

PUBLIKACE PRAŽSKÉ STÁTNÍ HVĚZDÁRNY.

No. 10.

PUBLICATIONS DE L'OBSERVATOIRE NATIONAL DE PRAGUE.

---

SUR LES METHODES  
DE REDUCTION DES OBSERVATIONS  
ASTROGRAPHIQUES ET LE CALCUL  
DES POSITIONS D'EROS EN 1931.

PAR

V. NECHVÍLE

*Mémoire publié avec subvention du Fond Masaryk auprès du Conseil  
de Recherches National Tchecoslovaque à Prague.*

1935.

IMPRIMERIE „PROMETHEUS“, PRAHA VIII, ROKOSKA 94.

## Sur les méthodes de réduction des observations astrophotographiques et le calcul des positions d'Eros en 1931.

Par V. Nechvile.

Le présent mémoire a son origine dans le travail de réduction des photographies de la planète Eros, exécutées lors de sa dernière opposition.\*) Il contient l'exposé de l'ensemble d'un tel travail, conduit par les méthodes différentes.

Les indications générales pour le travail de réduction des clichés d'Eros ont été données par le Dr. H. Spencer-Jones, directeur de l'Observatoire de Greenwich et Astronome royal; elles ont été suivies en effet aussi dans mes réductions.

A part des équations indiquées (voir §§ 4 et 6), j'ai rassemblé dans le présent travail d'autres systèmes d'équations pouvant servir avantageusement dans certains cas; ce sont surtout ceux pour la détermination des coordonnées standard et pour le calcul des coordonnées équatoriales, pour un centre donné du cliché, sous la forme des développements en séries des puissances. Cela a été fait dans le but des travaux et recherches futurs dans notre observatoire.

Pour le calcul des éléments, je me suis servi de la méthode de Trépied et de Turner, qui est d'une grande efficacité.

Pour certains cas où l'on peut se contenter d'une approximation des éléments, sans avoir recours à la méthode des moindres carrés, j'ai indiqué les équations donnant la solution valable pour une disposition dissymétrique des étoiles de repère dans le champ.

L'exposé des méthodes est complété par un exemple numérique donnant la marche des calculs sans abréviations importantes.

**1. Définitions.** La détermination photographique de la position d'une étoile ou d'un objet inconnu est basée sur

\*) Voir Publications de l'Observatoire National de Prague, No 9.

1° les coordonnées sphériques (équatoriales)  $\alpha, \delta$ , pour une certaine époque, d'un certain nombre d'étoiles de repère sur le cliché;

2° les coordonnées rectilignes mesurées  $X, Y$  de ces étoiles de repère et de l'étoile inconnue.

L'objectif de la lunette, supposé sans aberrations, donne les images des étoiles en projection centrale sur le plan focal. Si l'on décrit une sphère de rayon égal à la longueur focale de l'objectif, prise comme unité, on peut y tracer (voir fig. 1) par cette projection le pôle boréal  $P$ , l'intersection

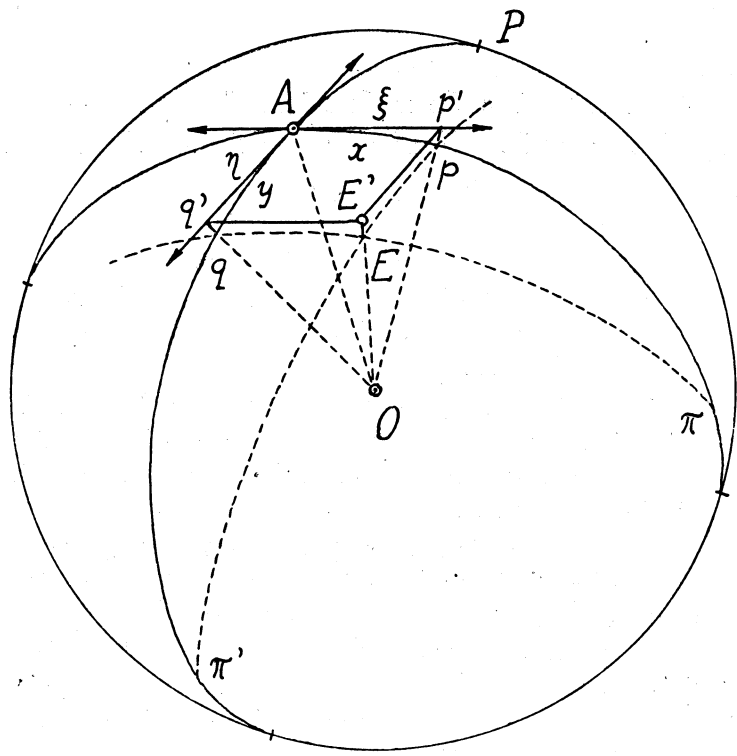


Fig. 1. Définition des coordonnées standard  $\xi, \eta$  pour une étoile  $E$ .

$A$  de l'axe optique de l'objectif prolongé vers le centre de la région photographiée, le méridien  $PA$ , le grand cercle perpendiculaire à  $PA$  et l'image d'une étoile  $E$ .

$A$  étant le centre théorique de la région, les deux grands cercles  $PA$  et  $AQ$ , ayant comme pôles  $\pi$  et  $\pi'$  respectivement, déterminent un système de *coordonnées curvilignes*, arcs de grand cercle  $x, y$ , avec origine en  $A$ ,  $x$  positif vers l'est,  $y$  positif vers le nord. Les tangentes à ces deux cercles au point  $A$  représentent le système d'axes des *coordonnées standard* de H. H. Turner  $\xi, \eta$ , ou coordonoées rectilignes calculées, leur sens étant le même que précédemment.

La méthode de réduction consiste dans la formation de trois systèmes d'équations permettant

1° de transformer les coordonnées sphériques  $\alpha, \delta$  en coordonnées standard  $\xi, \eta$  (en radians) ou  $X_0, Y_0$  (en minutes d'arc) pour un centre donné;

2° de calculer les corrections des coordonnées rectilignes mesurées  $X, Y$  dues aux effets des phénomènes qui font varier les positions des étoiles (précession, nutation, réfraction et aberration);

3° de transformer les coordonnées rectilignes mesurées corrigées  $X_r, Y_r$ , affectées encore des erreurs instrumentales, en coordonnées standard  $X_0, Y_0$ , ou coordonnées rectilignes calculées ( $X_c, Y_c$ ). Les différents procédés pour la formation de ces systèmes sont donnés dans la suite.

**2. Relations entre les coordonnées sphériques  $\alpha, \delta$  et les coordonnées standard  $\xi, \eta$  pour un centre donné.** La transformation des coordonnées équatoriales  $\alpha, \delta$  en coordonnées standard de Turner se fait au moyen des coordonnées curvilignes.

En appelant  $A, D$  les coordonnées équatoriales du centre théorique  $A$ , par  $\alpha, \delta$  celles de l'étoile  $E$ , on a, selon la figure 1,  $EP = 90^\circ - \delta$ ,  $Pq = 90^\circ - D - y$ ,  $\sphericalangle EPq = (\alpha - A)$  et

$$\begin{aligned} Ap = x & \quad Ep = x_1 & \quad \xi = \text{tang } x \\ Aq = y & \quad Eq = y_1 & \quad \eta = \text{tang } y. \end{aligned} \quad (1)$$

Au moyen des triangles sphériques il est

$$\begin{aligned} \text{tang } x_1 &= \text{tang } x \cos y \\ \text{tang } y_1 &= \text{tang } y \cos x \\ \sin \delta &= \sin (D + y) \cos x_1 \\ \cos \delta \sin (\alpha - A) &= \sin x_1 \\ \cos \delta \cos (\alpha - A) &= \cos (D + y) \cos x_1, \end{aligned} \quad (2)$$

d'où résulte le système fondamental de Turner<sup>1), 2)</sup>

$$\begin{aligned} \text{tang } (\alpha - A) &= \xi \cos y \sec (D + y) \\ \text{tang } y &= \eta \\ \text{tang } \delta &= \text{tang } (D + y) \cos (\alpha - A), \end{aligned} \quad (3)$$

ou, si l'on exprime les  $\xi, \eta$  en minutes d'arc,  $X_0, Y_0$  dans la notation de J. Lagarde<sup>3)</sup> ( $X_c, Y_c$  chez Trépiéd<sup>4)</sup> p. XLIII.),

$$\begin{aligned} \xi &= X_0 \sin 1' \\ \eta &= Y_0 \sin 1' \\ \text{tang } (\alpha - A) &= X_0 \sin 1' \cos y \sec (D + y) \\ \text{tang } y &= Y_0 \sin 1' \\ \text{tang } \delta &= \text{tang } (D + y) \cos (\alpha - A). \end{aligned} \quad (4)$$

Ce système fondamental permet de calculer de manière rigoureuse les coor-

données standard  $X_0, Y_0$  si l'on connaît  $\alpha, \delta$ , ou inversement, et cela pour un centre aux coordonnées  $A, D$  et au moyen de la coordonnée curviligne  $y$ .

Ce système devient donc un système de transformation dès que l'on détermine les coordonnées du centre théorique  $A, D$ , ce qui se fait par approximations successives.

Au lieu du système de Turner on peut utiliser d'autres équations de transformation où les coordonnées curvilignes ne figurent plus.

En éliminant  $x_1$  et  $y$  des équations (2) Ch. Trépied a obtenu<sup>4)</sup> le système le plus simple [voir F. W. Dyson<sup>5)] qui existe entre les coordonnées sphériques et celles standard, pour un centre donné  $A, D$ ,</sup>

$$\begin{aligned} \sin D + \eta \cos D &= (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} \sin \delta \\ \xi &= (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} \cos \delta \sin (\alpha - A) \\ \cos D - \eta \sin D &= (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} \cos \delta \cos (\alpha - A), \end{aligned} \quad (5)$$

où le radical est à prendre positivement.

Ces équations, dont chacune est une conséquence des deux autres, déterminent soit  $(\alpha - A)$  et  $\delta$  comme fonctions de  $\xi, \eta$  et de la déclinaison du centre

$$\begin{aligned} \text{tang } (\alpha - A) &= \frac{\xi}{\cos D - \eta \sin D} \\ \sin \delta &= \frac{\sin D + \eta \cos D}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (6)$$

soit inversement les coordonnées standard  $\xi, \eta$  en fonctions de  $\delta, D$  et de la différence  $(\alpha - A)$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\cos \delta \sin (\alpha - A)}{\sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (\alpha - A)} \\ \eta &= \frac{\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos (\alpha - A)}{\sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (\alpha - A)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Les équations (6) et (7) représentent donc la *seconde forme du système de transformation pour un centre  $A, D$  donné, qui ne contient plus les coordonnées curvilignes.*

**3. Développements en séries.** Ces dernières équations fournissent les développements en séries qui peuvent être utiles si la déclinaison  $D$  du centre n'est pas trop grande. On a selon Ch. Trépied,<sup>4)</sup> H. Jacoby<sup>7), 8)</sup> et A. A. Rambaut<sup>9)</sup> [les quatre premières termes ayant été toutefois indiqués par F. W. Dyson<sup>5)</sup> et H. H. Turner<sup>6)</sup>]

$$\begin{aligned}
(\alpha - A) \cos D &= \xi + \xi \eta \operatorname{tang} D \\
&+ \xi \eta^2 \operatorname{tang}^2 D - \frac{1}{3} \xi^3 \operatorname{séc}^2 D \\
&+ \xi \eta^3 \operatorname{tang}^3 D - \xi^3 \eta \operatorname{séc}^2 D \operatorname{tang} D \\
&+ \xi \eta^4 \operatorname{tang}^4 D - 2 \xi^3 \eta^2 \operatorname{séc}^2 D \operatorname{tang}^2 D + \frac{1}{5} \xi^5 \operatorname{séc}^4 D + \dots, \\
(\delta - D) &= \eta - \frac{1}{2} \xi^2 \operatorname{tang} D \\
&- \frac{1}{3} \eta^3 - \frac{1}{2} \xi^2 \eta \operatorname{séc}^2 D \\
&+ \frac{1}{8} \xi^4 \operatorname{tang} D (3 + \operatorname{tang}^2 D - \frac{1}{2} \xi^2 \eta^2 \operatorname{tang}^3 D \\
&+ \frac{3}{8} \xi^4 \eta \operatorname{séc}^4 D + \frac{1}{2} \xi^2 \eta^3 (1 - \operatorname{tang}^4 D) + \frac{1}{5} \eta^5 + \dots
\end{aligned} \tag{8}$$

La première série contient seulement les puissances impaires de  $\xi$ , car  $(\alpha - A)$  change le signe avec  $\xi$ ; dans la deuxième série on rencontre les puissances paires de  $\eta$  puisque, à l'exception du cas  $D = 0$ , les cercles de déclinaison se projettent dissymétriquement par rapport à l'axe des  $\xi$ .

Pareillement on a (voir aussi W. Zurhellen<sup>15</sup>) p. 88)

$$\begin{aligned}
\xi &= (\alpha - A) \cos D - (\alpha - A) (\delta - D) \sin D \\
&+ \frac{1}{6} (\alpha - A)^3 [3 \cos^2 D - 1] \cos D \\
&- \frac{1}{6} (\alpha - A)^3 (\delta - D) \sin D [6 \cos^2 D - 1] + \\
&\quad - \frac{1}{3} (\alpha - A) (\delta - D)^3 \sin D \\
&+ \frac{1}{2} (\alpha - A)^3 (\delta - D)^2 \sin^2 D \cos D \\
&+ \frac{1}{120} (\alpha - A)^5 [\cos D - 15 \cos^3 D + 30 \cos^5 D] + \dots, \\
\eta &= (\delta - D) + \frac{1}{2} (\alpha - A)^2 \sin D \cos D \\
&+ \frac{1}{2} (\alpha - A)^2 (\delta - D) \cos 2D + \frac{1}{3} (\delta - D)^3 \\
&+ \frac{1}{24} (\alpha - A)^4 [6 \cos^2 D - 1] \sin D \cos D - \\
&\quad - \frac{1}{2} (\alpha - A)^2 (\delta - D)^2 \sin D \cos D \\
&+ \frac{2}{15} (\delta - D)^5 + \frac{1}{6} (\alpha - A)^2 (\delta - D)^3 \cos^2 D + \\
&+ \frac{1}{24} (\alpha - A)^4 (\delta - D) [(6 \cos^2 D - 1) \cos 2D - \frac{3}{2} \sin^2 2D] \dots
\end{aligned} \tag{9}$$

Sur ces séries sont basées les tables de H. Jacoby<sup>21)</sup> contenant les logarithmes des coefficients pour le champ ne dépassant pas 1° et pour  $D$ , de degré en degré, jusqu'à 75°.

Les séries (8) et (9) sont valables pour les coordonnées exprimées en radians. Si l'on exprime les coordonnées standard  $\xi$ ,  $\eta$  et la déclinaison  $\delta$  en secondes d'arc, la différence  $(\alpha - A)$  en seconds du temps, on a les séries données par Arth. König<sup>10)</sup>, abrégées pour le champ de 1°,

$$\begin{aligned}
 X'' &= 15 \cos D (\alpha - A)^s - \frac{3}{2} 10^6 \sin 1'' \sin D \frac{(\alpha - A)^s}{100} \cdot \frac{(\delta - D)''}{1000} \\
 &\quad + \frac{9}{16} 10^9 \sin^2 1'' \cos D (3 \cos^2 D - 1) \left[ \frac{(\alpha - A)^s}{100} \right]^3 + \dots \\
 Y'' &= (\delta - D)'' + \frac{1}{3} [(\delta - D)']^3 \sin^2 1'' \\
 &\quad + \frac{9}{16} 10^6 \sin 1'' \sin 2D \left[ \frac{(\alpha - A)^s}{100} \right]^2 \\
 &\quad + \frac{9}{8} 10^9 \sin^2 1'' \cos 2D \left[ \frac{(\alpha - A)^s}{100} \right]^2 \frac{(\delta - D)''}{1000} + \dots
 \end{aligned} \tag{10}$$

et inversement

$$\begin{aligned}
 (\alpha - A)^s &= \frac{1}{15} \sec D \cdot X'' - \frac{1}{45} (X'')^3 \sin^2 1'' \sec^3 D \\
 &\quad + \frac{1}{15} 10^6 \sin 1'' \sec D \tan D \frac{X''}{1000} \cdot \frac{Y''}{1000} \\
 &\quad + \frac{1}{15} 10^9 \sin^2 1'' \sec D \tan^2 D \frac{X''}{1000} \left( \frac{Y''}{1000} \right)^2 + \dots \\
 (\delta - D)'' &= Y'' - \frac{1}{3} (Y'')^3 \sin^2 1'' \\
 &\quad - \frac{1}{2} 10^6 \sin 1'' \tan D \left( \frac{X''}{1000} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} 10^9 \sin^2 1'' \sec^2 D \left( \frac{X''}{1000} \right)^2 \left( \frac{Y''}{1000} \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{11}$$

Pour les points situés près du centre de la plaque, il est utile d'avoir les relations entre les variations finies des différences  $(\alpha - A)$ ,  $(\delta - D)$  et les variations des coordonnées  $\xi$ ,  $\eta$ . On a selon (8) jusqu'aux termes du second ordre dans les variations

$$\begin{aligned}
 \Delta(\alpha - A) &= \Delta\xi \sec D \\
 &\quad + (\xi \Delta\eta + \eta \Delta\xi) \sec D \tan D - \xi^2 \Delta\xi \sec^3 D \\
 &\quad + (\eta^2 \Delta\xi + 2\xi\eta \Delta\eta) \sec D \tan^2 D \\
 &\quad + \Delta\xi \Delta\eta \sec D \tan D + \dots
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\Delta(\delta - D) = \Delta\eta - \xi \Delta\xi \operatorname{tang} D - \frac{1}{2} (\xi^2 \Delta\xi + 2\xi\eta \Delta\xi) \operatorname{séc}^2 D - \eta^2 \Delta\eta \\ - \frac{1}{2} (\Delta\xi)^2 \operatorname{tang} D + \dots$$

4. **Développements spéciaux et tables.** Les équations fondamentales sont la base encore des développements spéciaux, très pratiques pour certains cas.

1. H. H. Turner a montré que pour  $D \leq 32^\circ$  on peut calculer d'abord  $\eta$  et puis  $\xi$  par les développements approximatifs

$$\eta = (\delta - D) + \frac{1}{4} (\alpha - A)^2 \sin 2D \\ + \frac{1}{2} (\alpha - A)^2 (\delta - D) \cos 2D + \frac{1}{3} (\delta - D)^3 \quad (13) \\ \xi = (\alpha - A) \left[ 1 + \frac{1}{3} (\alpha - A)^2 \right] (\cos D - \eta \sin D)$$

et a donné des tables spéciales dans le Oxford Astrographic Catalogue.<sup>11)</sup>

2. Sir F. Dyson<sup>5)</sup> a indiqué les séries également simples

$$\xi = \sin(\alpha - A) \cos \delta + \frac{1}{2} \xi (\xi^2 + \eta^2) + \dots \\ \eta = \operatorname{tang}(\delta - D) + \frac{1}{2} \xi^2 \operatorname{tang} \delta \quad (14) \\ - \frac{1}{8} \xi^4 \operatorname{tang} \delta \frac{\cos(\delta - D) \cos(\delta + D)}{\cos^2 \delta} + \dots$$

où on peut remplacer, dans les seconds membres, les  $\xi$ ,  $\eta$  par les valeurs approchées et les termes négligés sont du cinquième ordre. Ces équations sont la base des tables de A. C. Hinks.<sup>22)</sup>

3. De la première équation de (6) et de la deuxième série (13) on peut déduire un système très simple donnant  $(\alpha - A)$  et  $\delta$ , indiqué par H. Spencer-Jones dans ses instructions<sup>21)</sup>

$$\operatorname{tang}(\alpha - A) = \frac{\xi \operatorname{séc} D}{1 - \eta \operatorname{tang} D} \quad (15) \\ \delta = D + \eta - \frac{1}{2} \xi^2 \operatorname{tang}(D + \eta) - \frac{1}{3} \eta^3 - \dots$$

Les coordonnées  $\xi$ ,  $\eta$  sont exprimées en radians; pour obtenir  $\delta$ , il faut en tenir compte.

4. Si l'on connaît les coordonnées curvilignes  $x_1$  et  $y$  définies plus haut, on peut obtenir les différences  $(\alpha - A)$  et  $(\delta - D)$  par les développements indiqués par M. Loewy<sup>13)</sup>



$$(\alpha - A) \cos \delta = x_1 + \left( \frac{\text{tang } x_1}{\sin 1''} - x_1 \right) +$$

$$- \frac{1}{6} x_1^3 (3 - \sec^2 \delta) \sin^2 1'' + \frac{3}{40} x_1^5 \sec^4 \delta \sin^4 1'' + \dots \quad (16)$$

$$(\delta - D) = y - \frac{1}{2} x_1^2 \text{tang } (D + y) \sin 1'' \times$$

$$\times \left[ 1 - \frac{1}{12} x_1^2 \sin^2 1'' - \frac{1}{4} x_1^2 \sin^2 1'' \text{tang}^2 (D + y) \right] + \dots,$$

valables pour les coordonnées exprimées en secondes d'arc; la première équation contient seulement les fonctions de la déclinaison  $\delta$  de l'étoile et non celle  $D$  du centre.

5. Pour la transformation des coordonnées standard en ascension droite et en déclinaison servent les tables célèbres de M. Loewy<sup>23</sup>) dont la construction a été basée sur le système de P. Henry<sup>14</sup>)

$$\begin{aligned} \text{tang } x &= \xi \cos y & \text{tang } y &= \eta & (17) \\ \sin x &= \sin (\alpha - A) \cos \delta & \sin \delta &= \sin (D + y) \cos x \end{aligned}$$

contenant les coordonnées curvilignes, définies plus haut.

Les deux premières équations peuvent être écrites sous la forme

$$\begin{aligned} x &= \xi - [(\text{tang } x - x) \sec y + x (\sec y - 1)] \\ y &= \eta - (\text{tang } y - y), \end{aligned} \quad (18)$$

ou sous la forme approchée

$$\begin{aligned} x &= \xi - (\text{tang } \xi - \xi + 2\xi \sin^2 \frac{1}{2}\eta) = \xi - d\xi \\ y &= \eta - (\text{tang } \eta - \eta) = \eta - d\eta \end{aligned} \quad (19)$$

si l'on remplace dans les seconds membres des équations (18) les coordonnées curvilignes  $x$ ,  $y$  par celles standard  $\xi$ ,  $\eta$ .

Les corrections  $d\xi$ ,  $d\eta$  sont données, pour un champ de  $1^\circ$  et pour la déclinaison du centre  $D$  dans les limites de  $\pm 55^\circ 20'$ , dans les tables I et II de Loewy. Une fois les  $x$ ,  $y$  déterminées, les équations

$$\begin{aligned} \sin (\alpha - A) &= \sin x \sec \delta \\ \sin \delta &= \sin (D + y) \cos x \end{aligned}$$

donnent  $\alpha$  et  $\delta$ ; on peut les trouver encore au moyen des tables III et IV de Loewy, donnant

$$\begin{aligned} (\alpha - A) \cos \delta &= x + t_x \\ D + y &= \delta + t_d. \end{aligned} \quad (20)$$

6. Sur le système de Turner sont basées les tables de B. L. Newkirk<sup>24</sup>); en posant  $d = D + y$ , où  $d$  est alors la déclinaison du point d'in-

tersection du méridien du centre  $(A, D)$  et du grand cercle perpendiculaire à lui et passant par l'étoile  $E(\alpha, \delta)$ , on peut développer les fonctions trigonométriques selon les puissances des différences  $(d - D)$  et  $(\alpha - A)$  exprimées en degrés. On obtient ainsi la transformation au moyen des tables des quantités  $A^*, B^*, C^*$  \*)

$$\begin{aligned} \text{où} \quad & d - \delta = B^* \\ & k\eta = R \operatorname{tang} (d - D) = (d - D) + A^* \\ & k\xi \operatorname{séc} d = (\alpha - A) + C^* \end{aligned} \quad (21)$$

et où  $k$  est le facteur exprimant le nombre des degrés dans un radian  $R = 57.29578^\circ$  divisé par la distance focale exprimée en unités dans lesquelles on mesure les  $\xi$  et  $\eta$ . On a pour les quantités  $A^*$  et  $C^*$ , exprimées en degrés

$$\begin{aligned} A^* &= (d - D) \left\{ \frac{(d - D)^2}{3} + \frac{6}{5} \left[ \frac{(d - D)^2}{3} \right]^2 + \dots \text{etc.} \right\} \\ C^* &= (\alpha - A) \left\{ \frac{(\alpha - A)^2}{3} + \frac{(d - D)^2}{2} + \frac{5}{6} \left[ \frac{(d - D)^2}{2} \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6}{5} \left[ \frac{(\alpha - A)^2}{3} \right]^2 + \frac{(\alpha - A)^2}{3} \cdot \frac{(d - D)^2}{2} + \dots \text{etc.} \right\} \end{aligned}$$

7. Au moyen des équations de Turner également, A. König<sup>10)</sup> a indiqué deux systèmes de transformation complétés par des développements en séries rapidement convergentes

$$\begin{aligned} \xi &= \operatorname{tang} (\alpha - A) \cos d \operatorname{séc} (D - d) \\ \eta &= \operatorname{tang} (d - D) \\ d &= \delta + \operatorname{tang}^2 \frac{(\alpha - A)}{2} \sin 2\delta + \frac{1}{2} \operatorname{tang}^4 \frac{(\alpha - A)}{2} \sin 4\delta + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} (\alpha - A) &= \xi \operatorname{séc} d \cos (d - D) \\ \operatorname{tang} (d - D) &= \eta \\ \delta &= d - \operatorname{tang}^2 \frac{(\alpha - A)}{2} \sin 2d + \frac{1}{2} \operatorname{tang}^4 \frac{(\alpha - A)}{2} \sin 4d + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Les valeurs de  $\operatorname{tang}^2 \frac{(\alpha - A)}{2}$  sont à tirer d'une table pratique de M. König.<sup>25)</sup>

Pour faciliter le calcul de  $(\alpha - A)$  et  $\delta$  au moyen du système de Turner servent les tables très connues de J. Lagarde<sup>26)</sup> (voir § 11), de même que celles de A. Hnatek<sup>27)</sup>, basées partiellement sur les équations de Trépiéd.

\*) Les astérisques ne figurent pas dans le mémoire de Newkirk; ils servent ici pour éviter la confusion.

Le système de Turner, changé par C. Vick par l'addition d'une variable auxiliaire<sup>10)</sup> a servi finalement pour la construction des tables très étendues de J. Peters.<sup>28)</sup>

4. Relations entre les coordonnées rectilignes  $X, Y$  mesurées et celles  $X_0, Y_0$  standard. Les coordonnées  $X, Y$  mesurées par rapport au réseau imprimé photographiquement sur la plaque diffèrent de celles  $X_0, Y_0$  standard par suite de ce qu'il existe

1° une différence de l'échelle; pour transformer les coordonnées, mesurées en millimètres, en minutes d'arc, il faut les multiplier par un coefficient de l'échelle  $\tau$ ;

2° une erreur de centrage donnée par les coordonnées très petites  $\delta\xi, \delta\eta$  du centre du réseau imprimé par rapport au centre standard  $A$ , donné par l'intersection de l'axe optique de l'objectif avec le plan focal;

3° une différence d'orientation  $i$  entre les directions des axes des  $X, Y$  et les axes standard donnés par le méridien du centre standard  $AP$  et le grand cercle  $PQ$  perpendiculaire à lui;

4° une inclinaison de la plaque photographique, qui n'est pas rigoureusement perpendiculaire à l'axe optique, ce qui se traduit par le fait que le coefficient de l'échelle varie avec les coordonnées  $X, Y$  et les axes deviennent obliquangles.

En exprimant les différences  $\delta\xi$  et  $\delta\eta$  selon les séries (23) et en indiquant par  $p$  et  $q$  les coefficients de l'inclinaison de la plaque, on a en somme

$$\begin{aligned} \delta\xi &= (1 - Y \cdot \sin 1' \operatorname{tang} D) \cos D \delta A \\ \delta\eta &= \delta D + X \cdot \sin 1' \operatorname{tang} D \cos D \delta A \\ X_0 &= \delta\xi + \tau (X \cos i + Y \sin i) + X (pX + qY) \\ Y_0 &= \delta\eta + \tau (Y \cos i - X \sin i) + Y (pX + qY), \end{aligned} \quad (25)$$

les dernières parenthèses dans les seconds membres étant conformes aux expressions de W. Zurhellen.<sup>15)</sup>

Si l'on développe les  $\sin i$  et  $\cos i$  en s'arrêtant aux termes du second ordre de la petite quantité  $i$  et si l'on pose (voir Trépied<sup>2)</sup> p. LI.)

$$\begin{aligned} m &= \operatorname{tang} D \sin 1' \\ \delta\xi &= \delta A \cos D, \quad \delta\eta = \delta D, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} X_0 &= \delta\xi + (\tau + pX) X + (\tau i + qX - m \delta\xi) Y \\ Y_0 &= \delta\eta + (\tau + qY) Y - (\tau i - pY - m \delta\xi) X. \end{aligned}$$

Dans la pratique il n'est pas nécessaire de calculer les coefficients  $p$  et  $q$ , d'ailleurs très petits; il suffit d'introduire deux coefficients de l'échelle  $\tau_x, \tau_y$  suivant les deux axes et deux angles d'orientation différents  $i_x, i_y$  et on est conduit au système bilinéaire à six constantes

$$\begin{aligned} X_0 &= \delta\xi + \tau_x X + i_x Y \\ Y_0 &= \delta\eta + \tau_y Y - i_y X. \end{aligned} \quad (26)$$

Ce système devient *un système de transformation dès que l'on détermine, au moyen des étoiles de repère, les six constantes*  $\delta\xi$ ,  $\delta\eta$ ,  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $i_x$ ,  $i_y$  *dites éléments du cliché.*

6. **Corrections des coordonnées rectilignes mesurées  $X$ ,  $Y$  dues aux effets différentiels de précession, nutation, aberration et réfraction atmosphérique.** Toutes ces corrections peuvent être exprimées en général comme séries des puissances des coordonnées rectangulaires  $x$ ,  $y$

$$\begin{aligned} \Delta X &= ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 + \dots \\ \Delta Y &= a'x + b'y + c'x^2 + d'xy + e'y^2 + \dots \end{aligned}$$

dont les coefficients sont calculables au moyen des dates d'observation.

La précession et la nutation ne changent pas les positions relatives des astres, les corrections respectives représentent une rotation du système d'axes et par conséquent peuvent être associées à l'orientation de la plaque. Il en est de même pour l'aberration de la lumière, puisque les termes du second ordre sont négligeables et les termes linéaires équivalent à deux changements simultanés d'orientation et d'échelle.

Les effets de la réfraction différentielle doivent être calculés. Ils sont donnés d'après H. H. Turner<sup>10)</sup> et H. Spencer-Jones<sup>12)</sup> comme séries des puissances des coordonnées rectangulaires  $x$ ,  $y$  dont les coefficients contiennent la constante de réfraction  $k$  et les coordonnées rectangulaires du zénith  $X_z$ ,  $Y_z$  sur la plaque, supposée prolongée comme un plan tangent au centre de la région; on a, selon les deux auteurs,

$$\Delta x = k [(1 + X_z^2) x + X_z Y_z y] - k [X_z (2 + X_z^2) x^2 + Y_z (1 + 2X_z^2) xy + X_z (1 + Y_z^2) y^2] + \dots$$

$$\Delta y = k [X_z Y_z x + (1 + Y_z^2) y] - k [Y_z (1 + X_z^2) x^2 + X_z (1 + 2Y_z^2) xy + Y_z (2 + Y_z^2) y^2] + \dots$$

ou, si l'on exprime les coordonnées (et la distance focale  $f$ ) en millimètres et sépare les termes linéaires de ceux du second ordre,

$$\begin{aligned} \Delta_1 x &= k [(1 + X_z^2) x + X_z Y_z y] \\ \Delta_1 y &= k [X_z Y_z x + (1 + Y_z^2) y] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\Delta_2 x = -\frac{1}{f} \cdot k [X_z (2 + X_z^2) x^2 + Y_z (1 + 2X_z^2) xy + X_z (1 + Y_z^2) y^2]$$

$$\Delta_2 y = -\frac{1}{f} \cdot k [Y_z (1 + X_z^2) x^2 + X_z (1 + 2Y_z^2) xy + Y_z (2 + Y_z^2) y^2].$$

En désignant par  $\varphi$ ,  $H$ ,  $\zeta$  et  $\gamma$  la latitude géographique et l'angle horaire, la distance zénithale et l'angle parallactique du centre dans lesquels le cliché a été pris, on trouve  $X_z$  et  $Y_z$  en utilisant la transformation de Bessel

$$\begin{aligned} \text{tang } N &= \text{cotg } \varphi \text{ tang } H \\ X_z &= \text{tang } \zeta \sin \gamma = \frac{\sin H \cdot \sin N}{\sin (N + D)} \\ Y_z &= \text{tang } \zeta \cos \gamma = \text{cotg } (N + D) \\ \text{tang } \zeta &= X_z : \sin \gamma = Y_z : \cos \gamma. \end{aligned} \quad (28)$$

Si l'on pose

$$\varrho = k(1 + X_z^2) \quad \frac{1}{2}\omega = k \cdot X_z Y_z \quad \varrho' = k(1 + Y_z^2), \quad (29)$$

les termes du premier ordre de la réfraction (en revenant à la notation  $X$ ,  $Y$  pour les coordonnées rectangulaires)

$$\begin{aligned} \Delta_1 X &= \varrho X + \frac{1}{2}\omega Y \\ \Delta_1 Y &= \varrho' Y - \frac{1}{2}\omega X \end{aligned}$$

représentent deux changements de l'échelle différents  $\varrho$ ,  $\varrho'$ , ainsi que deux rotations de sens inverses  $\frac{1}{2}\omega$  et  $-\frac{1}{2}\omega$  pour les deux axes qui peuvent être ajoutés aux constantes du cliché.

Les termes du second ordre en (27), que l'on peut obtenir aussi par la méthode graphique de A. R. Hinks,<sup>17)</sup> représentent une déformation (elliptique ou hyperbolique) du champ et doivent nécessairement être calculés et ajoutés aux coordonnées rectilignes mesurées de toutes les étoiles de sorte que l'on aura

$$\begin{aligned} X_r &= X + \Delta_2 X \\ Y_r &= Y + \Delta_2 Y. \end{aligned}$$

*Les relations entre les coordonnées standard  $X_0$ ,  $Y_0$  et celles rectilignes mesurées corrigées  $X_r$ ,  $Y_r$  conservent donc la forme à six constantes différentes*

$$\begin{aligned} X_0 &= \delta\xi + (\tau_x + \varrho) X_r + (i_x + \frac{1}{2}\omega) Y_r \\ Y_0 &= \delta\eta + (\tau_y + \varrho') Y_r - (i_y - \frac{1}{2}\omega) X_r, \end{aligned} \quad (30)$$

où  $\varrho$ ,  $\varrho'$  et  $\frac{1}{2}\omega$  sont à déterminer d'avance au moyen des équations (29).

**7. Détermination des éléments.** Chaque étoile de repère donnant deux équations du type (30), l'ensemble est à résoudre par la méthode des moindres carrés suivant le procédé de Ch. Trépied<sup>2)</sup> (p. LIII.) modifié par H. H. Turner et F. Gonnessiat<sup>18)</sup> qui ont indiqué le moyen d'opérer seulement avec trois chiffres significatifs.

Le procédé Turner-Gonnessiat suppose que l'on connaît, par une approximation, les valeurs approchées des éléments  $\delta\xi$ ,  $\delta\eta$ ,  $\tau$  et  $i$  que l'on

désignera par  $\delta\xi_0$ ,  $\delta\eta_0$ ,  $\tau_0$  et  $i_0$ . Alors les équations (30) peuvent être écrites sous la forme

$$\begin{aligned} X_0 &= \delta\xi_0 + \Delta\delta\xi_0 + (\tau_0 + \varrho + \Delta\tau_x) X_r + (i_0 + \frac{1}{2}\omega + \Delta i_x) Y_r \\ Y_0 &= \delta\eta_0 + \Delta\delta\eta_0 + (\tau_0 + \varrho' + \Delta\tau_y) Y_r - (i_0 - \frac{1}{2}\omega + \Delta i_y) X_r \end{aligned}$$

et si l'on pose

$$\begin{aligned} \delta\xi &= \delta\xi_0 + \Delta\delta\xi \\ \delta\eta &= \delta\eta_0 + \Delta\delta\eta \\ \tau_x &= \tau_0 + \varrho + \Delta\tau_x & i_x &= i_0 + \frac{1}{2}\omega + \Delta i_x \\ \tau_y &= \tau_0 + \varrho + \Delta\tau_y & i_y &= i_0 - \frac{1}{2}\omega + \Delta i_y, \end{aligned}$$

on retrouve les équations de transformation sous la forme définitive à six constantes

$$\begin{aligned} X_0 &= \delta\xi + \tau_x X_r + i_x Y_r \\ Y_0 &= \delta\eta + \tau_y Y_r - i_y X_r, \end{aligned} \quad (31)$$

les  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $i_x$ ,  $i_y$  étant différents des  $\tau_y$ ,  $\tau_x$ ,  $i_x$ ,  $i_y$ . En écrivant pour abrégé\*)

$$\begin{aligned} 10 [(\tau_0 + \varrho) X_r + (i_0 + \frac{1}{2}\omega) Y_r + \delta\xi_0 - X_0] &= n \\ 10 [(\tau_0 + \varrho') Y_r - (i_0 - \frac{1}{2}\omega) X_r + \delta\eta_0 - Y_0] &= n' \\ a = 1 & \quad b = 0.01X_r & \quad c = 0.01Y_r, \\ 10\Delta\delta\xi_0 = x & \quad 1000\Delta\tau_x = y & \quad 1000\Delta i_x = z \\ 10\Delta\delta\eta_0 = x' & \quad -1000\Delta i_y = y' & \quad 1000\Delta i_y = z' \end{aligned} \quad (32)$$

et substituant ces valeurs dans (31), on obtient un système linéaire

$$\begin{aligned} ax + by + cz + n &= 0 \\ ax' + by' + cz' + n' &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

dont les coefficients peuvent être limités à trois chiffres significatifs puisque  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ne demandent que trois décimales. Ainsi pour  $\nu$  étoiles de repère on a à résoudre deux systèmes d'équations normales

$$\begin{aligned} [aa] x + [ab] y + [ac] z + [an] &= 0 & [aa] x' + [ab] y' + [ac] z' + [an'] &= 0 \\ [bb] y + [bc] z + [bn] &= 0 & [bb] y' + [bc] z' + [bn'] &= 0 \\ [cc] z + [cn] &= 0 & [cc] z' + [cn'] &= 0, \end{aligned} \quad (34)$$

dont la solution fournit les valeurs exactes des éléments

$$\begin{aligned} \delta\xi &= \delta\xi_0 + 0.1x & \delta\eta &= \delta\eta_0 + 0.1x' \\ \tau_x &= \tau_0 + \varrho + 0.001y & \tau_y &= \tau_0 + \varrho' + 0.001y' \\ i_x &= i_0 + \frac{1}{2}\omega + 0.001z & -i_y &= -i_0 + \frac{1}{2}\omega - 0.001z'. \end{aligned} \quad (35)$$

La précision des résultats obtenus est caractérisée par les résidus

\*) Les coefficients numériques sont choisis pour la réduction des clichés d'un astrographe normal (type Carte du Ciel), où 1 mm = 1'; voir l'exemple numérique, § 12, sub. 4.

$$\begin{aligned} r &= X_0' - \delta\xi - \tau_x X_r - i_y Y_r \\ r' &= Y_0 - \delta\eta - \tau_y Y_r + i_y X_r. \end{aligned} \quad (36)$$

Si les positions d'étoiles de repère ont les poids différents on peut appliquer la méthode des moindres carrés pondérée; les poids figurent dans les équations (33), (34) et dans la suite.

Selon les principes connus on peut aussi déterminer les erreurs probables et les poids des éléments obtenus.

8. Valeurs approchées des coordonnées du centre  $A$ ,  $D$  et des éléments  $i_0$ ,  $\delta\xi_0$ ,  $\delta\eta_0$ . Les premières valeurs du centre  $A$ ,  $D$  peuvent être calculées au moyen des coordonnées mesurées  $X'$ ,  $Y'$ , exprimées en minutes d'arc, d'une étoile de repère, de préférence celle située le plus près du centre. Il est approximativement, selon (4),

$$\begin{aligned} D &= \delta - Y' \\ (\alpha - A)^s &= 4X' \sec \delta. \end{aligned} \quad (37)$$

Avec cette approximation on détermine les coordonnées standard approchées pour deux étoiles de repère, selon le système

$$\begin{aligned} \text{tang}(D + y) &= \text{tang} \delta \sec(\alpha - A) \\ Y_0 \sin 1' &= \text{tang} y \\ X_0 \sin 1' &= \text{tang}(\alpha - A) \sec y \cos(D + y). \end{aligned}$$

Pour obtenir une bonne approximation de  $i_0$  il suffit de prendre deux étoiles de repère ayant les  $X_r$  (ou les ascensions droites) voisins et les  $Y_r$  (ou les déclinaisons) très différents, ou deux étoiles ayant les  $Y_r$  voisins et les  $X_r$  différents. En désignant par les indices 1, 2 les étoiles du premier, par 3, 4 celles du second couple, on a selon la première ou deuxième équation (30) (le calcul de  $\tau_0$  suit immédiatement)

$$\begin{aligned} i_0 + \frac{1}{2}\omega &= \frac{[X_{02} - (\tau_0 + \varrho) X_{r2}] - [X_{01} - (\tau_0 + \varrho) X_{r1}]}{Y_{r2} - Y_{r1}} \\ - (i_0 - \frac{1}{2}\omega) &= \frac{[Y_{04} - (\tau_0 + \varrho') Y_{r4}] - [Y_{03} - (\tau_0 + \varrho') Y_{r3}]}{X_{r4} - X_{r3}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Avec  $i_0$  déterminé, on obtient les  $\delta\xi_0$  et  $\delta\eta_0$  comme moyennes (pour  $\nu$  étoiles de repère)

$$\begin{aligned} \delta\xi_0 &= \frac{1}{\nu} \sum_k [X_{0k} - (\tau_0 + \varrho) X_{rk} - (i_0 + \frac{1}{2}\omega) Y_{rk}] \\ \delta\eta_0 &= \frac{1}{\nu} \sum_k [Y_{0k} - (\tau_0 + \varrho') Y_{rk} + (i_0 - \frac{1}{2}\omega) X_{rk}]. \end{aligned} \quad (39)$$

9. Détermination du coefficient de l'échelle  $\tau_0$ . Une première approximation du  $\tau_0$  peut être obtenue au moyen de la distance focale connue de l'objectif; pour un instrument du type international et pour  $f$  exprimé en

millimètres il est

$$f \cdot \tau_0 = 3437.747.$$

La valeur exacte du  $\tau_0$  est calculable au moyen d'une ou plusieurs paires d'étoiles de repère en tenant compte de la réfraction du premier et second ordre.

Choisissons deux paires d'étoiles aux coordonnées équatoriales  $(\alpha_1\delta_1, \alpha_2\delta_2)$ ,  $(\alpha_3\delta_3, \alpha_4\delta_4)$  et coordonnées mesurées corrigées pour la réfraction du premier et second ordre  $(X_1Y_1, X_2Y_2)_{rr}$   $(X_3Y_3, X_4Y_4)_{rr}$ . Pour chaque paire on aura la distance entre deux étoiles, en millimètres,

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= \sqrt{(X_2 - X_1)_{rr}^2 + (Y_2 - Y_1)_{rr}^2} \\ \Delta_{34} &= \sqrt{(X_4 - X_3)_{rr}^2 + (Y_4 - Y_3)_{rr}^2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Pour les distances angulaires on a les expressions [voir Dr. J. Scheiner,<sup>19</sup> p. 154]

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\delta_{12}}{2} &= \sin^2 \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} + \cos \delta_2 \cos \delta_1 \sin^2 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \\ \sin^2 \frac{\delta_{34}}{2} &= \sin^2 \frac{\delta_4 - \delta_3}{2} + \cos \delta_4 \cos \delta_3 \sin^2 \frac{\alpha_4 - \alpha_3}{2} \end{aligned}$$

et le coefficient de l'échelle est donné, avec  $\delta_{12}$  et  $\delta_{34}$  exprimés en minutes d'arc, par

$$\tau_0 \Delta_{12} = \delta_{12}, \quad \tau_0 \Delta_{34} = \delta_{34}.$$

#### 10. Un procédé direct pour une seconde approximation des éléments.

En faisant la répartition du nombre total d'étoiles selon les quatre quadrants, on peut obtenir une solution directe des équations (31) en déterminant d'abord les  $\Delta\tau_x, \Delta\tau_y, \Delta i_x, \Delta i_y$  qui figurent en facteur, et ensuite  $\Delta\delta\xi, \Delta\delta\eta$  qui sont les constantes additives.

Supposons que nous connaissions une première approximation des éléments et écrivons les équations (31) sous la forme

$$\begin{aligned} \Delta\delta\xi_0 + \Delta\tau_x X + \Delta i_x Y &= m \\ \Delta\delta\eta_0 + \Delta\tau_y Y - \Delta i_y X &= m'. \end{aligned} \quad (42)$$

En désignant par  $\nu_k$  le nombre d'étoiles de repère dans le  $k^{\text{ième}}$  quadrant, par  $\Sigma_{kj}$  la somme des valeurs sous le signe  $\Sigma$  dans le  $k^{\text{ième}}$  et  $j^{\text{ième}}$  quadrant, on peut faire avec la première équation les sommations suivantes

$$\begin{aligned} (\nu_1 + \nu_2) \Delta\delta\xi_0 + \Delta\tau_x \Sigma_{12} X + \Delta i_x \Sigma_{12} Y &= \Sigma_{12} m \\ -(\nu_3 + \nu_4) \Delta\delta\xi_0 - \Delta\tau_x \Sigma_{34} X - \Delta i_x \Sigma_{34} Y &= -\Sigma_{34} m \\ (\nu_1 + \nu_4) \Delta\delta\xi_0 + \Delta\tau_x \Sigma_{14} X + \Delta i_x \Sigma_{14} Y &= \Sigma_{14} m \\ -(\nu_2 + \nu_3) \Delta\delta\xi_0 - \Delta\tau_x \Sigma_{23} X - \Delta i_x \Sigma_{23} Y &= -\Sigma_{23} m. \end{aligned}$$



En éliminant  $\Delta\delta\xi_0$  chaque fois des deux équations consécutives on obtient

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Sigma_{12}X}{\nu_1 + \nu_2} - \frac{\Sigma_{34}X}{\nu_3 + \nu_4} \right) \Delta\tau_x + \left( \frac{\Sigma_{12}Y}{\nu_1 + \nu_2} - \frac{\Sigma_{34}Y}{\nu_3 + \nu_4} \right) \Delta i_x &= \frac{\Sigma_{12}m}{\nu_1 + \nu_2} - \frac{\Sigma_{34}m}{\nu_3 + \nu_4} \\ \left( \frac{\Sigma_{14}X}{\nu_1 + \nu_4} - \frac{\Sigma_{23}X}{\nu_2 + \nu_3} \right) \Delta\tau_x + \left( \frac{\Sigma_{14}Y}{\nu_1 + \nu_4} - \frac{\Sigma_{23}Y}{\nu_2 + \nu_3} \right) \Delta i_x &= \frac{\Sigma_{14}m}{\nu_1 + \nu_4} - \frac{\Sigma_{23}m}{\nu_2 + \nu_3}. \end{aligned} \quad (43)$$

En faisant les opérations analogues avec la deuxième équation (42) on a

$$\begin{aligned} (\nu_1 + \nu_2) \Delta\delta\eta_0 + \Delta\tau_y \Sigma_{12}Y - \Delta i_y \Sigma_{12}X &= \Sigma_{12}m' \\ -(\nu_3 + \nu_4) \Delta\delta\eta_0 - \Delta\tau_y \Sigma_{34}Y + \Delta i_y \Sigma_{34}X &= -\Sigma_{34}m' \\ (\nu_1 + \nu_4) \Delta\delta\eta_0 + \Delta\tau_y \Sigma_{14}Y - \Delta i_y \Sigma_{14}X &= \Sigma_{14}m' \\ -(\nu_2 + \nu_3) \Delta\delta\eta_0 - \Delta\tau_y \Sigma_{23}Y + \Delta i_y \Sigma_{23}X &= -\Sigma_{23}m' \end{aligned}$$

et après avoir éliminé  $\Delta\delta\eta_0$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Sigma_{12}Y}{\nu_1 + \nu_2} - \frac{\Sigma_{34}Y}{\nu_3 + \nu_4} \right) \Delta\tau_y - \left( \frac{\Sigma_{12}X}{\nu_1 + \nu_2} - \frac{\Sigma_{34}X}{\nu_3 + \nu_4} \right) \Delta i_y &= \frac{\Sigma_{12}m'}{\nu_1 + \nu_2} - \frac{\Sigma_{34}m'}{\nu_3 + \nu_4} \\ \left( \frac{\Sigma_{14}Y}{\nu_1 + \nu_4} - \frac{\Sigma_{23}Y}{\nu_2 + \nu_3} \right) \Delta\tau_y - \left( \frac{\Sigma_{14}X}{\nu_1 + \nu_4} - \frac{\Sigma_{23}X}{\nu_2 + \nu_3} \right) \Delta i_y &= \frac{\Sigma_{14}m'}{\nu_1 + \nu_4} - \frac{\Sigma_{23}m'}{\nu_2 + \nu_3}. \end{aligned} \quad (44)$$

Les systèmes (43) et (44) ont l'avantage que les sommations ont été faites de telle manière que dans chacune équation la valeur de l'une des parenthèses est essentiellement positive.

Ces équations donnent aisément les corrections  $\Delta\tau_x$ ,  $\Delta i_x$ ,  $\Delta\tau_y$ ,  $\Delta i_y$ , après quoi on obtient  $\Delta\delta\xi_0$ ,  $\Delta\eta_0$  au moyen des sommations sur tous les quadrants

$$\begin{aligned} \Delta\delta\xi_0 \Sigma\nu &= -\Delta\tau_x \Sigma X - \Delta i_x \Sigma Y + \Sigma m \\ \Delta\delta\eta_0 \Sigma\nu &= -\Delta\tau_y \Sigma Y + \Delta i_y \Sigma X + \Sigma m' \end{aligned} \quad (45)$$

et ainsi une seconde approximation des éléments quelque soit la distribution des étoiles de repère dans le champ.

Si le nombre d'étoiles est le même dans tous les quadrants, les diviseurs dans les équations (43), (44) disparaissent et on a

$$\begin{aligned} (\Sigma_{12}X - \Sigma_{34}X) \Delta\tau_x + (\Sigma_{12}Y - \Sigma_{34}Y) \Delta i_x &= \Sigma_{12}m - \Sigma_{34}m \\ (\Sigma_{14}X - \Sigma_{23}X) \Delta\tau_x + (\Sigma_{14}Y - \Sigma_{23}Y) \Delta i_x &= \Sigma_{14}m - \Sigma_{23}m \\ (\Sigma_{12}Y - \Sigma_{34}Y) \Delta\tau_y - (\Sigma_{12}X - \Sigma_{34}X) \Delta i_y &= \Sigma_{12}m' - \Sigma_{34}m' \\ (\Sigma_{14}Y - \Sigma_{23}Y) \Delta\tau_y - (\Sigma_{14}X - \Sigma_{23}X) \Delta i_y &= \Sigma_{14}m' - \Sigma_{23}m'. \end{aligned} \quad (46)$$

Dans ces équations, les valeurs dans les parenthèses

$$(\Sigma_{12}Y - \Sigma_{34}Y) \text{ et } (\Sigma_{14}X - \Sigma_{23}X)$$

sont essentiellement positives, tandis que celles dans les deux autres peuvent être positives ou négatives, mais restent toujours numériquement petites et on peut les négliger. Ainsi on a les valeurs approchées

$$\begin{aligned} \Delta\tau_x &= \frac{\Sigma_{14}m - \Sigma_{23}m}{\Sigma_{14}X - \Sigma_{23}X} & \Delta\tau_y &= \frac{\Sigma_{12}m' - \Sigma_{34}m'}{\Sigma_{12}Y - \Sigma_{34}Y} \\ \Delta i_x &= \frac{\Sigma_{12}m - \Sigma_{34}m}{\Sigma_{12}Y - \Sigma_{34}Y} & -\Delta i_y &= \frac{\Sigma_{14}m' + \Sigma_{23}m'}{\Sigma_{14}X - \Sigma_{23}X}, \end{aligned} \quad (47)$$

qui peuvent servir aussi pour le calcul rapide.\*)

11. **Calcul des coordonnées équatoriales  $\alpha$ ,  $\delta$ .** Une fois les éléments déterminés, on calcule pour chaque étoile inconnue les coordonnées rectilignes corrigées pour la réfraction du second ordre  $X_r$ ,  $Y_r$ , les coordonnées standard  $X_0$ ,  $Y_0$  et finalement  $\alpha$ ,  $\delta$  au moyen d'un système (4—24).

Les éléments  $\delta\xi$ ,  $\delta\eta$  sont toujours très petits et on peut les ajouter aux coordonnées du centre  $A$ ,  $D$  sans perte de précision pour  $(\alpha - A)$  et  $\delta$ , tant que la déclinaison  $D$  n'est pas grande\*\*).

On a ainsi in extenso les relations

$$\begin{aligned} X_0 &= \tau_x (X + \Delta_2 X) + i_x (Y + \Delta_2 Y) \\ Y_0 &= \tau_y (Y + \Delta_2 Y) - i_y (X + \Delta_2 X) \end{aligned} \quad (48)$$

avec le système

$$\begin{aligned} \text{tang } y &= [\tau_y (Y + \Delta_2 Y) - i_y (X + \Delta_2 X)] \sin l' \\ \text{tang } (\alpha - A) &= [\tau_x (X + \Delta_2 X) + i_x (Y + \Delta_2 Y)] \sin l' \cos y \sec (D + y) \\ \text{tang } \delta &= \text{tang } (D + y) \cos (\alpha - A). \end{aligned} \quad (49)$$

L'arc  $(\alpha - A)$  étant toujours petit, les tables de Lagarde <sup>26)</sup>, facilitent encore le calcul; on peut écrire

$$\begin{aligned} \log \text{tang } (\alpha - A) &= \log X_0 \sec (D + y) \\ &\quad + \log \cos y \sin l' && \text{selon la table II de Lagarde,} \\ \log (\alpha - A)^s &= \log \text{tang } (\alpha - A) \\ &\quad + \log \frac{(\alpha - A)^s}{\text{tang } (\alpha - A)} && \text{selon la table III de Lagarde.} \end{aligned}$$

Le procédé de Lagarde est aussi simple que celui de H. Spencer-Jones qui s'adapte encore bien pour le calcul à la machine.

\*) Ces formules ont été souvent utilisées par M. Pourteau à l'Observatoire de Paris.

\*\*) Pour les clichés fortement excentrés il faut corriger la valeur de l'inclinaison et appliquer formules spéciales (voir Gonnessiat<sup>18)</sup> p. VIII. et XI.).

12. Exemple numérique. Le calcul du premier cliché et de la pose centrale de la planète Eros, pris pendant l'opposition, le 10 janvier 1931\*), est reproduit en six parties dans lesquelles on détermine

1° les coordonnées approchées du centre  $A, D$ , en deux approximations;

2° les coefficients  $\varrho, \varrho'$  et  $\frac{1}{2}\omega$  de réfraction du premier ordre et les corrections du second ordre pour les étoiles de repère donnant les coordonnées mesurées corrigées  $X_r, Y_r$ ;

3° les coordonnées standard  $X_0, Y_0$  au moyen du centre  $A, D$  et des positions en  $\alpha, \delta$  (pour 1930,0) des étoiles de repère, corrigées pour les mouvements propres, selon le Generalkatalog der Eros-Anhaltsterne I. Ordnung de A. Koppf, H. Nowacki et F. Gondolatsch<sup>20</sup>), et les premières approximations de  $\delta\xi_0, \delta\eta_0$  et  $i_0$ ;

4° les éléments définitifs par la méthode des moindres carrés et le tableau des résidus  $r, r'$ ;

5° la position en  $\alpha, \delta$  (pour 1930,0) de la planète, calculée au moyen des éléments définitifs;

6° le coefficient de l'échelle  $\tau_0$ .

1. Première approximation des coordonnées du centre  $A, D$ . On utilise deux étoiles n° 723 et 778 et la valeur de  $\tau_0 = 1.003280$ , calculée d'avance (voir p. 31—32).

Etoile No	723	778
$\alpha$	10 <sup>h</sup> 28 <sup>m</sup> 18. <sup>s</sup> 541	10 <sup>h</sup> 32 <sup>m</sup> 8. <sup>s</sup> 472
$\delta$	+ 18° 21' 0." <sup>35</sup>	+ 18° 24' 32." <sup>44</sup>
$X$	— 40.4492	+ 13.8868
$Y$	— 1.4998	+ 2.0595
$\tau_0 X$	— 40.5818	+ 13.9323
$\tau_0 Y$	— 1.5047	+ 2.0663
$\delta$	+ 18° 21' 0." <sup>35</sup>	+ 18° 24' 32." <sup>44</sup>
— $\tau_0 Y$	+ 1' 30." <sup>28</sup>	— 2' 3." <sup>98</sup>
$D$	+ 18° 22' 30." <sup>63</sup>	+ 18° 22' 28." <sup>46</sup>
$\log 4$	0.60206	0.60206
$\log \tau_0 X$	1.60833 $n$	1.14402
$\log \sec \delta$	0.02266	0.02281
$\log (\alpha - A)$	2.23305 $n$	1.76889
$\alpha - A$	— 171. <sup>s</sup> 02	+ 58. <sup>s</sup> 73
$A$	10 <sup>h</sup> 31 <sup>m</sup> 9. <sup>s</sup> 56	10 <sup>h</sup> 31 <sup>m</sup> 9. <sup>s</sup> 74

La moyenne arrondie de ces deux résultats

$$A = 10^h 31^m 10^s, \quad D = + 18^\circ 22' 30''$$

\*) Voir Publications de l'Observatoire National de Prague No 9, p. 8.

sert comme base pour la seconde approximation au moyen des équations (4) et avec les coordonnées corrigées  $X_r, Y_r$ :

*Seconde approximation pour les coordonnées du centre.*

Etoile No	723		778
$(\alpha - A)^s$	— 171. <sup>s</sup> 459	+	58. <sup>s</sup> 472
$(\alpha - A)'$	— 42' 51."855	+	14' 37."080
log tang $\delta$	9.520 7306		9.522 2230
log séc $(\alpha - A)$	0.000 0338		0.000 0039
log tang $(D + y)$	9.520 7644		9.522 2269
$D + y$	+ 18° 21' 5."14	+	18° 24' 33."00
$y$	— 1' 24."86	+	2' 3."00
$y'$	— 1.4143	+	2.0500
$\Delta Y_0$	0		0
$Y_0$	— 1.4143	+	2.0500
log tang $(\alpha - A)$	8.095 8438 $n$		7.628 6167
log cos $(D + y)$	9.977 3318		9.977 1863
colog cos $y$	0		1
colog sin $1'$	3.536 2739		3.536 2739
log $X_0$	1.609 4495 $n$		1.142 0770
$X_0$	— 40.6864	+	13.8700
$X_r$	— 40.4487	+	13.8869
$(\tau_0 + \varrho) X_r$	— 40.6098	+	13.9422
$X_0 - (\tau_0 + \varrho) X_r$	— 0.0766	—	0.0722
$Y_r$	— 1.5002	+	2.0595
$(\tau_0 + \varrho') Y_r$	— 1.5063	+	2.0679
$Y_0 - (\tau_0 + \varrho') Y_r$	+ 0.0920	—	0.0179

$$i_0 + \frac{1}{2}\omega = \frac{-0.0766 + 0.0722}{-1.50 - 2.06} = + 0.001236$$

$$-(i_0 - \frac{1}{2}\omega) = \frac{+0.0920 + 0.0179}{-40.45 - 13.88} = - 0.002023$$

$$-40.6864 = + \delta\xi_0 - 40.6098 - 0.0019 \qquad -1.4143 = + \delta\eta_0 - 1.5063 + 0.0819$$

$$+ 13.8700 = + \delta\xi_0 + 13.9422 + 0.0025 \qquad + 2.0500 = + \delta\eta_0 + 2.0679 - 0.0281$$

$$\delta\xi_0 = -0.0747 \cdot 4^s \text{ séc } \delta = -0.^s315$$

$$\delta\eta_0 = +0.0102 = +0."61$$

$$A = 10^h 31^m 9.^s685$$

$$D = + 18^\circ 22' 30."61.$$

La seconde approximation ne diffère de la première que dans les fractions de seconde.

2. Calcul des corrections de réfraction du premier et second ordres. Avec la pression barométrique  $b = 740.9$  mm et la température extérieure  $t = -9.6^\circ \text{C}$  on détermine d'abord la constante de réfraction  $\beta_0$  et celle

de réfraction photographique  $k = 1.0155 \beta_0^*$ ) au moyen des tables

$$\beta_0 = 0.000\ 294\ 67 \quad k = 0.000\ 299\ 24.$$

Avec les coordonnées  $A, D$  du centre on calcule  $X_z, Y_z, \zeta$  et  $\omega$ :

$$\begin{array}{lll} A = & 10^{\text{h}}\ 31^{\text{m}}\ 10^{\text{s}} & \varphi = +\ 50^{\circ}\ 4'\ 56.^{\text{s}}5 \\ D = + & 18^{\circ}\ 22'\ 30'' & t_{\text{sid}} = \quad 6^{\text{h}}\ 11^{\text{m}}\ 35.^{\text{s}}4 \end{array} \quad \begin{array}{l} H = -\ 4^{\text{h}}\ 19^{\text{m}}\ 34.^{\text{s}}6 \\ H^0 = -\ 64^{\circ}\ 53'\ 39.^{\text{s}}0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \log \operatorname{tang} \varphi = & 9.922545 \\ \log \cos H = & 9.627665 \\ \log \operatorname{tang} N = & 9.550210 \\ N = & 19^{\circ}\ 32'\ 39'' \\ N + D = & 37^{\circ}\ 55'\ 9'' \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \log \operatorname{tg} H = 0.329236 & \log \operatorname{tang} (D + N) = 0.108455 \\ \log \sin N = 9.524409 - 10 & Y_z = \operatorname{tg} \zeta \cos \gamma = 1.2837 \\ & 9.853645 - 10 \\ \log \sin (D + N) = 9.788556 & \log X_z = 0.065089 \\ \log \operatorname{tg} \zeta \sin \gamma = 0.065089 & - \log Y_z = - 0.108455 \\ X_z = \operatorname{tg} \zeta \sin \gamma = 1.1617 & \log \operatorname{tg} \gamma = 9.956634 \\ & \gamma = 42^{\circ}\ 8'\ 39'' \\ \log X_z = 0.065089 & \log Y_z = 0.108455 \\ \log \cos \gamma = 9.826722 & \log \sin \gamma = 9.870087 \\ \log \operatorname{tg} \zeta = 0.238367 & \log \operatorname{tg} \zeta = 0.238368 \\ & \zeta = 59^{\circ}59'20'' \end{array}$$

Les grandes valeurs de  $\zeta$  et de  $H$  indiquent que l'influence de la réfraction sera bien sensible pour le cliché.

Pour les coefficients du premier ordre  $\varrho, \varrho'$  et  $\frac{1}{2}\omega$  ainsi que ceux du second ordre on a

$$\begin{array}{ll} (1 + X_z^2) = + 2.350 & \varrho = k(1 + X_z^2) = + 0.000\ 703 \\ X_z Y_z = - 1.491 & \frac{1}{2}\omega = k X_z Y_z = - 0.000\ 446 \\ (1 + Y_z^2) = + 2.646 & \varrho' = k(1 + Y_z^2) = + 0.000\ 792 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a_1 = X_z(2 + X_z^2) = - 1,162 \cdot 3,350 = - 3,893 \\ a_2 = Y_z(1 + 2X_z^2) = + 1,284 \cdot 3,700 = + 4,751 \\ a_3 = X_z(1 + Y_z^2) = - 1,162 \cdot 2,648 = - 3,077 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b_1 = Y_z(1 + X_z^2) = + 1,283 \cdot 2,350 = + 3,017 \\ b_2 = X_z(1 + 2Y_z^2) = - 1,162 \cdot 4,296 = - 4,992 \\ b_3 = Y_z(2 + Y_z^2) = + 1,283 \cdot 3,648 = + 4,683 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} c_1 = ka_1 : f = + 0,000\ 000\ 340 & d_1 = kb_1 : f = - 0,000\ 000\ 264 \\ c_2 = ka_2 : f = - 0,000\ 000\ 415 & d_2 = kb_2 : f = + 0,000\ 000\ 436 \\ c_3 = ka_3 : f = + 0,000\ 000\ 269 & d_3 = kb_3 : f = - 0,000\ 000\ 409 \end{array}$$

Dans le tableau suivant  $x, y$  désignent (voir équations (27)) les coordonnées rectangulaires abrégées à une décimale.

\*) Voir J. Scheiner, Photographie der Gestirne, p. 126, ou W. Zurhellen, Darstellung und Kritik etc., p. 8.

*Corrections du second ordre  $\Delta_2 X, \Delta_2 Y$ .*

Etoile No	721	723	733	744	Eros 2	778	780	784
$x$	- 45.8	- 40.4	- 33.4	- 21.3	- 11.1	+ 13.9	+ 17.7	+ 19.6
$y$	- 17.6	- 1.5	- 66.0	- 26.3	- 12.7	+ 2.1	+ 38.3	+ 54.2
$0.01x^2$	+ 21.0	+ 16.3	+ 11.2	+ 4.5	+ 1.2	+ 1.9	+ 3.1	+ 3.8
$0.01xy$	+ 8.1	+ 0.6	+ 22.0	+ 5.6	+ 1.4	+ 0.3	+ 6.8	+ 10.6
$0.01y^2$	+ 3.1	+ 0.0	+ 43.6	+ 6.9	+ 1.6	+ 0.0	+ 14.7	+ 29.4
$10^4 c_1 x^2$	+ 7.1	+ 5.5	+ 3.8	+ 1.5	+ 0.4	+ 0.6	+ 1.1	+ 1.3
$10^4 c_2 xy$	- 3.4	- 0.2	- 9.2	- 2.3	- 0.6	- 0.1	- 2.8	- 4.4
$10^4 c_3 y^2$	+ 0.8		+ 11.7	+ 1.9	+ 0.4		+ 4.0	+ 7.9
$10^4 d_1 x^2$	- 5.5	- 4.3	- 3.0	- 1.2	- 0.3	- 0.5	- 0.8	- 1.0
$10^4 d_2 xy$	+ 3.5	+ 0.3	+ 9.6	+ 2.4	+ 0.6	+ 0.1	+ 3.0	+ 4.6
$10^4 d_3 y^2$	- 1.3		- 17.8	- 2.8	- 0.6		- 6.0	- 12.0
$10^4 \Delta_2 X$	+ 5	+ 5	+ 6	+ 1	0	+ 1	+ 2	+ 5
$10^4 \Delta_2 Y$	- 3	- 4	- 11	- 2	0	0	- 4	- 8
		804	791	797	806			
		+ 37.8	+ 24.5	+ 30.9	+ 40.7			
		+ 20.5	- 70.1	- 63.8	- 43.6			
		+ 14.4	+ 6.0	+ 9.5	+ 16.6			
		+ 7.8	- 17.2	- 19.7	- 17.7			
		+ 4.2	+ 49.1	+ 40.7	+ 19.0			
		+ 4.9	+ 2.0	+ 3.2	+ 5.6			
		- 3.2	+ 7.2	+ 8.2	+ 7.4			
		+ 1.1	+ 13.2	+ 10.9	+ 5.1			
		- 3.8	- 1.6	- 2.5	- 4.4			
		+ 3.4	- 7.5	- 8.6	- 7.7			
		- 1.7	- 20.1	- 16.6	- 7.8			
		+ 3	+ 22	+ 22	+ 18			
		- 2	- 29	- 28	- 20			

Les corrections  $\Delta_2 X, \Delta_2 Y$ , exprimées en dixmillièmes de millimètre sont à ajouter aux coordonnées rectilignes mesurées  $X, Y$  prises dans le registre des mesures.

*Tableau des coordonnées rectilignes  $X, Y$  mesurées et des  $X_r, Y_r$  corrigées.*

Etoile n°	721	723	733	744	Eros <sub>2</sub>	778
$X$	- 45.7763	- 40.4492	- 33.4401	- 21.3202	- 11.0954	+ 13.8868
$Y$	- 17.6415	- 1.4998	- 66.0118	- 26.2920	- 12.7222	+ 2.0595
$X_r$	- 45.7758	- 40.4487	- 33.4395	- 21.3201	- 11.0954	+ 13.8869
$Y_r$	- 17.6418	- 1.5002	- 66.0129	- 26.2922	- 12.7222	+ 2.0595
Etoile n°	780	784	804	791	797	806
$X$	+ 17.7412	+ 19.5881	+ 37.8463	+ 24.5362	+ 30.8981	+ 40.6942
$Y$	+ 38.3363	+ 54.2436	+ 20.4906	- 70.1235	- 63.8125	- 43.6112
$X_r$	+ 17.7414	+ 19.5886	+ 37.8466	+ 24.5384	+ 30.9003	+ 40.6960
$Y_r$	+ 38.3359	+ 54.2428	+ 20.4904	- 70.1264	- 63.8153	- 43.6132

### 3. Détermination des coordonnées standard $X_0 Y_0$

Etoile No	721	723
$\alpha$	10 <sup>h</sup> 27 <sup>m</sup> 56. <sup>s</sup> 229	28 <sup>m</sup> 18. <sup>s</sup> 541
$\delta$	+ 18° 4' 46."93	+ 18° 21' 0."35
$(\alpha - A)^s$	— 193. <sup>s</sup> 771	— 171. <sup>s</sup> 459
$(\alpha - A)'$	— 48' 26."565	— 42' 51."855
log tang $\delta$	9.513 8278	9.520 7306
log séc $(\alpha - A)$	431	338
log tang $(D + y)$	9.513 8709	9.520 7644
$D + y$	+ 18° 4' 52."97	+ 18° 21' 5."14
$y$	— 17' 37."03	— 1' 24."86
$y'$	— 17.6172	— 1.4143
$\Delta Y_c$	— 2	— 0
log tang $(\alpha - A)$	8.148 9837	8.095 8438
log cos $(D + y)$	9.978 0054	9.977 3318
colog cos $y$	57	0
colog sin $1'$	3.536 2739	3.536 2739
log $X_0$	1.663 2687	1.609 4495
$X_0$	— 46.0541	— 40.6864
$Y_0$	— 17.6174	— 1.4143
$X_r$	— 45.7758	— 40.4487
$Y_r$	— 17.6418	— 1.5002
$(\tau_0 + \varrho) X_r$	— 45.9581	— 40.6098
$X_0 - (\tau_0 + \varrho) X_r$	— 0.0960	— 0.0766
$(i_0 + \frac{1}{2}\omega) Y_r$	— 0.0180	— 0.0015
$X_0 - (\tau_0 + \varrho) X_r - (i_0 + \frac{1}{2}\omega) Y_r$	— 0.0780	— 0.0751
$n$	+ 9	— 20
$(\tau_0 + \varrho') Y_r$	— 17.7136	— 1.5063
$Y_0 - (\tau_0 + \varrho') Y_r$	+ 0.0962	+ 0.0920
$-(i_0 - \frac{1}{2}\omega) X_r$	+ 0.0879	+ 0.0777
$Y_0 - (\tau_0 + \varrho') Y_r + (i_0 - \frac{1}{2}\omega) X_r$	+ 0.0083	+ 0.0143
$n'$	+ 1	— 59

3. Le calcul des coordonnées standard  $X_0, Y_0$  est effectué selon le système (4), la correction  $\Delta Y_0$  pour la transformation de  $\eta$  en sa tangente  $Y_0$  étant prise dans les Tables de Lagarde.

et des approximations  $\delta\xi_0$ ,  $\delta\eta_0$  et  $i_0$ .

733		744		778		780	
28 <sup>m</sup> 48. <sup>s</sup> 777		29 <sup>m</sup> 39. <sup>s</sup> 556		32 <sup>m</sup> 8. <sup>s</sup> 472		32 <sup>m</sup> 25. <sup>s</sup> 180	
+ 17° 16' 14."48		+ 17° 56' 7."61		+ 18° 24' 32."44		+ 19° 0' 57."15	
— 141. <sup>s</sup> 223		— 90. <sup>s</sup> 444		+ 58. <sup>s</sup> 472		+ 75. <sup>s</sup> 180	
— 35' 18."345		— 22' 36."660		+ 14' 37."080		+ 18' 47."70	
9.492 6266		9.510 1085		9.522 2230		9.537 3626	
229		94		39		65	
9.492 6495		9.510 1179		9.522 2269		9.537 3691	
+ 17° 16' 17."57		+ 17° 56' 8."92		+ 18° 24' 33."00		+ 19° 0' 58."10	
— 1° 6' 12."43		— 26' 21."08		+ 2' 3."00		+ 38' 28."10	
— 66.2072		— 26.3513		+ 2.0500		+ 38.4483	
— 82		— 5		+ 0		+ 16	
8.011 5869		7.818 0521		7.628 6167		7.737 7728	
9.979 9617		9.978 3641		9.977 1863		9.975 6279	
805		128		1		272	
3.536 2739		3.536 2739		3.536 2739		3.536 2739	
1.527 9030		1.142 0770		1.249 7018		1.249 7018	
— 33.7212		— 21.5131		+ 13.8700		+ 17.7706	
— 66.2154		— 26.3518		+ 2.0500		+ 38.4699	
— 33.4395		— 21.3201		+ 13.8869		+ 17.7414	
— 66.0129		— 26.2922		+ 2.0595		+ 38.3359	
— 33.5727		— 21.4050		+ 13.9422		+ 17.8121	
— 0.1485		— 0.1081		— 0.0722		— 0.0415	
— 0.0673		— 0.0268		+ 0.0021		+ 0.0391	
— 0.0812		— 0.0813		— 0.0743		— 0.0806	
+ 41		+ 42		— 28		+ 35	
— 66.2817		— 26.3993		+ 2.0679		+ 38.4920	
+ 0.0663		+ 0.0475		— 0.0179		— 0.0221	
+ 0.0642		+ 0.0409		— 0.0267		— 0.0341	
+ 0.0021		+ 0.0066		+ 0.0088		+ 0.0120	
+ 63		+ 18		— 4		— 36	

$$(i_0 + \frac{1}{2}\omega)_{784,791} = \frac{-0.0189 + 0.1466}{+ 54.24 + 70.13} = + 0.001 027$$

$$(i_0 + \frac{1}{2}\omega)_{804,733} = \frac{-0.0608 + 0.1485}{+ 20.49 + 66.01} = + 0.001 014$$

$$\text{moyenne } i_0 + \frac{1}{2}\omega = + 0.001 020$$

Les  $X_0$ ,  $Y_0$  déterminés, on forme, en utilisant la valeur de  $\tau_0 = 1.003280$ , les produits et les différences

$$X_0 - (\tau_0 + \varrho) X_r, \quad Y_0 - (\tau_0 + \varrho') Y_r$$



*Détermination des coordonnées standard  $X_0, Y_0$*

Etoile No	784	804
$\alpha$	32 <sup>m</sup> 33. <sup>s</sup> 250	33 <sup>m</sup> 50. <sup>s</sup> 209
$\delta$	+ 18° 16' 54."771	+ 18° 42' 56."92
$(\alpha - A)^s$	+ 83. <sup>s</sup> 250	+ 160. <sup>s</sup> 209
$(\alpha - A)'$	+ 20' 48."750	+ 40' 3."135
log tang $\delta$	9.543 8691	9.529 9292
log séc $(\alpha - A)$	79	295
log tang $(D + y)$	9.543 8770	9.529 9587
$D + y$	+ 19° 16' 55."88	+ 18° 43' 1."17
$y$	+ 54' 25."88	+ 20' 31."17
$y'$	+ 54.4313	+ 20.5195
$\Delta Y_c$	+ 46	+ 2
log tang $(\alpha - A)$	7.782 0557	8.066 3726
log qos $(D - y)$	9.974 9277	9.976 4028
colog cos $y$	544	77
colog sin $1'$	3.536 2739	3.536 2739
log $X_0$	1.293 3117	1.579 0570
$X_0$	+ 19.6477	+ 37.9365
$Y_0$	+ 54.4359	+ 20.5197
$X_r$	+ 19.5886	+ 37.8466
$Y_r$	+ 54.2428	+ 20.4904
$(\tau_0 + \varrho) X_r$	+ 19.6666	+ 37.9973
$X_0 - (\tau + \varrho) X_r$	- 0.0189	- 0.0608
$(i + \frac{1}{2}\omega) Y_r$	+ 0.0553	+ 0.0209
$X_0 - (\tau_0 + \varrho) X_r - (i_0 + \frac{1}{2}\omega) Y_r$	- 0.0742	- 0.0817
$n$	- 29	+ 46
$(\tau_0 + \varrho') Y_r$	+ 54.4637	+ 20.5738
$Y_0 - (\tau_0 + \varrho') Y_r$	- 0.0278	- 0.0541
$-(i_0 - \frac{1}{2}\omega) X_r$	- 0.0376	- 0.0727
$Y_0 - (\tau + \varrho') Y_r + (i_0 - \frac{1}{2}\omega) X_r$	+ 0.0098	+ 0.0186
$n'$	- 14	- 102

et on trouve, au moyen des équations (38) chaque fois par deux paires d'étoiles (nos 784, 791 et 804, 733) les valeurs  $i_0 + \frac{1}{2}\omega$  et  $i_0 - \frac{1}{2}\omega$ , les premières approximations  $\delta\xi_0, \delta\eta_0$  selon les équations (39) et les restes  $n, n'$  qui figurent dans les équations normales (34).

et des approximations  $\delta\xi_0$ ,  $\delta\eta_0$  et  $i_0$  (suite).

791		797		806	
	32 <sup>m</sup> 52. <sup>s</sup> 521		33 <sup>m</sup> 19. <sup>s</sup> 379		34 <sup>m</sup> 0. <sup>s</sup> 975
+	17° 12' 1." <sup>47</sup>	+	17° 18' 19." <sup>74</sup>	+	17° 38' 34." <sup>11</sup>
+	102. <sup>s</sup> 521	+	129. <sup>s</sup> 379	+	170. <sup>s</sup> 975
+	25' 37." <sup>815</sup>	+	32' 20." <sup>685</sup>	+	42' 44." <sup>625</sup>
	9.490 7442		9.493 5561		9.502 4834
	121		192		336
	9.490 7563		9.493 5753		9.502 5170
+	17° 12' 3." <sup>09</sup>	+	17° 18' 22." <sup>34</sup>	+	17° 38' 38." <sup>72</sup>
—	1° 10' 26." <sup>91</sup>	—	1° 4' 7." <sup>66</sup>	—	43' 51." <sup>28</sup>
—	70.4485	—	64.1277	—	43.8547
—	98	—	74	—	24
	7.872 4870		7.973 5427		8.094 6211
	9.980 1279		9.979 8799		9.979 0736
	912		756		353
	3.536 2739		3.536 2739		3.536 2739
	1.388 9800		1.489 7721		1.610 0039
+	24.4895	+	30.8868	+	40.7384
—	70.4583	—	64.1351	—	43.8571
+	24.5384	+	30.9003	+	40.6960
—	70.1264	—	63.8153	—	43.6132
+	24.6361	+	31.0234	+	40.8581
—	0.1466	—	0.1366	—	0.1197
—	0.0715	—	0.0651	—	0.0445
—	0.0751	—	0.0715	—	0.0752
—	20	—	56	—	19
—	70.4120	—	64.0752	—	43.7908
—	0.0463	—	0.0599	—	0.0663
—	0.0471	—	0.0593	—	0.0781
+	0.0008	—	0.0006	+	0.0118
+	76	+	90	—	32

$$\delta\xi_0 = -0.0771$$

$$\delta\eta_0 = +0.0084$$

$$-(i_0 - \frac{1}{2}\omega)_{784,791} = \frac{+0.0962 + 0.0664}{-45.78 - 40.70} = -0.001\ 880$$

$$-(i_0 - \frac{1}{2}\omega)_{804,783} = \frac{+0.0662 + 0.0600}{-33.44 - 30.90} = -0.001\ 961$$

$$\text{moyenne } -(i_0 - \frac{1}{2}\omega) = -0.001\ 920$$

4. Détermination des éléments par la méthode des moindres carrés. Les premières lignes du tableau ci-dessus contiennent les valeurs  $b$ ,  $c$  limitées à trois chiffres; on forme, au moyen des valeurs  $b^2$ ,  $c^2$ ,  $bn$ ,  $cn$ ,  $bn'$  et  $cn'$  deux systèmes d'équations normales pour les inconnues  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ .

#### 4. Détermination des corrections des éléments

Etoile No	721	723	733	744	778	780
<i>b</i>	— 0.458	— 0.404	— 0.334	— 0.213	+ 0.139	+ 0.177
<i>c</i>	— 0.176	— 0.015	— 0.660	— 0.263	+ 0.021	+ 0.383
<i>b</i> <sup>2</sup>	0.210	0.163	0.112	0.045	0.019	0.031
<i>c</i> <sup>2</sup>	0.031	0.000	0.436	0.069	0.000	0.147
<i>bc</i>	+ 0.081	+ 0.006	+ 0.220	+ 0.056	+ 0.003	+ 0.068
<i>n</i>	+ 0.009	— 0.020	+ 0.041	+ 0.042	— 0.028	+ 0.035
<i>bn</i>	— 0.004	+ 0.008	— 0.015	— 0.009	— 0.004	+ 0.006
<i>cn</i>	— 0.002	0.000	— 0.027	— 0.011	— 0.001	+ 0.013
<i>n</i> '	+ 0.001	— 0.059	+ 0.063	+ 0.018	— 0.004	— 0.036
<i>bn</i> '	0.000	+ 0.024	— 0.021	— 0.004	— 0.001	— 0.006
<i>cn</i> '	0.000	+ 0.001	— 0.042	— 0.005	0.000	— 0.014

$$\begin{aligned}
 11x + 0.442y - 1.738z + 0.001 &= 0 \\
 + 1.082y + 0.071z - 0.037 &= 0 \\
 + 2.108z + 0.023 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= -0.004 & \Delta\delta\xi_0 &= -0.0004 \\
 y &= +0.037 & \Delta\tau_x &= +0.000037 \\
 z &= -0.015 & \Delta i_x &= -0.000015
 \end{aligned}$$

*Tableau des résidus r et r'.*

Etoile No	721	723	733	744	778	780
$\tau_x X_r$	— 45.9598	— 40.6113	— 33.5739	— 21.4058	+ 13.9427	+ 17.8127
$X_0 - \tau_x X_r$	— 0.0943	— 0.0751	— 0.1473	— 0.1073	— 0.0727	— 0.0421
$i_x Y_r$	— 0.0177	— 0.0015	— 0.0663	— 0.0264	+ 0.0021	+ 0.0385
$X_0 - \tau_x X_r - i_x Y_r$	— 0.0766	— 0.0736	— 0.0810	— 0.0809	— 0.0748	— 0.0806
<i>r</i>	+ 9	+ 39	— 35	— 34	+ 27	— 31
$\tau_y Y_r$	— 17.7154	— 1.5065	— 66.2884	— 26.4019	+ 2.0681	+ 38.4959
$Y_0 - \tau_y Y_r$	+ 0.0980	+ 0.0922	+ 0.0730	+ 0.0501	— 0.0181	— 0.0260
$-i_y X_r$	+ 0.0880	+ 0.0777	+ 0.0643	+ 0.0410	— 0.0267	— 0.0341
$Y_0 - \tau_y Y_r + i_y X_r$	+ 0.0100	+ 0.0145	+ 0.0087	+ 0.0091	+ 0.0086	+ 0.0081
<i>r</i> '	+ 0	+ 45	— 13	— 9	— 14	— 19

Les  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $X_r$ ,  $Y_r$ ,  $\Delta\delta\xi_0$  et  $\Delta\delta\eta_0$  sont exprimés en dixmillièmes de millimètre,  $\Delta\tau_x$ ,  $\Delta\tau_y$  en millionnièmes de l'unité,  $\Delta i_x$ ,  $\Delta i_y$  en millionnièmes d'un radian; donc  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  ont trois chiffres décimales.

Au moyen des éléments définitifs on calcule aussitôt le tableau des résidus  $r$  et  $r'$  qui indiquent la précision des mesures et dont on se sert dans le calcul suivant.

Les éléments définitifs sont

$$\begin{aligned}
 \delta\xi &= -0.0775 = -0.3267 & \tau_x &= +1.004020 & i_x &= +0.001005 \\
 \delta\eta &= +0.0100 = +0.600 & \tau_y &= +1.004173 & -i_y &= +0.001918
 \end{aligned}$$

par la méthode des moindres carrés.

784	804	791	797	806	
+ 0.196	+ 0.378	+ 0.245	+ 0.309	+ 0.407	$\Sigma b = + 0.442$
+ 0.542	+ 0.205	- 0.701	- 0.638	- 0.436	$\Sigma c = - 1.738$
0.038	0.143	0.060	0.095	0.166	$\Sigma b^2 = 1.082$
0.294	0.042	0.491	0.407	0.191	$\Sigma c^2 = 2.108$
+ 0.106	+ 0.077	- 0.172	- 0.197	- 0.177	$\Sigma bc = + 0.071$
- 0.029	+ 0.046	- 0.020	- 0.056	- 0.019	$\Sigma n = + 0.001$
- 0.006	+ 0.017	- 0.005	- 0.017	- 0.008	$\Sigma bn = - 0.037$
- 0.016	+ 0.009	+ 0.014	+ 0.036	+ 0.008	$\Sigma cn = + 0.023$
- 0.014	- 0.102	+ 0.076	+ 0.090	- 0.032	$\Sigma n' = + 0.001$
- 0.003	- 0.039	+ 0.019	+ 0.028	- 0.013	$\Sigma bn' = - 0.016$
- 0.008	- 0.021	- 0.053	- 0.057	+ 0.014	$\Sigma cn' = - 0.185$

$$\begin{aligned}
 11x' + 0.442y' - 1.738z' + 0.001 &= 0 \\
 + 1.082y' + 0.071z' - 0.016 &= 0 \\
 + 2.108z' - 0.185 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x' &= + 0.016 & \Delta\delta\eta_0 &= + 0.0016 \\
 y' &= + 0.002 & - \Delta i_y &= + 0.000002 \\
 z' &= + 0.101 & \Delta\tau_y &= + 0.000101
 \end{aligned}$$

Tableau des résidus  $r$  et  $r'$  (suite).

784	804	791	797	806	
+ 19.6673	+ 37.9987	+ 24.6370	+ 31.0245	+ 40.8596	
- 0.0196	- 0.0622	- 0.1475	- 0.1377	- 0.1212	
+ 0.0545	+ 0.0206	- 0.0705	- 0.0641	- 0.0438	
- 0.0741	- 0.0828	- 0.0770	- 0.0736	- 0.0774	$\delta\xi = - 0.0775$
+ 34	- 53	+ 5	+ 39	+ 1	
+ 54.4692	+ 20.5759	- 70.4190	- 64.0816	- 43.7952	
- 0.0333	- 0.0562	- 0.0393	- 0.0535	- 0.0619	
- 0.0376	- 0.0727	- 0.0472	- 0.0594	- 0.0782	
+ 0.0043	+ 0.0165	+ 0.0079	+ 0.0059	+ 0.0163	$\delta\eta = + 0.0100$
- 57	+ 65	- 21	- 41	+ 63	

d'où on a les coordonnées définitives du centre et les relations bilinéaires entre  $X_0$ ,  $Y_0$  et  $X_r$ ,  $Y_r$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 10^h 31^m 9.^s 673 & X_0 &= 1.004020X_r + 0.001005Y_r \\
 D_0 &= + 18^o 22' 30.''60 & Y_0 &= 1.004173Y_r - 0.001918X_r.
 \end{aligned}$$

Le calcul des éléments a été refait aussi (pour tous les clichés) au moyen de la méthode des moindres carrés pondérée; les poids des positions des étoiles de repère étant très rapprochés, les nouvelles positions des centres différaient, en moyenne, de  $\pm 0.''018$  en ascension droite et de  $\pm 0.''030$  en déclinaison. On a conservé les résultats fournis par la méthode simple.

5. Avec la position de la planète on calcule parallèlement, pour avoir une vérification directe des éléments, les positions des deux étoiles de repère; on choisit une de ces étoiles de vérification dans le même quadrant où se trouve la planète, pour avoir l'accord des signes.

5. Position de la planète.

	Etoile 744		Eros 2		Etoile 778
$X_r$ —	21.3201	—	11.0954	+	13.8869
$r$ —	34		0	+	27
$\tau_x X_r$ —	21.4092	—	11.1400	+	13.9454
$i_x Y_r$ —	264	--	128	+	21
$X_0$ —	21.4356	--	11.1528	+	13.9475
$Y_r$ —	26.2922	--	12.7222	+	2.0595
$r'$ —	9			—	14
$\tau_y Y_r$ —	26.4028	—	12.7753	+	2.0667
$i_y X_r$ +	410	+	213	—	267
$Y_0$ —	26.3618	—	12.7540	+	2.0400
$\log X_0$	1.331 1356		1.047 3800		1.144 4964
$\log \sec (D + \eta)$	0.021 6359		0.022 1961		0.022 8137
$\log \cos y \sin l'$	6.463 7134		6.463 7231		6.463 7260
$\log \tan (\alpha - A)$	7.816 4845		7.533 2991		7.631 0361
	4.138 3280		4.138 3320		4.138 3310
$\log (\alpha - A)^s$	1.954 8125		1.671 6311		1.769 3671
$(\alpha - A)^s$ —	90. <sup>s</sup> 1183	—	46. <sup>s</sup> 9495	+	58. <sup>s</sup> 7986
$(\alpha - A)'$ —	22' 31."774	—	11' 44."243	+	14' 21."979
$\Delta Y_0$ +	5	+	1	+	0
$\eta'$ —	26.3613	—	12.7539	+	2.0400
$\eta''$ —	26' 21."68	—	12' 45."23	+	2' 2."40
$(D + \eta)$ +	17° 56' 8."92	+	18° 9' 45."37	+	18° 24' 33."00
$\log \tan (D + y)$	9.510 1179		9.515 9535		9.522 2270
$-\log \cos (\alpha - A)$ —	0.000 0093	—	0.000 0025	—	0.000 0040
$\log \tan \delta$	9.510 1086		9.515 9510		9.522 2230
$\delta_{1930,0}$ +	17° 56' 7."62	+	18° 9' 45."02	+	18° 24' 32."43
$\alpha_{1930,0}$	10 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup> 39. <sup>s</sup> 555		10 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> 22. <sup>s</sup> 723		10 <sup>h</sup> 32 <sup>m</sup> 8. <sup>s</sup> 472
valeurs exactes {	$\delta_{1930,0}$ + 17° 56' 7."61			+	18° 24' 32."44
	$\alpha_{1930,0}$ 10 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup> 39. <sup>s</sup> 556				10 <sup>h</sup> 32 <sup>m</sup> 8. <sup>s</sup> 472

Avec la position conclue Eros 2 on a obtenu aussi celles des étoiles nos 744 et 778 qui s'accordent dans les limites de  $\pm 0.^s001$  et  $\pm 0."01$  avec les positions de départ prises dans le tableau sous 3 (p. 25).

La précision de la position conclue d'Eros est calculable au moyen du tableau des résidus  $r$  et  $r'$  (p. 28 et 29); l'erreur probable pour nos observations est plus grande que les limites ci-dessus (voir Publications de l'Observ. Nation. de Prague, No 9, p. 9).

6. Détermination du coefficient de l'échelle  $\tau_0$ . Pour quatre étoiles choisies (nos 784, 744, 804, 721) on calcule les corrections du premier ordre de la réfraction différentielle selon les équations (29)

$$\begin{aligned}\Delta_1 X &= + 0.000703X - 0.000446Y \\ \Delta_1 Y &= - 0.000446X + 0.000792Y;\end{aligned}$$

celles du second ordre  $\Delta_2 X$ ,  $\Delta_2 Y$  sont à prendre dans le tableau p. 23.

Etoile	2 (784)	1 (744)	4 (804)	3 (721)
$\alpha$	10 <sup>h</sup> 32 <sup>m</sup> 33. <sup>s</sup> 250	10 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup> 39. <sup>s</sup> 556	10 <sup>h</sup> 33 <sup>m</sup> 50. <sup>s</sup> 209	10 <sup>h</sup> 27 <sup>m</sup> 56. <sup>s</sup> 229
$\delta$	+ 19° 16' 54."71	+ 17° 56' 7."61	+ 18° 42' 56."92	+ 18° 4' 46."93
$X$	+ 19.5881	— 21.3202	+ 37.8463	— 45.7763
+ 0.000703X	+ 0.0137	— 0.0150	+ 0.0266	— 0.0322
— 0.000446Y	— 0.0242	+ 0.0118	— 0.0091	+ 0.0079
$\Delta_2 X$	+ 5	+ 1	+ 3	+ 5
$X_{rr}$	+ 19.5781	— 21.3233	+ 37.8641	— 45.8001
$Y$	+ 54.2436	— 26.2920	+ 20.4906	— 17.6415
— 0.000446X	— 0.0087	+ 0.0095	— 0.0169	+ 0.0204
+ 0.000792Y	+ 0.0429	— 0.0208	+ 0.0162	— 0.0140
$\Delta_2 Y$	— 8	— 2	— 2	— 3
$Y_{rr}$	+ 54.7770	— 26.3035	+ 20.4897	— 17.6354

$$\begin{aligned}\alpha_2 - \alpha_1 &= 2^m 53.^s 694 \\ &= 43' 25."410 \\ \delta_2 - \delta_1 &= 80' 47."10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_4 - \alpha_3 &= 5^m 53.^s 980 \\ &= 88' 29."700 \\ \delta_4 - \delta_3 &= 38' 9."90\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(X_2 - X_1)_{rr} &= + 40.9014 \\ (Y_2 - Y_1)_{rr} &= + 80.5805\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(X_4 - X_3)_{rr} &= + 83.6642 \\ (Y_4 - Y_3)_{rr} &= + 38.1251\end{aligned}$$

$$\Delta_{12} = \sqrt{40.9014^2 + 80.5805^2}$$

$$\Delta_{43} = \sqrt{83.6642^2 + 38.1251^2}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{12}^2 &= 8166.1415 \\ \log \Delta_{12} &= 1.9560087 \\ \Delta_{12} &= 90.3663 \text{ mm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{34}^2 &= 8453.2216 \\ \log \Delta_{34} &= 1.9635111 \\ \Delta_{34} &= 91.9414 \text{ mm}\end{aligned}$$

Le calcul logarithmique combiné avec celui à la machine continue ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1) & 40' 23."550 \\ \log \sin \frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1) & 8.070 0169 - 10 \\ \sin \frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1) & 0.011 7494 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\delta_4 - \delta_3) & 19' 4."995 \\ \log \sin \frac{1}{2}(\delta_4 - \delta_3) & 7.744 3763 - 10 \\ \sin \frac{1}{2}(\delta_4 - \delta_3) & 0.005 5510 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log \cos \delta_2 & 9.978 3650 \\ \log \cos \delta_1 & 9.974 9285 \\ \log \cos \delta_2 \cdot \cos \delta_1 & 9.953 2935 \\ \cos \delta_2 \cdot \cos \delta_1 & 0.898 0351\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log \cos \delta_4 & 9.978 0096 \\ \log \cos \delta_3 & 9.976 4058 \\ \log \cos \delta_4 \cdot \cos \delta_3 & 9.954 4154 \\ \cos \delta_4 \cdot \cos \delta_3 & 0.900 3583\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$	21' 42."705	$\frac{1}{2}(\alpha_4 - \alpha_3)$	44' 14."850
$\log \sin \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$	7.800 4181—10	$\log \sin \frac{1}{2}(\alpha_4 - \alpha_3)$	8.109 6329—10
$\sin \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$	0.006 3156 5	$\sin \frac{1}{2}(\alpha_4 - \alpha_3)$	0.012 8716 1
$\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$	0.000 0398 8744	$\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha_4 - \alpha_3)$	0.000 1656 7834
$\cos \delta_2 \cos \delta_1 \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$	0.000 0358 2032	$\cos \delta_4 \cos \delta_3 \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha_4 - \alpha_3)$	0.000 1491 6987
$\sin^2 \frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1)$	0.000 1380 4863	$\sin^2 \frac{1}{2}(\delta_4 - \delta_3)$	0.000 0308 1433
$\sin^2 \frac{1}{2}\delta_{12}$	0.000 1738 6895	$\sin^2 \frac{1}{2}\delta_{34}$	0.000 1799 8420
$\log \sin^2 \frac{1}{2}\delta_{12}$	6.240 2221—10	$\log \sin^2 \frac{1}{2}\delta_{34}$	6.255 2344—10
$\log \sin \frac{1}{2}\delta_{12}$	8.120 1111—10	$\log \sin \frac{1}{2}\delta_{34}$	8.127 6172—10
$\frac{1}{2}\delta_{12}$	45' 19."874	$\frac{1}{2}\delta_{34}$	46' 7."294
$\delta_{12}$	90' 39."748	$\delta_{34}$	92' 14."589
	90.'66247		92.'24325

En comparant les chiffres obtenus on a

$$\tau = \frac{90.'66247}{90.3663} = 1.'003277 \qquad \tau = \frac{92.'24325}{91.9414} = 1.'003283$$

dont la moyenne  $\tau_0 = 1.003280$  a été utilisée dans les réductions.

En terminant ce mémoire, je suis heureux d'exprimer mes remerciements reconnaissants à M. le Prof. Dr. F. Nušl, Directeur de l'Observatoire national de Prague, pour l'appui et l'amitié qu'il m'a témoigné pendant le long travail, à M. Jules Baillaud, astronome titulaire et Chef de service de la carte du Ciel à l'Observatoire de Paris et à M. Pourteau, astronome adjoint au même observatoire, pour leurs aimables conseils, ainsi qu'à Mlle B. Nováková pour la collaboration dans les calculs des éléments au moyen des équations normales pondérées.

Je remercie également M. le Dr. M. Valouch, a. Chef de section au Ministère de l'instruction publique et Directeur de la Société des mathématiciens et physiciens tchèques pour son aimable aide et l'imprimerie „Prometheus“, pour l'impression soignée du texte et des tables numériques de ce travail.

*Observatoire National de Prague, mai 1935.*

## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

- 1) H. H. Turner, Preliminary Note on the Reduction of Measures of Photographic Plates, *M. N.*, 54, 1893, p. 11.
- 2) F. W. Dyson, The Determination of Right Ascension and Declination from Standard Coordinates, *Observatory*, 18, 1895, p. 328.
- 3) J. Lagarde, Formules et Tables pour faciliter l'emploi des catalogues photographiques en coordonnées rectilignes, *Bull. Int. Carte du Ciel*, 5, 1910, Paris, et *Journ. des Observat.*, 11, 1928, p. 17.
- 4) Ch. Trépied, Catalogue Photographique du Ciel, *Observat. d'Alger*, Introduction, Méthodes et Tables, Paris 1903.
- 5) F. W. Dyson, Note on the Formulae connecting „Standard Coordinates“ with Right Ascension and Declination, *M. N.*, 64, 1904, p. 647.
- 6) H. H. Turner, Formulae for Converting Measures on a Photographic Plate into R. A. and Decl., *Observatory*, 18, 1895, p. 351.
- 7) H. Jacoby, On the Reduction of Stellar Photographs with the special Reference to the Astro-Photographic Catalogue Plates, *Contrib. Observ. Columbia Univ.*, No 10, 1897, New York, p. 6.
- 8) H. Jacoby, Sur la réduction des clichés astrographiques, *Bull. Int. Carte du Ciel*, 3 fasc. 1, p. 1, 1902.
- 9) A. A. Rambaut, Notes on the Reduction of the Stellar Photographs, *M. N.*, 57, 1897, p. 591.
- 10) Arth. König, Reduction Photographischer Himmelsaufnahmen, *Handb. d. Astrophys.*, Bd. I, Erster Teil, 1933, p. 502, Berlin.
- 11) H. H. Turner, Astrographic Catalogue, Oxford Section, Introduction, vol. 6, 1909, Edinburgh.
- 12) H. Spencer-Jones, The Observations of Eros 1930—31, Notes on Methods of Reduction and Publication of Results, *M. N.*, 92, 1931, p. 12.
- 13) M. Loewy, Tables destinées à faciliter la transformation en coordonnées équatoriales des coordonnées rectilignes mesurées etc. *Bull. Int. de la Carte du Ciel*, t. 4, No. 10.
- 14) P. Henry, Mesure et réduction des clichés photographiques du Catalogue de la Carte du Ciel à l'Observatoire de Paris. *Bull. Int. de la Carte du Ciel*, t. 2, p. 303.
- 15) W. Zurhellen, Darstellung und Kritik der zur Reduktion fotogr. Himmelsaufnahmen aufgestellten Formeln und Methoden, Beilage zum Jahresbericht des Phys. Vereins, Frankfurt a. M., 1904, p. 70.
- 16) H. H. Turner, On Differential Refraction to Terms of Higher Order than the First, *M. N.*, 57, 1897, p. 133.
- 17) A. R. Hinks, A Graphical Method of Applying to Photographic Measures the Terms of the Second Order in the Differential Refraction, *M. N.*, 63, 1903, p. 138.
- 18) F. Gonnessiat, Catalogue Photographique du Ciel, *Observ. d'Alger*, Préambule, t. 8, Paris, 1903.
- 19) J. Scheiner, Photographie der Gestirne, Leipzig, 1897.
- 20) A. Kopff, Helene Nowacki und F. Gondolatsch, Generalkatalog der Eros-Anhaltsterne I. Ordnung für die Opposition 1930—31, *A. N.*, 241, No 5781—82, p. 345; 244, No 5852—53, p. 385.



## INDEX DES TABLES.

- 21) H. Jacoby, Tables for the Reduction of Astronomical Photographs, Contrib. Observ. Columbia Univ., No 10, 1897, New York.
  - 22) R. A. Hinks, Tables for Computing Standard Coordinates on Photographic Plates, Mem. Roy. Astr. Soc., 57, part III, 1908, p. 147.
  - 23) M. Loewy, Tables destinées à faciliter la transformation en coordonnées équatoriales, etc., Bull. Int. Carte du Ciel, vol. 4, Circ. No 10, 1905.
  - 24) B. L. Newkirk, Tables for the Reduction of Photographic Measures, Publ. Lick Observ., 8, 1913, p. 49.
  - 25) Arth. König, Reduction Photographischer Himmelsaufnahmen. Anhang I, Hilfstafeln. Handb. d. Astrophys. Bd. I, Erster Teil, 1933, Berlin.
  - 26) J. Lagarde, Formules et Tables pour faciliter l'emploi des catalogues photographiques en coordonnées rectilignes, Bull. Int. de la Carte du Ciel, vol. 5, 1910, Paris.
  - 27) A. Hnatek, Tafeln zur Bestimmung von  $\alpha$  und  $\delta$  aus den „Standard Koordinaten“ des Kataloges zur photographischen Himmelskarte, A. N., 181, No 4329, 1909, p. 133.
  - 28) J. Peters, Tafeln zur Verwandlung von rechtwinkligen Plattenkoordinaten und sphärischen Koordinaten ineinander, Veröff. Astr. Rechen-Inst. Berlin-Dahlem, No 47, 1929.
-