

PUBLIKACE PRAŽSKÉ STÁTNÍ HVĚZDÁRNY.

No 7.

PUBLICATIONS DE L'OBSERVATOIRE NATIONAL DE PRAGUE.

SUR

LA THEORIE ELLIPSOIDALE
DE SCHWARZSCHILD.

PAR

D^r V. NECHVÍLE

Astronome à l'Observatoire National de Prague.

(Mémoire paru dans le Bulletin Astronomique, tome VI, fascicule IV).

PARIS

GAUTHIER-VILLARS et C^{ie}, IMPRIMEURS

55, Quai des Grands-Augustins, 55

—
1930

SUR LA THEORIE ELLIPSOIDALE DE SCHWARZSCHILD.

Par D^r V. NECHVÍLE.

Dans un travail précédent j'ai publié les résultats provisoires de l'analyse des mouvements propres d'étoiles déterminés sur 22 régions photographiques de Paris (1). Les courbes de fréquence obtenues pour les mouvements d'étoiles entre la 5^e et 16^e grandeur photographique correspondaient, dans 22 cas, à la distribution des vitesses stellaires suivant l'hypothèse de Kapteyn; dans 13 cas la distribution des vitesses était en même temps conforme à l'hypothèse ellipsoïdale de Schwarzschild et dans 9 cas elle était nettement opposée à cette dernière.

Comme je l'ai souligné (2), ces résultats étaient provisoires parce que les mouvements propres, dont la mesure était possible, étaient plus grands que 0",02 par an (avec 7 pour 100 d'exception environ), limite que j'ai ainsi fixée pour plusieurs raisons (3). Par suite de cette circonstance aussi je me suis contenté, dans la détermination des apex des courants stellaires et de l'apex solaire, de la première approximation et j'ai décidé d'examiner l'influence de la limite inférieure $\varepsilon = 0",02$ sur les courbes de fréquence en premier lieu.

Les premiers résultats que j'ai obtenu sont publiés dans une Note « *Sur la théorie des deux courants stellaires et la théorie*

(1) *Recherches sur les mouvements propres de 3802 étoiles (Publications de l'Observatoire national de Prague, n° 4, 1927, et Bulletin astronomique, t. V, fasc. III, Paris, 1927).*

(2) *Ibid.*, § 25.

(3) Dans une publication antérieure *Étude au Blink-Microscope des mouvements propres des étoiles de la région du Ciel $R = 6^h 30^m$, $\omega = 24^{\circ} 20'$ (Bulletin astronomique, 1923, p. 247)*, M. J. Bosler et moi avons fixé cette limite à 0",035 par an; ce chiffre, un peu plus élevé, a été adopté parce que le cliché dont nous disposions était pris dans une position légèrement extrafocale et que les mouvements inférieurs à cette limite étaient difficilement mesurables.

ellipsoïdale » (*Comptes rendus*, Paris, t. 186, 26 mars 1928); dans ce qui suit j'examine le problème avec plus de détails et j'ajoute la discussion numérique. Le point essentiel forme la découverte de certaines courbes de fréquence partielles, indépendantes de la distribution d'étoiles dans l'espace et importantes surtout pour la théorie ellipsoïdale de Schwarzschild. Ces courbes permettent d'expliquer, dès qu'une certaine distance critique est déterminée, les courants apparents d'étoiles observés d'une part et la distribution dissymétrique du nombre d'étoiles dans ces courants d'autre part, et cela toujours à la base de la théorie ellipsoïdale de Schwarzschild qui apparaît désormais seule acceptable.

2. La théorie des deux courants stellaires donne (1), pour le nombre $\rho(\theta)$ d'étoiles dont le mouvement tombe dans l'intervalle $(\theta, \theta + d\theta)$ de l'angle de position, l'équation

$$(1) \quad \rho(\theta) d\theta = \frac{n_1}{\pi} h_1^2 d\theta \int_0^\infty e^{-h_1^2[r^2 + v_1^2 - 2rv_1 \cos(\theta - \theta_1)]} r dr \\ + \frac{n_2}{\pi} h_2^2 d\theta \int_0^\infty e^{-h_2^2[r^2 + v_2^2 - 2rv_2 \cos(\theta - \theta_2)]} r dr;$$

où n_1 et n_2 sont les nombres d'étoiles dans les deux courants, h_1 et h_2 les constantes en liaison avec les vitesses « au hasard » d'étoiles, v_1 et v_2 , θ_1 et θ_2 les vitesses de translation et les directions des deux courants, r et θ la vitesse et la direction du mouvement d'une étoile quelconque, le tout projeté, par une projection parallèle au rayon visuel, sur le plan tangent à la sphère céleste au centre de la région observée.

La théorie ellipsoïdale de Schwarzschild (2) donne pour le nombre d'étoiles $\bar{\rho}(\theta)$ ayant le mouvement apparent dans le même intervalle, comme précédemment $(\theta, \theta + d\theta)$, l'équation

$$(2) \quad \bar{\rho}(\theta) d\theta = n \frac{kh}{\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-k^2(r \cos \theta - u_0)^2 - h^2(r \sin \theta - v_0)^2} r dr,$$

où k et h sont les constantes en liaison avec les axes de l'ellipsoïde

(1) A. S. EDDINGTON, *Stellar movements and the Structure of Universe* (Macmillan, London, 1914, p. 128).

(2) K. SCHWARZSCHILD, *Ueber die Eigenbewegungen der Fixsterne* (*Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wissenschaften Göttingen*, 1907, p. 614).

des vitesses (de révolution), n le nombre total d'étoiles et u_0 et v_0 les composantes du mouvement uniforme de translation du Soleil, le tout projeté par la projection parallèle sur le plan tangent à la sphère céleste.

Les deux expressions de $\rho(\theta)$ et de $\bar{\rho}(\theta)$ peuvent être transformées au moyen des transformations d'Eddington et de Schwarzschild respectivement (1) et amenées à la forme

$$(3) \quad \rho(\theta) d\theta = \frac{n_1}{\pi} e^{-h_1^2 v_1^2} d\theta \left[\frac{1}{2} + \tau_1 e^{\tau_1} \int_{-\tau_1}^{\infty} e^{-x^2} dx \right] \\ + \frac{n_2}{\pi} e^{-h_2^2 v_2^2} d\theta \left[\frac{1}{2} + \tau_2 e^{\tau_2} \int_{-\tau_2}^{\infty} e^{-x^2} dx \right],$$

$$(4) \quad \bar{\rho}(\theta) d\theta = \frac{n}{\pi} kh d\theta e^{-k^2 u_0^2 - h^2 v_0^2} \cdot \frac{1}{p} \left[\frac{1}{2} + \eta e^{\eta^2} \int_{-\eta}^{\infty} e^{-x^2} dx \right],$$

où les paramètres τ_1 , τ_2 et η sont les fonctions connues et périodiques de θ , ainsi que $p = k^2 \cos \theta + h^2 \sin^2 \theta$; l'expression dans les parenthèses est la fonction d'Eddington pour les arguments τ_1 , τ_2 et η respectivement.

3. L'intérêt principal des deux méthodes précédentes consiste dans le fait que les équations (3) et (4) sont indépendantes de la distribution d'étoiles dans l'espace. Bien que le point de départ dans les deux hypothèses soit les mouvements réels et linéaires (inconnus généralement d'ailleurs), on prend en considération, suivant l'idée de Sir F. W. Dyson (2), la direction du mouvement seulement. Les intégrales prises dans les limites 0 et ∞ sont alors valables aussi pour les mouvements apparents.

Il n'en est pas ainsi quand les mouvements propres observés ont une limite angulaire inférieure, différente de zéro et toujours positive $\varepsilon > 0$. Dans ce cas nous pouvons obtenir une solution par la méthode suivante qui mène aux courbes partielles de fréquence absolument indépendantes de la distribution d'étoiles.

A la limite angulaire ε'' correspond, pour une distance Δ de l'étoile au Soleil, une vitesse limite linéaire $\varepsilon\Delta$, perpendiculaire au

(1) A. S. EDDINGTON, *loc. cit.*, p. 131.

(2) Sir F. W. DYSON, *The Systematic Motions of the Stars (Proceedings of the Roy. Soc. Edinburgh, vol. 28, p. 231)*.

rayon visuel. Si je suppose connaître le nombre d'étoiles ayant la distance Δ , je puis appliquer directement les principes des méthodes précédentes.

Si l'on admet (ce qui, comme on le verra tout de suite, n'est pas nécessaire) que les étoiles d'une certaine grandeur photographique se trouvent à une distance déterminée, on pourra trouver, au moyen des observations, les nombres d'étoiles à une certaine distance. Par exemple la formule de la parallaxe hypothétique de Kapteyn (1) donne immédiatement (dans la table suivante), pour les différentes grandeurs stellaires, la vitesse limite linéaire $\varepsilon\Delta$ correspondant à $\varepsilon = 0''{,}02$, fixée pour les observations.

TABLE I.

Gr. ph.	π .	$\varepsilon : \pi$.	$\varepsilon\Delta$.
5,5.....	0,01600	1,250	5,92 km.sec ⁻¹
6,5.....	0,01200	1,667	7,90 »
7,5.....	0,00900	2,222	10,53 »
8,5.....	0,00675	2,963	14,04 »
9,5.....	0,00506	3,963	18,72 »
10,5.....	0,00380	5,263	24,93 »
11,5.....	0,00285	7,018	33,25 »
12,5.....	0,00214	9,803	46,44 »
13,5.....	0,00160	12,500	59,22 »
14,5.....	0,00120	16,667	78,96 »
15,5.....	0,00090	22,222	105,27 »

Puisque la vitesse correspondante à la parallaxe hypothétique π et à un mouvement apparent de μ'' est donnée par la formule

$$v = 4,7373 \frac{\mu}{\pi} \text{ km. sec}^{-1},$$

les étoiles ayant, par exemple, une parallaxe égale à $0''{,}02$ seraient enregistrées, si leur mouvement perpendiculaire à la ligne de visée était au minimum égal à $4,74 \text{ km. sec}^{-1}$.

4. Il n'est pas nécessaire, pour la théorie, de recourir à la formule de la parallaxe hypothétique. Divisons la distance Δ en

(1) I.-C. KAPTEYN, *On the mean parallax of stars, etc.* (Publicat. of the Astron. Laboratory at Groningen, n° 8, p. 24).

des intervalles réguliers ou irréguliers, par les distances $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k, \Delta_{k+1}, \dots$ et supposons que nous connaissons les nombres d'étoiles ν_k , comprises entre les distances Δ_k et Δ_{k-1} . Appelons en plus ε_k le produit $\varepsilon \Delta_k$ et nous pouvons décomposer les intégrales dans (1) et (2) en des sommes d'intégrales telles que

$$(6) \quad \varrho(\theta) d\theta = \frac{h_1^2}{\pi} d\theta \sum_1^k \nu_{1k} \int_{\varepsilon_k}^{\infty} e^{-h_1^2[r^2 + \nu_1^2 - 2r\nu_1 \cos(\theta - \theta_1)]} r dr \\ + \frac{h_2^2}{\pi} d\theta \sum_1^k \nu_{2k} \int_{\varepsilon_k}^{\infty} e^{-h_2^2[r^2 + \nu_2^2 - 2r\nu_2 \cos(\theta - \theta_2)]} r dr,$$

où

$$n_1 = \sum_1^k \nu_{1k}, \quad n_2 = \sum_1^k \nu_{2k};$$

et pour la théorie ellipsoïdale de même

$$(7) \quad \bar{\varrho}(\theta) d\theta = \frac{hk}{\pi} d\theta \sum_1^k \nu_k \int_{\varepsilon_k}^{\infty} e^{-k^2[r \cos \theta - u_0]^2 - h^2[r \sin \theta - \nu_0]^2} r dr,$$

où

$$n = \sum_1^k \nu_k;$$

de sorte que chaque intégrale est divisée en une somme d'intégrales appartenant successivement à tous les intervalles $\Delta_k - \Delta_{k-1}$. Au lieu de zéro, la limite inférieure $\varepsilon_k = \varepsilon \Delta_k$ a été maintenant introduite dans chaque intégrale et le domaine des mouvements non observés est respecté.

Ces équations sont valables pour les vitesses linéaires. Pour pouvoir les appliquer aux mouvements apparents, il suffit de considérer la projection centrale sur le plan tangent du centre de chaque région et de chaque ensemble ν_k d'étoiles séparément.

La distribution, ou sphérique, ou ellipsoïdale des vitesses (selon l'une ou l'autre hypothèse) valable pour les ensembles d'étoiles ν_k à la distance Δ_k sera conservée par la projection pour les ensembles de mouvements apparents; seulement les constantes appartenant à ces derniers sont changées. Appelons ces constantes, fonctions de Δ_k d'ailleurs, h_{1k}, h_{2k}, k_k et h_k . Soient en plus $\nu_{1k}, \nu_{2k}, u_{0k}, \nu_{0k}$ les composantes des mouvements de translation en valeur angu-

laire, correspondant à la distance Δ_k ; on aura donc

$$\begin{aligned} r &= \mu \Delta_k, & dr &= d\mu \Delta_k, & \varepsilon_k &= \varepsilon \Delta_k; \\ v_1 &= v_{1k} \Delta_k, & u_0 &= u_{0k} \Delta_k, \\ v_2 &= v_{2k} \Delta_k, & v_0 &= v_{0k} \Delta_k. \end{aligned}$$

Les u_{0k} et v_{0k} sont, par conséquent, les composantes de la parallaxe séculaire pour la distance Δ_k . Nous trouvons alors pour la théorie des deux courants

$$\begin{aligned} (8) \quad \rho(\theta) d\theta &= \sum_1^k \sigma_k(\theta) d\theta \\ &= \frac{h_1^2}{\pi} d\theta \sum_1^k v_{1k} \Delta_k^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-h_1^2 \Delta_k^2 [\mu^2 + v_{1k}^2 - 2\mu v_{1k} \cos(\theta - \theta_1)]} \mu d\mu \\ &\quad + \frac{h_2^2}{\pi} d\theta \sum_1^k v_{2k} \Delta_k^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-h_2^2 \Delta_k^2 [\mu^2 + v_{2k}^2 - 2\mu v_{2k} \cos(\theta - \theta_2)]} \mu d\mu, \end{aligned}$$

et pareillement pour la théorie ellipsoïdale

$$\begin{aligned} (9) \quad \bar{\rho}(\theta) d\theta &= \sum_1^k \bar{\sigma}_k(\theta) d\theta \\ &= \frac{hk}{\pi} d\theta \sum_1^k v_k \Delta_k^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\Delta_k^2 k^2 (\mu \cos \theta - u_{0k})^2 - \Delta_k^2 h^2 (\mu \cos \theta - v_{0k})^2} \mu d\mu. \end{aligned}$$

Les v_{1k} , v_{2k} , u_{0k} , v_{0k} sont exprimés en valeur angulaire ainsi que le mouvement apparent (*cross proper motion*) μ et la limite inférieure ε dans les intégrales.

Ces équations sont valables rigoureusement sous l'hypothèse, bien entendu, que les étoiles dans l'espace $\Delta_k - \Delta_{k-1}$ sont considérées toutes à la distance Δ_k par exemple et la limite ε_k est constante également dans cet intervalle : donc pour les $\Delta_k - \Delta_{k-1}$ infinitésimalement petits.

5. Les $\rho(\theta)$ et $\bar{\rho}(\theta)$ sont donc exprimés comme sommes des $\sigma(\theta)$ et $\bar{\sigma}_k(\theta)$ appartenant respectivement à des distances Δ_k . Posons, pour transformer les $\sigma_k(\theta)$ et $\bar{\sigma}_k(\theta)$,

$$(11) \quad \begin{cases} x_1 = h_1 \Delta_k \mu - \tau_1, & h_1 \Delta_k = h_{1k}, \\ x_2 = h_2 \Delta_k \mu - \tau_2, & h_2 \Delta_k = h_{2k}; \\ \tau_1 = h_1 v_1 \cos(\theta - \theta_1) = h_1 \Delta_k v_{1k} \cos(\theta - \theta_1), \\ \tau_2 = h_2 v_2 \cos(\theta - \theta_2) = h_2 \Delta_k v_{2k} \cos(\theta - \theta_2). \end{cases}$$

Les intégrales dans les $\sigma_k(\theta)$ deviendront

$$\Delta_k^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-h_1 \Delta_k^2 [\mu^2 + \nu_1^2 k^{-2} \mu \nu_1 k \cos(\theta - \theta_1)] \mu} d\mu = \frac{1}{h_1^2} e^{\tau_1^2} \int_{h_1 \Delta_k \varepsilon - \tau_1}^{\infty} e^{-x_1^2} (x_1 + \tau_1) dx_1,$$

et l'expression $\sigma_k(\theta)$ se réduira à

$$(12) \quad \sigma_k(\theta) d\theta = \frac{\nu_1 k}{\pi} e^{-h_1^2 \nu_1^2} \left[\frac{1}{2} e^{-h_1^2 \Delta_k^2 \varepsilon^2 + 2\varepsilon \Delta_k h_1 \tau_1 + \tau_1^2} e^{\tau_1^2} \int_{\varepsilon h_1 \Delta_k - \tau_1}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \right] \\ + \frac{\nu_2 k}{\pi} e^{-h_2^2 \nu_2^2} \left[\frac{1}{2} e^{-h_2^2 \Delta_k^2 \varepsilon^2 + 2\varepsilon \Delta_k h_2 \tau_2 + \tau_2^2} e^{\tau_2^2} \int_{\varepsilon h_2 \Delta_k - \tau_2}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2 \right].$$

Pour transformer et simplifier $\bar{\sigma}_k(\theta)$ appliquons la substitution

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_k k = k_k, \quad \Delta_k h = h_k; \\ x_k = \mu \Delta_k \sqrt{p} - \eta, \\ dx_k = \Delta_k \sqrt{p} d\mu, \\ p = k^2 \cos^2 \theta + h^2 \sin^2 \theta, \\ \eta \sqrt{p} = \Delta_k (k^2 u_0 k \cos \theta + h^2 \nu_0 k \sin \theta) = k^2 u_0 \cos \theta + h^2 \nu_0 \sin \theta. \end{array} \right.$$

L'intégrale dans la formule (12) se transforme comme il suit :

$$\Delta_k^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-k^2 \Delta_k^2 (\mu \cos \theta - u_0 k)^2 - h^2 \Delta_k^2 (\mu \sin \theta - \nu_0 k)^2} \mu d\mu \\ = e^{-k^2 u_0^2 - h^2 \nu_0^2} \frac{1}{p} e^{\eta^2} \int_{\varepsilon \Delta_k \sqrt{p} - \eta}^{\infty} e^{-x_k^2} (x_k + \eta) dx_k,$$

ce qui donne finalement

$$(14) \quad \bar{\sigma}_k(\theta) d\theta = \frac{\nu k}{\pi} e^{-k^2 u_0^2 - h^2 \nu_0^2} \frac{1}{p} \left[\frac{1}{2} e^{-\varepsilon^2 \Delta_k^2 p + 2\varepsilon \eta \Delta_k \sqrt{p} + \eta^2} e^{\eta^2} \int_{\varepsilon \Delta_k \sqrt{p} - \eta}^{\infty} e^{-x^2} dx \right].$$

Dans les formules (13) et (14) on a laissé explicitement la distance Δ_k qui intervient dans les exposants de l'exponentielle et dans la limite inférieure des intégrales.

6. Pour abrégér les formules précédentes, remplaçons les facteurs constants par des constantes nouvelles et conservons seulement les quantités qui sont des fonctions de l'angle de posi-

tion θ . En posant

$$C_1 = \frac{1}{\pi} e^{-h_1^2 v_1^2}, \quad c_{1k} = e^{-h_1^2 \Delta_k^2 \varepsilon^2},$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi} e^{-h_2^2 v_2^2}, \quad c_{2k} = e^{-h_2^2 \Delta_k^2 \varepsilon^2}, \quad C_3 = \frac{1}{\pi} e^{-h_3^2 k_3^2 - h_3^2 \eta^2};$$

les formules (12) et (14) deviennent

$$(15) \quad \sigma_k(\theta) = C_1 v_{1k} \left[\frac{c_{1k}}{2} e^{2\varepsilon \Delta_k h_1 \tau_1 + \tau_1} e^{\tau_1^2} \int_{\varepsilon \Delta_k h_1 - \tau_1}^{\infty} e^{-x^2} dx \right]$$

$$+ C_2 v_{2k} \left[\frac{c_{2k}}{2} e^{2\varepsilon \Delta_k h_2 \tau_2 + \tau_2} e^{\tau_2^2} \int_{\varepsilon \Delta_k h_2 - \tau_2}^{\infty} e^{-x^2} dx \right],$$

$$(16) \quad \bar{\sigma}_k(\theta) = C_3 v_k \cdot \frac{1}{p} \cdot \left[\frac{1}{2} e^{-\varepsilon^2 \Delta_k^2 p + 2\varepsilon \Delta_k \eta \sqrt{p} + \eta^2} e^{\eta^2} \int_{\varepsilon \Delta_k \sqrt{p} - \eta}^{\infty} e^{-x^2} dx \right].$$

L'influence de la limite ε est donc, dans certains cas, plus forte pour la théorie ellipsoïdale de Schwarzschild que pour celle des deux courants, puisque le premier membre dans la parenthèse de la formule (16) contient deux facteurs périodiques en θ (de périodes π et 2π) et fonctions de ε . Pour cette dernière formule je puis introduire encore

$$\lambda_k = \eta - \varepsilon \Delta_k \sqrt{p},$$

et j'obtiens

$$(17) \quad \bar{\sigma}_k(\theta) d\theta = C_3 v_k d\theta \frac{1}{p} e^{-\lambda_k^2} \left(\frac{1}{2} + \eta e^{\lambda_k^2} \int_{-\lambda_k}^{\infty} e^{-x^2} dx \right),$$

où le troisième facteur périodique en θ , la parenthèse, contient une expression peu différente de la fonction d'Eddington.

7. Les séries (8) et (9) représentent une solution complète du problème dès que les nombres v_{1k} , v_{2k} ou v_k sont connus; ces nombres peuvent être déterminés au moyen des observations directes et de la formule de la parallaxe hypothétique, ou au moyen d'une hypothèse quelconque sur la distribution d'étoiles dans l'espace. Dans ce cas $\rho(\theta)$ et $\bar{\rho}(\theta)$, étant exprimés par des séries rapidement convergentes, peuvent mener à l'expression, après une autre quadrature, des courbes totales de fréquence pour la loi de distribution d'étoiles choisie.

Les courbes partielles, données par les fonctions $\sigma_k(\theta)$ et $\bar{\sigma}_k(\theta)$

représentent les courbes de fréquences valables pour une partie de l'espace limité par le cône de l'angle solide de la région observée et par deux sphères de rayons Δ_k et Δ_{k-1} ; donc pour une partie de la couche sphérique d'épaisseur $\Delta_k - \Delta_{k-1}$. Ces courbes partielles nous intéresseront seulement dans le prochain paragraphe. Elles sont indépendantes de la distribution d'étoiles et peuvent servir à une solution approchée au moyen de ν_k déterminés par l'observation, et en liaison avec la distance critique Δ_c définie plus loin.

8. Les calculs numériques des courbes de fréquence partielles ont été effectués pour la théorie ellipsoïdale seulement et aussi pour un cas théoriquement simple. J'ai supposé : 1° un ellipsoïde des vitesses idéal ayant des axes dans les portions 2 : 2 : 1 (ce qui est d'ailleurs près de la vérité), orienté, par rapport à l'observateur, de telle manière que le rayon visuel tombe dans le plan de l'équateur de l'ellipsoïde; 2° que la projection du mouvement solaire tombe dans une direction perpendiculaire au rayon visuel (c'est-à-dire tangente à la sphère céleste) et incliné de 45° vers le plan de l'équateur de l'ellipsoïde.

Dans ce cas l'ellipsoïde des vitesses se projette sur le plan tangent à la sphère céleste comme une ellipse dont les axes sont dans le rapport 2 : 1 (1); prenons pour la représentation graphique ces axes comme axes des x et y et supposons que le mouvement solaire tombe dans une direction formant avec l'axe positif des x l'angle θ égal à 225°.

Les dimensions vraies de l'ellipsoïde des vitesses sont fixées par les h et k , qui sont en liaison avec les inverses des axes. Pour simplifier les calculs imaginons ces dimensions et la distance Δ_k telles que

$$\frac{1}{\Delta_k k} = \frac{1}{k_k} = 1'', \quad \frac{1}{\Delta_k h} = \frac{1}{h_k} = 0'',5,$$

de sorte qu'il est

$$\varepsilon^2 \Delta_k^2 p = (\cos \theta + i \sin \theta) \varepsilon^2$$

(1) Le rapport des axes de l'ellipse des vitesses dans le cas général est facilement calculable (voir A. S. EDDINGTON, *loc. cit.*, p. 139); mais pour une large bande du Ciel ce rapport reste sensiblement près de la valeur 2 : 1 de notre cas spécial.

et calculons les courbes $\bar{\sigma}_k(\theta)$ en faisant varier la limite inférieure ε d'une part et la vitesse du mouvement solaire (u_{k0} , v_{k0}) d'autre part. Nous obtenons dans le premier cas l'effet du changement des courbes avec la distance lorsque ε est constant, dans le

TABLE II. — Valeurs relatives de $\bar{\sigma}_k^*(\theta)$.

θ .	$u_{0k} = v_{0k} = 0'', 1.$			$u_{0k} = v_{0k} = 0'', 2.$			$u_{0k} = v_{0k} = 0'', 3.$		
	$\varepsilon = 1'', 0.$	$\varepsilon = 0'', 8.$	$\varepsilon = 0'', 6.$	$\varepsilon = 1'', 0.$	$\varepsilon = 0'', 8.$	$\varepsilon = 0'', 6.$	$\varepsilon = 1'', 0.$	$\varepsilon = 0'', 8.$	$\varepsilon = 0'', 6.$
0...	0,2428	0,3383	0,4362	0,3220	0,4363	0,5488	0,4290	0,5655	0,6953
15...	2142	3112	4133	3718	5108	6459	6552	8545	1,0336
30...	1015	1743	2622	2113	3330	4642	4488	6515	8477
45...	361	801	1468	845	1674	2768	2026	3576	5372
60...	148	416	908	369	910	1766	937	2035	3519
75...	74	253	640	191	525	1245	503	1259	2473
90...	57	205	551	138	441	1041	343	959	2005
105...	66	229	588	150	460	1051	352	927	1904
120...	117	341	770	232	612	1259	463	1105	2084
135...	258	602	1152	430	932	1670	717	1454	2450
150...	658	1192	1881	874	1528	2336	1164	1964	2911
165...	1275	1962	2740	1300	1995	2780	1323	2027	2821
180...	0,1365	0,2065	0,2805	0,1066	0,1624	0,2267	0,0816	0,1284	0,1842
195...	742	1215	1799	444	775	1216	267	499	832
210...	246	508	903	124	280	547	62	157	336
225...	68	193	444	31	98	251	13	49	143
240...	23	90	256	11	44	138	4	21	76
255...	11	53	177	4	25	97	3	12	53
270...	9	46	162	4	21	89	2	10	49
285...	12	59	193	5	29	113	4	16	66
300...	31	109	300	15	62	188	9	36	120
315...	95	254	559	58	167	394	36	110	278
330...	376	731	1234	285	576	1005	216	453	822
345...	1230	1900	2663	1208	1869	2626	1186	1839	2589
360...	0,2428	0,3383	0,4362	0,3220	0,4363	0,5488	0,4290	0,5655	0,6953

second cas l'effet du changement des dimensions réelles de l'ellipsoïde des vitesses sous l'hypothèse du mouvement invariable du Soleil.

Pour chaque courbe $\bar{\sigma}_k(\theta)$ on a obtenu ainsi 24 points successifs en faisant varier l'angle θ de 0° à 360° dans des intervalles de 15° . La Table II donne les valeurs relatives, désignées par $\bar{\sigma}_k^*(\theta)$ et cal-

culées, après avoir posé temporairement $C_3 \nu_k = 1$, selon la formule (16) pour 9 cas des valeurs de ε et des u_{0k} , ν_{0k} .

Six courbes de ces neuf cas calculés ont été représentées graphiquement sur les figures 1 et 2, où l'axe des x est dans la direction indiquée par l'angle $\theta = 0^\circ$ et où le diamètre du cercle indiquant l'angle θ est égal à 0,5 unités, selon l'échelle de la Table II. Sur la figure 1 on a dessiné les courbes C_1 , C_2 , C_3 pour lesquelles $u_{0k} = \nu_{0k} = 0''$, 1 tandis que la limite ε prenait les valeurs de 1'', 0, 0'', 8, 0'', 6. Sur la figure 2 on trouve les $\bar{\sigma}_k^*(\theta)$, désignées par E_1 , E_2 , E_3 , pour lesquelles $\varepsilon = 1''$, 0 invariablement, tandis que $u_{0k} = \nu_{0k}$ prenaient successivement les valeurs de 0'', 1, 0'', 2, 0'', 3.

Les courbes de la première série C_3 , C_2 , C_1 représentent (dans cet ordre) la transformation d'une courbe de fréquence primitivement elliptique (pour $\varepsilon = 0$) en une courbe à deux branches ovoïdales, avec ε différent de zéro et croissant. Les courbes de la seconde série E_1 , E_2 , E_3 représentent le changement rapide et dissymétrique provenant de la grandeur croissante des composantes du mouvement de translation du Soleil. Il est à noter que la courbe E_1 est identique à la courbe C_1 .

9. Pour toutes les régions du Ciel pour lesquelles la projection de l'ellipsoïde des vitesses ne diffère pas beaucoup de l'ellipse aux axes 2 : 1, il existe donc, pour toute valeur positive de ε , selon l'analyse numérique, une distance critique Δ_c pour laquelle les courbes de fréquence partielles $[\bar{\sigma}_k(\theta), \theta]$ se décomposent en deux branches et prennent les formes caractéristiques des courbes de fréquence de la théorie des deux courants. Les courbes de fréquence totales, données par des séries rapidement convergentes $\bar{\rho}(\theta)$, pour $\varepsilon > 0$, approchent d'autant plus de cette forme à deux branches que la distance Δ_c est plus petite ou ε plus grand, c'est-à-dire quand la majorité des étoiles observées se trouve dans le voisinage de la distance critique, ou finalement est en dehors d'elle.

La distance critique est atteinte quand le rapport des nombres d'étoiles en mouvement dans les directions des deux axes tombe à 0, 1 par exemple; cela donne pour Δ_c une équation transcen-

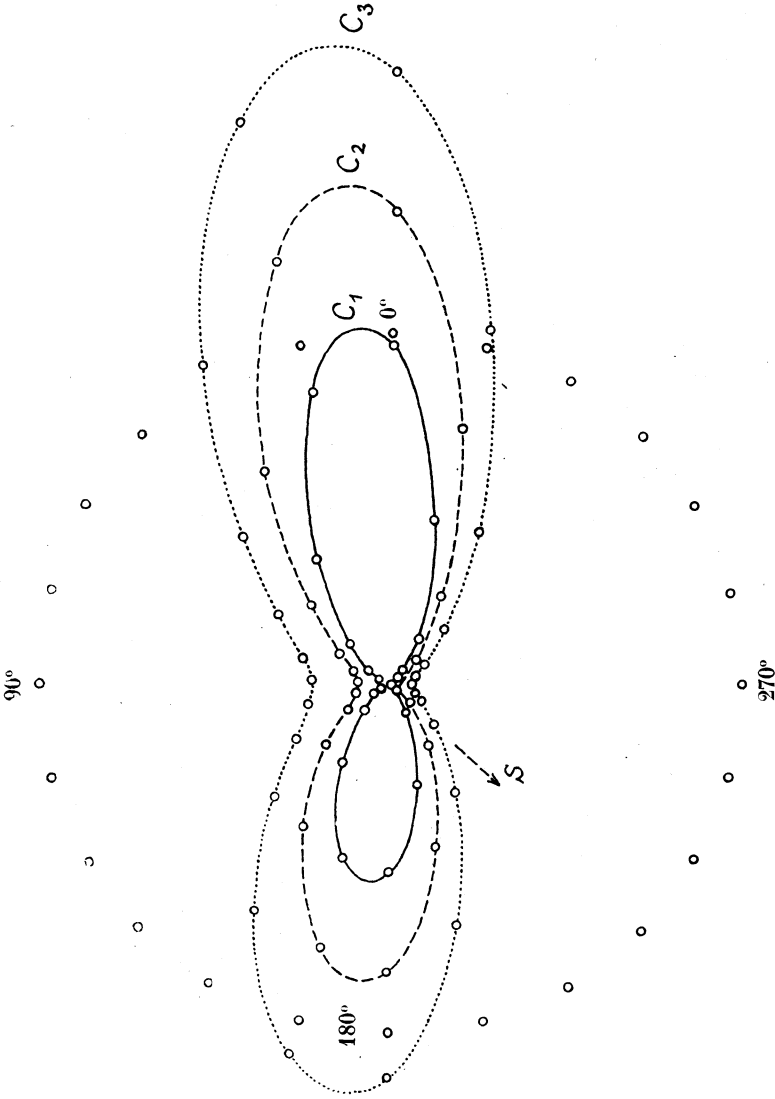


Fig. 1 — Série des courbes C_1, C_2, C_3 .

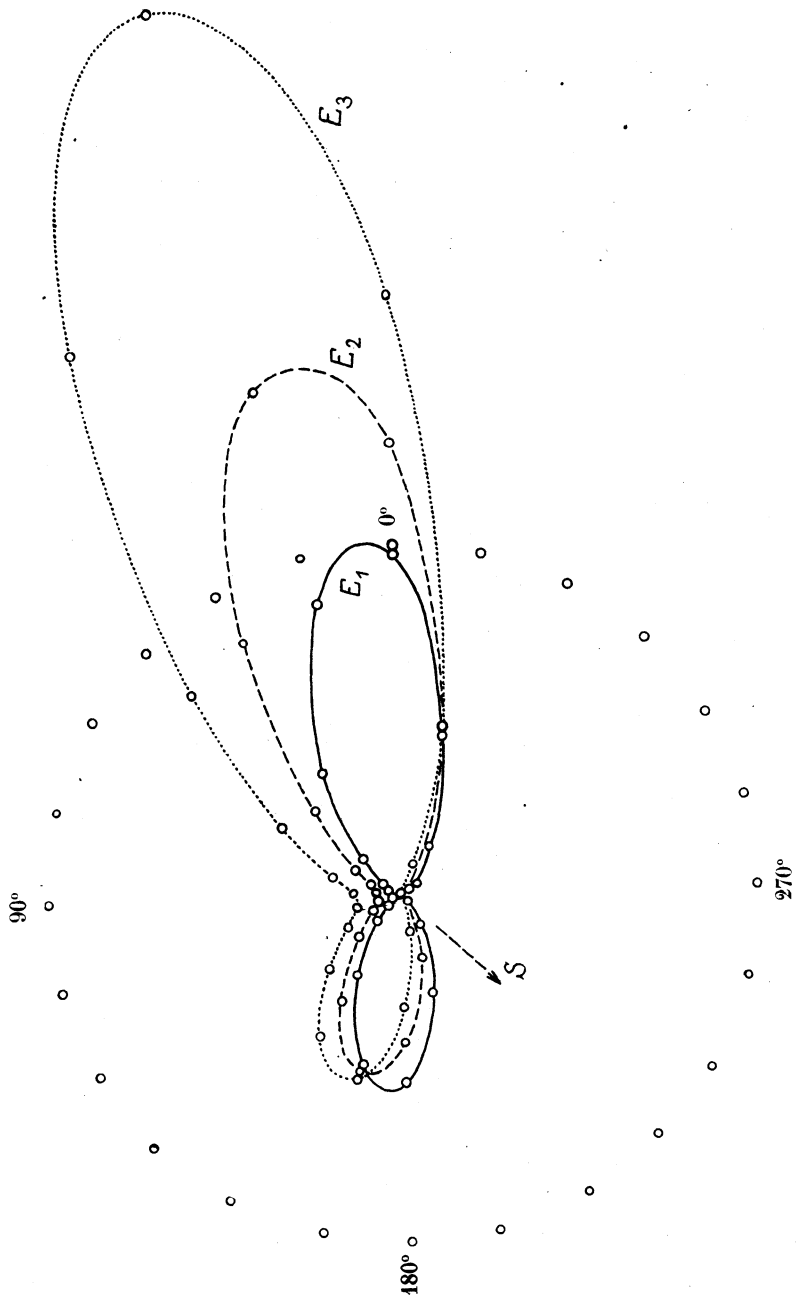


Fig. 2. — Série des courbes E_1, E_2, E_3 .

dante

$$\bar{\sigma}_k\left(\frac{\pi}{2}\right) : \bar{\sigma}_k(0) = 0, 1$$

qui peut être, pour chaque ε donné, résolue par des approximations successives. Dans notre cas spécial, la distance critique est atteinte quand le produit $\varepsilon \Delta_c$ devient approximativement égal à 0,7 du grand demi-axe de l'ellipsoïde des vitesses linéaires.

La dissymétrie des branches provient de l'effet du mouvement solaire et dépend alors généralement de la position de la région observée par rapport à l'ellipsoïde des vitesses et par rapport à la position de l'apex solaire. Il existe un grand cercle sur la sphère céleste qui est, sous ce rapport, un cercle de symétrie : il passe par l'axe de révolution de l'ellipsoïde et par la droite représentant le mouvement solaire vrai. Pour les régions du Ciel situées sur ce cercle, les $\bar{\sigma}_k(\theta)$, et par suite aussi les $\bar{\rho}(\theta)$, ont deux branches symétriques. Le rapport des deux nombres d'étoiles, $\bar{n}_1 : \bar{n}_2$, contenues dans les aires des deux branches, est donné par les aires des courbes $[\sqrt{\bar{\rho}(\theta)}, \theta]$, c'est alors

$$\frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_2} = \frac{\int_{\mathfrak{S}_1}^{\Theta_1} \rho(\theta) d\theta}{\int_{\mathfrak{S}_2}^{\Theta_2} \bar{\rho}(\theta) d\theta} = \frac{\sum_1^k \nu_k \int_{\mathfrak{S}_1}^{\Theta_1} \bar{\sigma}_k(\theta) d\theta}{\sum_1^k \nu_k \int_{\mathfrak{S}_2}^{\Theta_2} \bar{\sigma}_k(\theta) d\theta},$$

où les limites des intégrales $\mathfrak{S}_1, \Theta_1, \mathfrak{S}_2, \Theta_2$ représentent les segments de l'angle de position dans lesquels se trouvent les deux branches ovoïdales.

Le rapport $\bar{n}_1 : \bar{n}_2$ varie donc ainsi suivant la position de la région observée, en prenant toutefois la valeur de l'unité le long du cercle de symétrie que je viens d'indiquer.

10. Conclusions. — 1° Si l'on analyse les mouvements propres ayant une limite toujours positive $\varepsilon > 0$, alors, sous certaines conditions, les courbes de fréquence selon l'hypothèse ellipsoïdale de Schwarzschild prennent les formes caractéristiques des courbes de deux courants. Les conditions nécessaires sont remplies pour mes observations de Paris (*loc. cit.*), celles-ci sont donc conformes

à la théorie ellipsoïdale de Schwarzschild et à celle de J. H. Jeans (*Astronomy and Cosmogony*, Cambridge, Univ. Press, 1928, p. 361).

2° L'influence de la limite toujours positive ε des mouvements propres existe pour toutes les observations photographiques d'étoiles faibles, elle est d'autant plus forte que les étoiles sont plus éloignées. Il n'est pas nécessaire de chercher une bissection de la surface des vitesses pour ces étoiles.

3° La dissymétrie des courbes de fréquence explique le nombre variable des étoiles dans les courants apparents, suivant la position de la région observée par rapport aux axes de l'ellipsoïde des vitesses et par rapport à l'apex solaire.

4° L'angle formé par les directions maxima des deux branches des courbes $[\bar{\rho}(\theta), \theta]$, données par la théorie ellipsoïdale, ne peut pas dépasser une certaine limite qui est la fonction du rapport des axes de l'ellipsoïde. Un courant isolé se manifeste donc par des vraies courbes de fréquence pour les courants $[\rho(\theta), \theta]$ dans lesquelles il n'y a pas de limite de cet angle. Ce cas existe pour l'amas de Praesèpe d'après mes observations de Paris.

Un autre travail sera consacré au calcul de l'ellipsoïde vrai des vitesses au moyen des v_k observés, à l'application de certaines lois de distribution d'étoiles dans l'espace et à la détermination des $\bar{n}_1 : \bar{n}_2$ pour les différentes régions du Ciel, afin de donner l'analyse définitive de mes observations.

Observatoire National de Prague, février 1930.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^o
90354 Quai des Grands-Augustins, 55.
