vzhledem k relaci bezprostředního následníka, usoudit na platnost této vlastnosti pro všechna čísla:

$$(SI) \quad \Phi(0) \wedge \forall x_1 (\Phi(x_1) \rightarrow \Phi(s(x_1))) \rightarrow \forall x_2 . \Phi(x_2).$$

Není obtížné ověřit, že Fregem vymezená konečná čísla požadavky vyjádřené axiomy (P1)-(P3) splňují.³¹⁰ Platnost indukce, jak se lze snadno přesvědčit, je založena přímo na definici následníka (v nějaké f -řadě). Z této definice Frege již v *Begriffsschrift* dokázal mnohem obecnější princip následujícího znění:

»Má-li x vlastnost F , která se dědí v f -řadě, a následuje-li y v f -řadě za x , pak má y vlastnost F .« [B, 64, věta (81)]³¹¹

Totéž v příslušné reformulaci umožňuje přirozeně i teorie Dedekindova: Jestliže nějakému systému náleží 0 a s každým x obsahuje i $s(x)$, je řetězcem obsahujícím 0 a systém N je jeho podmnožinou z definice: $N = s_0(0)$, neboť $s_0(0)$ je průnikem všech řetězců obsahujících 0. Formulaci a odvození obecné báze této indukce lze najít v [WZ, § 4, (59)].

Výše uvedená axiomatická sada bývá zpravidla rozšířena o rekurzivní charakterizaci sčítání a násobení (pro $+$ a \times jako funktorové konstanty $f_0^{(2)}$ a $f_1^{(2)}$):

$$(P4) \quad \forall x_1 (x_1 + 0 = x_1),$$

$$(P5) \quad \forall x_1 (x_1 \times 0 = 0),$$

$$(P6) \quad \forall x_1 x_2 (x_1 + s(x_2) = s(x_1 + x_2)),$$

$$(P7) \quad \forall x_1 x_2 (x_1 \times s(x_2) = x_1 \times x_2 + x_1)$$

a axiomy uspořádání relací $<$ (predikátovou konstantou $P_0^{(2)}$):

$$(P7) \quad \forall x_1 (\neg . x_1 < 0),$$

$$(P8) \quad \forall x_1 x_2 (x_1 < s(x_2) \leftrightarrow . x_1 < x_2 \vee x_1 = x_2),$$

$$(P9) \quad \forall x_1 x_2 (x_1 < x_2 \vee x_1 = x_2 \vee x_2 < x_1).$$

³¹⁰ Zde musíme přirozeně s ohledem na smutný konec systému *Grundgesetze* poněkud slevit z ›rigoróznosti‹ celé rozpravy a nahlížet na Fregovu číselnou konstrukci jako na jakýsi ›naivní‹, zamýšlený model.

³¹¹ Stručný přehled důkazů dalších axiomů spolu s odkazy na jejich výskyt ve Fregových spisech lze najít in: *Kutschera* [1989], § 4.5].

Souhrn všech axiomů (P1)-(P9) se nazývá *Robinsonova aritmetika* a my jej budeme značit jako \mathcal{Q} . Jeho rozšíření o (SI), aritmetiku Peanovu, značme \mathcal{RA} .

7.2.7 Neúplnost a nekategoričnost

Není obtížné se přesvědčit, že náš předmětný obor A elementární aritmetiky tvoří v přirozené interpretaci

$$I(0) \approx 0, \quad I(+) \approx \zeta + \xi, \quad I(s) \approx \zeta + 1, \quad \dots$$

model $N = \langle A, I \rangle$ axiomů \mathcal{RA} , tj. že platí

$$N \models \mathcal{RA},$$

a tedy i $N \models \mathcal{Q}$.

Otázka směrem k \mathcal{RA} jakožto formální teorii nyní přirozeně nezní, zda má ještě nějaké jiné modely než N , ale zda má modely s tímto neizomorfní, tedy zda je kategorická. Z věty o kompaktnosti, která je triviálním důsledkem věty o úplnosti, snadno vyplývá, že kategorická není.³¹²⁾

Předvedená spjatost matematické indukce s následnickou relací snad nyní umožní zřetelněji nahlédnout, proč není prvořádová formulace principu indukce coby axiomatického schématu (SI), omezujícího se pouze na vlastnosti Φ vyjádřitelné daným jazykem, schopna neizomorfní modely vyloučit, zatímco její druhořádová varianta

$$(I) \quad \forall f (f(0) \wedge \forall x_1 (f(x_1) \rightarrow f(s(x_1))) \rightarrow \forall x_2 . f(x_2))$$

se *standardní množinovou*, tedy nikoli *substituční* kvantifikací, činí z Peanových axiomů kategorickou teorii, přesně tak, jak to Dedekind předpokládal.

Již jsme v souvislosti s Fregovou druhořádovou definicí následníka b předmětu a v řadě určené relací R jako toho předmětu, jenž má všechny vlastnosti dědičné v R -řadě, které má i a , zmínili, že je sice zřejmé, že této charakteristice vyhovují všichni ›skuteční následníci‹, tedy ti, k nimž lze dospět opakovanou aplikací relace R , že je však otázka, zda ji nesplňuje také předmět, který následníkem není. U běžné množinové formulace, jak ji lze najít i v Dedekindo-

³¹²⁾ Podle věty o kompaktnosti má formální teorie, tj. jistá množina formulí, model tehdy, jestliže má model každá její konečná podmnožina. Nyní stačí rozšířit jazyk \mathcal{RA} o konstantu c (jmennou konstantu $f_1^{(0)}$) a uvážit teorii C sestávající z nekonečně mnoha formulí $0 < c, s(0) < c, s(s(0)) < c, \dots$ Každou konečnou podmnožinu této teorie lze v A vždy při vhodné volbě $I(c)$ ohodnotit pravdivými větami, má tedy model a s ní i celá teorie C . Tento model však nemůže být s N izomorfní, neboť obsahuje předmět $I(c)$, který je ›větší‹ než libovolné ›přirozené číslo‹ $I(s(s(\dots(s(0))))$.

vě spřízněném pojmu řetězce, problém nevzniká: prvek je považován za (ne-vlastního) následníka prvku a v posloupnosti určené relací R , jestliže náleží každé množině M , jíž náleží a a která je uzavřená na aplikaci R . Jelikož množina je určena pouze svými prvky, nečiní nám potíže pro případ, kdy prvek není »skutečným následníkem« prvku a , specifikovat množinu, která jej neobsahuje, ačkoli obsahuje a a všechny aplikace R – totiž nejmenší takovou. Frege však nehovoří o *množině* (v úvodu *Grundgesetze* výslovně kritizuje Dedekinda, že jím užívaný pojem »systému« není logicky relevantní [GG₁, VIII]), ale o (dědičné) *vlastnosti*, čímž se zdá vázat příslušnou druhořadovou kvantifikaci na výrazové možnosti systému. V něm ovšem výše zmíněná rozlišující vlastnost formulovatelná být nemusí! Jelikož druhořadová substituční kvantifikace činí z (I) přímý ekvivalent prvořadového schématu (SI), je zřejmé, že mohou existovat i takové interpretace \mathfrak{RA} , které nejsou izomorfní s přirozenými čísly, jak je reprezentuje model \mathbf{N} , jenž bývá s ohledem na tyto nezamýšlené (nestandardní) modely tradičně nazýván *standardním modelem* (Peanovy) aritmetiky.

Gödelovy věty o neúplnosti nyní ukazují, že pro libovolnou rekurzivně axiomatizovatelnou formální teorii T predikátové logiky prvního řádu platí:

- (1) lze-li v T deduktivně dokázat \mathcal{Q} a je-li T bezesporná, je i neúplná,
- (2) lze-li v T deduktivně dokázat \mathfrak{RA} , pak lze zkonstruovat formuli Con_T takovou, že (i) T je bezesporná *tehdy a jen tehdy*, když neplatí $T \vdash \text{Con}_T$ a (ii) $\mathbf{N} \not\models \text{Con}_T$ platí *tehdy a jen tehdy*, je-li T bezesporná.

Kolem těchto – velmi významných – výsledků rozprostírá se vinou četných populárních výkladů aura, v jejímž pochybném světle jsou nahlíženy jako jakási novodobá kritika rozumu, jehož meze byly odhaleny v nemožnosti důkazu všech pravdivých aritmetických vět, ba co víc: lidský rozum není schopen dokázat ani bezespornost aritmetiky samotné. Matematika »pozemšťanů« se tak údajně dostává do krize, neboť není schopna dát pevný základ »intuicím«, z nichž inspirovaní matematici dávají vyvstat svým teoriím. – To je ovšem zcela scestné a hlavní vinu na tom má bezpochyby právě ona Hilbertem iniciovaná konfuze formální teorie s teorií materiální. Pro Hilbertův program totiž zmíněné výsledky určitý neúspěch evidentně představují. – Co ale vlastně Gödelovy věty skutečně dokazují?

Podle první z nich je každá bezesporná rekurzivně axiomatizovatelná³¹³⁾ formální teorie, v níž lze ›formulovat‹ jistý minimální fragment formální aritmetiky, neúplná, tedy existuje uzavřená formule jazyka dané teorie, která v ní není dokazatelná ani vyvratitelná, tj. není dokazatelná ona ani její negace. Z formalistova hlediska pravdy coby deduktivní konzistence je tedy ohodnocení této tzv. nezávislé formule ponecháno libovůli. Pro případ formální aritmetiky to znamená, že *existuje nedokazatelná formule, jež je ve standardním modelu ohodnocena pravdou*, a otázky sémantického ohodnocení aritmetických vět tedy nelze přenechat finitistickým syntaktickým prostředkům. Jelikož bereme vážně rozdíl mezi \mathcal{RA} a A , neznamená to však pro nás žádnou tragédii, a vzpomeneme-li na neefektivní koncept pravdy, jenž byl s ohodnocením A spojen, vlastně ani příliš velké překvapení.

Co se týče druhé věty, je nejprve jasné toto: chceme-li dokázat bezespornost nějaké formální teorie T , pak je nám existence nějaké formule CON_T , která je v T dokazatelná tehdy a jen tehdy, je-li T bezesporná, prakticky k ničemu, neboť v případě, že by systém bezesporný nebyl, lze v něm dokázat formuli *jakoukoli*, tedy i formuli CON_T . A naopak: je-li teorie bezesporná, pak *nedovoditelná formule existuje z definice*. Gödelova věta však ukazuje něco víc, totiž *efektivní konstrukci* takovéto formule, která je navíc v případě bezespornosti teorie T pravdivá ve standardním modelu. To znamená, že platí-li $N \models T$, není z věty o korektnosti formule CON_T v T ani vyvratitelná a je právě příkladem nezávislé formule, která z 1. věty o neúplnosti musí existovat.³¹⁴⁾

Interpretace, podle nichž jsou Gödelovy věty svědectvím o nedokazatelnosti bezespornosti aritmetiky, staví zjevně na nevyřčeném předpokladu, že je *formálnědeduktivní důkaz* jedinou možnou rigorózní důkazovou koncepcí. Toto je mylné již proto, že sám důkaz Gödelových vět (a důkaz nutně předpokládané úplnosti logického kalkulu) formálnědeduktivní není. Navíc přehlíží, že \mathcal{RA} prokazatelně bezesporná je, totiž díky standardnímu modelu, tj. platnosti $N \models \mathcal{RA}$. I tento fakt se opírá o jisté důkazy, které však právě proponenti důkazové rigoróznosti a formalismu zpravidla zcela ignorují a namísto korektním sémantickým úvahám dávají přednost řeči o našich ›intuicích‹.

³¹³⁾ Axiomy uvažované teorie musí být spojeny s efektivní procedurou – tentokrát však v technicky přesně vymezeném smyslu tohoto naivně užívaného slova –, která pro libovolnou formuli jazyka rozhodne, zda je axiomem teorie, či nikoli.

³¹⁴⁾ Gödelův originální důkaz 1. věty byl ovšem založen také na *konstrukci* takovéto formule a , jak sám Gödel ve svém komentáři podtrhuje, i jako celek dostal přísným konstruktivistickým (intuicionistickým) požadavkům.

Sečteno, podtrženo: Gödelovy věty je třeba vykládat v souladu s tím, o čem skutečně jsou, totiž o neúplnosti Peanova formalismu. Ta se dotýká všech formálních teorií, které slabou verzi formální aritmetiky určitým způsobem ›obsahují‹. Neúplnost takto zasahuje i Zermelovu-Fraenkelovu či Gödelovu-Bernaysovu axiomatizaci teorie množin, pokud jsou ovšem vůbec bezesporné.

8 DODATKY

8.1 CHRONOLOGIE FREGOVA ŽIVOTA A DÍLA

- 1848 Friedrich Ludwig Gottlob Frege narozen 8. listopadu ve Wismaru jako syn Karla Alexandra Frega (*1809) a jeho ženy Auguste, rozené Bialloblotzsky (*1815).
- 1852 * bratr Arnold.
- 1864 Začátek studia gymnázia ve Wismaru.
- 1866 † Fregův otec, při epidemii tyfu ve věku 57 let.
Ernst Abbe (*1840) vstupuje do Zeissových optických závodů v Jeně.
- 1869 Maturita a zápis na univerzitu v Jeně, 4 semestry studia matematiky, fyziky, chemie a filosofie.
- 1871 Přestup na univerzitu v Göttingen, 5 semestrů studia matematiky, fyziky a filosofie.
- 1872 Dedekindův (*1831) spis *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Spojitost a iracionální čísla).
* Bertrand Russell.
- 1873 Doktorát (*Dr. phil.*) na základě dizertace *Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene* (Geometrické zobrazení imaginárních forem v rovině).
- 1874 Habilitace v oboru matematika prací *Rechnungsmethoden, die auf einer Erweiterung des Grössenbegriffes gründen* (Početní metody opírající se o rozšíření pojmu veličiny). Jako soukromý docent (*Privatdozent*) se začíná podílet na výuce matematiky v Jeně.
- 1876 V letním semestru povolán na dvouměsíční vojenské cvičení. Hodnost poddůstojníka (*Unteroffizier im 5ten Thüringischen Landwehr-Infanterie-Regiment Nr. 94*). Z cvičení roku 1880, a tím i všech dalších se vyvazuje na základě potvrzení o nezastupitelnosti ve výuce.
- 1877 Fregova matka se vzdává řízení vyšší dívčí školy, kterou převzala po manželově smrti.
- 1879 *Begriffsschrift* (Pojmové písmo). Na jejím základě jmenován mimořádným profesorem (*außerordentlicher Professor*).
Nově zřízenou katedru matematiky v Jeně přebírá Johannes Thomae (*1840) z Freiburgu.
- 1880 Schröderova (*1841) recenze *Begriffsschrift*. Na její obhajobu píše Frege článek *Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift* (Boolova výpočetní logika a pojmové písmo), který se mu nepodaří zveřejnit.
- 1881 Fregova matka se stěhuje do Jeny.
- 1882 Neuveřejněný článek *Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift* (Boolův formálnělogický jazyk a moje pojmové písmo).

- Začíná učit matematiku na Pfeifferově soukromé střední škole (do roku 1884).
- 1883 *Über den Zweck der Begriffsschrift* (Účel pojmového písma). Cantorovy (*1848) *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre* (Základy obecné teorie množin). Peirce (*1839) dospívá k teorii kvantifikátorů.
- 1884 *Die Grundlagen der Arithmetik* (Základy aritmetiky).
- 1885 Cantorova recenze *Grundlagen*. Fregův plat zvýšen z 300 na 700 marek.
- 1886 *Über formale Theorien der Arithmetik* (Formální teorie aritmetiky). Fregovi udělen dekret (*Lehrauftrag*) na přednášku z analytické mechaniky. Ernst Abbe zajišťuje zvýšení Fregova platu na 2 000 marek.
- 1887 Svatba s Margarete Lieseberg (*1855). Manželé se spolu s Fregovou matkou stěhují do nově zakoupeného domu v ulici Forstweg, č. p. 29.
- 1888 Dedekindův spis *Was sind und was sollen die Zahlen* (Co a k čemu jsou čísla).
- 1889 Peanova (*1858) *Arithmetices principia*.
* Ludwig Wittgenstein.
- 1890 1. díl Schröderových *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (Přednášky z algebry logiky).
- 1891 Husserlova (*1859) *Philosophie der Arithmetik* (Filosofie aritmetiky). Husserl zasílá Fregovi výtisk spisu a zahajuje tak vzájemnou vědeckou korespondenci. Ta záhy přerušena a nakrátko znovuobnovena až roku 1906. *Funktion und Begriff* (Funkce a pojem). *Über Sinn und Bedeutung* (O smyslu a významu).
* Rudolf Carnap.
- 1892 *Über Begriff und Gegenstand* (Pojem a předmět).
- 1893 1. díl *Grundgesetze der Arithmetik* (Základní zákony aritmetiky).
- 1894 Recenze Husserlovy *Philosophie der Arithmetik*. Pravděpodobný rok zahájení korespondence s Peanem (*1858). Kontakt trvá do roku 1896.
- 1895 Fregovi uděleno občanství města Jeny. První kontakt s Hilbertem (*1862); na stručnou korespondenci navázáno až roku 1899.
- 1896 Frege jmenován Honorarordinariem (*ordentlicher Honorarprofessor*). Po Abbeho intervenci profesura proměněna v *Etatstelle*. Frege přednáší o Peanovi; text později vydán pod názvem *Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene* (Pojmové písmo pana Peana a moje vlastní).
- 1898 † Fregova matka, od roku 1896 pobývajíc v katolickém domově pro přestárlé.

- 1899 Hilbertovy *Grundlagen der Geometrie* (Základy geometrie); znovu obnovená korespondence ukončena Hilbertem roku 1903.
Meta Arndt (*1879) se hlásí o místo hospodyně, které zastává až do Fregovy smrti.
Fregův plat zvýšen o 500 marek z Abbeho *Carl-Zeiss-Stiftung*.
- 1902 Russell oznamuje Fregovi objev paradoxu.
† Ernst Schröder.
Začátek spolupráce s Jourdainem (1879-1919), pracujícím na kritickém zhodnocení díla významných matematiků.
- 1903 2. díl *Grundgesetze der Arithmetik*.
Russellova kniha *The Principles of Mathematics*.
Fregovi udělen titul dvorního rady (*Hofrat*).
- 1904 † Margarete Frege.
- 1905 † Ernst Abbe.
Frege přerušuje z důvodů nervové slabosti výuku v letním semestru.
Russellův článek *On Denoting*.
- 1906 *Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae* (Odpověď na prázdninové povídání pana Thomaeho); Fregův nejostřejší veřejný konflikt s vedoucím katedry.
- 1908 Frege přebírá opatrovnictví nad sourozenci Fuchsovými, Alfrédem (*1903) a Toni (*1905); adoptuje však pouze Alfréda, který také přijímá Fregovo příjmení.
Zermelova (1871-1853) axiomatizace teorie množin.
Löwenheim (1878-1859) si dopisuje s Fregem o formalistických základech matematiky; korespondence zničena během druhé světové války.
- 1909 Fregův plat zvýšen o 400 marek z prostředků Abbeho nadace.
- 1910 1. díl Russellových *Principia Mathematica*.
Carnap studuje v Jeně až do vypuknutí války roku 1914 a navštěvuje Fregovu přednášku *Begriffsschrift*, v roce 1913 pak *Begriffsschrift II*.
- 1911 Wittgensteinova první návštěva.
Fregův plat navýšen na předepsaných 5 000 marek po dvaceti letech služby podle nové tabulky ministerstva.
- 1914 † Charles Sanders Peirce.
- 1915 Wittgenstein diskutuje s Fregem v dopisech z fronty a od roku 1918 ze zajateckého tábora své *Logisch-philosophische Abhandlung* (Logicko-filosofické pojednání), pozdější *Tractatus*.
- 1916 † Richard Dedekind.
- 1918 Emeritován po dlouholeté neúspěšné léčbě neurastenie s důchodem 5 000 marek.
Prodává dům v Jeně a stěhuje se do Bad Kleinen, jižně od Wismaru.
Der Gedanke (*Myšlenka*). *Die Verneinung* (Negace).

- † Georg Cantor.
- 1921 Wittgensteinův *Tractatus logico-philosophicus*.
† Johannes Thomae.
- 1923 Alfréd začíná studovat *Technische Hochschule* v Berlíně.
- 1925 Gottlob Frege umírá 27. 7. ve věku 77 let.
Alfréd a Meta Arndt se stěhují do podnájmu v Pastowě u Rostocku.
- 1928 Hilbertovy-Ackermannovy *Grundzüge der theoretischen Logik* (Základní rysy teoretické logiky).
Carnapův *Der logische Aufbau der Welt* (Logická výstavba světa).
- 1929 Alfréd dokončuje studium techniky.
- 1932 † Giuseppe Peano.
- 1935 Alfréd předává Heinrichu Scholzovi z münsterské univerzity Fregovu vědeckou pozůstalost.
- 1938 † Edmund Husserl.
- 1943 † David Hilbert.
† Meta Arndt.
- 1944 † Alfréd Frege, padl v Montessonu u Paříže.
- 1945 Při bombardování Münsteru zničeny Fregovy spisy z pozůstalosti. K důležitým textům však byly udělané kopie.
- 1950 Austinův anglický překlad *Grundlagen*.
- 1951 † Ludwig Wittgenstein.
- 1969 Hans Hermes dokončuje editaci Fregových *Nachgelassene Schriften* (Spisy z pozůstalosti).
- 1970 † Rudolf Carnap.
† Bertrand Russell.
- 1973 Dummettova kniha *Frege – Philosophy of Language*, první díl kanonické interpretace Fregova díla.
- 1976 *Wissenschaftlicher Briefwechsel* (Vědecká korespondence), poslední nevydané Fregovy vědecké texty.
- 1990 † Toni Fuchs.
- 1991 Dummettova kniha *Frege – Philosophy of Mathematics*.
- 1996 Zveřejněn celý obsah Fregova kontroverzního deníku, s komentářem G. Gabriela a W. Kienzlera.

8.2 SLOVNÍK

Zde je stručný seznam významných Fregových termínů a jejich překladů použitých v knize. V žádném případě se nejedná o seznam vyčerpávající, zmíněny jsou zejména problematické případy, čímž má být řečeno i to, že to není slovník výkladový. Hesla jsou pořádaná takto: Za tučně vytištěným německým slovem je vždy proloženým písmem uveden jeho přímý překlad z citátů knihy. Pak mohou eventuálně následovat některé jeho významové ekvivalenty, které jsem mu přisoudil ve vlastním výkladu (tak např. “f-význam” či “denotát” pro “Bedeutung”). Po césuře uvádím některé běžné překladové varianty anglické, po další zpravidla následuje poznámka či vysvětlivka k překladu hesla, dále pak příklady užití daného slova ve větném kontextu spolu s odkazy na místa zvláště typických výskytů, ať již přímo u Frege či v této knize. Slova, která jsou v textu k nějakému heslu zmíněna a jsou také hesly, podtrhávám čarou.

abbilden in ■ zobrazovat do | map into | relace A zobrazuje pojem B do pojmu C (*die Beziehung A bildet den Begriff B in den Begriff C*); tato fráze je co do významu ekvivalentní frázi “A jednoznačně přiřazuje předměty spadající pod B předmětům spadajícím pod C”; k tomu viz indeutige Zuordnung.

abgeschlossen ■ uzavřený | complete in itself | viz Funktion.

andeuten ■ naznačovat | indicate | Fregův termín užívaný jako protějšek termínů “bedeuten” a “bezeichnen” | proměnná či schematické písmeno neznámá (*bedeutet nicht*), neoznačuje (*bezeichnet nicht*) předmět, nýbrž jej pouze neurčitě naznačuje (*unbestimmt andeuter*) | viz [GG₁, § 1, 17], [FB, 5], /4.1.5/, /7.1.1./.

angehören ■ náležet | belong to | viz Reihe, zukommen.

Anschauung, die ■ názor | intuition | Kantův protiklad termínu “pojem” (Be-griff); názor je singulární, konkrétní, spjatý se smysly, pojem je obecný, spjatý s rozumem; Frege (stejně jako Hilbert) termín používá více méně Kantovým způsobem (srv. [GL, § 12sq]), a to vždy v diskusi tradičních filosofických problémů, zejména epistemologického statu aritmetiky | do řetězce logických úsudků se nesmí vetřít nic z názoru (*etwas Anschauliches*), poznání axiomů geometrie plyne z názoru prostoru (*Raumanschauung*) | viz [B, IV], [GL], [WB, 63], [N, 298], /1.5/, /7.2.1/, /7.2.5/.

Anzahl, die ■ číslo, kardinální číslo, počet | number, cardinal number, Number | Fregův výraz pro kardinální číslo jakožto odpověď na otázku ›kolik?‹ (›jaký počet?‹), zavedený v [GL], kde mezi “Anzahl” a obecnějším “Zahl” není činěn žádný výrazný rozdíl (Austin přesto ve svém překladu *Frege* [1950] přepisuje “Anzahl” jako “Number” s velkým “*N*”, zatímco u “Zahl” ponechává malé písmeno); tento rozdíl však nabude na významu v [GG₂], kde jsou kardinální čísla odlišena od kladných celých čísel, která jakožto čísla reálná odpovídají na otázku ›jak velká je nějaká veličina v poměru k veličině jednotkové‹, a jsou tedy čísla vyjadřujícími míru (*Maasszahlen*) – viz

[GG₂, § 157] | číslo přísluší pojmu (*die Anzahl kommt einem Begriffe zu*), udání čísla obsahuje výpověď (je výpovědí) o pojmu (*die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe*),³¹⁵ číslo je připisováno pojům (*die Zahl wird Begriffen beigelegt*) | viz [GL, § 45-54], [GG₂, § 157sq], /6.2.2/-/6.2.4/.

Argumentstelle, die ■ místo pro argument, a_místo | argument-place | viz [GG₁], /7.1.1/.

Art des Gegebenseins, die ■ způsob danosti | mode of presentation | Fregův termín, pozdní varianta raného “*Bestimmungsweise*” z [B], v [SB] spojena s rovněž technickým “*Sinn*” | viz [SB, 26sq], /5.1.3/.

ausdrücken ■ vyjádřit | express | viz *Bedeutung*.

Aussage, die ■ výpověď, tvrzení | statement | tento termín Frege využívá v obvyklém významu tvrzení (*Behauptung*) či tvrdící, tj. oznamovací věty (*Behauptungssatz*); v [GL] však specificky v dotazu: ›o čem je vypovídáno udání čísla?‹ (*wovon wird etwas durch eine Zahlangabe ausgesagt?*) a v odpovědi, že ›udání čísla obsahuje (je) výpověď o pojmu‹ (*die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe*), v nichž spíše než o oznamovací formu tvrzení a jeho charakter jazykového aktu jde o obsah a logickou formu řečeného, jíž je míněna predikace něčeho něčemu, v tomto specifickém případě pojmu druhého řádu pojmu řádu prvního; v němčině je termínem “*Aussage*” navíc běžně označován předmět logiky výroků (*Aussagenlogik, logic of propositions*), což Frege na rozdíl třeba od Hilberta nevyužívá; pro výrok jakožto něčí prohlášení (“*Leibnizův slavný výrok*”) se užívá spíše termín “*Ausspruch*” | viz [GL, § 45-55], /6.2.2/, srv. také *Anzahl*.

bedeuten ■ znamenat, referovat, označovat, denotovat | mean, refer to, stand for, denote, designate, signify | viz *Bedeutung*.

Bedeutung, die ■ význam, f-význam (fregovský význam), denotát, reference | meaning, reference, denotation, significance³¹⁶ | Fregovo užití tohoto slova kolísá, pozdějšímu technickému úzu z [SB] odpovídá v raných spisech “*Inhalt*” či “*Sinn*”; některé anglické překlady dávají zmíněný přechod najevo odlišnou terminologií a překládají nediferencované “*Bedeutung*” raného období (srv. příklad pro heslo *begrifflicher Inhalt*) jako “*significance*”, tedy přirozeným ekvivalentem běžného jazyka | slovo znamená či označuje svůj význam a vyjadřuje svůj smysl (*ein Wort bedeutet oder bezeichnet seine Bedeutung und drückt aus seinen Sinn*) | viz [SB, 31], /5.1.4/.

Bedingungssatz, der ■ antecedent | antecedent | viz *Bedingungsstrich*.

Bedingungsstrich, der ■ podmínkový pruh, subjunktör | conditional stroke | Fregův symbol pro logickou funkci subjunkce (implikace), či jeho svislou část, doplně-

³¹⁵ K potížím s překladem této fráze viz *Dummett* [FPM, 88].

³¹⁶ K problému a historii překladu slova “*Bedeutung*” do angličtiny viz Beaneyho úvod k *Frege* [1997], § 4.

nou o dva vodorovné pruhy (*Wagerechter*) na horním konci a jeden na dolním; slouží k hypotetickému spojení vět (*hypothetische Satzverbindung*), a to antecedentu (*Bedingungssatz*) a konsekventu (*Folgesatz*), společně vyjadřujících hypotetické spojení myšlenek (*hypothetisches Gedankengefüge*) či hypotetický soud (*hypothetisches Urteil*) | viz [B, § 5], [GG₁, § 12], /3.2.4/, /7.1.1/.

Begriff, der ■ pojem | concept | tradiční logický termín, představující u Frege významový protipól k termínu “předmět” (*Gegenstand*); ten spolu se zobecněním “pojmu” v termínu “funkce” (*Funktion*) tvoří centrální dvojici Fregovy formální ontologie | pojmové slovo znamená pojem (*ein Begriffswort bedeutet einen Begriff*); základním logickým vztahem je spadání předmětu pod pojem (*die logische Grundbeziehung ist die des Fallens eines Gegenstandes unter einen Begriff*); pojem je predikativní povahy (*prädikativer Natur*), je tím, co může být o něčem vypovídáno (*was ausgesagt werden kann*); předmět je to, o čem může být něco vypovídáno, co samo však vypovídáno být nemůže; pojem je funkce (*Funktion*), jejímiž hodnotami (*Wert*) jsou výhradně pravdivostní hodnoty (*Wahrheitswert*); na rozdíl od relace (*Beziehung*) je pojem funkce jednoho argumentu (*Argument*); průběh hodnot (*Wertverlauf*) funkce, která je pojmem, se nazývá rozsah pojmu (*Umfang des Begriffes, Begriffsumfang*) | viz [GG₁, § 1sq], [BG], [FB], [ASB_N], /4/, /6.2.7/.

begriffliche Inhalt, der ■ pojmový obsah | conceptual content | pojmový obsah je to, co je relevantní (má význam) pro sled úsudků (*was nicht für die Schlußfolge ohne Bedeutung ist*) | viz [B], dále *beurteilbarer Inhalt*.

Begriffsschrift, die ■ Pojmové (pojmové) písmo, pojmapis | concept script, conceptual notation | Frege tak nazývá jak svůj systém pojmové notace, který slouží k pojmapisnému rozvoji (*begriffsschriftliche Entwicklung*) aritmetických zákonů, tak knihu, v níž byl původně zaveden; název knihy v citacích překládám, ve vlastním textu nechávám zpravidla původní německý výraz.

Begriffswort, das ■ pojmové slovo, predikát | concept word | termín analogický výrazu “predikát” (*Prädikat*); prostou variantu tvoří termíny “*Begriffszeichen*”, “*Begriffsname*”, “*Begriffsausdruck*”; někdy Frege užívá také latinský termín “*nomen appellativum*”; “*Begriffswort*” spolu s termínem “vlastního jména” (*Eigename*) tvoří syntaktický pendant k sémantické dvojici pojmu a předmětu (*Begriff und Gegenstand*), které jsou jejich významy (*Bedeutung*); jako je pojem speciálním případem funkce (*Funktion*), je pojmové slovo speciálním případem funkčního jména (*Funktionsname*) | viz *Begriff*.

behauptende Kraft, die ■ tvrdící síla | assertoric force | tvrdící síla neleží ve slově pravdivý, nýbrž ve formě tvrdící věty (*die behauptende Kraft liegt nicht in dem Wort “wahr”, sondern in der Form des Behauptungssatzes*); vlastním symbolem tvrdící síly je pruh soudu (*ein eigenes Zeichen mit behauptender Kraft ist der Urteilsstrich*) | viz [G], [L_{2N}], [KUN], /3.1.5/-/3.1.6/.

Behauptung, die ■ tvrzení | assertion | termín pro akt tvrzení; prostá alternativa k “*Behaupten*” | v tvrdící (oznamovací) větě se spojuje dvojí: vyjádřená myšlenka a tvrzení její pravdivosti (*im Behauptungssatz ist zweierlei miteinander verbunden: der ausgedrückte Gedanke und die Behauptung seiner Wahrheit*); tvrzení je manifestací soudu (*das Behaupten ist die Kundgebung des Urteils*) | viz [L_{2N}], [G], /3.1.3/.

Behauptungssatz, der ■ tvrdící věta, oznamovací věta | assertoric sentence | pendant věty tázací (*Fragesatz*), rozkazovací (*Befehlsatz*), přací (*Wunschsatz*), věty vyjadřující výzvu (*Aufforderungssatz*) či prosbu (*Bittsatz*) | viz /3.2.2/, dále viz Behauptung.

beiderseits eindeutige Zuordnung, die ■ vzájemně jednoznačné přiřazení, jednojednoznačné přiřazení | one-one (cor)relation | viz eindeutige Zuordnung.

beilegen ■ připisovat | ascribe to | Fregův výraz pro predikaci, tj. připisování predikátu logickému (nikoli gramatickému) subjektu, obecněji využitý v diskusi čísla, kde se hovoří o připisování čísla pojmům jakožto případu obdobném predikaci existence coby vlastnosti druhého řádu | viz Anzahl.

bejahen ■ potvrdit, (od)souhlasit | affirm | Fregova raná pragmatická varianta rozpisu pravdivostních podmínek složených vět, tvořící dvojici s termínem “popřít” (*verneinen*); později nahrazena distribucí pravdivostních hodnot (*Wahrheitswert*) | souditelný obsah může být potvrzen či popřen (*der beurteilbare Inhalt kann bejaht oder verneint werden*) | viz [B, § 5sq], /3.2.4/.

benennen ■ pojmenovat, jmenovat | name | viz bezeichnen.

Bestimmungsweise, die ■ způsob určení | mode of determination | raná podoba “způsobu danosti” (*Art des Gegebenseins*) z [SB] | tentýž obsah může být dán různými způsoby určení (*derselbe Inhalt kann durch verschiedene Bestimmungsweisen gegeben werden*) | viz [B, § 8], /5.1.3/.

beurteilbare Inhalt, der ■ souditelný obsah, obsah možného soudu | judgeable content, content of possible judgement | Fregův termín z doby [B], v níž představuje spolu s nesouditelným obsahem speciální typ tzv. pojmového obsahu (*begrifflicher Inhalt*), jenž je ve své funkci později v [SB] rozdělen na smysl a význam (*Sinn und Be-deutung*); v případě souditelného obsahu se jedná o terminologické dělení na myšlenku a pravdivostní hodnotu (*Gedanke und Wahrheitswert*), neboť souditelný obsah je obsahem věty (*Satz*), a to obsahem, který lze vynést v soudu (*Urteil*) coby komplexním aktu uznání v něm vyjádřené myšlenky jako pravdivé (*das Urteilen ist die Anerkennung der Wahrheit eines Gedankens*) | souditelný obsah může být potvrzen (*bejahen*) nebo popírán (*verneinen*); souditelný obsah se rozpadá na trvalou a proměnlivou část (*der beurteilbare Inhalt zerfällt in einen bleibenden und einen veränderlichen Teil*) | viz [B], [BF_N], [BL_N], /3.1.3/-/3.1.4/, /4.1.1/.

bezeichnen ■ označovat, značit | designate | specifická varianta slova “*be-**deuten*”, užívaná zpravidla u vlastních jmen (*ein Eigenname bezeichnet einen Gegen-*

stand), i když obecné využití vyloučeno není (viz třeba [GL, § 51]); slouží k zdůraznění rozdílu mezi slovem jakožto (zprvu) bezobsažným symbolem (*Zeichen*, *Bezeichnung*) a tím, co znamená, značí; podobně je užíváno také slovo “*benennen*” | viz *Beutung*.

Bezeichnung, die ■ označení | designation | viz *Zeichen*, *bezeichnen*.

Beziehung, die ■ relace, vztah | relation | Fregeův termín užívaný jak v obecném významu vztahu něčeho k něčemu (předmětu k pojmu), tak v technickém pojetí víceargumentové funkce do pravdivostních hodnot, a to v protikladu k pojmu (*Begriff*), který je funkcí jednoargumentovou; překládám oběma způsoby s ohledem na stylistické potřeby kontextu; podobně jako pojem má i (dvoargumentová) relace coby funkce svůj průběh hodnot (*Doppelwertverlauf*), jenž se nazývá rozsah relace (*Umfang der Beziehung*) | viz *Begriff*.

Definitions Doppelstrich, der ■ dvojitý pruh definice | double-stroke of definition | viz [GG₁, § 27], /7.1.3/.

Doppelwertverlauf, der ■ dvojitý průběh hodnot | double value-range, double course-of-values | viz [GG₁, § 36], /7.1.4/, dále viz *Beziehung*, *Wertverlauf*.

Eigennamen, der ■ vlastní jméno, jméno | proper name | viz *Gegenstand*, *Begriffswort*.

eindeutige Zuordnung, die ■ jednoznačné přiřazení | many-one relation | termín je v podstatě analogický termínu “jednoznačné relace”, Frege jej však používá spíše k označení procesu (*Verfahren*), jímž jsou předměty danou relací (*Beziehung*) jednoznačně přiřazovány předmětům jiným (viz [GL, § 71]); proto oba termíny (“*Beziehung*” a “*Zuordnung*”) překládám různě; totéž platí o pojmu vzájemně jednoznačného zobrazení (*beiderseits eindeutige Zuordnung*); v [GG₁, § 38] Frege namísto jednoznačného přiřazování předmětů spadajících pod pojmy nechává danou relací zobrazovat jeden pojem do druhého (*abbilden in*) | viz /6.2.4/, /7.1.5/.

ergänzungsbedürftig ■ vyžadující doplnění | in need of supplementation | viz *Funktion*.

Erklärung, die ■ definice, vysvětlení | definition | prostý ekvivalent slova “definice” (*Definition*); potřeba odlišení vyvstává ale např. v diskusi s Hilbertem, který využívá obou termínů; výraz “vysvětlení” se spíše hodí pro neformální explanaci odpovídající Fregeovu “*Erläuterung*” | viz [WB, 55sq].

Erläuterung, die ■ vysvětlení, osvětlení | elucidation | viz *Erklärung*.

fallen in ■ spadat do | fall within | viz *fallen unter*.

fallen unter ■ spadat pod | fall under | slouží k vyjádření základního vztahu Fregeovy logiky, vztahu subsumce (*Subsumtion*) předmětu pod pojem (*ein Gegenstand fällt unter einen Begriff*), a to na rozdíl od vztahu podřazení (*Unterordnung*, *Subordination*) pojmu prvního stupně jinému pojmu prvního stupně (*ein Begriff erster Stufe ist*

einem Begriffe erster Stufe untergeordnet) a na rozdíl od spadání pojmu prvního stupně do pojmu druhého stupně (*ein Begriff erster Stufe fällt in einen Begriff zweiter Stufe*) | viz [WB, 150sq], [BG], /6.1.2/, /4.2/.

Falsche, das ■ ne pravda, F | the False | označení pro jednu z pravdivostních hodnot (*Wahrheitswert*) | viz *Wahrheitswert*.

Färbung, die ■ za barvení | tone, colouring | Fregův termín pro subjektivní složky obsahu (*Inhalt*) výrazů; jeho ekvivalentem je také “*Beleuchtung*” (nsvícení, *shading*) | viz *Gedanke*.

fassen ■ uchopit, chápat (se) | grasp | Fregův termín, podtrhující objektivitu myšlenek, které nevytváříme (*schaffen*), nýbrž se jich chápeme | chápání se myšlenek musí odpovídat zvláštní schopnost ducha (*dem Fassen der Gedanken muß ein besonderes geistiges Vermögen entsprechen*) | viz *Gedanken*.

folgen (in der Reihe auf etwas) ■ následovat (v řadě za něčím), být následníkem | follow (sth in the series) | frázi “A následuje (bezprostředně – *unmittelbar*) za B” používám mimo citace také v transkripci “A je (bezprostřední, přímý) následník B” či “B je (přímý, bezprostřední) předchůdce A” | viz *Reihe*.

Folgerung, die ■ důsledek | inference | viz *Schluß*.

Folgesatz, der ■ konsekvent | consequent | viz *Bedingungsstrich*.

Funktion, die ■ funkce | function | základní termín Fregovy ontologie, tvořící protipól termínu “předmět” (*Gegenstand*) | funkce je (f-)význam funkčního jména (*Bedeutung des Funktionsnamens, Funktionszeichens*), funkce a její jméno jsou na rozdíl od předmětu a jeho jména (*Gegenstandsname, Eigennamen*) nenasyčené (*ungesättigt*), neúplné (*unvollständig*), vyžadující doplnění (*ergänzungsbedürftig*); místa pro argument (*Argumentstelle*) jsou zaplňována (*ergänzen*) jmény argumentů (*Argument*) na jména hodnot (*Wert*) | viz *Begriff*.

Funktionsname, der ■ funkční jméno, jméno funkce | name of function | protipól vlastního jména či jména předmětu; prostá varianta termínu “*Funktionszeichen*” | funkční jméno s sebou vždy nese prázdná místa pro argument (*ein Funktionsname führt immer leere Stellen für das Argument mit sich*) | viz *Begriff*.

Gebiet (der Allgemeinheit), das ■ obor (obecnosti), dosah kvantifikátoru | scope (of generality) | viz *Höhlung*.

Gedanke, der ■ myšlenka | thought, proposition | Fregův termín; intersubjektivní korelát větného obsahu, zbarvený subjektivního zbarvení (*Färbung*) | myšlení je chápání se (uchopení) myšlenky (*das Denken ist das Fassen des Gedankens*); anglické překlady občas rozlišují mezi “*proposition*” a “*sentence*”, přičemž druhý termín rezervují pro větu jakožto posloupnost symbolů (*Satz*) a první užívají pro vyjádření obsahu, často v Russellově stylu větného obsahu jakožto faktu (*fact, Tatsache*) či možného stavu věci (*state of affairs, Sachverhalt*) | viz [G], [L₂N], [N, 213sq], /3.1.4/, /6.2.8/.

Gedankengefüge, das ■ spojení myšlenek | compound thought(s) | Fregův termín a název poslední části *Logische Untersuchungen*; alternativně užíván také termín “*Gedankenverbindung*” | viz [GF], [KUN].

Gegenstand, der ■ object | Fregův termín, protikladný termínům “funkce” (*Funktion*) či speciálně “pojmu” (*Begriff*); v této roli nahradil tradiční “názor” (*Anschauung*) | předmět je (f-)význam vlastního jména či jména předmětu (*Bedeutung des Eigenamens*, *Gegenstandsnamens*), na rozdíl od nenasyčené (*ungesättigt*) funkce je předmět význam uzavřený (*abgeschlossene Bedeutung*), samostatný (*selbständig*) | viz *Begriff*.

gesättigt ■ nasycený | saturated | viz *Funktion*.

Gleichheit, die ■ rovnost, identita | equality, identity | viz *Gleichung*.

Gleichheitszeichen, das ■ rovnítko, znaménko (symbol) rovnosti | equality sign | viz *Gleichung*.

Gleichung, die ■ rovnice, rovnost, identita | equation, identity statement | termín pro větu, v níž je vyjádřen vztah (relace) rovnosti (*Gleichheit*, *Identität*), zpravidla pomocí rovnítka (*Gleichheitszeichen*); jelikož jednoznačné “rovnice” evokuje výraz čistě matematický, hovořím zde také o “rovnosti” či “identitě” ve smyslu výrazů, nikoli jen relace, kterou vyjadřují | viz *wiedererkennen* | viz /5/, /6.2.5/sq, /7.1.1/.

gleichzahlig ■ rovnočíselný, stejného počtu | equinumerous | Fregův novotvar: dva pojmy jsou rovnočíselné, lze-li předměty spadající pod jeden z nich jednoznačně přiřadit předmětům spadajícím pod druhý (*zwei Begriffe sind gleichzahlig, wenn die Möglichkeit vorliegt die unter den einen den unter den andern Begriff fallenden Gegenständen beiderseits eindeutig zuzuordnen*); rovnočíselné pojmy jsou ve vztahu rovnočíselnosti (*Beziehung der Gleichzahligkeit*) | viz [GL, § 68], [GG₁, § 39], /6.2.4/, /7.1.5/.

Grundgesetze, die ■ základní zákony | basic laws | část názvu Fregovy knihy *Grundgesetze der Arithmetik* (Základní zákony aritmetiky).

Grundlagen, die ■ základy | foundations | část názvu Fregovy knihy *Die Grundlagen der Arithmetik* (Základy aritmetiky).

Höhlung, die ■ jamka (kvantifikátoru) | concavity | část symbolu obecnosti (*Allgemeinheit*), v [B] vzniklého umístěním jamky do pruhu obsahu (*Inhaltsstrich*) a jejím nadepsáním německým písmenem; v [GG₁] je jamka obklopena dvěma vodorovnými pruhy (*Wagerechter*) | obor obecnosti vyjádřený německým písmenem je omezen na obsah, do jehož pruhu byla umístěna jamka (*das Gebiet der durch den deutschen Buchstaben bezeichneten Allgemeinheit ist auf den Inhalt beschränkt, in dessen Inhaltsstrich die Höhlung angebracht ist*) | viz [B, § 11], [GG₁, § 8], /4.2.3/, /7.1.1/.

hypothetische Satzverbindung, die ■ hypotetické (podmínkové) spojení vět | hypothetical construction, combination of propositions | termín pro větu vznik-

lou spojením dvou vět podmínkovým pruhem (*Bedingungsstrich*); místo “*Satzverbindung*” užíváno také “*Satzgefüge*” | viz [EL_N], /3.2.4/, /4.1/.

Inhalt, der ■ o b s a h | content | tradiční termín, sloužící k pojmenování toho, co věta vyjadřuje; v tomto původním významu je užíván jako protějšek termínu “rozsah” (*Umfang*), což průběžně nacházíme u Frege, když hovoří o logických obsahu a rozsahu (*Inhaltslogiker, Umfangslogiker, Logiker des Inhalts, Umfangs*) či o ekvipolenci (*Äquipollenz*) jakožto relaci mezi větami téhož obsahu oproštěného od mimologického zbarvení (*Färbung*); logicky relevantní část obsahu věty je v [B] nazvána pojmovým obsahem (*begrifflicher Inhalt*); tradiční rozdíl mezi (pojmovým) obsahem a rozsahem víceméně kopíruje Fregovo rozlišení smyslu a významu (*Sinn und Bedeutung*) z [SB] | viz [N, 213sq], /1.2.3/, dále viz *beurteilbarer Inhalt*.

Inhaltsstrich, der ■ p r u h o b s a h u | content stroke | raná terminologická verze pozdějšího vodorovného pruhu (*Wagerechter*) | viz *Urteil*.

Kennzeichen, das ■ k r i t é r i u m | criterion | termín pro charakteristický znak nějakého jevu, konkrétně třeba znovurozpoznání (*Wiedererkennen*) dvou předmětů různých jmen jakožto identických (*ein allgemeines Kennzeichen für die Gleichheit*); v němčině běžně “*Kennzeichnung*” jakožto termín pro Russellovu “určitou deskripci” (*definite description*) Frege nepoužívá a hovoří buďto o definici předmětu z pojmu, pod který spadá (*Definition eines Gegenstandes aus einem Begriffe, unter den er fällt*) [GL, § 74], či o funkci (náhradě) určitého členu jazyka (*Ersatz für den bestimmten Artikel der Sprache*) [GG₁, § 11] | viz /5.1.1/, /6.1/.

Kundgebung, die ■ m a n i f e s t a c e | manifestation | viz /3.1.6/, dále viz *Behauptung*.

Lehrsatz, der ■ t e o r é m , p o u č k a | theorem | německý ekvivalent Fregem rovněž využívaného latinského termínu “teorém” (*Theorem*); někdy se zdá být při překladu vhodnější využít slova “poučka”; podobným případem německo-latinské dvojice jsou slova “*Axiom*” a “*Grundsatz*” | věty matematiky lze rozdělit na axiomy, teorémy a definice (*Axiome, Lehrsätze und Erklärungen*) | viz [LM_N], [WB, 60sq].

Marke, die ■ m a r k a | mark | Fregův pomocný syntaktický termín z [GG₁]; významem mu zhruba odpovídá moderní termín (formálního) termu a matrice; Frege rozlišuje marky na funkční a předmětné (*Funktionsmarke, Gegenstandsmarke*), latinské a německé (*lateinische, deutsche*); správný překlad by měl být cosi jako “značka” či “známka”, ale těchto slov lze využít i v překladu mnoha dalších termínů, a přehledné terminologické výstavbě proto lépe vyhovuje nepřesné, avšak méně obvyklé a originál upomínající “marka” | viz [GG₁, § 26], /7.1.3/.

Merkmal, das ■ (p o j m o v ý) z n a k (p o j m u) | mark | logické slovo tradičního významu, který Frege v podstatě zachovává; zpravidla jej překládám jako “znak”, hrozí-li záměna s významem slova “symbol” (*Zeichen*), přidávám přívlastek “pojmový” | obsah pojmu (*Inhalt des Begriffes*), pojem je tvořen svými dílčími znaky; znak

pojmu je vlastnost předmětu, který pod pojem spadá (*Eigenschaft eines unter den Begriff fallenden Gegenstandes*); znaky nadřazeného pojmu jsou také znaky pojmu podřazeného (*die Merkmale des übergeordneten Begriffes sind auch die Merkmale des untergeordneten*); viz [WB, 60sq, 147sq], [N, 120sq], [GL, § 53], /1.2.3/, /6.1.2/, /6.2.2/, /7.2.1/.

Ordnung, die ■ ř á d | order | termín z [GL] pro hierarchizaci pojmů na pojmy řádu prvního, druhého, ... (*Begriffe erster, zweiter, ... Ordnung*), později nahrazen termínem “stupeň” (*Stufe*) | viz [GL, § 53], dále viz Stufe.

Reihe, die ■ ř a d a, posloupnost | series | vlastnost se dědí v řadě (*die Eigenschaft vererbt sich in der Reihe*); A následuje v číselné řadě bezprostředně za B (*A folgt in der Anzahlenreihe unmittelbar auf B*); A náleží řadě končící B (*A gehört der mit B endenden Reihe an*) | viz [B, k. III], [GG₁, § 45sq], /7.1.5/sq.

Satz, der ■ v ě t a | sentence, proposition | obvykle míněna věta jako konkrétní posloupnost znaků či generické schéma, v [GG₁], [GG₂] se často jedná o prostou alternativu k termínu “teorém” (*Lehrsatz*); k anglickému překladu viz Gedanke.

Satzfrage, die ■ v ě t n á o t á z k a | propositional question, yes-no question | viz Wortfrage.

Satzzusammenhang, der ■ (v ě t n ý) k o n t e x t (v ě t y) | context of proposition, context of sentence | po významu slov je třeba se ptát v kontextu věty, nikoli izolovaně (*nach der Bedeutung der Wörter muss im Satzzusammenhange, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden*) | viz [GL, X, § 62sq], /4.1.4/, /5.1.1/, /5.1.8/, /6.2/.

selbständig ■ s a m o s t a t n ý | independent | v [B] hovoří Frege o samostatně představené (*Vorstellung*), která má být spjata s logickými kategoriemi výrazů, nikoli pouhými výrazy gramatickými; v [GL] hovoří o čísle jako o samostatném předmětu, zdůrazňuje však, že tím nepopírá zásadu, že číslovka (*Zahlwort*) označuje něco jen v kontextu věty (*Satzzusammenhang*) [GL, § 60], nýbrž jen zdůrazňuje spjatost jmenového výrazu s kritérii znovuzpoznání (*Wiedererkennen*) [G, § 62] | viz [B, 17], [GL, § 60sq], /4.1.5/, /5.1.1/.

Schluß, der ■ ú s u d e k, inference | inference | tento termín Frege používá jak pro přechod mezi větami (*Schlußkette*), tak pro výsledek tohoto přechodu (*Schlußsatz*); jelikož Frege dovoluje usuzovat (*schließen*) pouze z pravdivých vět, splývá v jeho použití termín usuzování (*Schließen*) s vyplýváním (*Folgern*), tedy i úsudek s důsledkem (*Folgerung*); my ovšem v textu knihy, tj. mimo citace, tento úzus nenásledujeme a používáme první z nich jako syntaktický, druhý jako sémantický pojem (viz /3.2.7/) | viz [LMN], /3.1.6/.

Schlußkette, die ■ ú s u d k o v ý ř e t ě z e c | chain of inference, inference-chain | řetězce úsudků tvoří důkaz teorému (*Schlußketten bilden den Beweis eines Theorems*) | viz Schluß.

Schlußsatz, der ■ z á v ě r, úsudek, důsledek, konsekvence | consequence | protiklad premisy (*Prämisse*) | viz Schluß.

schöpferische Definition, die ■ tv ů r č í d e f i n i c e, definice obdařená tvůrčí silou | creative definition | viz [GG₁, § 143], /6.1.7/.

Sinn, der ■ s m y s l, f-smysl | sense | před článkem [SB], kde je precizován jako způsob danosti významu (*die Art des Gegebenseins der Bedeutung*), termín užíván nediferencovaně, často na místě pozdějšího “*Bedeutung*”; pozdějšímu technickému významu odpovídá v raných spisech zpravidla termín “*Inhalt*” | viz Bedeutung.

Stufe, die ■ s t u p e ň | level | Fregův pozdější termín pro hierarchizaci pojmů a funkcí: rozlišovány jsou pojmy a funkce prvního, druhého, ... stupně (*Begriff oder Funktion erster, zweiter, ... Stufe*); v [GL] Frege hovoří ještě o pojmech prvního a druhého řádu (*Ordnung*) v témže významu slova | viz [GG₂, § 21], /7.1.1/; srv. též fallen unter.

Subsumtion, die ■ s u b s u m p c e, s p a d á n í (předmětu pod pojem) | subsumption (of object under concept) | latinská varianta názvu základního vztahu Fregovy logiky, tj. spadání předmětu pod pojem (*das Fallen eines Gegenstandes unter einen Begriff*) | viz fallen unter.

Tatsache, die ■ f a k t, s k u t e č n o s t | fact | skutečnost (fakt) je myšlenka, která je pravdivá (*eine Tatsache ist ein Gedanke, der wahr ist*) | [G, 74], /3.2.3/.

Umfang, der ■ r o z s a h | extension | tradiční termín, Fregem užívaný jak v původním významu protikladu rozsahu pojmu k jeho obsahu (*Inhalt*), tak ve významu nasyceného (*gesättigt*) protějšku nenasyceného pojmu (*Begriff*) nebo relace (*Beziehung*), či jako logický pendant k termínům značícím prostý množinový agregát (*Aggregat, Menge*) | rozsah pojmu a rozsah relace jsou samostatné předměty (*ein Umfang des Begriffes und ein Umfang der Beziehung sind selbständige Gegenstände*) | viz [GL, § 68], /6.2.2/, /6.2.7/, dále viz Inhalt.

uneigentliche Satz, der ■ n e v l a s t n í v ě t a | improper proposition (sentence), quasi-proposition | termín označující zpravidla konsekvent či antecedent (*Bedingungssatz oder Folgesatz*) obecného kondicionálu, obsahující tzv. neurčitou část (*unbestimmter Bestandteil*), a tedy nevyjadřující žádnou konkrétní myšlenku (*Gedanke*), nýbrž jen myšlenku nevlastní (*uneigentlicher Gedanke*) | viz [L_{2N}], [KUN], /4.1/.

Unterordnung, die ■ p o d ř a z e n í | subordination | Fregův termín pro vztah dvou pojmů téhož stupně (*Stufe*), odlišný od základního vztahu subsumpce (*Subsumtion*) neboli spadání předmětu pod pojem | viz fallen unter.

unvollständig ■ n e ú p l n ý | incomplete | viz Funktion.

Urteil, das ■ s o u d | judgement | termín pro vnesení obsahu (myšlenky) věty s pravdivostním nárokem; přičemž obsah je v [B] reprezentován pruhem obsahu (*Inhaltsstrich*), akt pravdivostního nároku, resp. tvrdící síly (*behauptende Kraft*) pruhem

soudu (*Urteilsstrich*) | souzení je uznání pravdivosti myšlenky (*das Urteilen ist die Anerkennung der Wahrheit eines Gedankens*) | viz [B, § 2], [G], /3.1.3/sq.

Urteilsstrich, der ■ pruh soudu | judgement stroke | viz [GG₁, § 5], dále viz Urteil.

vererben sich ■ dědit se, být dědičný | be hereditary | viz Reihe.

verneinen ■ popřít, popírat, negovat | deny | používáno jednak v opozici k pragmatickému termínu “potvrzení” (*bejahen*), jednak jako výraz negace coby logické operace (*Verneinung*) vyjádřené negátorem, ve Fregově terminologii: pruhem popření (*Verneinungsstrich*) | [B, § 7], [V], /3.2.3/, dále viz bejahen.

Verneinung, die ■ negace, popření | negation | termín obvykle označující logickou operaci transformace jedné věty (myšlenky) v protikladnou; v alternativě k “*Verneinen*” se jedná o výraz pro jazykový akt popření, (podle Frega zdánlivě) protikladný výrazu “*Bejahung*” (*potvrzení*) | viz verneinen.

Verneinungsstrich, der ■ pruh popření, negátor | negation stroke | Fregův termín pro symbol negace (*Verneinung*) či jeho svislou část, v [B] připsanou ze zdola k pruhu obsahu (*Inhaltsstrich*), v [GG₁] obklopenou z obou stran vodorovnými pruhy (*Wagerechter*) | viz [B, § 7], [GG₁, § 6], /3.2.3/, /7.1.1/.

Verschmelzung, die ■ sloučení | amalgamation | Fregův termín pro syntaktickou transformaci vodorovných pruhů (*Verschmelzung der Wagerechten*) | viz [GG₁], /7.1.1/, /7.1.3/.

Vorstellung, die ■ představa | idea, image | tradiční termín, u Kanta nadřazený termínům pojmu (*Begriff*) i názoru (*Anschauung*) coby intelektuálním reprezentacím; Frege jej od [GL] typicky užívá v subjektivním významu jakožto protiklad objektivního (intersubjektivního) (f-)smyslu (*Sinn*), zpravidla myšlenky (*Gedanke*), či (f-)významu (*Bedeutung*), zpravidla nějakého abstraktního předmětu či pojmu | viz [G], [L_{2N}], [RPA], /4.1.4/, /6.1.6/.

Wagerechte, der ■ vodorovný pruh | horizontal (stroke) | pozdější verze pruhu obsahu (*Inhaltsstrich*) z [B], podaná v [GG₁] | viz /7.1.1/.

Wahre, das ■ pravda, W | the True | označení pro jednu z pravdivostních hodnot (*Wahrheitswert*); je nutno odlišit od abstraktního pojmu pravdy jako takové (*Wahrheit*) | viz Wahrheitswert.

Wahrheitswert, der ■ pravdivostní hodnota | truth-value | rozlišovány jsou dvě pravdivostní hodnoty: pravda a nepravda (*zwei Wahrheitswerte sind zu unterscheiden: das Wahre und das Falsche*) | viz [GG₁], [FB], /4.1.6/, /7.1.1/.

Wertverlauf, der ■ průběh hodnot | value-range, course-of-values, graph | Fregův termín zobecňující tradiční rozsah pojmu (*Umfang des Begriffes*) pro libovolnou funkci (*Funktion*) | viz [GG₁], [FB], /6.2.6/.

wiedererkennen ■ znovurozpoznat | recognize | významná aplikovatelnost rovností spočívá v tom, že lze znovurozpoznat něco, ačkoliv to bylo dáno různými způsoby (*bedeutsame Verwendbarkeit der Gleichungen beruht vielmehr darauf, dass man etwas wiedererkennen kann, obwohl es auf verschiedene Weise gegeben ist*); číslo je znovurozpoznatelný, a tedy samostatný předmět (*wiedererkennbarer, also selbständiger Gegenstand*) | viz [GL], /5.1/.

wirklich ■ skutečný, reálný | actual, real | termín využitý k vymezení abstraktních předmětů (matematiky) jakožto neskutečných, leč objektivních (*objektiv*) | zemská osa je objektivní, ale není skutečná tak jako samotná Země (*die Erdaxe ist objektiv, aber nicht wirklich wie die Erde selbst*) | viz [GL, § 26], /6.1.6/sq.

Wortfrage, die ■ slovní otázka | word-question | otázka uvedená slovy jako “kdo”, “co”, “kde”, tj. na níž se odpovídá slovem, v protikladu k otázce větné (*Satzfrage*), s níž se vyjadřuje souhlas či popření, a odpovědí je pouze ano/ne | viz [G, 62], /3.2.2/.

Zahl, die ■ číslo | number | viz Anzahl.

Zahlangabe, die ■ udání čísla, číselný údaj | statement of number, giving of number, ascription of number | vlastní odpověď na otázku ›kolik toho a toho je zde?‹, nabývající formy ›zde je takový a takový počet (Anzahl) toho a toho‹ | viz Anzahl.

Zahlwort, das ■ číslovka, numerál | number word, numeral | termín využívaný ekvivalentně k termínu “*Zahlzeichen*”; v překladu mezi nimi nerozlišuji.

Zeichen, das ■ symbol, (znak) | symbol, sign | slovo více méně analogické termínu “*Bezeichnung*”, který je někdy užíván v obecnějším významu libovolné jazykové reprezentace (slova, fráze, věty); “*Zeichen*” systematicky překládám jako symbol, abych jej odlišil od svého překladu slova “*Merkmal*” jako “znak”; tento termín ovšem pro překlad také využívám, ale pouze výjimečně, jsou-li pro to stylistické důvody a nehrozí-li konfuze.

zukommen ■ příslušet | belong to | Fregův termín z [GL]; překlad “náležet” nepoužívám z důvodů možné záměny s ›náležením‹ jakožto relací třídy a jejího prvku a především s ohledem na Fregův termín “*angehören*”, používaný k vyjádření vztahu náležení předmětu nějaké řadě (*Reihe*) | viz /7.1.5/, dále také Anzahl.

9 LITERATURA

V oddílech /9.1.1/ a /9.1.2/ je podán kompletní seznam všech dochovaných spisů Gottloba Frega. Z tohoto důvodu nejsou výjimečně tituly v nich uvedené řazeny abecedně podle kódů, ale podle data vydání.

9.1 FREGOVY SPISY

Kompletní dochované Fregovo dílo je pokryto tituly [BA], [KS], [GL], [GG₁], [GG₂], [N], [W], případně také [T].

9.1.1 Publikované za Fregova života

- <1873> *Ueber eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene. Inaugural-Dissertation der philosophischen Facultät zu Göttingen zur Erlangung der Doctorwürde vorgelegt von G. Frege aus Wismar.* Jena 1873.
- <1874> *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen. Dissertation zur Erlangung der Venia Docendi bei der Philosophischen Fakultät in Jena von Dr. Gottlob Frege.* Jena 1874.
- <1874a> [Recenze] *H. Seeger, die Elemente der Arithmetik, für den Schulunterricht bearbeitet. Schwerin i. M., A. Hildebrand 1874. IV, 148, 47 S.* Jenaer Literaturzeitung, I, 1874, s. 722.
- <1877> [Recenze] *A. v. Gall und Ed. Winter, die analytische Geometrie des Punktes und der Geraden und ihre Anwendung auf Aufgaben. Darmstadt, Johann Philipp Diehl 1876. VIII, 116 S.* Jenaer Literaturzeitung, IV, 1877, s. 133-134.
- <1877a> [Recenze] *J. Thomae, Sammlung von Formeln welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhein'schen Functionen gebraucht werden. Halle a. S., Louis Nebert 1876. VI, 37, (1) S.* Jenaer Literaturzeitung, IV, 1877, s. 472.
- <1878> *Ueber eine Weise, die Gestalt eines Dreiecks als complexe Grösse aufzufassen.* Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, XII, 1878, Supplement, s. XVIII.
- [B] *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle 1879.
- <1879a> *Anwendungen der Begriffsschrift.* Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, XIII, 1879, Supplement, s. 29-33.
- <1880> [Recenze] *Hoppe, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1 Teil. Leipzig, Koch, 1880. XV und 89 S.* Deutsche Literaturzeitung, I, 1880, s. 210-211.
- <1882> *Ueber den Briefwechsel Leibnizens und Huygens mit Papin.* Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, XV, 1882, Supplement, s. 29-32.
- [BB] *Ueber die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift.* Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, LXXXI, 1882, s. 48-56.

- [ZB] *Ueber den Zweck der Begriffsschrift*. Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, XVI, 1883, s. 48-56.
- [GL] *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau 1884.
- <1884> *Geometrie der Punktpaare in der Ebene*. Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, XVII, 1884, Supplement, s. 98-102.
- <1885> *Erwiderung [vztahuje se ke Cantor <1885>]*. Deutsche Literaturzeitung, VI, 1885, s. 1030.
- [FTA] *Ueber formale Theorien der Arithmetik*. Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, XIX, 1886, s. 94-104.
- [FB] *Function und Begriff. Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 9. Januar 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft*. Jena 1891.
- <1891> *Über das Trägheitsgesetz*. Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, XCVIII, 1891, s. 145-161.
- [SB] *Über Sinn und Bedeutung*. Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, XCVIII, 1891, s. 145-161. (Český překlad: [<1992>].)
- [BG] *Ueber Begriff und Gegenstand*. Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie, XVI, 1892, s. 192-205.
- <1892> [Recenze] *Georg Cantor: Zur Lehre vom Transfiniten. Gesammelte Abhandlungen aus der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik. Erste Abteilung. Halle a. S. 1890*. Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, C, 1892, s. 269-272.
- [GG₁] *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. I. Band*. Jena 1893.
- [RPA] [Recenze] *Dr. E. G. Husserl: Philosophie der Arithmetik*. Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, CIII, 1894, s. 313-332.
- <1895> *Le nombre entier*. Revue de Métaphysique et de Morale, III, 1895, s. 73-78.
- [SV] *Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik*. Archiv für systematische Philosophie, I, 1895, s. 433-456.
- <1896> *Lettera del sig. G. Frege all'Editore*. Rivista di Matematica, 6, 1896-1899, s. 53-59.
- [PB] *Ueber die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene*. Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, XLVIII, 1897, s. 361-378.
- [ZS] *Ueber die Zahlen des Herrn H. Schubert*. Jena 1899.
- [GG₂] *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. II. Band*. Jena 1903.
- [UG₁] *Über die Grundlagen der Geometrie. I-II*. 1903. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XII, 1903, s. 319-324, 368-375.
- <1904> *Was ist eine Funktion?* Leipzig 1904.

- [UG₂] *Über die Grundlagen der Geometrie. I-III.* 1906. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XV, 1906, s. 293-309, 377-403, 423-430.
- [AF] *Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XV, 1906, s. 586-590.
- <1908> *Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs Neue nachgewiesen.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XVII, 1908, s. 52-55.
- <1908a> *Schlußbemerkung.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XVII, 1908, s. 56.
- [G] *Der Gedanke. Eine logische Untersuchung.* Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, I, 1918/1919, s. 58-77. (Český překlad: [<1994>].)
- [V] *Die Verneinung. Eine logische Untersuchung.* Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, I, 1918/1919, s. 143-157.
- [GF] *Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefüge.* Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, III, 1923-1926, Heft 1, 1923, s. 36-51.

9.1.2 Publikované posmrtně

- [N] Hermes, H., Kambartel, F., Kaulbach, F. (eds.), *Nachgelassene Schriften.* 2. Auflage. Hamburg 1983. (1. Auflage. Hamburg 1969.)
- [WB] Gabriel, G., Hermes, H., Kambartel, F., Thiel, C., Veraart, A. (eds.), *Wissenschaftlicher Briefwechsel.* Hamburg 1976.
- [T] Gabriel, G., Kienzler, W. (eds.), *Gottlob Freges politisches Tagebuch.* Deutsche Zeitschrift für Philosophie, 42, 1994, s. 1057-1098.

9.1.3 Jednotlivé spisy z *Nachgelassene Schriften*

- [AD_N] *Aufzeichnungen für Ludwig Darmstaedter*
- [ASB_N] *Ausführungen über Sinn und Bedeutung* (Český překlad: [<1999>].)
- [BF_N] *Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift*
- [BGD_N] *Begründung meiner strengeren Grundsätze des Definierens*
- [BL_N] *Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift*
- [BZ_N] *Über den Begriff der Zahl*
- [CT_N] *Entwurf zu einer Besprechung von Cantors Gesammelten Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten*
- [DE_N] *Dialog mit Pünjer über Existenz*
- [EG_N] *Über Euklidische Geometrie*
- [EL_N] *Einleitung in die Logik*
- [EM_N] *Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaft*
- [KU_N] *Kurze Übersicht meiner logischen Einsichten*
- [L_{1N}] *Logik (zwischen 1879 und 1891)*

- [L_{2N}] *Logik (1897)*
 [L_{AN}] *Logische Allgemeinheit*
 [LM_N] *Logik in der Mathematik*
 [ME_N] *Meine grundlegenden logischen Einsichten*
 [SP_N] *Über Schoenflies: Die logischen Paradoxien der Mengenlehre*
 [Z_{AN}] *Zahlen und Arithmetik*

9.1.4 Sborníky, překlady a jiné

- [BA] Angelelli, I. (ed.), *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. Darmstadt 1964.
 [KS] Angelelli, I. (ed.), *Kleine Schriften*. Darmstadt 1967.
 <1950> *The Foundations of Arithmetic*. J. L. Austin (překl.). Oxford 1950.
 <1966> Patzig, G. (ed.), *Logische Untersuchungen*. Göttingen 1966.
 <1984> *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Centenerausgabe. Hamburg 1984.
 <1992> *O smyslu a významu*. J. Fiala (překl.). Scientia & Philosophia, 4, 1992.
 <1994> *Myšlenka, Logické zkoumání*. J. Fiala (překl.). Scientia & Philosophia, 6, 1994.
 <1997> Beaney, M. (ed., překl.), *The Frege Reader*. Oxford 1997.
 <1999> *Výklady o smyslu a významu*. M. Podhrázká, J. Fiala (překl.). In: J. Fiala (ed.), *Analytická filosofie*. 1. díl. Plzeň 1999, s. 1-13.
 <2000> *Fregova korespondence s Hilbertem*. V. Kolman (překl.). Filosofický časopis, 48/4, 2000, s. 601-622.

9.2 OSTATNÍ

Aristotelés

- [AnI] *První analytiky*. A. Kříž (překl.). Praha 1961.
 [AnII] *Druhé analytiky*. A. Kříž (překl.). Praha 1962.
 [Int] *O vyjadřování*. A. Kříž (překl.). Praha 1959.
 [Met] *Metafyzika*. A. Kříž (překl.). Praha 1946.
 [Top] *Topiky*. A. Kříž (překl.). Praha 1975.
 Ayer, A. J. (ed.)
 <1959> *Logical Positivism*. Toronto 1959.
 Baker, Gordon P. - Hacker, Peter Michael Stephan
 [FLE] *Frege: Logical Excavation*. Oxford 1984.
 Borradori, G.
 <1994> *The American Philosopher (Conversations with Quine, Davidson, Putnam, Nozick, Danto, Rorty, Cavell, MacIntyre and Kuhn)*. Chicago 1994.

Boole, George

[IL] *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities.* London 1854.

[MA] *The Mathematical Analysis of Logic, being an essay towards a Calculus of Deductive Reasoning.* London and Cambridge 1847.

Boolos, George - Jeffrey, Richard

<1989> *Computability and Logic.* 3rd edition. Cambridge 1989. (1st edition. Cambridge 1974.)

Brandon, Robert

[ME] *Making It Explicit.* Cambridge, Mass. 1994.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan

[GAB] Heyting, A. (ed.), *Collected Works. Bd. 1.: Philosophy and Foundations of Mathematics.* Amsterdam 1975.

Cantor, Georg

[GAC] Zermelo, E. (ed.), *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Berlin 1932.

<1883> *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre, ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen.* Leipzig 1883.

<1885> [Recenze] *Freges 'Grundlagen der Arithmetik'.* Deutsche Literaturzeitung, VI, 1885, s. 728-729.

<1890> *Zur Lehre vom Transfiniten. Gesammelte Abhandlungen aus der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik. Erste Abteilung.* Halle 1890.

Carnap, Rudolf

[Aufb] *Der logische Aufbau der Welt.* Wien 1928.

[MN] *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic.* Chicago 1956.

<1963> *Intellectual Autobiography.* Otištěno in a číslováno podle: *Schilpp (ed.)* [<1963>, 1-84].

Coffa, Alberto J.

[ST] *The Semantic Tradition from Kant to Carnap.* Cambridge 1991.

Dathe, Uwe

<1997> *Gottlob Frege und Johannes Thomaes. Zum Verhältnis zweier Jenaer Mathematiker.* In: *Gabriel-Kienzler (eds.)* [<1997>, 87-103].

Dedekind, Richard

[WZ] *Was sind und was sollen die Zahlen.* Braunschweig 1888. (2. Auflage. Braunschweig 1893.)

<1872> *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Braunschweig 1872.

- De Morgan, Augustus
 <1864> *On the Syllogism IV and on the Logic of Relations*. Cambridge Philosophical Transactions, x, 1864, s. 331-358.
- Descartes, René
 [Dis] *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences*. In: [<1996>].
- [Reg] *Regulae ad directionem ingenii*. In: [<1996>].
- <1996> *Philosophische Schriften in einem Band*. Originál zrcadlově s německým překladem. Hamburg 1996.
- Drake, Frank
 <1974> *Set Theory. An Introduction to Large Cardinals*. Amsterdam 1974.
- Dummett, Michael
 [FPL] *Frege – Philosophy of Language*. New York 1973.
 [FPM] *Frege – Philosophy of Mathematics*. Cambridge, Mass. 1991.
- Gabriel, Gottfried
 <1989> *Lotze und die Entstehung der modernen Logik bei Frege*. Jako úvod in: *Lotze* [<1989>, XI-XXXV].
- <1997> *Leo Sachse, Herbart, Frege und die Grundlagen der Arithmetik*. In: *Gabriel-Kienzler (eds.)* [<1997>, 53-67].
- Gabriel, Gottfried - Kienzler, Wolfgang (eds.)
 <1997> *Frege in Jena. Beiträge zur Spurensicherung*. Würzburg 1997.
- Gödel, Kurt
 <1930> *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*. Monatshefte für Mathematik und Physik, 37, 1930, s. 349-360.
- <1931> *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*. Monatshefte für Mathematik und Physik, 38, 1930, s. 173-198.
- <1999> Fiala, J. (ed., překl.), *Filosofické eseje*. Praha 1999.
- Haaparanta, Leila - Hintikka, Jaakko (eds.)
 <1986> *Frege Synthesized*. Dordrecht 1986.
- Heblack, Torsten
 <1997> *Wer war Leo Sachse. Ein historisch-biographischer Beitrag zur Frege-Forschung*. In: *Gabriel-Kienzler (eds.)* [<1997>, 41-52].
- Heijenoort, Jean van (ed.)
 [FFG] *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge, Mass. 1967.
- <1986> *Frege and Vagueness*. In: *Haaparanta-Hintikka (eds.)* [<1986>, 31-45].

- Henkin, Leon
 <1950> *Completeness in the theory of types*. Journal of Symbolic Logic, 15, 1950, s. 201-208.
- Hilbert, David
 [AxD] *Axiomatisches Denken*. Mathematische Annalen, 78, 1918, s. 405-415. (Otištěno in a číslováno podle: [GAH, 146-156].)
 [GAH] *Gesammelte Abhandlungen*. Bd. 3. Berlin 1935.
 [GLG] *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig 1899.
 [NM] *Neubegründung der Mathematik (Erste Mitteilung)*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, 1, 1922, s. 157-177. (Otištěno in a číslováno podle: [GAH, 157-177].)
 [UU] *Über das Unendliche*. Mathematische Annalen, 95, 1926, s. 161-190.
 <1900> *Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris 1900*. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1900, s. 253-297. (Otištěno in a stránkováno podle: [GAH, 290-329].)
- Hilbert, David - Ackermann, Wilhelm
 <1928> *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin 1928.
- Hilbert, David - Bernays, Paul
 <1934> *Grundlagen der Mathematik*. Bd. 1. Berlin 1934.
- Husserl, Edmund
 [PA] *Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchung. Bd. 1*. Leipzig 1891.
- Church, Alonzo
 <1936> *A Note on the Entscheidungsproblem*. Journal of Symbolic Logic, 1, 1936, s. 40-41, 101-102.
- Jevons, Stanley W.
 <1864> *Pure Logic, or The Logic of Quality apart from Quantity*. London 1864.
- Jourdain, Philip E. B.
 <1912> *The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics*. The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 41, 1910, s. 324-352; 43, 1912, s. 219-314 (kap. *Gottlob Frege*, s. 237-269, otištěna in: *Frege* [WB, 275-301]); 44, 1913, s. 113-128.
- Kamlah, Wilhelm - Lorenzen, Paul
 [LP] *Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens*. 3. Auflage. Stuttgart 1996. (1. Auflage. Mannheim 1967.)
- Kant, Immanuel
 [KrV] *Kritik der reinen Vernunft*. In: [<1992>, sv. III-IV].

- [Log] *Immanuel Kants Logik, ein Handbuch zu Vorlesungen, hrsg. v. G. B. Jäsche.*
In: [⟨1992⟩, sv. VI, 423-567].
- [Prol] *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können.* In: [⟨1992⟩, sv. V, 113-264].
- ⟨1992⟩ Weischedel, W. (ed.), *Werkausgabe in 12 Bänden.* Frankfurt am Main 1992.
- Kneale, William - Kneale, Martha
- ⟨1962⟩ *The Development of Logic.* Oxford 1962.
- Kolman, Vojtěch
- ⟨2000⟩ *K Fregově údajnému platonismu.* Filosofický časopis, 48/4, 2000.
- Kreiser, Lothar
- ⟨1983⟩ *Nachschrift einer Vorlesung und Protokolle mathematischer Vorträge Freges.* In: *Frege* [N, 325-388].
- ⟨1997⟩ *Freges Universitätsstudium – warum Jena?* In: *Gabriel-Kienzler (eds.)* [⟨1997⟩, 33-40].
- ⟨2001⟩ *Gottlob Frege: Leben – Werk – Zeit.* Hamburg 2001.
- Kutschera, Franz von
- ⟨1989⟩ *Gottlob Frege. Eine Einführung in sein Werk.* Berlin 1989.
- Leibniz, Gottfried Wilhelm
- [FL] Schmidt, F. (ed., překl.), *Fragmente zur Logik.* Berlin 1960.
- [HG] Cassirer, E. (ed.), *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie in 2 Bänden.* A. Buchenau (překl.). Frankfurt am Main 1996.
- [Mon] *Monadologie.* Český překlad otištěn in: [⟨1982⟩, 156-173]. (Německý překlad otištěn in: [HG, 603-621].)
- ⟨1982⟩ *Monadologie a jiné práce.* J. Husák (překl.). Praha 1982.
- Lorenzen, Paul
- [KW] *Konstruktive Wissenschaftstheorie.* Frankfurt am Main 1974.
- [LKW] *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie.* Zürich 1987.
- ⟨1955⟩ *Einführung in die operative Logik und Mathematik.* Berlin 1955.
- ⟨1955a⟩ *Protologik. Ein Beitrag zum Begründungsproblem der Logik.* Kant-Studien, Band 47, Heft 4, 1955-1956, s. 350-358.
- ⟨1958⟩ *Formale Logik.* Berlin 1958.
- ⟨1962⟩ *Gleichheit und Abstraktion.* Ratio, 4, 1962. (Otištěno in: [KW, 190-198].)
- ⟨1965⟩ *Differential und Integral.* Frankfurt am Main 1965.
- Lotze, Rudolf Hermann
- ⟨1989⟩ Gabriel, G. (ed.), *Logik. Erstes Buch. Vom Denken.* Hamburg 1989.
- Löwenheim, Leopold
- ⟨1940⟩ *Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkul.* Journal of Symbolic Logic, 5, 1940, s. 1-15.

Lukasiewicz, Jan

- <1930> *Philosophische Bemerkungen zur mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls*. Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, 23, 1930, s. 51-77. (Angl. překlad in: [<1970>, 153-178].)
- <1936> *Zur Geschichte der Aussagenlogik*. Erkenntnis, 5, 1936, s. 111-131. (Angl. překlad in: [<1970>, 197-217].)
- <1970> *Selected Works*. Amsterdam 1970.

Lukasiewicz, Jan - Tarski, Alfred

- <1930> *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*. Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, 23, 1930, s. 39-50. (Angl. překlad in: *Lukasiewicz* [<1970>, 131-152].)

Neurath, Otto

- <1932> *Protokollsätze*. Erkenntnis, 3, 1932/33, s. 204-214. (Angl. překlad in: *Ayer* [<1959>, 199-208].)

Peano, Giuseppe

- [AP] *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Turin 1889. (Angl. překlad in: *Heijenoort* (ed.) [FFG, 83-97].)
- <1888> *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle Operazioni della logica deduttiva*. Turin 1888.
- <1891> *Principii di logica matematica*. Rivista di Matematica, 1, 1891, s. 1-10.
- <1894> *Notations de logique mathématique*. Turin 1894.
- <1895> *Formulaire de mathématiques*. Turin 1895-1908.

Peirce, Charles Sanders

- [CP] *Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Vol. I-VI*. Cambridge, Mass. 1931-1935.
- [RLT] Ketner, K. L. (ed.), *Reasoning and the Logic of Things, The Cambridge Conferences Lectures of 1898*. Cambridge, Mass. 1992.
- <1867> *On an Improvement in Boole's Calculus of Logic*. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, 7, 1867, s. 250-251. (Otištěno in: [CP, 3. díl, 1-44].)
- <1870> *Description of a Notation for the Logic of Relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole's Calculus*. Memoirs of the American Academy, 9, 1870, s. 317-378. (Otištěno in: [CP, 3. díl, 45-148].)
- <1883> *The Logic of Relatives*. In: Peirce, C. S. (ed.), *John Hopkins Studies in Logic*. Boston 1883, Note B, s. 187-203. (Otištěno in: [CP, 3. díl, 328-357].)
- <1897> *The Logic of Relatives*. The Monist, 7, 1897, s. 161-217. (Otištěno in: [CP, 3. díl, 456-552].)

Peregrin, Jaroslav

- [VS] *Význam a struktura*. Praha 2000.

Platón

[Thea] *Theaitétos*. F. Novotný (překl.). Praha 1995.

[Rep] *Ústava*. R. Hošek (překl.). Praha 1993.

Popper, Karl

<1946> *Why are the Calculuses of Logic and Arithmetic Applicable to Reality?* Aristotelian Society, Supplementary Volume XX, Logic and Reality, London 1946. (Otištěno in: *Popper* [<1963>].)

<1963> *Conjectures and Refutations*. London 1963.

Post, Emil Leon

<1921> *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*. American Journal of Mathematics, 43, 1921. (Angl. překl. in: *Heijenoort* [FFG, 264-283].)

Quine, Willard Van Orman

[FLP] *From a Logical Point of View*. 2. ed., rev. Cambridge, Mass. 1980. (Orig. ed. Cambridge, Mass. 1953.)

[RR] *The Roots of Reference*. La Salle, Ill. 1973.

[STL] *Set Theory and Its Logic*. Rev. ed. Cambridge, Mass. 1967. (Orig. ed. 1963.)

[WO] *Word and Object*. Cambridge, Mass. 1967. (Orig. ed. Cambridge, Mass. 1960.)

<1955> *On Frege's Way Out*. *Mind*, 64, 1955. (Otištěno in a číslováno podle: [<1995>, 146-158].)

<1962> *Methods of Logic*. Rev. ed. London 1962. (Orig. ed. New York 1950.)

<1985> *MacHale on Boole*. *Times Literary Supplement*, London 1985, s. 767. (Otištěno in a číslováno podle: [<1995>, 251-257].)

<1986> *Peano as Logician*. *Proceedings of the Celebrazione in memoria di Giuseppe Peano*, 1986. (Otištěno in a číslováno podle: [<1995>, 266-277].)

<1989> *Peirce's Logic. Presented in a symposium at Harvard, September 1989*. Otištěno in a číslováno podle: [<1995>, 258-265].

<1990> *The Pursuit of Truth*. Cambridge, Mass. 1990. (Český překlad: *Hledání pravdy*. J. Peregrin. Praha 1994.)

<1995> *Selected Logic Papers*. Enlarged ed. Cambridge, Mass. 1995. (Orig. ed. Harvard, Mass. 1966.)

<1995a> *From Stimulus to Science*. Cambridge, Mass. 1995.

Ramsey, Frank Plumpton

[FM] *The Foundations of Mathematics*. London 1931.

Rhees, Rush (ed.)

<1992> *Ludwig Wittgenstein: Porträts und Gespräche*. J. Schulte (překl.). Frankfurt am Main 1992. (Angl. orig.: *Recollections of Wittgenstein*. Oxford 1981.)

Russell, Bertrand

- [At] *Logical Atomism*. Otištěno in a číslováno podle: Ayer [⟨1959⟩, 31-50].
 [MP] *Introduction to Mathematical Philosophy*. London 1919.
 [MPD] *My Philosophical Development*. London 1959.
 [PoL] *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*. Cambridge 1900.
 [PoM] *The Principles of Mathematics*. Cambridge 1903.
 [PP] *The Problems of Philosophy*. Oxford 1959.
 [RLA] Pears, D. (ed.), *Russell's Logical Atomism*. London 1972.
 [ThK] *Theory of Knowledge: The 1913 Manuscript*. Otištěno in a číslováno podle: Russell [⟨1983⟩].
 ⟨1905⟩ *On Denoting*. *Mind*, 14, 1905.
 ⟨1910⟩ *Some Explanations to Mr. Bradley*. *Mind*, 19, 1910.
 ⟨1983⟩ *The Collected Papers of Bertrand Russell, Vol. 7*. London 1983.

Russell, Bertrand - Whitehead, Alfred North

- [PM] *Principia Mathematica*. Vol. 1. Cambridge 1910.

Schilpp, P. A. (ed.)

- ⟨1963⟩ *The Philosophy of Rudolf Carnap*. La Salle 1963.

Schopenhauer, Arthur

- [Welt] *Die Welt als Wille und Vorstellung*. Frankfurt am Main 1986.

Schröder, Ernst

- [VA₁] *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik), Bd. 1*. Leipzig 1890.
 [VA₃] *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Bd. 3, Algebra und Logik der Relative*. Leipzig 1895.
 ⟨1880⟩ [Recenze] *Freges 'Begriffsschrift'*. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, XXV, 1880, s. 81-94.
 ⟨1899⟩ *On Pasigraphy*. *The Monist*, 9, 1899.

Sobociński, Bolesław

- ⟨1949⟩ *L'analyse de l'antinomie russellienne par Lesniewski. IV: La correction de Frege*. *Methodos*, 1, 1949, s. 220-28.

Stekeler-Weithofer, Pirmin

- [GPL] *Grundprobleme der Logik. Elemente einer Kritik der formalen Vernunft*. Berlin 1986.
 [HAP] *Hegels analytische Philosophie. Die Wissenschaft der Logik als kritische Theorie der Bedeutung*. Paderborn 1992.
 [SK] *Sinn-kriterien: die logischen Grundlagen kritischer Philosophie von Platon bis Wittgenstein*. Paderborn 1995.
 ⟨1992⟩ *On Frege's Platonism*. Manuskript.
 ⟨1996⟩ *Zum Streit der Wahrheitstheorien*. In: Lorenz, K. (ed.), *Handbuch Sprachphilosophie*, Berlin 1996.

- <1996a> *What is a Meaningful Name? Frege's Idea of a Radical Semanto-ontological Analysis*. In: Perzanowski, J., Pietruszczak, A. (ed.), *Logic and Logical Philosophy*, No 3., s. 151-172, Torun 1996.
- <1997> *Frege und seine Nachfolger*. In: Posner, R. (ed.), *Handbuch Semiotik* (Art. Nr. 102), Band 13.2, Berlin 1997.
- <1999> *Formenanalyse und Begriffslogik in Platons Philebos und ihre Entwicklung bei Aristoteles und Leibniz*. *Internationale Zeitschrift für Philosophie*, 1, 1999.
- Stelzner, Werner
- <1996> *Gottlob Frege. Jena und die Geburt der modernen Logik*. Jena 1996.
- <1997> *Ernst Abbe und Gottlob Frege*. In: *Gabriel-Kienzler (eds.)* [<1997>, 5-32].
- Strawson, Peter F.
- <1950> *On Referring*. *Mind*, 59, 1950.
- <1954> *Reply to Mr. Sellars*. *Philosophical Review*, 63, 1954.
- <1964> *The Bounds of Sense*. London 1964.
- Stuhlmann-Laeisz, Rainer
- <1976> *Kants Logik. Eine Interpretation auf der Grundlage von Vorlesungen, veröffentlichten Werken und Nachlaß*. Berlin 1976.
- Švejdar, Vítězslav
- <2002> *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Praha 2002.
- Tarski, Alfred
- <1935> *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*. *Studia Philosophica*, I, 1935.
- Thomae, Johannes
- <1906> *Gedankenlose Denker. Eine Ferienplauderei*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XV, 1906, s. 434-438.
- Tichý, Pavel
- [FFL] *The Foundations of Frege's Logic*. Berlin 1988.
- Tugendhat, Ernst
- [ESP] *Einführung in die sprachanalytische Philosophie*. Frankfurt am Main 1976.
- <1970> *The Meaning of 'Bedeutung' in Frege*. *Analysis*, 30, 1970. (Něm. překlad spolu s postkriptem z roku 1975 otištěn in: [<1992>].)
- <1992> *Philosophische Aufsätze*. Frankfurt am Main 1992.
- Venn, John
- <1880> [Recenze] *Frege's 'Begriffsschrift'*. *Mind*, 5, 1880, s. 297.
- <1881> *Symbolic Logic*. London 1881.

Wang, Hao

<1957> *The Axiomatization of Arithmetic*. *Journal of Symbolic Logic*, 22, 1957, s. 145-158.

Wiggins, David

<1967> *Identity and Spatio-Temporal Continuity*. Oxford 1967.

Wittgenstein, Ludwig

[BGM] Anscombe, G. E. M., Rhees, R., Wright, G. H. von (eds.), *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Otištěno in: [<1984>, sv. 6].

[PG] Rhees, R. (ed.), *Philosophische Grammatik*. Otištěno in: [<1984>, sv. 4].

[PU] *Philosophische Untersuchungen*. London 1953. (Otištěno in: [<1984>, sv. 1].)

[TLP] *Tractatus logico-philosophicus*. *Annalen der Naturphilosophie*, 14, 1921. (Otištěno in: [<1984>, sv. 1].)

[VB] *Vermischte Bemerkungen*. Otištěno in a číslováno podle: [<1984>, sv. 8].

[Zet] *Zettel*. Otištěno in: [<1984>, sv. 8].

<1984> *Werkausgabe in 8 Bänden*. Frankfurt am Main 1984.

10 REJSTŘÍK

Cílem seznamů /10.1/ a /10.2/ je čtenářova snazší orientace v textu, kdy je užívána fráze či symbol, u nichž se předpokládá porozumění také na základě jejich předchozího použití v knize. V /10.1/ je proto předveden rejstřík termínů, jež byly v textu uvedeny proloženým písmem, v /10.2/ máme pak seznam vícekrát se opakujících symbolů a zkratek, a to v pořadí, v jakém se objevily v knize, s odkazem na stránku jejich prvního výskytu.

10.1 ORTOTERMÍNY

a_místo.....	210	de dicto	133
druhého druhu	210	de re	133
prvního druhu	210	dědičná vlastnost.....	225
třetího druhu	210	dedukce (odvození).....	11
abstrakce		definice	
funkcí	201	abstrakcí	195
logická	196	implicitní	240
množin (tříd).....	201	podmíněná	110
primární	198	predikativní	248
psychologická	185	tvůrčí	183
sekundární.....	198	deixe	117
abstraktor.....	197	deskriptor	178
z <i>Grundgesetze</i>	212	dosah kvantifikátoru	157
agregát.....	189	důkaz	
algoritmus rozhodnutí	11	formální	241
<i>ancestral</i> viz relace, ancestrální		přímý	viz dedukce (odvození)
argument (funkce).....	101	sylogistický	11
aritmetika		výrokovělogický.....	86
Peanova.....	253	existence	168
Robinsonova	253	extenze	128
axiom		extenzionální charakterizace funkce	
interních relací.....	20	202
nekonečna	249	fakt.....	137
axiomatická metoda	241	finitistický program	242
bezespornost..... viz konzistence		formální jazyk	
calculus ratiocinator	13	logiky predikátů	156
číslo		univerzální	
kardinální.....	189, 222	logiky predikátů	156
konečné.....	226	logiky predikátů s rovností....	159
nekonečné	227	formální sémantika	6
příslušející pojmu.....	222	formální syntax	6

formule	(determinované) číselné
formálního jazyka logiky predikátů	posloupnosti..... 154
..... 157	funkce (funkční)...viz nenasycenost
elementární 157	prvního (n -tého) stupně 210
nezávislá..... 162	vlastní..... 167
otevřená..... 157	kalkul..... 73
uzavřená 157	kanonický designátor..... 175
<i>Frege's Way Out</i> 231	kategoričnost ... viz teorie, kategorická
f-smysl 126	kategorie
funkce 101	gramatická..... 101
kvantifikátoru 211	sémantická (logická) 102
podmínkového pruhu..... 211	konjunktivní doktrína pojmu 14
pruhu popření 211	konstanta
rovnosti..... 211	funktorová..... 156
určité deskripce 215	jmenná 156
vodorovného pruhu 211	predikátová 156
funkce věty	konstrukce 203
ingredienční..... 96	kontext
samostatná..... 96	extenzionální..... 128
funktor (n -místný)..... 146	intenzionální 128
f-význam..... 126	nepřímý 127
<i>Grundgesetz V</i> 200	přímý..... 126
hodnota funkce 104	konzistence
hypotetické spojení vět 79	deduktivní ... viz teorie, konzistentní
characteristica universalis..... 13	sémantická 144
chemická doktrína reprezentace 14	korektnost kalkulu viz věta
identita viz rovnost	o korektnosti
intenze 128	kritérium
interpretace	aplikace 117
(funkcionální) logiky výroků..... 82	identity 118
diagramová (sylogistická) 7	znovuzpoznání..... 120
logiky predikátů	kvantifikace
přímá..... 159	referenční (objektuální)..... 152
větná (nepřímá)..... 157	sortálně omezená (restringovaná)
s rovností 159 120
invariantnost (k ekvivalenci) 196	substituční 152
jamka kvantifikátoru 212	kvantifikátor
jazykové (řečové) jednání..... 62	existenční 113
jednička 222	numericky definitivní..... 192
jméno	obecný..... 112
	z <i>Grundgesetze</i> 211

zobecněný	170	nevlastní	91
kvazipredikát	118	náležení	
látkový termín	117	předmětu rozsahu pojmu	219
L-ekvivalence	204	Ψ -řadě	226
logická platnost		následník	
úsudkového pravidla		bezprostřední číselný	222
logiky predikátů	160	nevlastní	226
logiky výroků	83	vlastní	226
sylogistiky	7	následování	
úsudku		bezprostřední v číselné řadě	<i>viz</i>
logiky predikátů	160	následník, bezprostřední číselný	
logiky výroků	85	ve Ψ -řadě	225
sylogistického	11	nasyčenost	103
logická pravdivost		negace	82
formule logiky predikátů	160	negátor	77
logické dělení	17	nekonečno	
logické odčítání	17	Boolův symbol	18
logický součet		Dedekindovo	252
relací	21	z <i>Grundgesetze</i> <i>viz</i> číslo, nekonečné	
tříd	17	nekonečný kardinál	<i>viz</i> číslo,
logický součin		nekonečné	
relací	21	nenasyčenost	104
tříd	17	neúplný symbol	172
logika s abstrakcí	244	nosič interpretace	114
L-pravdivost	204	nositel (jména)	135
marka		nula	222
funkční	216	numerál	146
latinská	216	nutnost	
předmětná	215	kauzální	57
materiální kondicionál	78	racionální	57
matrice	157	obor	
otevřená	157	indefinitní	155
metamatematika	244	předmětný	144
místo pro argument	<i>viz</i> a_místo	elementární	145
model		řeči	144
diagramový (sylogistický)	7	elementární	145
logiky predikátů	160	komplexní formy	145
Peanovy aritmetiky, standardní	255	obsah	
modus ponens	85	nesouditelný	91
mohutnost	153	pojmový	91
myšlenka	64	pojmu	14

souditelný	63	úsudkové	<i>viz</i> logická platnost, úsudkového pravidla
souzený	62	predikát	
věty	65	<i>n</i> -místný	146
odvození (figury v kalkulu)	73	sortální	117
ohnisko	90	presuponovat	173
ohodnocení	157	princip	
ostrost pojmu	108	abstrakce průběhů hodnot	<i>viz</i> <i>Grundgesetz V</i>
označující (singulární) fráze <i>viz</i> výraz, singulární		kompozicionality (skladebnosti)	
písmeno		významu	136
funkční	212	Leibnizův	123
latinské	212	obecný substituční	113
německé	212	pravdivostní	81
předmětné	212	úplnosti	109
platonismus		zaměnitelnosti významu	128
ontologický	185	proměnná	
sémantický	185	formálního jazyka logiky predikátů	
počátek kalkulu	73	156
počet	<i>viz</i> číslo, kardinální	funkční	157
počitatelnost	119	markýrovací	210
podřazení (pojmu pojmu)	107	objektová	156
popis stavu	128	předmětná	157
posloupnost		vázaná	112, 157
číselná	153	vlastní	73
koncentrovaná (Cauchyho)	175	volná	157
nekonečná	153	protějšek	
poznání		kontradiktorní	4
(přímou) obeznámeností	167	kontrární	5
deskripce	167	protologika	73
pravd	167	průběh hodnot	200
věcí	167	dvojitý	220
pravdivostní důvod	83	pruh	
pravdivostní podmínky	127	definice, dvojitý	216
pravdivostní potenciál	130	obsahu	67
pravidlo		podmínkový	78
generalizace	218	popření	77
kalkulu	73	soudu	67
konverze	7	svislý	67
počáteční (kalkulu)	<i>viz</i> počátek kalkulu	vodorovný	67
přípustné	73	předmět	103

rekurzivní axiomatizovatelnost	255	spočetnost	153
rekurzivní spočetnost	<i>viz</i>	strategie (definice čísla)	
semirekurzivnost		adjektivní	193
rekurzivnost (obecná)	<i>viz</i>	substantivní	193
rozhodnutelnost		subjektivita	180
relace		subjunkce	82
ancestrální	224	subjunktor	78
inverzní	221	substituční rámec	102
jednoznačná	221	substituční varianta	102
parentální	224	substituovatelnost	
vzájemně jednoznačná	221	salva functione	96
reprezentace	122	salva gramaticitatae	101
role výrazu		salva veritate	97
gramatická <i>viz</i> kategorie, gramatická		subsumpce	107
substituční		sylogismus	7
rámec	<i>viz</i> substituční rámec	tautologie	
substituovatelný	102	logiky predikátů	<i>viz</i> logická
v němž je substituováno	102	pravdivost	
rovnočíselnost	194, 222	výrokové logiky	83
rovnost (jako význam kopuly). 15, 107		teorém (formální)	162
rozhodnutelnost	154	teorie	
rozpad (sémantické role)	135	formální (Hilbertova typu) 162, 240	
rozsah		kategorická	240
pojmu	14	konzistentní (bezesporná)	162
relace	220	materiální (Fregova typu)	240
řetězec	251	úplná	162
sémantický důsledek	160	teorie pravdy	
semirozhodnutelnost	154	korespondenční	60
sloučení vodorovných pruhů	211	redundanční	71
slovo kalkulu	73	term	
sortál	<i>viz</i> predikát, sortální	číselný	146
soud	64	formální	157
nekonečný	206	otevřený	157
obecný hypotetický	90	uzavřený	157
spadání		token	62
pojmu do pojmu	170	třetí říše	183
předmětu pod pojem <i>viz</i> subsumpce		třída	
splňování		abstrakce	199
logiky predikátů	159	primární	198
logiky výroků	83	neurčitá (Boolova)	18
sylogistické	7	prázdná	17

spočetná..... viz spočetnost	silná 162
tvrdící síla 65	slabá 161
univerzum diskurzu	logiky výroků..... 87
Boolovo (De Morganovo) 16	sylogistická 11
Fregovo 109	větný systém
úplnost	elementární 145
deduktivní..... viz teorie, úplná	komplexní formy..... 145
kalkulu..... viz věta o úplnosti	vyjadřovat (mysl)..... 127
sémantická..... 144	vyplývání
systému spojek (funkcionální)..... 82	logiky predikátů 161
výrazu 103	logiky výroků..... 85
určitá deskripce..... 167	sylogistické 11
korektní (sémanticky)..... 173	výraz
urelement 247	látkový viz látkový termín
uspořádaná dvojice 220	singulární 117, 167
úsudek..... viz logická platnost, úsudku	zákon
formální..... 241	bivalence 5
užití	De Morganův 17
věty..... viz funkce věty	sporu 5
výrazu (ne)přímé viz kontext,	vyločeného třetího 5
(ne)přímý	zaměnitelnost viz substituovatelnost
valuace..... 157	znak
alternativní (i-valuace) 158	pojmu (pojmový znak)..... 14
věta	výběrový 16
nevlastní 64	znamenat (význam) 127
situačně nezávislá 63	zobrazení pojmu do pojmu 221
věčná 63	způsob danosti 124
věta o kompaktnosti..... 254	
věta o korektnosti	
logiky predikátů prvního řádu	
silná..... 162	
slabá..... 161	
logiky výroků 86	
věta o nerozhodnutelnosti	
predikátového počtu (Churchova)	
..... 161	
věta o neúplnosti	
aritmetiky (Gödelova) 255	
logiky predikátů vyšších řádů ... 218	
věta o úplnosti	
logiky predikátů prvního řádu ... 218	

10.2 SYMBOLY A ZKRATKY

\Rightarrow	znak přechodu v rámci nějakého transformačního pravidla, speciálně úsudkového pravidla, 7, pravidla kalkulu, 75	\mathfrak{S}_{VL}	Fregův axiomatický systém pro logiku výroků, 89
\approx	metajazyková rovnost, 11	$\neg q$	znak obecnosti a jejího omezení na obsah vpravo od jamky, 114
\dagger	Peircův znak relačního součtu, 22	\forall	obecný kvantifikátor, 115
\leftarrow	Peircův znak nevlastní inkluze, 26	ASP	obecný substituční princip, 115
F	Schröderův znak pro kopulu (nevlastní inkluze), 27	\exists	existenční kvantifikátor, 116
ε	Peanův znak náležení, 29	LP	Leibnizův princip, 125
C	Peanův znak implikace, dedukce a inkluze, 29	\succ	znak sloužící k utváření jmen komplexních kategorií, 146
\supset	Russellův znak implikace, 29	s	kategorie věta, 146
\subset	inkluze, 29	t	kategorie term, 146
ι	Peanův znak pro jednoprvkovou třídu, 29	\wedge	konjunkt, 147
\supset_x	Peanův kvantifikátor, 29	\vee	disjunkt, 147
\mid	pruh soudu, 69	\leftrightarrow	bisubjunkt, 147
—	pruh obsahu, 69	*	rozšíření elementárního oboru řeči (resp. elementárního větného systému) na obor (resp. systém) komplexní formy, 148
┌	znak tvrdící síly, 69	A	předmětný obor elementární aritmetiky, 149
└_K	znak (syntaktické) odvoditelnosti figury v kalkulu K, 75	\grave{A}	univerzální jazyk logiky predikátů prvního řádu, 159
┐	pruh popření, 79	\grave{A}_R	formální jazyk logiky predikátů prvního řádu, 160
\neg	negátor, 80	\hat{A}_R	třída formálních termů logiky predikátů prvního řádu, 160
┌┐	podmínkový pruh, 81	\check{A}	třída proměnných, 160
\rightarrow	subjunkt, 81	\acute{A}_R	třída formulí logiky predikátů prvního řádu, 160
\mathfrak{S}	kalkul generující schémata fregovské výrokové logiky, 83	I	ohodnocení, 161
WP	pravdivostní princip, 84	V	valuace proměnných, 161
W	pravdivostní hodnota pravda (<i>das Wahre</i>), 84	└	splňování, 163, vyplývání, 164
F	pravdivostní hodnota nepravda (<i>das Falsche</i>), 84		

- \vdash dokazatelnost (odvoditelnost) v logickém kalkulu, 164
i deskriptor, 172
 GV princip abstrakce průběhů hodnot (*Grundgesetz V*), 205
 \acute{a} abstraktor průběhů hodnot (*spiritus lenis* nad řeckou samohláskou), 205
 λ lambda abstrakce, 205
 $\{ \}$ abstraktor množin, 205
 \mathcal{G} axiomatický systém *Grundgesetze*, 220
 \parallel dvojitý pruh definice, 220
 \mathfrak{F}_{PL} Fregeův axiomatický systém pro logiku predikátů prvního řádu, 222
i Fregeův znak náležení, 223
 $x;y$ uspořádaná dvojice prvků x a y , 224
 I jednoznačná relace, 225
 \rangle zobrazení do, 225
 $\{$ inverzní relace, 225
 $|$ číslo příslušející pojmu, 226
 \pounds nula, 226
 \pounds jednička, 226
 \mathbf{f} bezprostřední číselný následník, 227
 \pounds vlastní následník, 229
 \mathfrak{c} nevlastní následník, 230
 \in množinové náležení, 231
 G předmětný obor průběhů hodnot *Grundgesetze*, 231
 Ω_e předmětný obor průběhů hodnot pro obor Ω , 250
 \mathcal{Q} Robinsonova aritmetika, 258
 $\mathcal{R}A$ Peanova aritmetika, 258
 N standardní model aritmetiky, 258

Logika Gottloba Frega
Vojtěch Kolman

Obálku navrhla Jarka Šuštková
Za jazykovou správnost ručí autor
Technická redaktorka Marie Vučková
Typografie a sazba Vojtěch Kolman
Vydalo nakladatelství
Filosofia
jako svou 139. publikaci
Vytiskl Ústav jaderných informací, a.s.,
Elišky Přemyslovny 1335,
Praha-Zbraslav
Vydání první
Stran 312
Praha 2002

Elektronické vydání první
ISBN 978-80-7007-714-6
Praha 2022

GOTTLOB FREGE (1848-1925) je coby zakladatel moderní logiky právem nazýván druhým Aristotelem. Nesrovnatelně větší flexibilita a nadřazenost Fregova systému, jež v průběhu let umožnila vznik nových matematických disciplín (matematické logiky, metamatematiky, teorie rekurze, teorie modelů atd.), zakládá se na novém způsobu tázání, které v prostoru tradice západní filosofie a vědy začíná tím, co každému vlastnímu tázání s železnou nutností předchází, totiž jazykem. Právě jakožto otec analytické filosofie (dlouho známý především prostřednictvím Wittgensteinových spisů) patří Frege bezesporu k filosofům Aristotelova a Kantova řádu – zakladatelům tradice.

Kniha se snaží o spojitý výklad Fregova logicko-filosofického díla, od *Begriffsschrift* přes *Grundlagen* až po *Grundgesetze*. Ten je určen třemi tématy: (1) epistemologickým, jež se věnuje otázkám konstituce abstraktních předmětů, speciálně čísel, (2) tématem logickým, zahrnujícím přesné vymezení pojmu logické interpretace a vůbec toho, co je logika zač, a (3) konečně tématem, jehož předmětem je samotný Frege a jeho dílo jako historický fenomén. Právě s ohledem na to, že kniha představuje první česky vydanou fregovskou monografii, byla opatřena kapitolou s životopisnými a faktografickými údaji, chronologickým přehledem a překladovým rejstříkem fregovské terminologie.