FILOSOFIE ČÍSLA

VOJTĚCH KOLMAN

ZÁKLADY LOGIKY A ARITMETIKY V ZRCADLE ANALYTICKÉ FILOSOFIE

Filosofia

FILOSOFIA
nakladatelství
Filosofického ústavu
AV ČR
ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ

Vojtěch Kolman

filosofie čísla

základy logiky a aritmetiky
v zrcadle analytické filosofie

Vojtěch Kolman

FILOSOFIE ČÍSLA

základy logiky a aritmetiky
v zrcadle analytické filosofie

FILOSOFIA - ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ
2008

Kniha byla vydána s částečnou podporou grantu č. 401/06/0387 Grantové agentury ČR *Inferencialistické základy logiky a sémantiky*, řešeného na UK FF v Praze, a s částečnou podporou výzkumného záměru MSM 0021620839 Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR *Metody moderní matematiky a jejich aplikace*, řešeného na UK MFF.

Vědecký redaktor: Mgr. Libor Běhounek
Vědečtí recenzenti: Prof. RNDr. Jaroslav Peregrin, CSc.
RNDr. Kateřina Trlifajová, Ph.D.
Prof. RNDr. Pavol Zlatoš, CSc.

ISBN 978-80-7007-279-0 (tištěná kniha)
ISBN 978-80-7007-716-0 (elektronická kniha)
DOI 10.47376/filosofia.2008.3

památce mého otce

(*1953 – †1999)

Obsah

Předmluva

Nečtěte tuto knihu, je to moc velká dřina!

S čísly se člověk setkává často — nějaké číslo mají jeho boty, číslované jsou stránky v knihách, které občas čte, a čísla jsou i na bankovkách, které má v peněžence. Zacházet s čísly, počítat, musí také umět (skoro) každý; kdo si nedokáže spočítat, kolik má dostat při nákupu zpátky na svou tisícikorunu, nutně prochází životem jenom se značnými obtížemi. Počítání proto patří k těm nejzákladnějším a nejdůležitějším dovednostem, které si člověk musí ve škole (ne-li již dříve) osvojovat.

Máloco tedy připadá člověku tak samozřejmé a tak důvěrně známé, jako jsou čísla. Čísla se však současně člověku většinou zdají patřit do světa, který je otravně nudný — nic se tam nehýbe a jediné, co se tam dá dělat, je právě počítat, což málokoho baví. "Kupecké počty", to je něco, co bývá kladeno do protikladu k vznešeným zábavám lidského ducha, jako je třeba hudba, přemítání o smyslu života nebo vybíjení jiných ras či národů ve jménu pokroku. Faktem ovšem je, že když se nedáme odradit špatnou pověstí, kterou čísla a počítání mají, mohou se nám otevřít dveře do světa docela jiného, než jakého se v souvislosti s nimi obáváme, vůbec ne bezbarvého, nudného a otravného. Může se před námi objevit svět, který je docela dobrodružný. A Vojtěch Kolman nás ve své knize do takového světa zavádí.

Kolmanova kniha vůbec není populární knihou o tajích čísel, jakými jsou třeba *Čísla přírody* Iana Stewarta či *Historie čísla* π Petra Beckmanna. Není ani knihou, která by byla filosofická v tom smyslu, že by popouštěla uzdu nevázaným spekulacím. Je to filosofie v tom nejlepším slova smyslu: pečlivé zkoumání, třídění a hodnocení faktů (které filosofa nijak neodlišuje od vědce) následované závěry, které jsou natolik obecné a týkají se natolik samých základů našeho poznávání a našich pojmových rámců, že se nikam dovnitř do vědy nevejdou. Výsledkem je text, který má nejen velice široký záběr, ale jde i do obdivuhodné filosofické hloubky. Jde tedy vlastně o pravý opak knihy populární: kdo ji chce přečíst, musí vykázat značnou vytrvalost, zarputilost a připravenost lámat si hlavu — v této již tak obsáhlé studii je toho totiž ve skutečnosti zhuštěno tolik, že by to jinému autorovi vystačilo na knih několik. Úvahy o povaze čísel a matematiky, které jsou páteří práce, tak nakonec tvoří jenom menší část jejího obsahu: vedle nich se kniha věnuje zrodu moderní logiky, základům moderní matematiky i některým aspektům filosofie jazyka.

Myslím tedy, že jde o práci svou šíří, hloubkou a zejména důsledností promýšlení probíraných filosofických problémů zcela mimořádnou. Jistě povede i k mnoha diskusím, které, domnívám se, česká filosofie potřebuje jako sůl. Jako její promotér však nemohu čtenáři slíbit nic než pot, slzy a krev spolu s vidinou toho, že odměna pro toho, kdo se nevzdá a knihu skutečně přečte, bude stát za to — nahlédne do závratných hloubek filosofie, logiky i základů matematiky.

Jaroslav Peregrin

Pittsburgh, leden 2008

Poznámka

Tato kniha vznikla jako extenze pracovního textu, který jsem vypracoval během svého pobytu v Lipsku jako stipendista Humboldtovy nadace. Stalo se tak v rámci stejnojmenného semináře *Philosophie der Zahl*, který tam v letním semestru akademického roku 2004/2005 spolu se mnou vypsal můj hostitel Pirmin Stekeler-Weithofer. Původní německý manuskript, čítající asi 100 stran čistého textu, byl určen jednak pro studenty semináře, neboť se do něj promítala probíraná témata a následné diskuze, jednak jako výstup mého projektu *Ursprung der analytischen Philosophie und modernen Logik in der Wende zur Sprache*, s nímž jsem do Lipska jel. Původní úmysl rozpracovat manuskript ve zcela samostatný a publikovatelný titul jsem nakonec, pod tlakem času, opustil s tím, že bude nejprve lepší začít rozsáhlejším textem v českém jazyce, v němž kromě filosoficky relevantních postřehů proberu i četné technické detaily a z nějž bude teprve později, při uvážení příslušných národních specifik, možné vyrobit vhodné cizojazyčné verze. Začal jsem na něm pracovat ještě za svého pobytu v Lipsku a v této práci pak, pokud mi to učební a administrativní povinnosti dovolily, pokračoval i po návratu do Prahy. Výsledek nyní držíte v ruce. Nečiním si v něm nárok na dokonalost v nějakém absolutním smyslu slova, doufám jen, že jsem dostál alespoň některému z cílů, jak jsou popsány v úvodu.

Vydání knihy bylo financováno z grantu č. 401/06/0387 Grantové agentury ČR *Inferencialistické základy logiky a sémantiky* a z prostředků výzkumného záměru MSM 0021620839 Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR *Metody moderní matematiky a jejich aplikace.* Práce autorská byla i dlouho po návratu do Prahy zajištěna skutečně velkorysou materiální podporou nadace Alexandera von Humboldta. Její stipendium mi ale v první řadě umožnilo užší spolupráci s Pirminem Stekelerem, pod jehož vlivem se dávno před tím utvářely mé názory na povahu logiky a její vztah k jazyku, resp. jazykům, jako je ten matematiky. Stekelerovy dnes již přes dvacet let staré *Grundprobleme der Logik* stále považuji za nejlepší studii v oboru filosofie logiky, nejen co se týče autorova vstřícného a zároveň kritického postoje k teorii sémantického, speciálně pak inferencialistického holismu a různým pokusům, jak dát logice či mate-

matice nějaké ‘základy’, ale i jeho odhodlání procházet bez předsudků a závislosti na módních trendech logickými a filosofickými systémy minulosti a z jejich konfrontace dospívat k adekvátnímu obrazu o filosofii a logice ‘pro naši dobu’.

Stekelerův hluboký vhled do filosofie v celé šíři jejích zájmů, od náboženství přes historii až po vědu, od Platóna přes Hegela až po Wittgensteina, inspiroval (v různé míře, samozřejmě) takřka každou kapitolu této knihy. Jistá těkavost a řekl bych až systematická nesoustavnost jeho myšlení zabránila pohodlné a nebezpečné možnosti následovat jej až příliš těsně, což je ku prospěchu věci zejména proto, že jsem za zde prezentované závěry tím spíše zodpovědný já. Čtenář může ostatně míru této divergence posoudit sám, neboť právě vyšla Stekelerova nová kniha *Formen der Anschauung*, vzniklá rozpracováním původně čistě geometrické studie do komplexní filosofie matematiky, jak zní ostatně i její podtitul. Obávám se však, že s léty stále víc a víc bytnějící zkratkovitost Stekelerova vyjadřování vůbec nepřispěje takové recepci, jakou by si jeho studie zasloužila.

Mimořádné díky patří Jaroslavu Peregrinovi, jenž jednak přečetl manuskript, jednak se díky němu bylo z Lipska kam a především proč vracet. Za podrobné korektury jsem vděčný Liboru Běhounkovi, jenž byl schopen a ochoten navrhnout vylepšení prakticky každé části knihy. Za poznámky a podněty k celému nebo větším částem textu vděčím Pavolu Zlatošovi, Radku Honzíkovi, Ladislavu Kvaszovi, Janu Šebestíkovi, Pavlu Ludvíkovi a Kateřině Trlifajové. Za další připomínky a opravy děkuji Pavle Toráčové, Karlu Procházkovi, Robertu Roreitnerovi, Milanu Soutorovi, Martinu Fontánovi, Vítu Punčochářovi, Anně Horské a Davidu Navarovi. Za starosti spojené s vydáním knihy náleží nemalé díky Davidu Jeřábkovi.

Závěrem odolám pokušení vyhnout se obvyklému stereotypu tím, že učiním za zbylé chyby a nedostatky textu (a že jich je) zodpovědné výše zmíněné, a raději ještě poděkuji za počasí akademického roku 2006/2007, které mi dovolilo strávit větší část zimy na chatě a dokončit tak knihu podstatně dříve, než jsem očekával. V této souvislosti musím ocenit, že sousedův chlapec Jaroslav (a.k.a. Jaroušek) vyrostl a přestal mě rušit svým výskotem, stejně jako pes Ťapka (z druhé strany živého plotu), jenž navíc pošel. Bůh jim žehnej.

Vojtěch Kolman

Praha, říjen 2008

Geschrieben steht: “Im Anfang war das W o r t!”
Hier stock ich schon! Wer hilft mir weiter fort?
Ich kann das Wort so hoch unmöglich schätzen,
Ich muß es anders übersetzen,
Wenn ich vom Geiste recht erleuchtet bin.
Geschrieben steht: Im Anfang war der S i n n.
Bedenke wohl die erste Zeile,
Daß deine Feder dich nicht übereile!
Ist es der Sinn, der alles wirkt und schafft?
Es sollte stehn: Im Anfang war die K r a f t!
Doch, auch indem ich dieses niederschreibe,
Schon warnt mich was, daß ich dabei nicht bleibe.
Mir hilft der Geist! Auf einmal seh ich Rat
Und schreibe getrost: Im Anfang war die T a t!

(Goethe, *Faust*)

Hierin liegt die feste philosophische Einstellung, die ich zur Begründung der reinen Mathematik — wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen — für erforderlich halte: *am Anfang* — so heißt es hier — *ist das Zeichen.*

(Hilbert, *Neubegründung der Mathematik*)

Es ist weiter klar, dass es nicht die Folge von Lauten ist, als welche sich ein Satz darstellt, sondern sein Sinn, dem wir eigentlich Wahrheit zuschreiben.

(Frege, *Logik*)

Die intuitionistische Mathematik ist eine vom menschlichen Geiste vollgezogene sprachlose Konstruktion, die sich in restloser Exaktheit entwickelt aus der Ur-intuition der Zwei-einigkeit.

(Brouwer, *Berliner Gastvorlesungen*)

Mathematik ist freilich, in einem Sinne, eine Lehre, — aber doch auch ein *Tun.*

(Wittgenstein, *Philosophische Untersuchungen*)

Úvod

Číslo, jeho pojem a způsoby existence byly tématem filosofické reflexe od počátku filosofie jako teoretické disciplíny, ba co víc, k této její emancipaci bezpochyby i přispěly. Ne náhodou právě v antickém Řecku překročila filosofie stín praktické ‘životní moudrosti’ a matematika přestala být souborem *ad hoc* pravidel, jak změřit to či ono, ale systematickým studiem abstraktních objektů a forem. Filosofie matematiky pak jako červená nit prochází dějinami obou disciplín a spojuje je v interakci někdy hluché a neplodné, jindy zase výbušné a inspirující.

Že zvláště z hlediska vývoje matematiky přicházejí v těchto výbušných okamžicích ke slovu rozličné antinomie a paradoxy, není v jistém smyslu vůbec překvapivé. Soustředěnost, s jakou matematici sledují zděděné koleje svého výzkumu, aniž by si kladli otázky po jeho kořenech, původních cílech či podmínkách, za nichž má ještě smysl, popisuje již Platón ve své *Ústavě* [Res., 533b n] jako pozoruhodný, leč pro vědce typický případ omezenosti:

> [. . .] pouze sní o bytí, ale nemohou skutečnost nikdy spatřit za bdělého stavu, pokud nechávají hypotézy, které předpokládají, neprozkoumány, a nejsou schopni podat k nim vysvětlení.

Tato omezenost spolu s jistou mírou metodického lajdáctví nemusí být obecně na škodu, neboť, jak uvidíme na osudu řecké teorie proporcí, příliš vysoko nastavená laťka rigoróznosti může oficiální teorii odvést daleko od vlastní praxe, a utlumit tak další vývoj vědy na dlouhá léta dopředu. Dojde-li pak po jisté době k detonaci v podobě protichůdných či ‘kontraintuitivních’ závěrů, není to proto třeba ihned interpretovat jako tragédii, ale spíše jako výzvu a příležitost k tomu zvážit a revidovat zapomenutá východiska, oddělit cenné od konvenčního a výsledek postavit na pevnější základ. Z výše uvedených důvodů musí být síla výbuchu potřebná k nějaké revizi zpravidla značná.

Podnětů takovéto intenzity také nebylo v dějinách matematiky, resp. filosofie matematiky mnoho, a lze dokonce říci, že měly vždy nějaký antický precedens. To platí triviálně o objevu nesouměřitelnosti (iracionality) některých veličin v rámci elementárních geometrických forem, jako je čtverec či pětiúhelník, který otřásl pythagorejským programem racionalizace fenomenálního světa a přivedl *abstraktní* aritmetiku nadlouho do područí *názorné* geometrie. Viděno ahistoricky očima Brouwerova útoku vůči implementaci jazykových schémat a logiky v matematice, přichýlil se zde osud na stranu (pre)intuicionistického křídla, i když nutno dodat, že kánon antické logiky neměl při vší sofistikovanosti tehdejší matematice mnoho co nabídnout. Kant nicméně ve své filosofii přejal tuto prastarou představu matematiky coby názorné vědy žijící z konstrukcí v prostoru a čase jako jednoduše danou a vyostřil ji opět vůči logice coby disciplíně diskurzivní, studující jazyk a formální vztahy jeho pojmů. Nevzal přitom v úvahu, že toto dělení již dávno nekopíruje stav aktuálního bádání.

Díky Descartově analytické geometrii, zřetelně ovlivněné symbolicko-algoritmickou formou arabské matematiky, nemusely být geometrické obrazce a úlohy předváděny pouze v názoru, nýbrž je bylo možné identifikovat, pojmenovat prostou formulí či vyřešit mechanickým výpočtem. Z epistemologického hlediska Kantovy filosofie by to nemuselo ještě znamenat žádný pokrok, kdyby totiž nové aritmetické (analytické) metody zůstávaly jen jakýmsi 'konzervativním' rozšířením metod geometrických (syntetických). Že tomu tak není, ukázaly zřetelně až pozdější důkazy *ne*řešitelnosti některých tradičních geometrických problémů, jako je zdvojení krychle či třetění úhlu, opírající se o algebraickou teorii Galoisovu. K nim ještě později přistoupily důkazy transcendence (nealgebraičnosti) čísla π, tedy negativní řešení problému kvadratury kruhu. Netrivialitu aplikace algebraických či obecně symbolických metod v geometrii šlo ovšem do značné míry vyčíst již z Newtonovy a Leibnizovy ideje symbolického kalkulu coby metody řešení komplikovaných geometrických problémů, jako jsou výpočty obvodů a obsahů zakřivených forem. My se dnes můžeme velmi efektivně odvolávat také na Hilbertovy metody (meta)důkazů o dokazatelnosti v axiomatických systémech, konkrétně třeba na jeho důkaz nezávislosti axiomu o rovnoběžkách na ostatních axiomech eukleidovské geometrie konstrukcí analytického modelu apod.

Co se týče infinitesimálního kalkulu, jenž hraje v takto popsaném vývoji analytické matematiky vedle analytické geometrie stěžejní úlohu, byli si jeho otcové Newton a Leibniz stejně jako jejich kritici dobře vědomi toho, že má ve svých základech značné trhliny. Narůstající počet paradoxů spjatých s pojmem nekonečna, zvláště v jeho konfrontaci s názorným zavedením derivace a integrálu, která jde zase zpět až k některým paradoxům Zénónovým (paradoxy názoru), vedl postupně k několika vlnám reforem analýzy. V nich byly opakovaně podrobeny zkoumání pojmy funkce, limity a reálného čísla. Od Lagrangovy ukvapené eliminace limit se tak přes Cauchyho synkategorematické užití pojmu nekonečně malé veličiny dospělo až k plně aritmetizované analýze, dokonané Weierstrassovou eliminací řeči o limitních veličinách a infinitesimáliích ve prospěch kvantifikace přes přirozená čísla a Cantorovou, resp. Dedekindovou definicí a redukcí reálného čísla na posloupnosti, resp. množiny čísel přirozených. Nato hned vyvstal program nový, věnovaný (1) širšímu zdůvodnění implicitně (emprakticky) osvojených inferenčních vzorců Weierstrassovy ‘epsilontiky’, (2) vysvětlení řeči o všech (pod)množinách a posloupnostech přirozených čísel, a potažmo (3) řeči o přirozených číslech samých.

Z jistých důvodů, které zmíníme, jsou všechny tyto tři body tématem Fregovy nové logiky, tedy nikoli Cantorovy a Dedekindovy teorie množin, která se jakožto nový typ do krajnosti zobecněné aritmetiky stejně jako aritmetika sama o jazyk a jeho formy primárně nezajímá. Zájem o syntaktický *design* matematických teorií, tedy jakási institucionalizovaná reflexe na konstitutivní předpoklady toho kterého oboru, je z hlediska historie matematiky značné novum, jímž Frege úspěšně vnáší do matematiky podněty vedoucí v průběhu dalších let k rozvoji zbrusu nových odvětví a disciplín, mezi nimi informatiky. Na tomto pozadí se nezdají být škody, které Fregovým, ale i Dedekindovým a Peanovým ambiciózním projektům způsobily Russellův a jiné paradoxy, tak vážné, jak se je škodolibě pokusili interpretovat ‘státotvůrci’ typu Poincarého či ‘anarchisté’ typu Wittgensteinova. Přesto je Russellova antinomie právě na základě debaty a rozkolu, který ve sféře základů způsobila, možná nejvýznamnějším kolapsem v dějinách (filosofie) matematiky. K němu se ostatně více či méně vztahují jak teorie typů revidovaného logicismu Russellova, tak Zermelova a další axiomatizace teorie množin, po nich pak Hilbertův finitistický program se svým důrazem na bezespornost axiomatické teorie a v neposlední řadě Brouwerovo a Wittgensteinovo paušální odmítnutí všech uvedených řešení.

O čem je tato kniha

Tímto výčtem, snad s dodatečným zmíněním Gödelových slavných výsledků o neúplnosti aritmetiky, je také zhruba dán historicko-tematický rámec této knihy. Hlavní roli v něm hraje pojem čísla, který je sice od doby Fregových *Grundlagen der Arithmetik* [1884] (dále také “Grundlagen”) trvalým tématem filosofie matematiky coby emancipované filosofické disciplíny, zpravidla v něm však dominuje číslo přirozené, jak to lze např. názorně vidět na jinak znamenité Potterově studii *Reason's Nearest Kin* [2000].

To se může zdát zprvu podivné, neboť jsme již naznačili, že to byly především otázky matematického kontinua, co iniciovalo zvláště plodné interakce mezi matematikou a filosofií, ba co dalo dokonce vzniknout logice jako plnohodnotné disciplíně žijící na pomezí obou. Důvodů pro tento stav lze ale uvést hned několik. V první řadě nepodal nikdo pro žádný z číselných oborů tak inspirativní a kompaktní příklad filosofické analýzy jako Frege ve svých *Grundlagen* pro čísla přirozená. Reálná čísla představují samozřejmě podstatně komplexnější téma, u něhož mají zprvu nevinně vyhlížející kontroverze dalekosáhlé následky. Prastarý spor o aktuální či potenciální charakter nekonečna se v moderním uchopení reálných čísel coby posloupností či množin čísel racionálních značně vyostřuje, neboť zde v důsledku nemáme co do činění jen s nekonečně mnoha objekty, ale s nekonečně mnoha objekty, které jsou rovněž nekonečné. Tradičně tomu odpovídá teze, že v kontinuu se s nekonečnem setkáváme v každém z jeho nekonečně mnoha bodů coby limitou posloupností bodů jiných, případně že každá část kontinua je rovněž kontinuem. Dát dohromady nějaký přesvědčivý, a proto obecně akceptovaný základ, na němž by mohla další diskuze stavět, je tedy z povahy věci takřka nemožné.

Program aritmetizace analýzy navíc provázel motiv zcela inverzní její řecké geometrizaci, totiž snaha o dosažení co nejúplnější nezávislosti na 'nespolehlivém' názoru. Tento úmysl se zdál být v případě přirozených čísel snadno obhajitelný, neboť, jak argumentoval Frege [1884, § 24], počitatelné nejsou jen empirické, ale i abstraktní předměty, např. čísla samotná. V případě čísel reálných se tak ale snadno ztratí spojení s původním oborem aplikace, tj. s praxí geometrického měření. V okamžiku pak, kdy se ryze teoretická zdůvodnění, nabízená po řadě Cantorovou teorií množin, Fregovým a Dedekindovým logicismem a Hilbertovým formalismem, stanou ve formě nějakého formálně koherentního konglomerátu zažitým standardem, dojde i k postupnému vytěsňování otázek po jejich vazbách k původní praxi, tedy i potřebě širšího zdůvodnění.

Jelikož tento trend započal již před několika dekádami, ocitla se současná filosofie matematiky v mrtvém období. Idiosynkratické, leč podnětné a k jádru mířící analýzy, jako je Lorenzenova či holandské školy, jsou coby výstřelky odsunuty stranou a namísto nich se slavnostně reformulují a kombinují tradičně úspěšné postoje platonismu a formalismu, tak, aby odpovídaly pohodlí většinového vkusu. Brouwerův zoufalý pokus o útěk z Hilbertovým formalismem obehnaného 'Cantorova ráje' je také pochopitelný právě potud, pokud je reakcí na povrchnost axiomatikova předpokladu, že lze aritmetický obor 'definovat' konvenčně zvolenými větami, které právě pro tuto konvenčnost nemohou být zprvu ničím víc než pouhými formulemi. Tato idea tvoří bázi Dedekindovy a Hilbertovy metody 'implicitní definice', která se podle Coffovy [1982] vlivné analýzy měla stát bází konceptualizace matematiky, tj. jejího oproštění od kantovských forem názoru. Dnes slaví tato doktrína triumf v rámci tzv. strukturalismu, jenž se po vzoru (raného) Hilberta nepříliš úspěšně pokouší skrývat platonistické předpoklady pod formalistickým rouchem. Odtud popularita sloganu z Hilbertova dopisu Fregovi [1976, s. 66]:

> Jestliže si libovolně stanovené axiomy vzájemně neprotiřečí se svými důsledky, jsou pravdivé, předměty těmito axiomy definované existují. To je pro mě kritérium pravdy a existence.

Brouwerův důraz na ‘efektivitu’, ‘vyčíslitelnost’ aritmetických operací hrál navíc v dalším vývoji matematiky významnou roli, když dovedl Brouwerovy pokračovatele, mezi nimi často i jeho protivníky, přes teorii rekurzivních funkcí k moderní informatice. Aplikace efektivního standardu na pojem aritmetické pravdy a odmítnutí principu *tertium non datur* měly jako většina konstruktivistických námitek vůči klasické matematice přinejmenším ten pozitivní efekt, že ukázaly podmínky konstituce elementární aritmetiky jako netriviální. Ptáme se:

> Co vlastně znamená, že je nějaká věta, např. Goldbachova domněnka, pravdivá, když tuto její pravdivost nejsme momentálně schopni dokázat?
>
> Jak poznáváme onen ‘standardní model aritmetiky’, na nějž se v důkazu Gödelových vět matematici tolik odvolávají?

To vše jsou ovšem v jistém smyslu již otázky Fregovy. Skutečnost, že na ně platonismus ani formalismus Cantorova či (raného) Hilbertova typu žádnou přijatelnou odpověď nemají, také potvrzuje Fregovo a Brouwerovo odhodlání problematizovat to, co jiní za problematické nepovažují.

Tímto základním (jak říká Frege v úvodu *Grundlagen*: sókratovským) postojem ovšem shoda mezi Fregem a Brouwerem končí. Odmítnutím ‘vyloučeného třetího’ a vůbec možnosti jazykové kontroly v matematice ignoroval Brouwer v jistém smyslu triviální fakt, že přinejmenším od Eukleidových dob pracovala matematika s obory ve své identitě určených předmětů, jak to po Eudoxově geniální anticipaci explicitně zachytil Frege ve své teorii abstrakce. Tím se Brouwer vydal na osamocenou cestu leckdy důvtipné, leč v důsledku nesrozumitelné mentální akrobacie a anarchie difúzních předmětných oborů. V rámci Fregovy odpovědi na kantovskou otázku “jak jsou nám dána čísla?”, totiž “v kontextu věty, speciálně rovnosti”, bylo přitom jasně popsáno, jak při netriviální analýze (jazyka) aritmetiky postupovat. Zároveň tím byl dán i prvotní impuls k druhému koperníkovskému obratu ve filosofii, ‘obratu k jazyku’, a z něho vzešlé analytické filosofii. V jejím rámci bylo možné odhalit jako nezdůvodněné nejen tradiční problémy filosofické metafyziky, ale i nově se objevivší problémy metafyziky matematické, a uvést je pak eventuálně na pravou míru.

V oblasti překonání *filosofické metafyziky* jsou tradičně známy zejména příspěvky Russellovy a Carnapovy, které však v důsledku svého empirického zakotvení často přestřelují cíl a jen nahrazují jedno dogma jiným. Ve sféře *metafyziky matematické* se o to mnohem úspěšněji pokusil třeba Wittgenstein ve své analýze Cantorova diagonálního argumentu a jeho (zne)užití k ‘důkazu’ existence vyšších a vyšších nekonečen či principiálně nepojmenovatelných předmětů. K tomu se podrobně vyjádříme v této knize. Za vlastní si přitom můžeme vzít právě Wittgensteinova [1976, s. 103] slova vyřčená směrem k Hilbertovu [1926] proslulému zvolání o Cantorově ráji, z něhož nás již nikdo nevyžene:

> Řekl bych: "Ani ve snu by mě nenapadlo vyhánět kohokoli z tohoto ráje." Zkusil bych něco jiného: Zkusil bych vám ukázat, že to není ráj, a vy pak odejdete dobrovolně sami.

Podobně se to má i s Wittgensteinovým [1976, s. 14] vyjádřením, uvozujícím jeho přednášky z filosofie matematiky v Cambridge roku 1939, jejichž aktivním participantem byl vedle von Wrighta také Alan Turing:

> Jako filosof mohu hovořit o matematice, protože se budu zabývat pouze hádankami, které vznikají v souvislosti s užitím slov každodenního jazyka, slov jako "důkaz", "číslo", "posloupnost", "uspořádání" atd.

To se však na naši knihu úplně nevztahuje, neboť kromě filosofických sledujeme i jiné cíle, které vylíčíme záhy. Chci tím říci, že se zde budeme zabývat také problémy, které už s každodenním jazykem souvisí jen velmi vzdáleně.

Ve vztahu k Wittgensteinově filosofii je ale vhodné předeslat, že prosté dovolávání se každodenního jazyka a šířeji pojaté praxe není ničím samospasitelným a bez dalších výkladových fines s sebou spíše problémy přináší, než aby je řešilo. Cantor byl samozřejmě v právu, když podobně jako Bolzano definoval reálná čísla *salva veritate* jistých postulátů, např. věty o mezihodnotě, neboť na čistě fenomenální či elementárně praktické úrovni není vůbec jednoznačně zodpověditelné, jak by měla či neměla vypadat jejich struktura. Rovněž pro transfinitní řadu ordinálů existuje přirozené, leč značně netriviální zdůvodnění v topologických úvahách nad bohatostí struktury reálné osy, která je vlastně důsledkem jejich netriviální Cantorovy definice. Přidáme-li tento číselně-teoretický původ teorie množin k vzniku intuicionistické logiky a matematiky z Brouwerovy alternativní koncepce kontinua, máme samozřejmě o několik důvodů víc, proč být nespokojeni se zmíněným vychýlením současné teorie základů logiky od kdysi nastaveného směru, který dal pojmu logiky jistý, zcela specifický smysl. Přitom již z triviálního faktu, že komplexní větné formy, jimiž se zabývá Fregova logika, jsou vlastně tvary Weierstrassovy epsilontiky, je zřejmé, že jakémukoli pojednání o dějinách (idejí) logiky by mělo věcně předcházet pojednání o dějinách (idejí) čísla, zejména pak čísla reálného.

Jak číst tuto knihu

V předkládaném textu chci sledovat prolínající se cesty filosofie a matematiky na poli čísla, jeho forem a způsobů existence, a to zejména s ohledem na vliv, který tato interakce měla na vznik a vývoj *moderní logiky*, a naopak, který měla moderní logika na vývoj *matematiky a její filosofie*. V tomto ohledu má být tato kniha také příspěvkem k *dějinám logiky* v nejširším smyslu toho slova. Zároveň se zde v pojmu čísla stává tématem něco, co se sice díky drilu školních let ustanovilo jako trvalá součást našeho všedního života a (jazykové) praxe měření a počítání, na zdůvodnění čehož ale přes — a nebo právě pro — jistou technickou komplikovanost měl jenom málokdo energii či čas. Právě na reálných číslech je přitom názorně vidět, o jak netriviální záležitost se jedná, neboť již zkoumání jejich výskytu v relativně primitivním výseku přirozeného jazyka vede k závěru, že se jedná jen o viditelnou špičku ledovce skrytých předpokladů, k jejichž odhalení je zapotřebí více než pouhé sledování zavedených postupů a rad, jak je nabízí množinová a axiomatická matematika.

Co se od nás žádá, je ochota experimentovat, vidět tradiční příběhy, např. ten ‘O Bolzanově statečném důkazu věty o mezihodnotě’, jinýma očima, tedy ponořit se do logicko-filosofické, nikoli matematické reflexe. Ospravedlněním toho všeho je prostý fakt, že přinejmenším ona ‘primitivní’ část matematiky, která souvisí s ‘přirozeným’ pojmem čísla, je veřejným statkem, nikoli soukromým pozemkem velekněžů vědy, kteří k němu podle vlastního uvážení poskytují vyvoleným přístup. Takovéto pojetí vědy jde ostatně proti zásadám jakékoli kritické filosofie, zvláště té, která začíná faktem sdíleného jazyka, nikoli na něm nezávislým světem, který každý odhaluje sám za sebe, podle Bohem nadělených speciálních schopností. Tím samozřejmě nepopíráme jejich existenci, pouze říkáme, že jsou pouhým prostředkem, jímž mohou mimořádně nadaní jedinci rozšířit společně sdílený prostor jazyka jistým, ne zcela predikovatelným či nějak předzjednaným směrem. Kritériem nadání je zde přitom právě obecný prospěch tohoto rozšíření, nikoli vlastní uspokojení jedince či jeho soudruhů. Odtud pochází kritika vědeckých teorií pěstovaných pro sebe sama či, z jiné oblasti, kritika avantgardních uměleckých směrů.

K ironii doby patří, že se stalo běžným tyto směry hájit, nikoli odmítat. Obvyklým motivem zde ale není tolerance, nýbrž lhostejnost a nuda, jedná se tedy o zvláště rafinovaný projev dogmatismu. To samozřejmě nemění nic na základním principu vstřícnosti (*charity*), který nám velí takovéto výstřelky nesankcionovat, neomezují-li naši svobodu, a to nikoli z lásky (tolerance), ale opatrnosti plynoucí z nedostatku schematických kritérií pro odlišení dobrého od jalového. Tím ani náhodou neříkáme, že takovéto rozlišení není možné, ba naopak, jeho popření je projevem mravního a epistemického nihilismu, které jsou právě proto, že se jedná o společenské, nikoli čistě privátní postoje, z definice neudržitelné. Tento závěr platí obecně o všech tzv. ‘skeptických argumentech’, jak se jimi, na můj vkus až příliš často, zabývá ‘teoretická’ filosofie.

Důraz, jenž v naší knize klademe na úlohu logiky při reflexi toho, ‘co jsou, k čemu jsou a jak jsou nám dána čísla’, s sebou automaticky nese, že se nemůže jednat o práci populární v žádném významu toho slova, ale studii od počátku pevně zakotvenou v debatách současné filosofie logiky a matematiky. Jinak to ostatně ani nejde a představa, že lze začínat s čistým listem, mimo konkrétní historickou situaci, je ta nejnebezpečnější filosofická pověra. Postoje, které zde autor preferuje a zaujímá, jsou také nejspíš v tomto okamžiku více méně zřejmé, stejně jako seznam dramatických osob, které se při tom — v čele s Fregem — dostanou ke slovu.

Jelikož se programově pohybujeme na pomezí několika oborů, vzniká také otázka, do jakých detailů je v knize třeba vykládat některé relativně jednoduché pojmy, které jsou tématem úvodů do příslušné odborné literatury, a primárně tedy do filosofického pojednání, jako je toto, nepatří. Jednak je ale i ona odborná literatura v Čechách pořád ještě nedostatkovým zbožím (nemluvě o ‘dobré’ základní literatuře), jednak z mých zkušeností plyne, že ani informovaný čtenář nemusí být s to vybavit si všechny užité pojmy v žádoucích souvislostech či nasvícení. I z tohoto důvodu jsem se rozhodl původní německý text rozšířit alespoň o náznaky technických náležitostí, aniž bych tím ovšem suploval relevantní učební texty a příručky, které lze konzultovat dodatečně. K tomuto kroku existuje také věcné ospravedlnění, neboť jsou to zpravidla právě elementární a standardní rozlišení, v nichž tkví jádro těch největších ideových sporů a kontroverzí, již proto, že je pro jejich každodennost nikdo nepovažuje za nutné znovu zvážit a promyslet. A na druhou stranu, mnohé technicky nekontroverzní výsledky logiky a matematiky se bez znalosti příslušných technikalit stávají snadno desinterpretovatelnými, a tudíž filosoficky bezcennými či dokonce nebezpečnými, jak to prototypicky ukazuje případ Gödelových vět v jejich nezasloužené roli novodobé kritiky čistého rozumu.

Jelikož se programově zabýváme zcela elementárními věcmi, nemůžeme v jistém smyslu nic předpokládat jako neproblematicky dané. Většina rozlišení knihy je tak zaváděna ‘za pochodu’ a mění se podle okolností daných dosavadním výkladem. Kniha je již proto (!) na hony vzdálena záměru být učebnicí, a dochází-li v ní příležitostně k aplikaci výkladové struktury

definice věta důkaz,

je to vždy především s ohledem na čitelnost textu. *Žádné* tvrzení či důkaz v ní také nejsou zmíněny samoúčelně či ze (skrytě) estetických důvodů, jak k tomu často dochází v logických a matematických textech, které jdou v důsledku toho odnikud nikam. I ony zmíněné 'standardní' pasáže, zejména kapitola 3 věnovaná moderní logice a části kapitol 2 a 6 zabývající se základy teorie množin, slouží přísně účelům výkladu, např. k demonstraci techniky důkazu indukcí, jak ji logicismus netriviálně využil k obhajobě strukturálního uchopení pojmu čísla, konkrétně tedy kategoričnosti axiomatických teorií aritmetiky a analýzy druhého řádu, a v transfinitním zobecnění k důkazu kategoričnosti teorie množin. U důkazů nestandardních matematických teorémů, především rekurzivní a intuicionistické analýzy, je tento didaktický účel zjevný.

Od potenciálního čtenáře se toho dopředu neočekává mnoho. Není totiž naším cílem vysvětlit vše co nejjednodušeji, ale ve správných souvislostech, které již navedou k samostatnému studiu a případnému návratu zpět, byť by to byl návrat kritický. To znamená, že samotná četba knihy naopak očekává od čtenáře mnoho, totiž stálou spolupráci, ochotu doplnit naznačená místa důkazů, přečíst podle potřeby související literaturu apod. Na škodu také není zkušenost s metodami moderní (matematické) logiky alespoň v rozsahu jednosemestrálního kurzu končícího důkazem věty o úplnosti pro výrokovou logiku. Úvodní kurzy a texty, které se břemeno matematických metod v logice pokoušejí obejít, např. řečmi o umění argumentace, jsou rozhodně na škodu věci. Z českých knih je proto nejlepší konzultovat Sochorovu *Klasickou matematickou logiku* [2001]. V knihách zahraničních je pochopitelně mnohem větší výběr, mezi autorovy oblíbené patří např. nové vydání Boolosova a Jeffreyho klasického textu *Computability and Logic* [2002], pro svoji stručnost a eleganci pak Endertonův úvod *A Mathematical Introduction to Logic* [2000]. V teorii množin je výběr komplikovanější, neboť většina textů je koncipována axiomaticky, bez náznaku motivace, která za tímto přístupem stojí. Malým zázrakem je proto v tomto kontextu Deiserova kniha *Einführung in die Mengenlehre* [2004], která kombinuje živost výkladu s hlubokým vhledem do zákrut vývoje pojednávané disciplíny. O něco podobného, i když ve stručnější a filosoficky zabarvené podobě, se pokouší Potterova monografie *Set Theory and its Philosophy* [2004]. Ke standardním učebnicím patří Endertonovy didakticky průhledné *Elements of Set Theory* [1977], v češtině pak kniha Balcarova a Štěpánkova [2005].

Ke knihám zabývajícím se rámcovým tématem naší knihy, tj. reálnými čísly, po čistě matematické stránce patří v první řadě Deiserovy nedávno vydané *Reelle Zahlen* [2007] a Trussovy *Foundations of Mathematical Analysis* [1997]. Obě jsou napsány znamenitým stylem, s citem pro detail a pojmové souvislosti, nejde ale v žádném případě o pojednání filosofická, tedy něco, o co se tu, byť v hybridní formě, snažíme my. Ve slovenštině se problematice věnuje kniha Lva Bukovského *Štruktúra reálnej osi* [1979]. Co se týče dílčích témat, jak se objevují v naší knize, podrobný úvod do problematiky metod eukleidovské i jiných geometrií podává Harthorne v knize *Geometry: Euclid and Beyond* [2000]. Jedinou mně známou úvodní studií k logikám druhého řádu jsou Shapirovy *Foundations without Foundationalism* [1991]. V otázkách Brouwerova intuicionismu patří pořád mezi nejlepší úvodní knihy Heytingův *Intuitionism* [1956], se značnými výhradami i Dummetovy *Elements of Intuitionism* [1977]. V teorii rekurze lze odkázat na Odifreddiho obligátní *Classical Recursion Theory* [1989]. Znamenitou studií ke Gödelovým větám, pokrývající celou škálu technických, filosofických i historických souvislostí, je Smithova *An Introduction to Gödel's Theorems* [2007]. Z českých knih obsahuje základy rekurze a technický úvod do problematiky Gödelových vět Švejdarova *Logika: Neúplnost, složitost, nutnost* [2002].

Z knih zabývajících se filosofií matematiky způsobem, který je blízký autorovi textu, je možné uvést vedle již zmíněných Stekelerových *Formen der Anschauung* [2008] a Potterovy *Reasons's Nearest Kin* [2000] také Thielovu *Philosophie und Mathematik* [1995] a Kvaszovy *Patterns of Change* [2008]. Posledně zmíněná kniha má o deset let starší slovenskou předchůdkyni *O revolúciach vo vede a ruptúrach v jazyku vedy* [1998]. Z českých a slovenských titulů k základům matematiky je vhodné zmínit ještě Zlatošovu popularizační *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou* [1995] a Vopěnkovy svérázné *Rozpravy s geometrií*, vydané souhrnně pod názvem *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci* [2000].

Z českých textů, které sdílejí můj přístup k filosofii jazyka a filosofii vůbec, bych rád vedle prací Peregrinových, zejména jeho *Významu a struktury* [1999], jmenoval ještě disertaci Ondřeje Berana [2008] *Jazyk a individualita*, jejíž knižní verze se připravuje.

Konvence

Při sázení knihy jsem použil některé obvyklé i méně obvyklé zásady zpracování textu. První z nich se týkají užití uvozovek. Běžné dvojité uvozovky používám takřka výhradně v metajazykové roli *zmínění* výrazu, po vzoru

> "potkan" má šest písmen,

jež má kontrastovat s pouhým *užitím* výrazu ve větě

> potkan má blechy.

Případ jednoduchých uvozovek je komplexnější a zahrnuje jednak vnořené citace, jednak zdůraznění užití slova mimo obvyklý kontext, jak se to nejčastěji děje v řeči metaforické či ironizující, a jednak ke zdůraznění slova či soudržnosti fráze. Významový důraz na nějaké slovo či více slov je však typicky zachycován aplikací kurzívy, jak jsme to výše předvedli v řeči o zmínění vs. užití výrazu. Kurzívou jsou také sázeny tituly knih a článků, a dále cizí, zejména latinská slova.

Kapitálkami jsou zvýrazňována slova klíčová pro daný výklad, tj. především všechny explicitně definované termíny, ale i výrazy, které jsou z nějakých důvodů významné nebo se ukáží být významné v dalším textu. Jejich výskyt je v závěrečném rejstříku vyznačen tučně. Odkazy na literaturu mají standardní formát

jméno [titul, stránka],

který se zpravidla vyskytuje v textu a je s ohledem na to příslušně modifikován. To obnáší především sklonění nebo úplné vynechání autorova jména, jestliže to okolnosti dovolují. Kniha je členěna do kapitol, které jsou tvořeny oddíly. Referujeme k nim jednoduše jako ke kapitole x, resp. oddílu x.y.

V knize předpokládáme, že má čtenář orientační znalosti základní logické a matematické symboliky a terminologie. Ta je proto vysvětlována průběžně, nikoli úvodem, jak to bývá zvykem v matematických textech. V případě nejasností lze konzultovat přiložený rejstřík symbolů, v němž je vyznačeno místo, kde je ten který znak podrobněji vysvětlen či definován. S ohledem na četnost užití nicméně připomeneme některé znaky již zde, především obvyklé logické operátory

$$\neg A \qquad A \wedge B \qquad A \vee B \qquad A \to B \qquad A \leftrightarrow B$$

ve významu popření věty A, prostého sloučení "A a B", nevylučující alternativy "A nebo B", kondicionálu "jestliže A, pak B" a ekvivalence "A tehdy a jen tehdy, když B". Zápis formulí zjednodušujeme konvencí pro sílu vazby spojek v sestupné hierarchii $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ a $\leftrightarrow$, podle níž čteme např. formuli $A \wedge B \to C$ jako $(A \wedge B) \to C$, nikoli jako $A \wedge (B \to C)$. Zavádíme také kvantifikátory

$$(\forall x)P(x) \qquad (\exists x)P(x)$$

ve významu "pro každé x platí $P(x)$" a "pro některá x platí $P(x)$". Z důvodu většího pohodlí je často užíváme v podmíněné variantě, kdy např.

$$(\forall x > 0)P(x) \qquad (\exists x > 0)P(x)$$

znamená "pro každé x větší než 0 platí $P(x)$", případně "pro některá x větší než 0 platí $P(x)$". Z formálního hlediska se jedná o zkratky za $(\forall x)(x > 0 \to P(x))$, resp. $(\exists x)(x > 0 \wedge P(x))$. Analogická konvence se týká i množin zadaných vlastností $P(x)$:

$$\{x \mid P(x)\} \qquad \{x > 0 \mid P(x)\},$$

kdy první tvar čteme jako "množina všech x, pro která platí $P(x)$", druhý tvar, jenž je vlastně zkratkou za $\{x \mid x > 0 \wedge P(x)\}$, jako "množina všech

x větších než 0, pro která platí $P(x)$". Prázdná množina je dána nějakou nesplnitelnou podmínkou, např. jako

$$\emptyset \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \neq x\},$$

kde symbol "$\overset{\text{def}}{=}$" značí definitorickou rovnost a symbol "$\neq$" popření prosté rovnosti $=$. Množiny lze zadat také výčtem prvků, např. jako $\{5, 6, 3\}$. To se týká i uspořádaných n-tic, např. trojice $\langle 5, 6, 3\rangle$, které se od množin liší tím, že v nich přihlížíme k uspořádání prvků, neboli $\{6, 3, 5\}$, $\{5, 6, 3\}$ či $\{5, 6, 5, 3\}$ jsou stejné množiny, oproti tomu $\langle 6, 3, 5\rangle$, $\langle 5, 6, 3\rangle$ a $\langle 5, 6, 5, 3\rangle$ jsou různé n-tice. Náležení prvku množině zachycujeme symbolem $\in$, jak je to vidět na pravdivých větách

$$5 \in \{x \mid x \text{ je prvočíslo}\} \qquad\qquad 5 \in \{6, 5, 3\}.$$

Používáme také zápis $A \notin B$ ve významu $\neg(A \in B)$. Fakt, že je každý prvek množiny A také prvkem množiny B, značíme jako $A \subseteq B$ a čteme "A je podmnožinou B". Podmnožina A množiny B je její vlastní podmnožinou, symbolicky $A \subset B$, obsahuje-li B nějaké prvky, které v A nejsou. Formálně to lze zapsat jako

$$A \subseteq B \rightleftharpoons (\forall x)(x \in A \to x \in B),$$

$$A \subset B \rightleftharpoons A \subseteq B \wedge (\exists x)(x \in B \wedge x \notin A),$$

kde symbol "$\rightleftharpoons$" budeme i v dalším textu používat ve významu definitorické ekvivalence. Průběžně jsou užívány množinové operace

$$A \cap B \qquad\qquad A \cup B \qquad\qquad A - B$$

ve významu průniku, sjednocení a rozdílu (prvků) množin A, B. Formální definice vypadají takto:

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$

$$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

$$A - B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Průnik množin A, B zjevně tvoří prvky oběma množinám společné, sjednocení představuje shrnutí prvků obou množin v množinu jednu, v rozdílu $A - B$ jsou prvky A, které nejsou v B. Zápis $A - b$ znamená zpravidla tolik, co $A - \{b\}$, tj. vyjmutí prvku b z A.

1 Od proporcí ke kalkulu

Geometrický původ reálných čísel v měření rozličných veličin, typicky délek, je evidentní a bezpochyby podobně starý jako původ samotných přirozených čísel. Ale nápad, že lze příslušná udání míry uchopit jako nový druh čísel (v němčině nazývaných výstižně “Maßzahlen”), je mnohem pozdějšího data. K důvodům, souvisejícím s (ne)splněním jistých formálních podmínek, se ještě v průběhu knihy mnohokráte dostaneme. Nyní nás zajímá něco jiného, totiž první kroky na cestě k tomuto teoretickému ‘obratu’.

V jistém smyslu přitom není nutné geometrický původ reálných čísel nijak přehnaně zdůrazňovat, neboť celá řecká matematika, včetně aritmetiky, spočívala vlastně na geometrické bázi. O tom svědčí již takové drobnosti jako např. pythagorejská klasifikace čísel na trojúhelníková, čtvercová, pětiúhelníková a další, viz obrázek 1.1.[1] Pomineme-li

Obrázek 1.1: Figurální čísla

výjimky, jako byl Diofantos, pak výhradně se symboly operující algebra, kterou známe jako přirozený pendant geometrie prostoru, přišla do Evropy z Indie až ve středověku prostřednictvím Arabů, jak ostatně napovídá již její jméno. Pro nás je v tuto chvíli významné zejména Aristotelovo [Cat., 4b], [Met., 1020a] rozlišení mezi *veličinami spojitými* (kontinuálními, souvislými či kompaktními) a *veličinami diskrétními.* K těm prvním patří typicky délky, plochy, objemy nebo doby, k těm druhým mohutnosti množin, resp. samotné množiny.

[1] Srov. Becker [1964, s. 34]. Aristotelés [Met., 1092b] např. hovoří o tom, že jistí lidé “pořádají čísla do tvarů trojúhelníků a čtverců”.

V této kapitole se budeme věnovat způsobům jejich kvantifikace, což znamená, že čísla předvedeme jakožto momenty původní praxe, která je odlišuje od jiných ‘entit’ či ‘předmětů řeči’, jako jsou geometrické tvary či prostoročasové objekty. Abstraktní pojednání čísel, formulované tradičně jako otázka základů aritmetiky, bude následovat v dalších kapitolách.

1.1 Diskrétní veličiny

Množiny počítáme, veličiny měříme.[2] Pojem čísla je tedy v první řadě spjat se souborem diskrétních, a proto v původním, praktickém smyslu počitatelných předmětů. Neboli, jak můžeme číst u Eukleida [El., VII, def. 2]:

> Číslo je z jednotek sestávající množina.

Abychom mohli v konkrétní situaci počítat, nestačí prostá konfrontace s počítanou mnohostí, např. hromadou knih, ale musíme znát i jednotku počítaného, tedy vědět, *co* počítat, zda třeba knihy, tituly, stránky či kapitoly. Na to v plném rozsahu upozornil teprve mnohem později Frege.[3] Na preteoretické rovině, která byla v řecké matematice stále živá, odpovídá tomuto pozorování obor tzv. POJMENOVANÝCH ČÍSEL (5 jablek, 12 stránek atd.).[4] Při měření je ale také třeba zvolit jednotkovou veličinu a nanést ji na měřicí přístroj, tj. pravítko. Na rozdíl od čísel nevede však tento postup vždy k násobku zvoleného měřítka, tj. není vždy možné dosáhnout toho, aby se jednotková délka s danou délkou po opakovaném nanesení kryla. To, že ji můžeme alespoň překročit, patří k definici eukleidovské veličiny, o níž se zmíníme záhy.

[2] V souladu s dřívějším rozlišením bychom měli nejspíš psát: “množiny počítáme, spojité veličiny měříme”. Víceznačnosti, která je se slovem “veličina” spjatá, bychom se tím ale nezbavili, resp. zbavili, aniž bychom nějak přispěli k projasnění textu. Mohli bychom třeba nahradit obecné “veličina” slovem “kvantita” a stanovit, že diskrétními, počitatelnými kvantitami jsou množiny, zatímco spojitými, měřitelnými, veličiny. Další víceznačnost, kterou necháme tak, jak je, neboť je vždy odstraněna kontextem, spočívá v užití slova “veličina” jak v abstraktním smyslu (délka, doba), tak ve významu konkrétního, pojmenovaného kvanta (3 cm, 2,5 min), ale i substrátu, jemuž náleží (konkrétní úsečka, časový úsek). Tato víceznačnost má navíc svoji logiku, neboť se jedná o různé stupně abstrakce, způsoby užití téhož, což je jedno z témat naší knihy. Rovněž nebudeme zavádět terminologický rozdíl mezi množinou a mnohostí coby konkrétním kvantem a pojmem diskrétní kvantity, viz “mnohosti počítáme, veličiny měříme”.

[3] Viz kapitola 4, zejména oddíl 4.1.

[4] Rozlišení pojmenovaných a abstraktních veličin je velmi staré, srov. k tomu třeba Stekeler-Weithofer [1997, s. 864]. Můžeme je vidět např. i v Aristotelově [Met., 1092b–1093b] vymezení vůči Platónovým ideálním číslům a protitvrzení, že čísla jsou jen čísly konkrétních věcí. Ve středověku příslušný rozdíl explicitně zmiňuje např. Stifel, viz Gericke [1990, s. 245]. Bolzano [1837, § 37] zase hovoří o konkrétních a abstraktních veličinách, atd.

Pythagorejská nauka o harmonii, zvláště pak ‘objev’ číselného vyjádření intervalů, po řadě např.

$6:5,\ 5:4,\ 4:3,\ 3:2,\ 2:1$

pro malou a velkou tercii, kvartu, kvintu a oktávu,[5] představuje přesvědčivý, a proto slavný příklad, jak lze v ne zcela prototypickém případě, jakým je oblast zvuků, překonat situačně závislou volbu empirické jednotky (kanonické struny). Na pozadí pythagorejské hudební nauky se takto poprvé jasně ukazuje, jaký vliv mají naše teorie na naše vnímání a kontrolu jevové skutečnosti, a to dokonce v oblastech, které jsou považovány za výsostně subjektivní, protože pracující s pocity příjemnosti či nepříjemnosti jistých počitků.[6] Na teoretickou podmíněnost (*theory-ladenness*, *Theoriebeladenheit*) každého pozorování upozorňuje již dva tisíce let před Popperem a exponenty pozdního pozitivismu Platón v *Ústavě* [Res., 531a], když se vysmívá oponentům pythagorejské hudební *teorie*, kteří se snaží poznat hudební vztahy čistě empiricky, tedy subjektivně, a proto “k nim přikládají uši, jakoby chtěli chytit zvuk od sousedů”, v naději, že tak objeví nejmenší interval.

Kdo umí zpívat nebo hrát na nějaký nástroj, umí obvykle také rozlišit mezi *invariantní* melodií (samotnou skladbou) a *absolutní* tóninou. Melodie, tedy vzájemné poměry (sledu různě dlouhých) tónů se nyní zdají být pomocí čísel jednoznačně artikulovatelné v tom smyslu, že lze dvě libovolné struny rozdělit na relativní jednotky tak, aby jejich části *téhož* poměru reprezentovaly *tytéž* intervaly. Tradičně se samozřejmě ke konstrukci nástrojů, tedy absolutnímu normování, využívá konvenčně zvolená jednotka. Je to přitom právě hledání situaci přesahujících nástrojů teoretického měření, co nás přivádí k teorii poměrů či vztahů veličin neboli k nauce o proporcích, a sice nejprve pro celá čísla, tedy veličiny diskrétní. Ta je obsažena v VII. knize Eukleidových *Základů*. V první řadě jde přitom o přesnou definici toho, kdy jsou dvě určitá čísla *v tomtéž poměru* nebo *proporci*. K dispozici je nám známý Eukleidův algoritmus výpočtu největšího společného dělitele (společné jednotky, míry) dvou čísel. Místo abstraktních čísel si můžeme představovat třeba čísla pojmenovaná, např. dvě ošatky jablek o 32 a 14 kusech. Tělo algoritmu tvoří následující (z ohledem na další výklad co nejobecněji formulovaný) proces, Eukleidem [El., VII, věta 1, 2] popsaný takto:

[5] Základní výklad pythagorejské hudební nauky podává třeba Lorenzen [1960, § 9].

[6] V antice byly např. za absolutně konsonantní souzvuky považovány pouze oktáva, kvinta a kvarta, zatímco u ostatních byla rozlišována různá míra disonance; ve středověku byla zase z konsonantních intervalů vyloučena i kvarta, která je od baroka opět považována za dokonale konsonantní, zatímco obě tercie spolu s oběma sextami (8:5 a 5:3) tvoří tzv. konsonanty nedokonalé. V atonální hudbě jsou pak konsonantními intervaly všechny.

> Jsou-li A, B dvě veličiny takové, že $A > B$, pak přezkoumej, kolikrát se vejde B do A, a poznamenej si zbytek R. Ten je z definice menší než druhá veličina, tedy $B > R$. Nyní postup opakuj, tj. přezkoumej, kolikrát se vejde R do B, a poznamenej si zbytek. Atd.

Tento postup se podle Eukleida nazývá ANTHYFAIRESIS neboli 'střídavé odčítání'.[7] Jelikož konstruovaná posloupnost $A > B > R > \cdots$ klesá, je za předpokladu diskrétnosti výchozích veličin A, B zřejmé, že proces musí terminovat v konečně mnoha, řekněme m, krocích, neboli v kroku m příslušný zbytek zmizí. Označíme-li nyní pro jednoduchost veličiny A, B jako výchozí 'zbytky' R_1, R_2, dostaneme na základě výše popsaného algoritmu následující řadu rovností:

$$
\begin{aligned}
&R_1 = a_1 R_2 + R_3,\\
&R_2 = a_2 R_3 + R_4,\\
&\vdots\\
&R_{m-1} = a_{m-1} R_m + R_{m+1},\\
&R_m = a_m R_{m+1}.
\end{aligned}
$$

Již víme, že platí $R_1 > R_2 > \cdots > R_{m+1} > 0$, přičemž z konstrukce je zároveň jasné, že poslední zbytek R_{m+1} je největším společným dělitelem čísel A, B.

Důkaz: R_{m+1} dělí z definice beze zbytku R_m, symbolicky $R_{m+1}|R_m$. Z obecné platnosti vět "jestliže $a|b$, pak $a|bc$" a "jestliže $a|b$ a $a|c$, pak $a|(b+c)$" lze dále usoudit na $R_{m+1}|R_{m-1}$, a opakováním této úvahy na $R_{m+1}|R_i$ pro $1 \leq i \leq m+1$, tedy i A a B. Nechť je nyní Z nějaký společný dělitel A i B, tj. platí $R_1 = mZ$ a $R_2 = nZ$. Z výše uvedených vztahů plyne, že $R_3 = R_1 - a_1 R_2 = (m - a_1 n)Z$. Takto lze induktivně ukázat, že platí $Z|R_i$ pro $1 \leq i \leq m+1$, tedy i $Z|R_{m+1}$. Tím pádem je $R_{m+1} \geq Z$. □

Nás ovšem nyní nezajímá největší společný dělitel R_{m+1}, ale tak říkaje mimoděk konstruovaná řada celých čísel

$$[a_1, a_2, \ldots, a_m],$$

a to právě proto, že nezachycuje *absolutní*, ale *invariantní* rysy diskrétních veličin A, B. *Anthyfairetický* proces vede v případě poměru $32:14$ ke stejné posloupnosti jako u poměru $64:28$, totiž $[2,3,2]$, ale v prvním případě je největší společný dělitel 2, v druhém 4. Při vědomí toho, že

[7] Srov. Becker [1964, s. 81 nn] pro další detaily. Aristotelés [Top., 158b] hovoří v této souvislosti o "antanairesis".

"poměrem dvou čísel" nemáme ve zvyku rozumět nic jiného nežli takovouto invarianci, nabízí se nyní přímo uchopit *anthyfairesis* jako definici toho, co poměr vlastně je, což se nám technicky redukuje na zachycení rovnosti dvou poměrů:

> Veličiny A, B a C, D takové, že $A > B$ a $C > D$, stojí vůči sobě ve STEJNÉM POMĚRU neboli mají STEJNOU PROPORCI, jestliže aplikace *anthyfairetického* procesu vede k téže posloupnosti celých čísel $[a_1, a_2, \ldots, a_m]$. Tuto posloupnost nazýváme ANTHYFAIRETICKÝ VÝRAZ nebo též ANTHYFAIRETICKÉ RÁCIO.

Tím je teprve ospravedlněn zápis $32 : 14 = 16 : 7$ coby vyjádření příslušné invariance, tedy nikoli např. tvrzení totožnosti (dvojic) příslušných veličin, a tedy i zápis $32 : 14$ samotný. Všimněme si navíc, že co nejobecnější formulace uvedené definice nevyžaduje ani to, aby zúčastněné veličiny byly všechny téhož typu. To dává smysl požadovat jen pro dvojice A, B a C, D zvlášť.

Využití střídavého odčítání k definici proporcí v předeudoxovské, raně pythagorejské matematice hájil poprvé systematicky Oskar Becker [1933], anticipován H. G. Zeuthenem [1910].[8] David Fowler [1999] pak roli *anthyfairesis* v širším kontextu řecké matematiky a filosofie věnoval celou studii. Od něho pochází také termín "anthyfairetické rácio" ve významu toho, co si dnes spojujeme s racionálním číslem či se zlomkem, jenž toto číslo označuje. Souvislost pythagorejské definice rácia s definicí naší, tedy v první řadě přepis výrazu "$[a_1, a_2, \ldots, a_m]$" do zlomkové notace, zprostředkovává zápis, jenž je z literatury znám jako tzv. ŘETĚZOVÝ ZLOMEK (*continued fraction*, *Kettenbruch*):

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{}{a_{m-1} + \cfrac{1}{a_m}}}}.$$

Lze jej snadno odvodit z výše uvedených rovnic takto:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a_1 R_2 + R_3}{R_2} = a_1 + \frac{R_3}{R_2} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{R_2}{R_3}} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{a_2 R_3 + R_4}{R_3}} = \cdots.$$

Objev možnosti, jak artikulovat uniformním způsobem abstraktní vztahy v tak nestejnorodých fenomenálních oborech, jako je hudba či geometrie,

[8] Srov. k tomu poznámky pod čarou in Becker [1933] a Becker [1964, s. 79 nn].

byl jistě hlavním motivem pythagorejské číselné mystiky, podle níž "je číslo principem poznání".[9] Aristotelés [Met., 985b n] k tomu v často citovaném místě píše:

> V této době a již dříve věnovali se takzvaní pythagorejci matematice, jako první ji rozvinuli a takto vychováni myslili si, že její principy jsou principy všech věcí. Jelikož čísla jsou ze své povahy první a zdála se jim v mnoha ohledech podobat věcem existujícím i vznikajícím — více než oheň, země a voda [...]; jelikož viděli opět, že vlastnosti a poměry hudebních stupnic lze vyjádřit čísly; jelikož se jim dále zdály být všechny věci utvářeny podle čísel a čísla zase prvními věcmi v celé přírodě, předpokládali, že prvky čísel jsou prvky všech věcí a celá nebesa jsou hudební stupnice a číslo.

Při vstřícné interpretaci se ovšem nejedná o nějaký projev pověry či filosofického tmářství, jak nám empiricky zaměřený Aristotelés sugeruje, ale naopak, o základní racionální přesvědčení, že lze svět uchopit, popsat *jazykem.* V analytické tradici je tato premisa ekvivalentní jeho poznatelnosti. Výhoda jazyka aritmetiky spočívá právě v tom, že pracuje s relativně přehlednými symbolickými formami reprezentace a mechanického usuzování, na čemž je ostatně založen i úspěch matematické fyziky v novověku. Ta není vlastně ničím jiným nežli vysoce rozvinutou formou aritmetizace světa, tedy uskutečněním pythagorejského programu na podstatně širší, a tím i 'odvážnější' bázi.

Pythagorejská definice (rovnosti) proporce ukazuje názorně, jak pokročilá byla antická teorie veličin a proč ji lze v principu interpretovat jako zobecněnou teorii čísel, zprvu tedy čísel racionálních. To, co jsme popsali, je vlastně báze moderní teorie abstrakce neboli zavedení abstraktních předmětů, jak je později rozpracovali Frege a Lorenzen. My se této technice, vedle průběžného uvádění konkrétních implementací, budeme systematicky věnovat v kapitole 4. Momentálně se uspokojíme pozorováním, že se jedná o explicitně formulovaný přechod od původní *ekvivalence* (dvě dvojice čísel vedou ke stejnému *anthyfairetickému* ráciu) k *rovnosti* nových, abstraktních, resp. abstraktnějších předmětů (proporcí, racionálních čísel). Dnes obvyklý způsob zavedení racionálních čísel, podpořený zlomkovou notací, se přitom opírá o vztah

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightleftharpoons ad = bc.$$

Východiskem je zde ekvivalence mezi celými čísly, resp. jejich dvojicemi na pravé straně výrazu.

[9] Srov. pythagorejské fragmenty uvedené in Becker [1964, s. 105 nn].

Moderní definici (racionální) proporce ponechme ale teď stranou a vraťme se k definici *anthyfairetické*. Nabízí se totiž hypotéza, že je *anthyfairetický* proces aplikovatelný obecně, tj. na libovolné veličiny, a to jednoduše proto, že každé dvě instance příslušného typu, např. dvě úsečky, mají nějakou společnou míru neboli úsečku, která se do obou beze zbytku vejde. V tomto použití se také nabízí přímé srovnání s obvyklejším způsobem měření a na něm založeném reálném čísle:

> Zkoumáme-li, kolikrát se úsečka (veličina) B, jíž je při měření zvolená úsečka (veličina) E jednotková, vejde do úsečky A, začínáme stejně jako u *anthyfairesis*, totiž několikanásobným odečtením B z A a poznamenáním zbytku $R < B$. Poté ovšem nepřejdeme k R, ale zůstaneme u B jakožto výchozí (měřicí) jednotky, rozdělíme ji však na p (typicky 2 nebo 10) stejných částí $\frac{B}{p}$ a ptáme se znovu, kolikrát se B takto zmenšena vejde do R. Atd.

To je báze tzv. p-adického zápisu (zatím jen racionálního) čísla, jak jej známe z běžné praxe a jak se o něm zmíníme ještě v oddíle 2.4. Ve srovnání s pythagorejskou metodou, která opakovaně proměňuje měřicí v měřené a *vice versa*, je tento standardní způsob měření a na něm založené definice proporce evidentně robustnější a méně elegantní, převyšuje však *anthyfairesis* jak z praktických, tak didaktických důvodů. V Eukleido-

Obrázek 1.2: *Anthyfairesis* neboli střídavé odčítání

vých *Základech* je *anthyfairetický* algoritmus v použití na libovolné veličiny, tj. nejen na čísla, popsán v X. knize.[10] My jsme jej v předchozím oddíle formulovali tak obecně, abychom ho nyní nemuseli opakovat. Také pojem (rovnosti) proporce lze znovu použít.

Obecný předpoklad souměřitelnosti *dvou* (a v důsledku pak i konečně mnoha) instancí libovolných veličin nemusí ještě implikovat atomistické pojetí světa, v němž mají dále nedělitelné atomy hrát úlohu univerzální jednotky měřící *všechny* veličiny, které se tím pádem stávají

[10] Viz Eukleidés [El., X, věta 2, 3].

diskrétní. V obou, tj. konečném i obecném případě, lze nicméně očekávat, že Eukleidův algoritmus aplikován např. na libovolné úsečky A, B v konečně mnoha krocích terminuje. Na obrázku 1.2 vede např. k ráciu $[2, 2, 1, 3]$. Vzájemná souměřitelnost ale není jediný předpoklad, jenž se za možností geometrické *anthyfairesis*, střídavého odčítání úseček, ploch či objemů, skrývá. Zaprvé musí být poměřované veličiny A, B srovnatelné v tom smyslu, že nastává právě jeden z případů $A < B$, $A = B$, $B < A$. Zadruhé by měl být tento obor archimédovský, což znamená, že lze libovolnou veličinu A přesáhnout konečným nanášením libovolné veličiny B menší. Tuto obecnou možnost vyjadřuje tzv. ARCHIMÉDOVSKÝ AXIOM, jemuž se také z uvedených důvodů říká AXIOM MĚŘENÍ.[11] V obou předcházejících bodech je pak již, zatřetí, dána možnost definovat na daném oboru sčítání jako totálně definovanou komutativní a asociativní operaci. K ní lze dodatečně definovat i podmíněné odčítání. V opačném sledu, který odpovídá metodě moderní algebry, dostáváme následující axiomatickou charakterizaci oboru, který budeme z nedostatku standardního termínu nazývat OBOREM EUKLEIDOVSKÝM:

(1) $A + B = B + A$,

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$,

(3) pro libovolné A, B nastává právě jedna z možností:

 (a) existuje C tak, že $A + C = B$, $(A < B)$

 (b) existuje C tak, že $B + C = A$, $(A > B)$

 (c) $A = B$, $(A = B)$

(4) pro $B < A$ existuje n tak, že $\overbrace{B + B + \cdots + B}^{n} > A$.

V tomto vymezení je vlastně uspořádání zavedeno dodatečně pomocí sčítání, přičemž uvedené postuláty garantují, že to bude

> USPOŘÁDÁNÍ LINEÁRNÍ, čili že vedle vlastností definujících tzv. ČÁSTEČNÉ USPOŘÁDÁNÍ, což je (i) ANTIREFLEXIVITA, tj. neplatnost vztahu ‘$A < A$’, a (ii) TRANZITIVITA ‘z $A < B$ a $B < C$ plyne $A < C$’, platí ještě jeho (iii) LINEARITA ‘$A < B$ nebo $A = B$ nebo $B < A$’ pro každé A, B, C.

[11] V *Základech* [El., V, def. 4] mu odpovídá definice, podle níž mohou mít dvě veličiny rácio pouze tehdy, jestliže splňují výše uvedenou podmínku. Podle předcházející definice (def. 3) je nicméně hlavním úkolem axiomu zachytit homogenitu, tj. to, že jsou srovnávané veličiny stejného druhu, a tudíž srovnatelné. Autorem prvního názvu axiomu je Otto Stolz, druhého pravděpodobně Oskar Becker. Viz Gericke [1984, s. 115 n].

Všimněme si, že z antireflexivity a tranzitivity relace již plyne její ANTISYMETRIE, neboli okolnost, že ‘z platnosti $A < B$ plyne neplatnost $B < A$’, a ve spojení s linearitou tedy i její TRICHOTOMIE, neboli platnost právě jedné ze tří možností $A < B$, $A = B$, $A > B$. O lineárním uspořádání se také hovoří jako o USPOŘÁDÁNÍ TOTÁLNÍM nebo stručně o USPOŘÁDÁNÍ, neboť jsou jím každé dva prvky, s výjimkou prvků identických, SROVNATELNÉ. Absolutní srovnatelnost zajišťuje relace $\leq$, která ale zase nevyhovuje popisu uspořádání, neboť je reflexivní. Z tohoto důvodu se obvykle zavádí

> ČÁSTEČNÉ USPOŘÁDÁNÍ SLABÉ a SILNÉ (OSTRÉ), přičemž to první je (i) REFLEXIVNÍ ‘$A \leq A$’, (ii) SLABĚ ANTISYMETRICKÉ ‘z $A \leq B$ a $B \leq A$ plyne $A = B$’ a (iii) tranzitivní. Silné částečné uspořádání je to, které jsme popsali výše.

Jelikož jsou přirozená čísla zjevně eukleidovským oborem,[12] lze snadno očekávat, že geometrie není v důsledku nic jiného nežli jistý druh názorné aritmetiky neboli že uvedené charakteristiky eukleidovské domény spolu s předpokladem souměřitelnosti vyčerpávají a jednoznačně vymezují prostor geometrických metod a vět, a potvrzují tak pythagorejské motto: “všechno je číslo”. Objev nesouměřitelnosti strany a diagonály ve čtverci a v pravidelném pětiúhelníku učinil této představě rozhodný konec. Oba důkazy mají svoji názornou variantu, a jsou tedy v jistém smyslu velmi elementární.

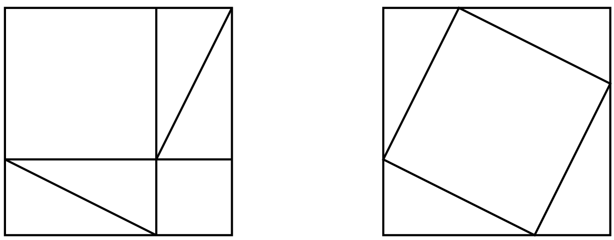
1.2 Nesouměřitelnost a její důkazy

V případě čtverce je spíše než názorný, EPAGOGICKÝ způsob důkazu znám důkaz APAGOGICKÝ, nepřímý. To je dáno i tím, že moderní matematika, na rozdíl od té řecké, preferuje nenázorné důkazy, tj. pracuje (alespoň oficiálně) namísto s obrazy s větami a úsudkovými přechody. Novověký překlad “epagógé” jako indukce a “apagógé” jako dedukce je tu ovšem krajně matoucí, neboť v antice preferovaný názorný důkaz nemá s indukcí ve smyslu empirického zobecnění nic společného.[13]

[12] Na definici eukleidovského oboru je z algebraického hlediska zajímavé, že neobsahuje ani podmínky kladené na GRUPU, tj. především (1) existenci neutrálního prvku E, pro nějž platí $A + E = E + A = A$, jímž by bylo tedy něco jako ‘nulová’ veličina, a (2) s tím související existenci prvků inverzních, tj. takových, že $A + (-A) = E$. Díky asociativitě se jedná alespoň o tzv. pologrupu, která je navíc komutativní. Přirozená čísla představují příklad komutativní pologrupy, která má případně neutrální prvek 0. Na základě skutečnosti, že pro všechny její prvky platí $A \geq 0$, se pak jejich struktura nazývá pozitivní. K algebraické charakterizaci eukleidovské domény jako “totálně uspořádané striktně pozitivní komutativní pologrupy” srov. Stein [1990, s. 339]. Některé z uvedených pojmů budou ještě podrobně definovány později.

[13] K charakterizaci metod *epagógé* a *apagógé* v kontextu vývoje matematických metod viz von Fritz [1971].

Skutečnost, že lze na jediném případu nahlédnout obecnou platnost nějakého jevu pro případy všechny, je naopak konstitutivní pro to, co nazýváme geometrickými objekty a geometrickým důkazem. V tomto smyslu nemůže existovat žádná přesvědčivější či rigoróznější metoda geometrické definice či demonstrace, např. z čistých pojmů či axiomaticko-deduktivním způsobem. Tím není v žádném případě zpochybňována úloha jazyka v epagogickém procesu, neboť to není pouhý názor empirického (a proto nepřesného) obrazce, ale i jazykem ve své identitě zachycená ideální forma (čtverec a trojúhelník), co nás např. na notoricky známém obrázku 1.3 'přivádí' k Pythagorově větě.[14] Rozdíl empirického



Obrázek 1.3: Epagogický důkaz Pythagorovy věty

náčrtu a ideální formy, kterou je skrze epagogický důkaz třeba 'spatřit', je vlastně jen variací na dříve diskutované rozlišení empirického souzvuku a abstraktního intervalu, např. kvarty, ideálně, tj. nezávisle na nějaké konkrétní empirické situaci definované matematickým *výrazem* $4:3$. V epagogické úvaze se samozřejmě mohou objevit deduktivní prvky, což ji ale nedělá ještě apagogickou, nepřímou. Rozchod s moderní terminologií je zde markantní.

Apagogický důkaz nesouměřitelnosti ve čtverci, obsažený v X. knize *Základů*,[15] vypadá následovně:

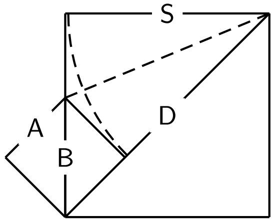
Důkaz: Kdyby byly strana S a diagonála D čtverce souměřitelné, měly by poměr jako nějaká dvě celá čísla s, d, u nichž můžeme navíc bez újmy na obecnosti předpokládat, že jsou dále nesoudělná, neboli nemají jiného společného dělitele než číslo 1. To mj. znamená, že nemohou být obě sudá. Jelikož platí $d^2 = 2s^2$, jak víme např. z výuky otroka v Platónově

[14] Tento důkaz je velmi pravděpodobně původní a není zase tak nekomplikovaný, jak by se na první pohled zdálo. Další příklady epagogických důkazů jsou shromážděny např. in Nelsen [1993], včetně několika alternativních 'vizualizací' Pythagorovy věty. Úlohu takovýchto "důkazů beze slov" není radno přeceňovat právě proto, že je zapotřebí mnoha slov (teorií) a jimi řízené zkušenosti, abychom předkládané obrázky mohli automaticky dešifrovat jako demonstrace geometrických vět.

[15] V Heathově kritickém vydání ovšem příslušná věta, obvykle značená jako věta 115a, resp. 117, není, viz jeho poznámka in Eukleidés [1926, díl III, s. 2].

Menónovi [Men., 82b–85c], musí být podle tzv. ‘nauky o sudém a lichém’ z IX. knihy d sudé, neboť součinem lichých čísel je vždy číslo liché. Platí tedy $d = 2t$ pro nějaké číslo t. Pak ale platí $s^2 = 2t^2$, čili i číslo s je sudé, v rozporu s předpokladem. □

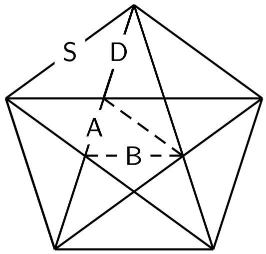
V názorné variantě důkazu[16] naneseme nejprve na diagonálu D čtverce jeho stranu S. V daném bodě pak vztyčíme kolmici a zkonstruujeme menší čtverec o straně A a diagonále B. Z obrázku 1.4 plyne, že $A = D - S$



Obrázek 1.4: Nesouměřitelnost ve čtverci

a $B = S - A$. Kdyby tedy měly S a D společnou míru E, musela by být i společnou měrou A a B. Opakování konstrukce v rámci menšího čtverce nás ovšem v konečně mnoha krocích dovede ke čtverci, jehož strana a diagonála jsou menší než E. Předpoklad souměřitelnosti by tedy vedl ke sporu.

K podobnému závěru lze dospět i na pětiúhelníku, viz obrázek 1.5. Tento důkaz není na rozdíl od důkazu pro čtverec dochovaný, ale s ohledem na tradovaný pythagorejský původ objevu a fakt, že pravidelný pě-

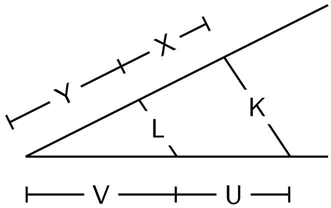


Obrázek 1.5: Nesouměřitelnost v pětiúhelníku

tiúhelník patřil k oblíbeným formám pythagorejců, a byl proto i v jejich znaku, lze takové hypotéze přičítat jistou věrohodnost. Příslušná konstrukce je navíc v jistém smyslu velmi elegantní, neboť menší pentagon, potřebný k odvození sporu, vznikne jednoduše vkreslením diagonál do

[16] Z povahy věci je zřejmé, že důkaz tohoto typu, tj. důkaz nemožnosti, neexistence, musí kromě názorných, konstruktivních prvků obsahovat i prvky diskurzivní.

pentagonu většího. Přitom si stačí uvědomit, že každá diagonála pětiúhelníku je rovnoběžná s nějakou jeho stranou. Pro stranu A a diagonálu B vkresleného pětiúhelníku a diagonálu D a stranu S výchozího pětiúhelníku tak dostaneme vztahy $D = A + B + B$ a $S = A + B$, v důsledku čehož pak můžeme zopakovat podobnou úvahu jako pro čtverec. Na základě VĚTY O PODOBNOSTI TROJÚHELNÍKŮ,[17] jak je dána obrázkem 1.6 a (výběrově) vztahy $X : Y = U : V$, $(X + Y) : Y = (U + V) : V$ a



Obrázek 1.6: Podobnost trojúhelníků

$K : L = (X + Y) : Y$, dospějeme (třeba na základě posledního z nich) k rovnici

$$D : S = S : B = S : (D - S),$$

známé jakožto poměr ZLATÉHO ŘEZU, tj. takového rozdělení úsečky na dvě části, v němž má výchozí úsečka k většímu úseku stejný vztah, jako tento k úseku menšímu. Věta o podobnosti trojúhelníků je přitom snadno dokazatelná za předpokladu souměřitelnosti veličin, a byla tak i nejprve dokázána.

Nyní si všimněme, že v základech obou obrázkových odvození sporu s tímto předpokladem je vlastně střídavé odčítání výchozích veličin, diagonály a strany. Pokusme se nyní s pomocí řetězového zlomku odvodit příslušné *anthyfairetické* rácio, a to nejprve u čtverce. Víme, že platí $S = A + B$ a $D = A + B + A$. Z toho dostáváme nejdříve

$$\frac{D}{S} = \frac{A + B + A}{A + B} = 1 + \frac{A}{A + B} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{A + B}{A}}.$$

Nyní se zaměřme na poměr $(A + B) : A$. Ten musí s ohledem na totožnost forem zůstat stejný, nahradí-li se v něm A stranou libovolného jiného čtverce a B jeho diagonálou. Ergo:

$$\frac{A + B}{A} = \frac{S + D}{S} = \frac{2(A + B) + A}{A + B} = 2 + \frac{A}{A + B} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{A + B}{A}}.$$

[17] V němčině se tento specifický případ označuje sugestivně názvem “Strahlensatz”.

Z této rovnice je ovšem ihned jasné, že další výpočet lze pouze opakovat, aniž by kdy mohl dospět ke konci, a že je tedy příslušný *anthyfairetický* proces $[1, 2, 2, 2, \dots]$ nekonečný, eventuálně vede k nekonečnému řetězovému zlomku:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Zjednodušení lze samozřejmě dosáhnout tím, že začneme menším čtvercem a ptáme se přímo po poměru $(A + B) : A$. Výsledkem je posloupnost $[2, 2, 2, 2, \dots]$. V tomto ohledu je odvození na pentagonu zcela přímočaré:

$$\frac{B}{A} = \frac{D}{S} = \frac{A + B + B}{A + B} = 1 + \frac{B}{A + B} = \dots = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{B}{A}}},$$

neboť vede rovnou k výrazu:

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Teď je ovšem na místě zvýšená opatrnost. Jaký že ‘proces’ je vlastně nekonečná *anthyfairesis*, k jakému že ‘výrazu’ vlastně vede? Není tomu spíše tak, že nekonečný výraz jednoduše žádný výraz není, stejně jako není nekonečná konstrukce konstrukcí? Jasné je přinejmenším to, že k ospravedlnění takovýchto obratů je třeba ještě mnohé učinit, neboť od konečných objektů k nekonečným musí vést nějaký netriviální a kvalitativně odlišný krok. Na druhou stranu není vyloučeno, že pythagorejci později ve svém znaku jako reprezentantu nekonečné posloupnosti $[1, 1, 1, \dots]$ mohli spatřovat pozoruhodný typ epagogického důkazu existence (aktuálního) nekonečna. Posloupnost zmenšujících se pětiúhelníků bez společné jednotky, tedy nutně neterminující, totiž leží přímo před námi.

1.3 Eudoxova teorie

Na pozadí zdařile rozběhnutého programu aritmetizace (světa) se objev nesouměřitelnosti musel jevit nepochybně jako krize základů. To se ostatně odráží již na paradoxně zvoleném označení vztahu nesouměřitelných veličin jako “alogoi logoi”, tedy “iracionálních rácií”. Ale již z pohledu matematického praktika musela vypadat situace vážně, neboť mnoho důkazů geometrických vět souměřitelnost jednoduše předpokládalo, např. již zmíněná věta o podobnosti trojúhelníků.

Eudoxova teorie proporcí, dlouho považovaná v oblasti čísel za metodologický precedens, spočívá na specifické definici rovnosti proporcí, která je pro svoji *geometrickou* povahu imunní vůči důsledkům *aritmetické* nesouměřitelnosti spojitých veličin. Neuchopitelné, ‘nekonečné’ proporce skrze ni dostávají konečná pojmenování neboli reprezentace, které pocházejí z již definovaného (eukleidovského) oboru zkonstruovatelných veličin. Sama definice se nachází v V. knize *Základů*[18] a vypadá takto:

> Veličiny A, B a C, D, které jsou přinejmenším po dvou téhož typu, stojí vůči sobě ve STEJNÉM POMĚRU neboli mají STEJNOU PROPORCI, symbolicky $A:B = C:D$, jestliže pro každá dvě přirozená čísla m, n platí jedna z následujících možností:
>
> (1) $mA > nB$ a zároveň $mC > nD$,
>
> (2) $mA = nB$ a zároveň $mC = nD$,
>
> (3) $mA < nB$ a zároveň $mC < nD$.

Násobení veličiny přirozeným číslem je definováno jednoduše jako opakované sčítání, tj.

$$mA \stackrel{\text{def}}{=} \overbrace{A + A + \cdots + A}^{m}.$$

Podle definice nyní vede takové znásobení příslušných veličin ve stejném poměru vždy k tomu, že “se buďto současně přesáhnou, ztotožní, nebo se stanou menšími”. Jakou roli zde hraje předpoklad platnosti archimédovského axiomu, tedy skutečnost, že je příslušný obor veličin eukleidovský, uvidíme později.

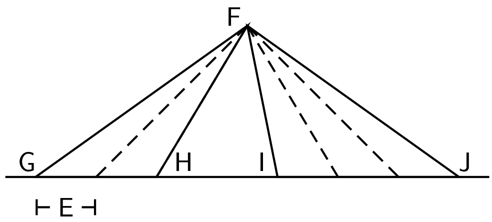
Nežli se dostaneme k motivaci, která za zprvu nepříliš intuitivní Eudoxovou definicí stojí, ukažme nejdříve na příkladě, jakým způsobem dovolila obejít potíže, které po objevu nesouměřitelnosti vyvstaly, a sice na Eukleidově [El., VI, věta 1] důkazu věty:

> Poměr obsahů trojúhelníků téže výšky je stejný jako poměr jejich základen.

Důkaz: Uvažme trojúhelníky ΔFGH a ΔFIJ o základnách GH a IJ, jak jsou nakresleny v obrázku 1.7. Jsou-li jejich základny souměřitelné,

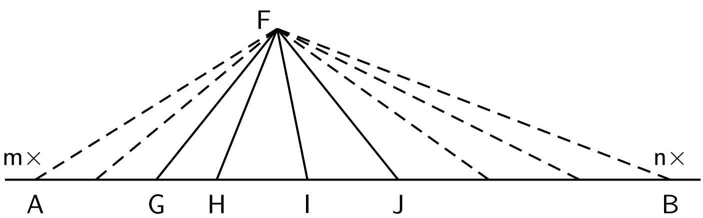
[18] Viz Eukleidés [El., V, def. 5].

tedy existuje-li nějaká společná míra E, lze větu snadno dokázat s pomocí obrázku 1.7 a lemmatu, podle něhož trojúhelníky o stejné výšce a základně mají i stejný obsah.[19] V obecném případě můžeme nyní na zá-



Obrázek 1.7: Předpoklad souměřitelnosti

kladě Eudoxovy definice argumentovat následovně: Vezměme nějaká celá čísla m, n a uvažme násobky $AH = m(GH)$ a $IB = n(IJ)$ základen, jak je to zachyceno v obrázku 1.8. Podle zmíněného lemmatu musí platit



Obrázek 1.8: Bez předpokladu souměřitelnosti

rovnosti $\Delta FAH = m(\Delta FGH)$ a $\Delta FIB = n(\Delta FIJ)$. Z téhož lemmatu plyne, že mají-li trojúhelníky stejnou výšku, ale různou základnu, pak ten se základnou větší má i větší obsah, tedy: když $m(GH) > n(IJ)$, pak i $m(\Delta FGH) > n(\Delta FIJ)$. Jelikož to samé platí i pro $<$ a $=$, je věta dokázána. □

V souvislosti s tímto důkazem se ovšem nabízí ještě jiná možnost, jak příslušnou krizi základů řešit. Jedná se o metodu nekonečně malých veličin, tedy o jistou anticipaci Newtonova a Leibnizova infinitesimálního kalkulu. Jako východisko byla sice idea ‘bezrozměrných veličin’ v antické matematice oficiálně zakázána, v praxi se ale tu a tam objevovala. Základní ideu lze vysvětlit docela snadno, vzpomeneme-li nejprve krátce na oba názorné důkazy nesouměřitelnosti. Tam jsme argumentovali tím, že konstrukce menších a menších čtverců či pětiúhelníků vede ke sporu se souměřitelností strany a diagonály výchozího obrazce nějakou jednotkovou veličinou E. Ve skutečnosti je to ale především spor s předpokladem,

[19] Viz Eukleidés [El., I, věta 38].

že je příslušný obor veličin archimédovský, neboť kdyby E zůstávala stále menší nežli strana i diagonála libovolného čtverce či pentagonu zkonstruovaného výše uvedeným postupem, musela by být v důsledku nekonečně malá, neboli: pro žádné celé číslo n by nebylo možné n-násobným nanášením E přesáhnout danou stranu či diagonálu.

Význam archimédovského axiomu spočívá tedy mj. v tom, že zakazuje nekonečně malé a nekonečně velké veličiny. Jeho verze aplikovaná v námi uvedených epagogických důkazech nesouměřitelnosti se nachází v X. knize *Základů*:[20]

> Jsou-li A, B dvě veličiny takové, že $A < B$, pak po odebírání poloviny, případně větší části z B, a dále vždy ze zbytku, který takto vznikne, musíme v konečně mnoha krocích dospět k veličině C, pro kterou platí $C < A$.

Tento princip nemá vlastní jméno, někdy se nazývá AXIOMEM SUBTRAHOVATELNOSTI, někdy AXIOMEM MĚŘENÍ V DIVIZIVNÍ FORMĚ. Axiom archimédovský je pak v takovém kontextu označován jako MULTIPLIKATIVNÍ VERZE axiomu měření, přičemž není obtížné nahlédnout, že jedna verze implikuje druhou.[21]

Objev nesouměřitelnosti, jako ostatně všechny 'paradoxní' výsledky, které v tomto textu sledujeme, nás tedy nijak nestaví před hotovou věc, ale před určitá rozhodnutí. Jedním z nich je interpretovat jej jako poukaz na neudržitelnost archimédovského axiomu. Tento krok pak vede k následující verzi důkazu výše uvedené věty o rovnosti poměru obsahů trojúhelníků téže výšky poměru jejich základen:

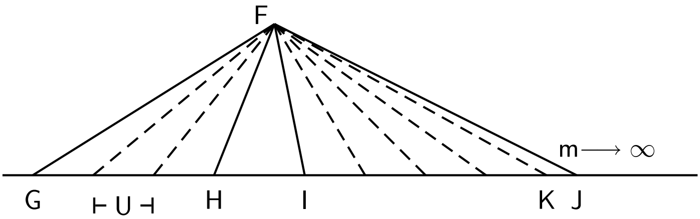
Důkaz: Základnu GH trojúhelníka ΔFGH rozdělíme nejprve na m stejných úseček U (tato konstrukce je na bázi obrázku 1.6 možná pro libovolné m), a poté opakovaně nanášíme U na základnu IJ trojúhelníka ΔFIJ, dokud je to možné. Viz obrázek 1.9. Poslední bod, po němž by v kroku $n+1$ došlo k překročení základny, nazveme K. Podle známého lemmatu jsou nyní obsahy ΔFGH a ΔFIK ve stejném poměru jako úsečky GH a IK. Dále je zřejmé, že se zvětšujícím se počtem úseček, na něž rozdělíme stranu GH, se zmenšuje rozdíl mezi IK a IJ (IK se blíží k IJ, symbolicky "$IK \longrightarrow IJ$"), ale i mezi plochami ΔFIK a ΔFIJ ("$\Delta FIK \longrightarrow \Delta FIJ$"). Připustíme-li, že existuje něco jako nekonečně malá veličina, tedy že lze stranu GH rozdělit na nekonečně mnoho dílů U, můžeme usoudit, že rozdíl zmizí úplně, tj. že se úsečky IK a IJ, tedy

[20] Viz Eukleidés [El., X, věta 1].

[21] Srov. Jahnke [1999, s. 23]. Určitou potíž by zde mohl působit fakt, že jsme se první verzi archimédovského axiomu pokoušeli aplikovat také na diskrétní veličiny. Druhá verze by pak při takovéto obecnosti nemusela být té první ekvivalentní, neboť jednotkovou veličinu v diskrétním případě směrem dolů překročit nelze. Tento případ však není obtížné ošetřit zvlášť.

i trojúhelníky ΔFIK a ΔFIJ stanou identickými, a větu lze odvodit již na základě předeudoxovských metod. □

Tím jinými slovy prohlašujeme onu veličinu vzniklou z nekonečného dělení za společnou míru obou základen, jak se to analogicky předpokládá v metodě tzv. vyčerpání. Později uvidíme, jak se hlavní náplní tradice



Obrázek 1.9: Předpoklad infinitesimálních veličin

Newtonova a Leibnizova kalkulu stalo opětovné vytěsnění nekonečně malého z podobných úvah, při záchraně zdravého jádra, které je v nich obsaženo. Tím je teorie limit. Zmíníme také, že s pojmy nekonečně malého, stejně jako nekonečně velkého, lze koherentně pracovat, a to ne nutně způsobem, jenž byl použit výše.

V dalším oddíle se budeme zabývat tím, v jakém smyslu lze antickou teorii proporcí chápat jako zobecněnou teorii čísel, tedy rozšíření pojmu čísla směrem od tzv. (konečných) čísel kardinálních (coby odpovědí na otázku "kolik?", resp. "kolik čeho?") k číslům reálným (coby odpovědím na otázku "jak velká je nějaká veličina v poměru k veličině jednotkové").

1.4 Proporce jako předměty

Okolnost, že Eudoxos a Eukleidés tak rozhodně odmítli v jistém smyslu přirozenou a pohodlnou ideu infinitesimálních veličin, je důležitá již jako historický precedens. My v ní ale chceme momentálně vidět především doklad toho, že Řekové skutečně disponovali teorií logické abstrakce, tedy že měli vysoce vyvinuté povědomí o tom, jak má vypadat technika předmětné konstituce. Tím je totiž dána báze dalšího rozšíření pojmu čísla.

Na rozdíl od konkrétních předmětů, které lze počítat, je číslo předmětem abstraktním. Popis jeho odvození může začít případy konkrétních pojmenovaných čísel: '7 dní v týdnu', '7 trpaslíků' atd., a následným odhlédnutím od pojmenované kvantity. Toto předběžné 'vysvětlení' má samozřejmě silně psychologické rysy, to lze ale postupně napravit, neboť bází onoho 'odhlédnutí' není snad nějaká chvilková nepozornost (jíž by se, jak ironicky poznamenal Frege [1894, s. 316], konečně vysvětlila příslovečná roztržitost učenců), ale skutečnost, že při počítání na tom, co je počítáno, v jistém — totiž konstitutivně-aritmetickém — smyslu nesejde.

Právě v tomto smyslu lze odhlédnout např. od empirických vlastností počítané skupiny a právě v tomto smyslu je pak číslo abstraktním, nikoli empirickým předmětem. Empirické vlastnosti jeho reprezentací jsou dopředu vyloučeny jako irelevantní.

Vlastní přechod od konkrétní kvantity či pojmenovaného čísla k číslu abstraktnímu, čistému, může být v principu uskutečněn způsobem, jejž lze nalézt už u Aristotela [Met., 1092b], čteme-li patřičně jeho slova:

> [...] číslo, ať už je to cokoli, je vždy číslem jistých věcí, buď ohně, nebo země, nebo jednotek.

Důkladně rozveden byl však až u Cantora a Frega.[22] Za výchozí ekvivalenci, vůči níž se některé — totiž aritmetické — vlastnosti počítaných diskrétních veličin (množin) ukáží jako invariantní, se v něm bere existence vzájemně jednoznačného přiřazení jejich jednotek, tedy např. všech jablek v košíku všem hruškám na stole. Pokud se takovéto přiřazení podaří, jsme oprávněni říci, že oběma skupinám přísluší totéž číslo, že mají stejný počet předmětů. Cantor později poukázal, že je tato definice až příliš abstraktní, neboť se v jejím výsledku neobráží vyčíslující proces vedoucí od jednoho ke dvěma, třem, ... předmětům, tedy i k posloupnosti číslovek 1, 2, 3, ..., a předeslal proto námi definovaným číslům kardinálním tzv. čísla ordinální, spjatá s určitou pozicí ve výše generované řadě (odpověď na otázku "kolikátý v řadě?"). Tím nemá být nijak zpochybněna úloha abstrakce při zavedení čísel jako abstraktních předmětů, ale spíše anticipován problém teoretických konvencí v jejich vztahu k původní (početní) praxi. Naším průběžným závěrem je pozorování, že byla řeč o číslech v jejich úloze připisování množinám ospravedlněna zavedením určité rovnosti: stanovením, kdy množině A a množině B náleží *totéž* číslo.

Pro případ proporcí jsme za tímto účelem, tj. ospravedlněním jejich připisování dvěma veličinám, stanovili nejprve definici *anthyfairetickou*, která bez problémů funguje u souměřitelných instancí (přičemž možnost jejího rozšíření na instance nesouměřitelné bude diskutována později, konkrétně v oddíle 2.4) a která byla z důvodu nesouměřitelnosti nahrazena definicí eudoxovskou. Ta zcela rezignovala na aritmetický způsob pojmenování hledaného proporcionálního invariantu a nahradila jej pojmenováním geometrickým, odvolávajícím se na veličiny nějakého eukleidovského oboru: Máme-li např. pojmenovány diagonálu a stranu nějakého čtverce jako D a S, pak libovolný jiný poměr diagonály ke straně čtverce má tentýž poměr jako $D:S$, neboli je výrazem "$D:S$" *pojmenován*. Tímto pojmenováním je ale vlastně v první řadě nějaký konečný

[22] To vše bude diskutováno podrobně později, proto všechna další rozlišení platí jako předběžná.

návod, jak příslušné veličiny zkonstruovat, teprve v druhé řadě tyto veličiny — instance návodem zachyceného procesu — samotné.

Předpoklad, podle něhož poměřitelné veličiny, tj. veličiny, jimž lze připsat nějaký poměr, musí náležet eukleidovskému oboru, je přitom zásadní právě s ohledem na očekávání spjatá s eudoxovskou definicí proporce, tedy s tím, jakými předměty by nově definované poměry vlastně měly být. Jedním z takových očekávání je např. existence a jednoznačnost ČTVRTÉ PROPORCIONÁLY neboli veličiny C takové, že platí $A : B = C : D$ pro veličiny A, B, D dané.[23] Připustíme-li do příslušného oboru nějakou veličinu o infinitesimální vůči veličině A, pak platí, že jsou sice $A + o$ a $A + po$ veličiny různé pro libovolné celé číslo p, ale poměry $(A + po) : A$ a $(A + o) : A$ nikoli, neboť $mA + mpo > nA$, resp. $mA + mpo < nA$ tehdy a jen tehdy, když $mA + mo > nA$, resp. $mA + mo < nA$, a situace $mA + mpo = nA$ ani $mA + mo = nA$ nikdy nenastává.[24] Infinitesimální veličiny nemohou existovat z pohledu oficiálního kánonu řecké geometrie již proto, že jejich rácio nevede k žádnému ‘rozumnému’ kritériu identity dvou proporcí, resp. kritériu, které by nechalo intaktní jisté žádoucí postuláty.

Eudoxovskému kritériu se nyní ve srovnání s pythagorejskou *anthyfairesis* podařilo překonat hned dvě potíže:

(1) Odhalené ‘nekonečné’ proporce, *alogoi logoi*, dostaly konečná pojmenování. Tyto reprezentace ovšem pocházejí z geometrie a závisejí na tom, co je zkonstruovatelné, čemuž se ještě budeme věnovat v souvislosti s paralelní definicí Dedekindovou.

(2) Obor definovaných vztahů byl rozšířen nejen o *alogoi logoi*, ale i o vztahy, v nichž je první z porovnávaných veličin menší (nebo rovna) druhé. To *anthyfairetická* definice v principu neumožňuje, čímž se — po zavedení uspořádání proporcí — omezuje pouze na čísla větší než 1.[25]

Eudoxova definice takto rozšiřuje obor potenciálních reálných čísel až k nule. Nula sama však ještě není ani celým číslem, natož pak proporcí. Totéž platí o číslech záporných a v jistém smyslu i o čísle jedna. Všimněme si, že s nulou a jedničkou máme coby s čísly problémy pouze v jejich významu čísel ordinálních či reálných. Jako odpovědi na otázku “kolik?” se oproti tomu nijak neliší od ostatních kardinálních čísel, i když i to bylo

[23] Eukleidés [El., V, věta 9] dokazuje, že z $A : B = C : B$ lze usoudit na $A = C$, z čehož jednoznačnost přímo vyplývá.

[24] Nastává ovšem v případě poměrů $A : A$ a $(A + o) : A$, které jsou v důsledku toho z eudoxovského hlediska různé. K tomuto problému srov. Stein [1990, s. 344].

[25] Stekeler-Weithofer [1992*c*, s. 371] se zde domnívá, že právě k tomuto faktu pythagorejské nauky o proporcích odkazuje Platón [Res., 525e], když říká, že jednotka není dělitelná.

např. ještě předmětem kontroverze, kterou měl Frege s Husserlem.[26] Máme-li nulu a jedničku již k dispozici, můžeme dosáhnout překrytí *anthyfairetické* a eudoxovské definice tím, že připustíme vzájemné odčítání i u případů $A = B$ a $A < B$, přičemž v prvním z nich skončíme okamžitě odpovědí 1, v druhém z nich usoudíme, že se B do A vejde 0-krát a zbytek je A. Dále už postupujeme jako dřív. Zobecněnou verzi *anthyfairesis* řádně zavedeme v oddíle 2.4.

Z řečeného lze vyčíst, že z historického hlediska není nula produktem úvah o nicotě lidského bytí, ale naopak snahy si toto bytí co nejvíce usnadnit, např. v rámci tzv. POZIČNÍCH NUMERICKÝCH SYSTÉMŮ, jako je náš současný. SYSTÉMY ADITIVNÍ, jako je římský, zjednodušují výchozí unární systém |, ||, |||, ... tím, že pro mocniny daného základu, typicky 10, zavádějí vlastní symbol, jejž iterují a výsledky sčítají, viz

MDCCIII.

Subtraktivní úprava, v níž se píše IV namísto IIII apod., se obecně ujala až v moderní době a původní systém formulačně komplikuje, aniž by dosáhla výhod systému pozičního. V něm je mocnina základu určena pozicí číslovky v řadě, v našem případě od konce, ostatní se pak podle toho dopočítávají. Nula je nutným prostředkem přeskočení mocniny, jenž je v aditivních systémech ošetřen tím, že se dané písmeno nepoužije:

$$1703 = 1 \times 1000 + 7 \times 100 + 0 \times 10 + 3 \times 1.$$

V pozičních systémech však díky tomuto 'kontroverznímu' rozšíření jednak počet základních znaků systému nepřevyšuje velikost zvoleného základu (tj. 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 v případě dekadického, 0, 1 v případě binárního sytému), jednak je velmi snadné provádět příslušné aritmetické operace, jak to známe ze základní školy.[27]

Zmínka o zavedení uspořádání proporcí nás upozorňuje na skutečnost, že kritérium identity je sice nutnou, nikoli však postačující podmínkou toho, aby se z nějakého oboru stal obor předmětů, v tomto případě čísel. Dále je třeba zavést určité vlastnosti a vztahy, což by zde, v očekávané podobnosti oboru proporcí s oborem čísel, znamenalo nějaké vlast-

[26] Frege [1894, s. 327] o Husserlově řešení statusu nuly a jedničky píše: "První odpověď je snadná; řekne se: 'nejsou to vůbec žádná čísla'. Padne tedy otázka, co vlastně jsou. Autor říká: negativní odpovědi na otázku 'kolik?'. [...] Možná jednou přijde někdo na myšlenku, že dvojka není žádná mnohost, nýbrž jen dvojitost (dualita v protikladu k pluralitě); nic, jedna a dvě budou pak tři negativní odpovědi na otázku 'kolik?'. Jako potvrzení by šlo třeba uvést, že dvojka je jediné sudé prvočíslo."

[27] Některé poziční systémy jsou přitom velmi staré. Patří mezi ně např. babylonský, v němž je přeskakování mocniny vyjádřeno mezerou. To vedlo samozřejmě k víceznačnému čtení výrazů, v nichž figuruje nula na konci (2 a 2×60, 3 a 3×60 atd.), což mj. ukazuje, že ještě nebyla chápána jako plnohodnotný numerický symbol, s nímž by šlo samostatně operovat, případně řešit rovnice.

nosti a vztahy aritmetického typu. Uspořádání proporcí na větší a menší je první na řadě.

Ve srovnání s rovností dvou proporcí, kterou lze použít např. k výrobě replik téhož tvaru, je otázka jejich srovnání a uspořádání z názorného hlediska problematická. Nejlepší je snad začít otázkou "kolikrát se vejde veličina A do veličiny B?" a interpretovat příslušné *anthyfairetické* výrazy jako exaktní odpověď. V případě iracionálních poměrů se tak dostáváme pouze k racionálním aproximacím, tj. dolním a horním odhadům dalšího rozvoje. Takto je např. poměr diagonály a strany čtverce aproximován vztahy $1:1$ a $2:1$, tedy rácii $[1]$ a $[2]$. Odpověď na výše položenou otázku pak zní: "více než jednou, ale méně než dvakrát". Zprvu se proto zdá být uspořádání proporcí přímo závislé na uspořádání celých čísel. Ale pozor! Zdůraznili jsme, že v *anthyfaireis* se na rozdíl od obvyklého měření prostřednictvím jediné, výchozí veličiny, resp. jejích částí, měřicí veličina stává vždy v dalším kroku veličinou měřenou. Je tedy třeba rozlišovat mezi sudými a lichými místy, jak to ukazuje např. následující posloupnost:

$$\begin{aligned}&[1] < [1,3] < [1,2,2] < \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad [1,2,2,2,\dots] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots < [1,2,3] < [1,2] < [2].\end{aligned}$$

Obecně lze formulovat větu,[28] podle níž pro libovolnou nekonečnou posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ (přirozených, nenulových) čísel a q_k definované jako $[a_1, \dots, a_k]$ platí:

$$q_1 < q_3 < q_5 < \cdots < q_6 < q_4 < q_2.$$

Eudoxovskou variantu uspořádání proporcí[29] lze opřít o myšlenku, že jde mezi dva libovolné různé vztahy veličin vsunout vztah racionální tak, aby platilo:

$$A:B < m:n < C:D.$$

V tom je skryt archimédovský axiom, který pravděpodobně, z výše uvedených důvodů, Eudoxos předpokládal jako platný. Celý trik nelze ovšem použít oficiálně, neboť relace $<$ není pro eudoxovský tvar ještě zavedena. Vlastní definice proto vypadá následovně:

> Poměr veličin A, B JE MENŠÍ než poměr veličin C, D, symbolicky $A:B < C:D$, tehdy a jen tehdy, když existují dvě přirozená čísla m, n taková, že $nA < mB$ a současně $nC > mD$.

[28] Podobná základní tvrzení ohledně řetězových zlomků a jejich důkazy lze nalézt např. in Deiser [2007].

[29] Eukleidés [El., V, def. 7].

Nyní lze také snadno ukázat, odkud se vlastně vzala Eudoxova definice rovnosti. Ta jednoduše popírá, že by platilo $A:B > C:D$ nebo $C:D > A:B$. Když tedy platí $nA > mB$, musí platit $nC > mD$ (jinak by nastala první možnost), když platí $nA < mB$, musí platit i $nC < mD$ (jinak by nastala druhá možnost), a konečně když platí $nA = mB$, musí platit $nC = mD$ (jinak by nastala jedna z uvedených možností). Dalšího 'vysvětlení' Eudoxovy definice proporce se nám dostane v kapitole 2 v souvislosti s Dedekindovou definicí reálného čísla.

Čtenář také musí rozlišovat mezi uspořádáním veličin, které předpokládáme, a uspořádáním proporcí, které definujeme, zvláště když jsme zde pro jednoduchost nezavedli různé symboly. Totéž se týká symbolu rovnosti. Ten bychom v případě proporcí nemuseli definovat zvlášť, ale jednoduchou konvencí jako

$$A:B = C:D \rightleftharpoons \neg(A:B < C:D) \wedge \neg(A:B > C:D).$$

Od uspořádání se při pátrání po analogiích mezi proporcí a číslem dostaneme přímo k aritmetickým operacím. Ty se ukazují být problematické už při rozšíření na kontinuální veličiny. Sčítání úseček lze např. interpretovat přirozeně jako nastavení jedné druhou, uchopíme-li však jako jejich součin pravoúhelník a jako součin úsečky a pravoúhelníka kvádr, naráží další iterace, z aritmetického hlediska jistě žádoucí, na naši představu prostoru. V případě proporcí je kupodivu násobení méně problematickou operací, která se v *Základech* [El., VI, def. 5] poněkud matoucně objevuje pod názvem "skládání".[30] Její původ lze nejspíš odvodit z hudební teorie, kde se např. oktáva získá složením kvarty a kvinty ($4:3 \times 3:2 = 2:1$) a kvinta složením malé a velké tercie ($6:5 \times 5:4 = 3:2$).[31] Takto je Eukleidem také definováno složení dvou proporcí tvaru $A:B$, $B:C$,[32] tedy

$$(A:B) \times (B:C) = A:C.$$

Obecný případ dvou proporcí $A:B$, $C:D$ je ovšem ošemetný. Eukleidés [El., VIII, věta 5] nechává jednoduše rozšířit členy prvního poměru o C a druhého o B, čímž se zdá být sice problém převeden na první tvar, tedy

$$(A:B) \times (C:D) = (AC:BC) \times (BC:BD) = AC:BD,$$

ale za cenu změny dimenze, neboť výsledný poměr je poměrem dvou pravoúhelníků. Ve skutečnosti však nebylo ani při násobení, ani při sčítání proporcí, jímž ovšem antická geometrie teprve nedisponovala, třeba dimenzi opouštět, a to v uvážení konstrukce čtvrté proporcionály.[33] Ta

[30] Srov. k tomu Heathovy poznámky in Eukleidés [1926, díl II, s. 132 n, s. 189 n].
[31] Viz Fowler [1999, s. 133 nn].
[32] Definici je nutno vyčíst z Eukleidés [El., VI, věta 23].
[33] Srov. Stein [1990, s. 350].

je předvedena pro případ úseček v VI. knize *Základů*[34] a představuje dostatečný teoretický nástroj adekvátního zavedení obou operací.

Již jsme přitom dříve zmínili, o jaký problém se jedná, totiž jak k daným veličinám A, B, D zkonstruovat čtvrtou tak, aby platilo $A:B = C:D$. Příslušná konstrukce je neobyčejně jednoduchá a opírá se o větu, resp. věty o podobnosti trojúhelníků, jak jsme je zachytili na obrázku 1.6. Zmínili jsme, že jsou pro případ souměřitelných veličin snadno dokazatelné, obecný případ je jenom mírně složitější. Nyní jsme schopni k libovolným poměrům $A:B$, $C:D$ najít tři veličiny E, F, G tak, že platí $A:B = E:G$ a $C:D = F:G$, jinými slovy: umíme převést libovolné dvě proporce do formy se společným jmenovatelem. Tím jsme v případě operace sčítání přímo u cíle, když položíme

$$(A:B) + (C:D) = (E:G) + (F:G) = (E+F):G.$$

Pro případ násobení musíme najít společný jmenovatel pro $A:B$ a $D:C$. Příslušná definice

$$(A:B) \times (C:D) = (E:G) \times (G:F) = E:F$$

se tak redukuje na první, jednodušší případ.

1.5 Nekonečno a spojitost

Byl to pojem spojité veličiny, jejž jsme na počátku kapitoly, a tím i celé knihy, položili jako východisko dalšího rozšíření pojmu čísla z původního oboru veličin diskrétních, které se počítají, na tzv. čísla reálná, jimiž se měří. Neřekli jsme ovšem, v čem vlastně ona ohlašovaná kontinuita, spojitost oboru příslušných veličin — tzv. kontinua — spočívá. Jelikož všechny charakteristiky eukleidovského oboru splňují i celá čísla, je zřejmé, že případný 'axiom spojitosti' je třeba hledat jinde. — Aristotelova [Phys., 227a] vlivná analýza pojmu kontinua, podle níž

> věci jsou spojité, jestliže hranice, jíž se dotýkají, je jedna a tatáž,

může sice připomínat některé moderní definice topologické, jak se jim budeme ještě později věnovat, zároveň je však podstatně vágní, než aby dokázala odrážet dnes běžné nuance spojitosti, úplnosti, kompaktnosti, hustoty atd. To ji také diskvalifikuje z primárního použití v matematických větách a definicích. V důsledku toho je pro Aristotela [Phys., 232b] a řeckou matematiku přímka kontinuem právě a jenom proto, že ji lze stále dělit na dvě části, neboli

> spojitost je neomezená dělitelnost.

[34] Viz Eukleidés [El., VI, věta 12].

Aristotelés [Phys., 206a] ovšem nezapomíná zdůraznit, že je tato dělitelnost míněna pouze v potenci, tedy že mj. nedovoluje dospět k veličinám nekonečně malým. Body přímky vznikají pouze možným dělením, např. jako průsečíky s kružnicí, přímka se z nich ale neskládá, nýbrž předchází jim. V tomto smyslu je filosofie matematiky až do Cantorovy doby ovládána Aristotelovou ideou potenciálního či synkategorematického nekonečna a přinejmenším rezervovaným postojem k nekonečnu aktuálnímu.

Tento základní postoj se zrcadlí právě v archimédovském axiomu, resp. obou verzích axiomu měření, jakožto zákazu veličin nekonečně velkých, resp. malých. Dostávají se tak v něm do vzájemné souvislosti Aristotelovy úvahy o spojitosti (z V. a VI. knihy *Fyziky*) a nekonečnu (z III. knihy *Fyziky*), jejichž přímým podnětem nebyly potřeby matematiky, o niž se Aristotelés na rozdíl od Platóna prakticky nezajímal, ale paradoxy Zénónovy školy. Podle Aristotela [Phys., 263a] vycházejí Zénónovy argumenty pro nemožnost pohybu právě z představy, že dráha pohybujících se objektů, letícího šípu či Achilla a želvy sestává z aktualizovaných výsledků neomezeně protahovaného dělení. Má-li jimi pohybující se objekt všemi projít, není se v důsledku schopen pohnout z místa, případně dohonit pomaleji se pohybující objekt. V jasné návaznosti na to pak Kant [1781/1787, A 169/B 210 n] o mnoho stovek let později píše:

> Vlastnost veličin, podle níž nemají žádný nejmenší možný (jednoduše: nejmenší) díl, se nazývá jejich spojitostí. Prostor a čas jsou quanta continua, protože žádný jejich díl nemůže být dán jinak, než uzavřením mezi hranice (body či okamžiky), a tedy pouze tak, že je tento díl opět jen prostorem nebo časem. Prostor tedy sestává jenom z prostorů, čas z časů, body a okamžiky jsou jen hranice, tj. pouhá místa jejich omezení; místa ovšem vždy předpokládají ony názory, které mají určit nebo omezit, předem, a z pouhých míst, jakožto částí, které by mohly být dány ještě před prostorem a časem, se ani prostor, ani čas nemohou skládat.

V potenciálnosti uvedeného dělení je také skryto ‘řešení’ druhé Kantovy antinomie [1781/1787, A 434 n/B 462 n], podle níž každá věc nutně sestává, resp. nesestává z jednoduchých částí. Aktualizované naplnění dělícího procesu nenáleží sféře možné zkušenosti, a je tedy pouze regulativní ideou, s níž musí být takto i zacházeno. Nekonečno, jak ještě zmíníme, může být v tomto čtení pouze forma, nikoli výsledek rekurze.

Shoda filosofů tak odlišného ražení, jako byli Aristotelés a Kant, v otázkách povahy spojitosti a nekonečna je pozoruhodná, a pro celou poaristotelovskou filosofickou tradici vlastně i typická. V matematickém kontextu, k němuž se nyní vrátíme, na ni však až do doby Brouwerovy nebral nikdo vážnější ohled. Z technického hlediska lze totiž kritérium neomezené dělitelnosti veličin jednoduše nahlédnout jako protějšek celočíselného násobení veličin, tedy uchopíme-li ho jakožto možnost rozdělit danou úsečku na libovolný konečný počet stejně dlouhých kusů. Možný základ rozšíření pojmu čísla na obory spojité se pak zdá být nasnadě: jedná se o takovou extenzi oboru celých čísel, v níž jsou obecně proveditelné jisté algebraické operace. Pro svoji formálně-aritmetickou povahu je sice toto řešení značně ahistorické, není však pro ně obtížné najít konkrétní geometrickou, a tedy i historicky věrohodnější bázi. Tou není opět nic jiného nežli konstrukce čtvrté proporcionály. Jelikož je pravděpodobné, že její proveditelnost lze považovat i za původní charakteristiku oboru spojitých veličin,[35] můžeme přímo stanovit:

> Eukleidovský obor veličin se nazývá (DĚLITELNÝM) KONTINUEM, jestliže v něm ke každým třem veličinám A, B, C existuje právě jedna veličina X taková, že $A:B = X:C$. Obor této vlastnosti budeme také nazývat DĚLITELNÝM.

Modelové rozšíření přirozených čísel na (nejprve kladná a nenulová) čísla reálná (kontinuum), kterému ovšem nelze ani náhodou připsat jakoukoli historickou, ale pouze normativně-explikační hodnotu, pak popíšeme následovně:

(1) Fixujeme-li nějakou konkrétní úsečku E jako jednotku, pak jejím opakovaným nanášením dospějeme k diskrétnímu oboru veličin N, jejž lze v jistém smyslu identifikovat s oborem přirozených čísel, což neznamená nic jiného, nežli že můžeme místo mE psát pouze m. S ohledem na zmíněný primát ordinálních čísel budeme pod N i v dalším textu rozumět vždy soubor všech přirozených čísel bez nuly. Její přibrání chceme explicitně značit jako N_0.

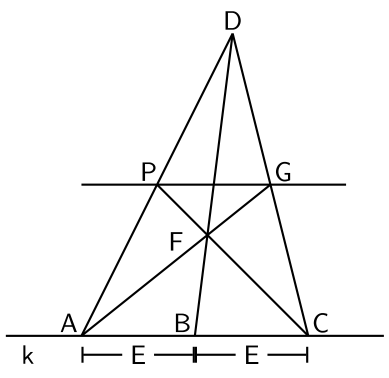
(2) S pomocí konstrukce čtvrté proporcionály rozšíříme nyní obor N o všechny veličiny (úsečky) X takové, že $m:n = X:E$. Libovolný prvek m z N můžeme pro jednoduchost identifikovat s poměrem $m:E$. Od diskrétního oboru všech přirozených čísel tak dospějeme ke *všem* celočíselným, kladným dělením E a jejich násobkům, jejichž obor přestane být diskrétní ve smyslu existence nějaké společné míry *všech* veličin (libovolná konečná podmnožina společnou míru má). Označme získané rozšíření jako Q.

Nyní lze dokázat, že všechny rovnosti $A:B = X:C$ mají v oboru Q řešení, tedy že je na rozdíl od N spojitý ve výše uvedeném smyslu slova (= dělitelný). Popsaná konstrukce také ukazuje, jak libovolné racionální

[35] Viz Stein [1990, s. 348].

proporci $m:n$, resp. $p:q$ přiřadit úsečku X, resp. Y z Q tak, že $m:n = p:q$ platí tehdy a jen tehdy, když $X = Y$. Stačí vzít jednoduše X a Y z rovnic $m:n = X:E$ a $p:q = Y:E$. Redukce proporcí veličin na veličiny je důležitá také pro počítání se zlomky. Skrze ně lze ihned nahlédnout dělitelnost oboru Q, neboť pro $A = m:n$ a $B = p:q$ je $A:B = mq:np$, a z $C = r:s$ a $A:B = X:C$ plyne $X = mqr:nps$. Díky téže redukci se na (racionální) proporce přenáší přirozené uspořádání úseček, které je s ohledem na svoji názornost podkladem obvyklé reprezentace (reálných) čísel na číselné přímce. Právě v tomto smyslu se také mluví o jednodimenzionálním kontinuu.

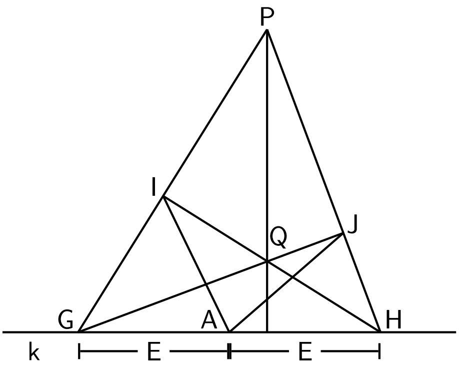
K tomu nejprve drobnou poznámku. Jelikož je zřejmé, že Q tvoří vlastně nám známá (kladná, nenulová) čísla racionální, mohla by vzniknout pochybnost, zda je zde případné hovořit o kontinuu, které si dnes spojujeme především s číslem reálným. Podstatným výsledkem předchozího výkladu a jedním z hlavních cílů této knihy by měl být poznatek, že pojem čísla reálného vykazuje na rozdíl od pojmů čísla přirozeného a racionálního značnou otevřenost co se týče dalších specifikací, tedy že není ve srovnání s nimi ničím evidentním, o čem panuje všeobecná shoda. O adekvátní definici reálného čísla se vedou spory dodnes. Obor Q byl



Obrázek 1.10: Pythagorejská konstrukce rovnoběžky

přitom nazván kontinuem v souladu s výše uvedenou definicí, v principu obrážející antickou představu toho, co se nazývá spojité. Že se tato představa může později ukázat v jistých ohledech jako nedostatečná, je úplně jiná věc. Na tuto situaci jsme se ovšem nepatrně připravili tím, že obor, v němž k daným veličinám existuje čtvrtá proporcionála, označujeme namísto slovem "spojitý" termínem "dělitelný".

Ve výše uvedených definicích a konstrukcích jsme zohledňovali fakt, že antické kontinuum, stejně jako obor všech proporcí, bylo určeno zprvu tím, co je zkonstruovatelné. Vycházíme-li přitom z toho, že máme fixní systém dvou obvyklých koordinát s nanesenými přirozenými čísly, je otázka konstrukce čísel racionálních pouhou záležitostí spojování dvou bodů a konstrukce rovnoběžky v daném bodě, resp. kolmice z bodu daného. K tomu nám stačí klasický školní trojúhelník. Může nás proto napadnout definovat kontinuum jako obor veličin, které jsou zkonstruovatelné (takovýmto) pravítkem, a to s oporou v postřehu, který Hilbert [1899, s. 81] učinil v rámci své axiomatizace eukleidovské geometrie, totiž že "tažení přímek a rovnoběžek se z analytického hlediska rovná sčítání, násobení, odčítání a dělení", tedy metodám úsečkové algebry, jak ji v souvislostech Descartovy analytické geometrie popíšeme v oddíle 1.7. Jelikož jsme při právě popsané konstrukci Q předpokládali, že



Obrázek 1.11: Pythagorejská konstrukce kolmice

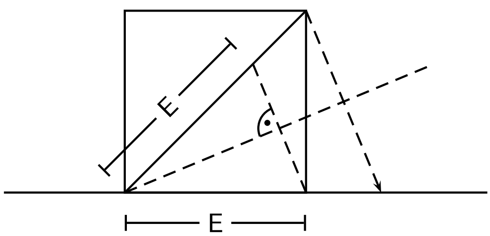
máme na osách přednanesena přirozená čísla, může nás zaujmout další Hilbertova poznámka, totiž že "nanášení úseček na libovolnou přímku nevede k ničemu jinému nežli k druhým odmocninám ze součtu dvou druhých mocnin úseček, které již byly zkonstruovány". Tomu odpovídá použití pravítka s označeným bodem (*marked ruler*). Předpoklad sám přitom není nijak neplauzibilní, neboť např. jednotkovou délku si někam tak jako tak poznamenat musíme. Uvažované pravítko navíc může být chápáno v původním, jednoduchém smyslu, tj. jakožto rovná čára o jedné hraně (*straightedge*), umožňující spojovat dané body a neomezeně prodlužovat dané úsečky, neboť jednotkový zářez již umožňuje konstrukci rovnoběžky a kolmice v daném bodě.[36]

První úlohu ukazuje pro přímku k a bod P obrázek 1.10. Konstrukce spočívá v tom, že bodem P vedeme přímku protínající se s k v nějakém

[36] Hilbertovy [1899, s. 78 n] konstrukční metody zprvu zahrnují jednoduché pravítko a nástroj na přenášení libovolné úsečky (*Streckenübertrager*). V druhém vydání dochází ke zjednodušení, když je přenášena pouze úsečka jednotková (*Eichmaß*). Viz kritická edice Hilbertova geometrického díla [2004, s. 422, 512 nn].

bodě A, od něhož počínaje naneseme dvakrát za sebou jednotkovou míru E, čímž získáme body B a C. Ty spojíme s nějakým bodem D ležícím na AP a protnutím úseček CP a BD získáme bod F. Prodloužením úsečky AF získáme bod G, jenž konečně určuje hledanou rovnoběžku. Pro pořádek popíšeme i konstrukci druhou, spočívající v konstrukci kolmice k dané přímce, jak to ukazuje obrázek 1.11. V kombinaci s předchozí větou pak dostaneme ihned konstrukci kolmice k dané přímce z daného bodu. Na danou přímku k naneseme bod A a body G, H ve vzdálenosti jednotkové míry E. Z A pak vedeme dvě libovolné úsečky AI a AJ opět délky E. Nechť se nyní přímky GI a HJ protínají v bodě P a přímky GJ a HI v bodě Q. Trojúhelníky ΔGHI a ΔGHJ jsou sestrojené nad průměrem kružnice se středem v A a poloměrem E, úhly $\angle GIH$ a $\angle GJH$ jsou tedy podle Thalétovy věty pravé, a úsečky IH, JG tím pádem výškami trojúhelníka ΔGHP. Jelikož se výšky trojúhelníka protínají v jednom bodě, musí být přímka PQ kolmá na výchozí přímku k.

Pomocí označeného pravítka můžeme sestrojováním kolmic k dané přímce z daného bodu půlit úhly, tedy konstruovat druhou odmocninu ze součtu druhých mocnin dvou konstruovatelných veličin, jak to ukazuje obrázek 1.12 pro případ $\sqrt{1^2+1^2}$. Abychom předešli možným zmat-



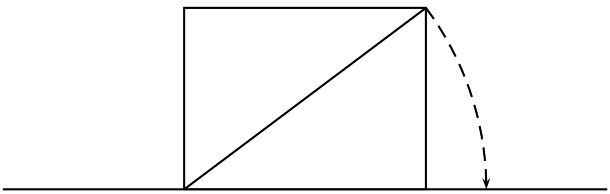
Obrázek 1.12: Konstrukce označeným pravítkem

kům, definujme jako Lorenzen [1984, s. 129] PYTHAGOREJSKÁ ČÍSLA v tomto rozšířeném smyslu jejich konstruovatelnosti označeným pravítkem a značme příslušný obor neboli PYTHAGOREJSKÉ KONTINUUM jako P.[37] Tím jej odlišíme od oboru Q pythagorejských čísel racionálních, která nazývejme dále jen RACIONÁLNÍMI ČÍSLY. Zatím přirozeně neuvažujeme čísla záporná. Je zřejmé, že platí nejen $\mathsf{Q} \subseteq \mathsf{P}$, tedy že je první z nich podoborem druhého, nýbrž i $\mathsf{Q} \subset \mathsf{P}$, tedy že je podoborem vlastním neboli že druhý představuje rozšíření prvního. To ukazuje ostatně v obrázku 1.12 uvedené nanesení diagonály jednotkového čtverce na číselnou osu.

[37] Lorenzen ovšem namísto nanášení jednotkové veličiny používá jako základní konstrukci dělení úhlu, což je, jak lze vytušit z předvedené konstrukce, metoda ekvivalentní, a diskuze může být tedy vedena hlavně o tom, který počátek je ‘přirozenější’.

1.6 Kanonické a jiné metody

Jelikož oficiální konstrukční metodou řecké geometrie, raženou teoreticky Eukleidovými *Základy* a ideově podpořenou Platónovými spisy, bylo pravítko a kružítko, nabízí se nyní označit tímto způsobem konstruovatelné veličiny jako EUKLEIDOVSKÁ ČÍSLA a jejich obor E jako EUKLEIDOVSKÉ KONTINUUM. O tom, že eukleidovská čísla již zahrnují čísla pythagorejská, přesvědčí čtenáře nejspíš již obrázek 1.13, i když skutečným



Obrázek 1.13: Konstrukce pravítkem a kružítkem

zdůvodněním bude až úvaha nad možnostmi zvolených konstrukčních prostředků, jak ji rozvedeme záhy. Že existují eukleidovská čísla, která nejsou pythagorejská, nahlédneme v příští kapitole, kde se ukáže, že eukleidovskými metodami lze sestrojit druhou odmocninu z libovolné úsečky. V důsledku toho platí $\mathsf{P} \subset \mathsf{E}$.

Přirozená otázka, zda je eukleidovské kontinuum již tím největším možným, přinejmenším tedy, zda se v něm nacházejí určité veličiny, resp. jejich proporce, vedla ke známým problémům

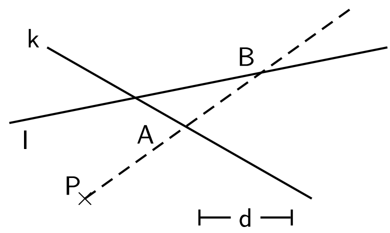
kvadratury kruhu,

třetění úhlu a

zdvojení krychle (tzv. délský problém).

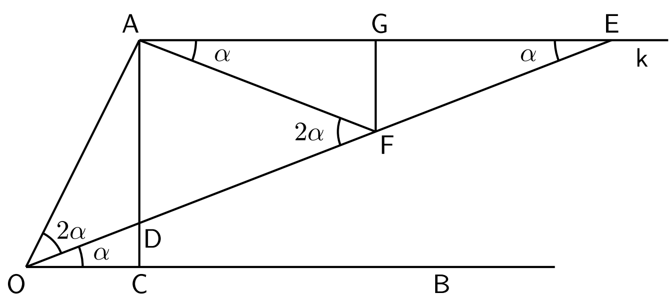
Ty se ukázaly být teprve v novověku neřešitelné, čímž je zmíněná otázka zodpovězena negativně. Již nyní je ale důležité zmínit, že se zde (podobně jako později v případě Gödelových vět) nejedná o žádnou neřešitelnost absolutní. V podstatě jde také o zvolené (konstrukční) prostředky a jejich ‘jednoduchost’ či ‘rigoróznost’. Eukleidovské metody jsou přesně popsány jakožto konstrukce pravítkem s jedinou hranou a bez jakéhokoli označení, a kružítkem, které může být otevřeno na libovolnou šířku, po provedení konstrukce však zkolabuje, tj. nelze s ním přenášet vzdálenosti. Ačkoli tuto druhou podmínku moderní kružítka nesplňují, lze ukázat, že to nevadí, tj. že metody kolabujících a nekolabujících kružítek koincidují. Z toho plyne, že v Eukleidově geometrii označené pravítko nepotřebujeme, totiž v jeho původním použití prostého nanášení bodů pevné vzdálenosti.

To se změní, dovolíme-li tímto pravítkem také posouvat, což lze formulovat jako možnost konstrukce přímky, která vychází z daného bodu P a protíná dané přímky k a l v bodech A, B tak, že má úsečka AB předem danou vzdálenost d, kterou můžeme nanést na naše pravítko. Tuto situaci ukazuje obrázek 1.14. V tomto rozšíření se již stane řešitelná trisekce úhlu, a to překvapivě snadno, jak ukazuje obrázek 1.15. V něm máme dán nejprve úhel $\angle AOB$, jejž chceme třetit. Z bodu A



Obrázek 1.14: Rozšířené užití označeného pravítka

spustíme kolmici na přímku OB, kterou tak protneme v bodě C. Bodem A vedeme rovnoběžku k k přímce OB. Použijeme označené pravítko k narýsování přímky procházející bodem O a protínající přímku AC v bodě D a přímku k v bodě E tak, že je jejich vzdálenost rovna dvojnásobku OA. Tato přímka roztřetí daný úhel. Důvod je následující. Je-li F střed úsečky DE a G střed úsečky AE, je úsečka FG kolmá k úsečce AE a trojúhelníky ΔAGF a ΔEFG jsou kongruentní. Úhel $\alpha = \angle EOB$ je



Obrázek 1.15: Třetění úhlu

z rovnoběžnosti přímky OB přímce k roven úhlu $\angle AEO$, a ten zase z kongruence zmíněných trojúhelníků úhlu $\angle EAF$. Úhel $\angle AFO$ je vnějším úhlem trojúhelníka ΔAEF, a jako takový je roven součtu dvou protilehlých úhlů, tj. 2α. Jelikož je trojúhelník ΔAOF rovnoramenný, platí $\angle AOE = \angle AFO = 2\alpha$, což jsme chtěli dokázat.

Označeným pravítkem s výše popsaným rozšířeným použitím lze zvládnout i problém zdvojení krychle, KVADRATURA KRUHU nicméně stále řešitelná není.[38] To ale opět neznamená, že není řešitelná absolutně, ba naopak. Problém konstrukce délky obvodu kruhu při daném poloměru vyřešili již Hippias a později Archimédés pomocí mechanicky sestrojených křivek (kvadratix, spirály).[39] Sám Archimédés ale toto řešení nepovažoval za geometrické.[40] Ke geometrickým metodám se ovšem řadila metoda výpočtu plochy jejím vyčerpáním, nicméně ve specifické podobě Eudoxově, která s předvedením kruhu jakožto limitního případu vepsaných polygonů o rostoucím počtu stran, výhledově polygonu nekonečného, neměla mnoho společného.[41] Ovšem i předeudoxovské metody jsou co do užití infinitesimálních metod velmi opatrné.

Typický argument, v této podobě připisovaný Brysónovi, spočívá v uzavření kruhu mezi posloupnosti vepsaných a opsaných mnohoúhelníků a odkazu k principu, podle něhož "k čemu existuje větší a menší, k tomu existuje i rovné".[42] Samozřejmě, že tu je jistá podobnost s Dedekindovou charakterizací spojitosti coby existence limitního bodu (řezového čísla) k rostoucí a zároveň omezené posloupnosti veličin (dolní množině řezu) nebo spíše s Weierstrassovým určováním reálných čísel posloupnostmi vnořených intervalů, stejně jako s Bolzanovou větou o mezihodnotě.[43] Na druhou stranu si nelze nevšimnout značné vágnosti, která nám může např. sugerovat, že jsme obvod a obsah kruhu coby přechodového polygonu schopni jako v případě polygonů standardních zařadit mezi veličiny eukleidovského kontinua. To, jak dnes víme, možné není, a případná redefinice měřitelné veličiny, resp. čísla, které by mohlo být kruhu připsáno a vztaženo k číslům již definovaným, nemůže být takovýmito 'úvahami' nahrazena. Toho si v jistém smyslu nebyli vědomi ani Eudoxos a Archimédés, kteří jednoduše předpokládali, že kruh nějakou veličinu má, jejich způsoby 'měření' kruhu ovšem vykazují rysy, na nichž se dá vhodná redefinice kontinua postavit.

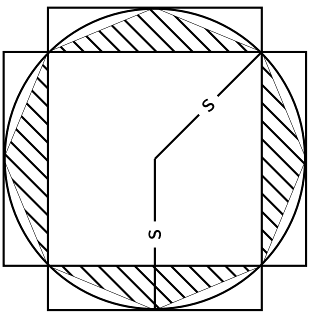
Oba přitom vycházejí z axiomu měření a oba se pohybují v jistém extrému. Eudoxův způsob je příliš teoretický, Archimédův zase příliš praktický. Eudoxova metoda vyčerpání přitom primárně nemá vyčíslit obvod či obsah kruhu, pouze nás ujišťuje, že platí:

> Poměr obsahů dvou kruhů $K : L$ se rovná poměru druhých mocnin jejich poloměrů $r^2 : s^2$.[44]

[38] Viz Hartshorne [2000, s. 259 nn].
[39] Viz Mainzer [1980, s. 34], případně Heath [1931, s. 143 nn].
[40] Becker [1964, s. 56].
[41] Konstrukci kvadratix a metodu vyčerpání ještě zmíníme v oddíle 1.8.
[42] Viz Becker [1964, s. 46 n].
[43] Srov. Gericke [1990, s. 8]. Zmíněné pojmy budou vysvětleny v kapitole 2.
[44] Eukleidés [El., XII, věta 2]. Věta je formulována pro poměr průměrů.

Z toho plyne, že lze-li obsahu kruhu připsat veličinu, pak poměr veličiny obsahu ke čtverci poloměru je u všech kruhů konstantní, což je jistě nutnou, nikoli však postačující podmínkou pro to, abychom o takovémto poměru hovořili jako o čísle.

Důkaz: Svoji úvahu Eudoxos odvíjí z předpokladu, že $K:L \neq r^2:s^2$. Z existence čtvrté proporcionály by měla existovat veličina F taková, že $K:F = r^2:s^2$. (Všimněme si, jak problematická je tato teze s ohledem na konstruovatelnost veličiny K. Co nyní znamená, že čtvrtá proporcionála existuje?) Eudoxos dále předpokládá, že pro tuto veličinu musí platit buďto $F < L$, nebo $F > L$. Uvažme první případ: Z kruhu L vyřízneme nejprve vepsaný čtverec — pravidelný mnohoúhelník o čtyřech stranách — a zároveň více než polovinu obsahu, neboť vepsaný čtverec je přesně polovina opsaného. Rozšířením vepsaného čtverce na vepsaný pravidelný osmiúhelník, jak to popisuje obrázek 1.16, vyčerpáme opět dokazatelně



Obrázek 1.16: Eudoxova metoda vyčerpání kruhu

více než polovinu plochy zbytku, neboť šrafovaný trojúhelník tvoří polovinu nakresleného obdélníka. Z divizivní verze axiomu měření nyní plyne, že takto musíme dospět k polygonu Q, pro nějž platí $L - Q < L - F$, a tedy $F < Q$. Sestrojíme-li nyní podobný polygon P (tj. pravidelný mnohoúhelník o stejném počtu hran) v kruhu K, pak podle dříve dokázané věty[45] platí $P:Q = r^2:s^2$. To je ale v rozporu s předpokladem $K:F = r^2:s^2$, neboť z $P < K$ a $Q > F$ plyne $P:Q < K:F$. Podobně je ke sporu doveden i předpoklad $F > L$ a Eudoxos může usoudit na kýženou rovnost $K:L = r^2:s^2$. □

Zatímco Eudoxos ukázal, že lze poměr obsahu kruhu ke čtverci poloměru vyjádřit konstantou, pokud ovšem taková veličina jako obsah kruhu vůbec existuje, předvedl Archimédés, jak takovou konstantu aproximovat. Prostředkem mu byly opět vepsané a opsané polygony, tentokráte však

[45] Eukleidés [El., XII, věta 1].

při využití jejich obvodů, což znamená, že si byl vědom totožnosti konstanty vyjadřující poměr obsahu kruhu ke čtverci jeho poloměru a obvodu kruhu k jeho průměru. Ve skutečnosti to byl právě Archimédés, kdo tento objev učinil. Příslušná konstanta se teprve díky Eulerovi označuje symbolem π.[46]

Postupným výpočtem obvodů vepsaných, resp. opsaných mnohoúhelníků a jejich zaokrouhlováním dolů, resp. nahoru dospívá Archimédés k racionálnímu odhadu, jehož horní a dolní meze se neliší o víc než 0,002.[47] Je zřejmé, že takto lze díky archimédovskému axiomu dosáhnout aproximace libovolné přesnosti, tj. pro libovolné n najít racionální veličiny a, b takové, že $a < \pi < b$ a $|b - a| < \frac{1}{n}$. Odtud vede ovšem již cesta k aritmetické definici reálného čísla z aproximujících posloupností čísel racionálních, jak se s ní seznámíme v rámci moderních teorií čísla. V historickém sledu se však musíme nejprve vypořádat s Newtonovým a Leibnizovým infinitesimálním kalkulem.

1.7 Kartézská čísla

Viděli jsme, že identifikace poměrů veličin s veličinami samotnými představuje podstatné zjednodušení a zpřehlednění geometrické praxe. Často je možné nahradit komplikovanou geometrickou konstrukci či geometrický důkaz (např. dělitelnosti oboru) jednoduchým výpočtem. Okolnost, že v mnoha případech není po ruce jiné ospravedlnění, nežli že takováto zjednodušení prostě fungují a byla již dlouho implicitně aplikována, patří vlastně neodmyslitelně k vývoji každé vědy. Tomu, kdo požaduje pro každý krok přísné zdůvodnění, se pak může stát totéž co řecké matematice, totiž že není ve jménu rigoróznosti schopen udělat další krok vpřed. Nejspíš z tohoto důvodu začíná nová éra geometrie a teorie čísel teprve bezprecedentním ‘lajdáctvím’ Descarta, Newtona a Leibnize, kteří nejprve identifikovali plochy a tělesa s úsečkami a analytickými výrazy, aby pak nechali nehybné, ideální formy antické geometrie vzniknout a následně vyčíslit pohybem či skládáním nekonečně malých bodů, resp. veličin, pro jejichž spornou existenci nenašli přes upřímnou snahu žádné jiné vysvětlení, nežli že umožňují velmi jednoduchou formulaci pravidel relativně stabilního a úspěšného kalkulu.

Okolnost, že si lze často ušetřit mnoho zbytečné práce, přeložíme-li geometrickou úlohu do symbolické formy a zjednodušíme ji výpočtem, studoval před Descartem systematicky již Viète. Východiskem mu bylo pozorování, že lze tradiční pátrání po čtvrté, resp. střední proporcionále $A : B = X : C$, resp. $A : X = X : B$ převést do formy rovnosti $AC = XB$, resp. $AB = X^2$ a *vice versa.* V původní geometrické interpretaci násobení

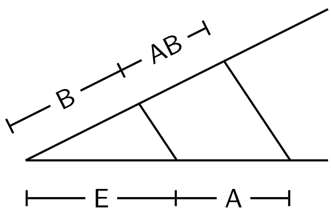
[46] Viz Ebbinghaus [1991, s. 124 n].
[47] Viz Fowler [1999, s. 53 nn] a Jahnke [1999, s. 25].

tento překlad ukazuje, že máme co do činění s problémem konstrukce pravoúhelníka (o dané straně), resp. čtverce stejného obsahu, jako má daný pravoúhelník. Právě tato názornost se ale v těchto případech zdála být kamenem úrazu, neboť — jak Viète sám opakovaně zdůrazňuje — musíme vždy dbát na příslušné dimenze a sčítat, resp. odčítat pouze veličiny, které jsou v tomto smyslu homogenní. Ve Viètově normální formě rovnosti

$$X^3 + AX^2 + BX = C$$

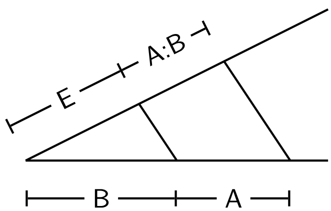
představují tedy znaky A úsečku, B plochu a C těleso, což Viète obvykle značí odpovídajícími indexy.[48] To, že na tuto exaktnost později z důvodů obecnosti a nejspíš i jistého pohodlí rezignuje, je mu třeba s ohledem na další vývoj aritmetizované geometrie jednoznačně přičíst k dobru.

Nedbalost Viètovu ospravedlňuje Descartes explicitně tím, že fixuje nějakou délku E jako jednotkovou a násobení veličin interpretuje pomocí věty o podobnosti trojúhelníků jako konstrukci veličiny X, pro kterou



Obrázek 1.17: Násobení veličin

platí $A : E = X : B$, neboli $AB = XE$, a tedy vlastně $AB = X$. Viz obrázek 1.17. Tím přenáší na spojité obory další formální vlastnost diskrétních veličin, obecnou násobitelnost. Dělení veličiny A veličinou B je

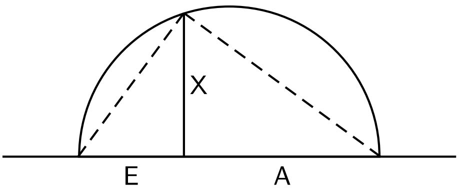


Obrázek 1.18: Dělení veličin

nyní přirozeně definováno jako veličina X taková, že $A : B = X : E$. Viz obrázek 1.18. Také tuto redukci lze připsat Descartovi, stejně jako definici

[48] Viz Gericke [1984, s. 255 nn].

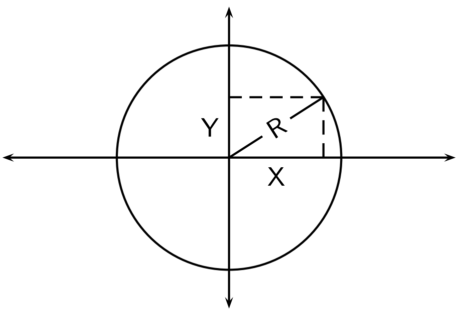
(druhé) odmocniny, kterou Descartes ve své *Geometrii* [1637*b*] uzavírá výčet operací své úsečkové algebry. Podle Eukleidovy věty o výšce pravoúhlého trojúhelníka platí na základě obrázku 1.19 vztah $X^2 = EA$, Descartovým vlastním zápisem $X = \sqrt{A}$.[49] Viz obrázek 1.19. Aplikace



Obrázek 1.19: Druhá odmocnina veličin

algebraických rovností ale neusnadnila pouze řešitelnost geometrických problémů. Díky Descartovi lze geometrické objekty také analyticky pojmenovat, myslíme-li si je umístěny do odpovídajícího souřadnicového systému dvou a více číselných přímek.

Kružnice se středem v počátku souřadnicového systému a s poloměrem R je např. zachycena formulí $X^2 + Y^2 = R^2$, jak to názorně ukazuje obrázek 1.20. Skutečnost, že v něm (pravda, zatím nijak podstatně) vy-



Obrázek 1.20: Rovnice kružnice

užíváme již tzv. ZÁPORNÝCH ČÍSEL, jenom podtrhuje, že nepředstavují žádný teoretický problém. Ba naopak, toto rozšíření umožňuje zavést odčítání jako totálně definovanou operaci — plnohodnotnou inverzi sčítání — pro libovolný eukleidovský obor veličin. Oborem Q racionálních čísel budeme dále zpravidla rozumět rovněž všechna racionální čísla záporná a nulu. Můžeme také zavést obor Z celých čísel.

Jemnost struktury analytické geometrie, nebo, jak by řekl Wittgenstein [1922, § 4.04], její variabilita (*Mannigfaltigkeit*), umožňuje také

[49] Věta o výšce říká, že v pravoúhlém trojúhelníku, jehož výška v dělí přeponu na úseky a a b, platí rovnost $ab = v^2$.

vyjádřit konstrukci čísla (bodu číselné přímky) algebraickou substitucí, složením více rovností. Geometrizovaná čísla antické matematiky je tedy možné analyticky pojmenovávat a referovat k nim. Tak třeba iracionální číslo $\sqrt{2}$ je v souladu s dříve uvedenou ilustrací 1.13 reprezentovatelné jako (kladný) výsledek průniku kružnice $X^2 + Y^2 = E^2 + E^2$ a přímky $Y = 0$, tedy jako kořen rovnice $X^2 = 2E^2 = 2E = 2$. Takovéto rovnice jsou ve své obecné formě

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 x^0 = 0$$

nazývány RACIONÁLNÍMI POLYNOMY n-TÉHO STUPNĚ, podle předpokladu, že koeficienty a_0, a_1, ..., a_n jsou racionální čísla a $a_n \neq 0$. Na první pohled je zřejmé, že lze každý racionální polynom upravit do ekvivalentního tvaru, jehož koeficienty tvoří pouze čísla celá.

Dále je zřejmé, že jako deskripce čísel nejsou polynomy zpravidla jednoznačné, tj. mohou mít více řešení nebo také řešení žádné. Postupným rozkladem polynomu na lineární faktory Descartes ukázal to, co před ním už nějakou dobu mnozí tušili, totiž že počet kořenů polynomu nemůže být vyšší nežli jeho stupeň. Je-li totiž x_1 kořen polynomu $P(x)$ stupně n, pak jeho dělením lineárním faktorem $(x - x_1)$ lze dospět k polynomu $Q(x)$ stupně $n - 1$, pro nějž platí $P(x) = (x - x_1)Q(x)$. Tento postup lze zjevně opakovat nanejvýš n-krát. Gauss dospěl později, roku 1799, k elegantnímu zobecnění tohoto postřehu v podobě tzv. ZÁKLADNÍ VĚTY ALGEBRY, podle níž má v oboru komplexních čísel každý komplexní (a tedy i racionální) polynom n-tého stupně přesně n kořenů, a lze jej tedy prezentovat ve formě

$$a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = 0.$$

To plyne z důkazu existence kořenu pro každý komplexní polynom a výše zmíněné možnosti rozkladu. Počtem kořenů je zde ale vlastně míněn počet lineárních faktorů v rozkladu polynomu, tj. samotná řešení se mohou opakovat.

Právě okolnost, že lze v rámci analytické geometrie reprezentovat geometrické tvary a veličiny pomocí algebraických výrazů (např. jako křivky druhého a vyšších stupňů či řešení jistých rovnic), se ukázala být rozhodující pro definitivní, a sice negativní rozsouzení klasických konstrukčních problémů antické geometrie. Tak např. DÉLSKÝ PROBLÉM zdvojení krychle, tedy konstrukce strany krychle o dvojnásobném obsahu ke krychli dané, vede v případě jednotkové krychle E^3 k rovnici $x^3 = 2$, tedy k polynomu $x^3 - 2 = 0$ třetího stupně. Po způsobu staropythagorejských představ o spojitosti lze nyní sice argumentovat tím, že při spojitém prodlužování strany jednotkové krychle ke straně krychle osmijednotkové musí být krychle o požadovaném obsahu dosaženo, nicméně analýza toho, co vše může být pravítkem a kružítkem zkonstruováno, hovoří jasně: Uvážíme-li rovnice přímky a kruhu, odpovídající přípustným konstrukčním prostředkům, tj. pravítku a kružítku, pak všechny body, které povolenými kroky mohou vzniknout, musí mít souřadnice sestávající z racionálních čísel či z vnořených druhých odmocnin, jejichž jsou bází, tedy např.

$$-\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\sqrt{17} + \tfrac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}.$$

S pomocí elementární části Galoisovy teorie lze dokázat, že $\sqrt[3]{2}$ v této formě reprezentovatelná není, řečeno algebraickou terminologií: nemůže být prvkem žádného rozšíření Q, které má stupeň 2^n.[50] Podobný argument platí i pro úlohu TŘETĚNÍ ÚHLU, tj. jeho rozdělení na tři stejné části, což je míněno obecně, nikoli pro speciální případy. Nemožné je to např. u úhlu 60°.

Od jisté doby víme tedy zcela jistě, že obor E eukleidovských veličin není z relativně úzké perspektivy tradičních geometrických problémů dosti obsáhlý. Obor všech kořenů polynomiálních rovností, tedy obor všech algebraicky popsatelných čísel, je prokazatelně větší. Označme jej jako K ve významu KARTÉZSKÉHO KONTINUA, jehož prvky se ovšem tradičně nazývají ALGEBRAICKÝMI ČÍSLY. Snad není třeba zdůrazňovat, že algebraickým číslem je momentálně míněno algebraické číslo reálné, spojené s původní geometrickou představou průsečíku křivky určené polynomem a reálné osy, v níž např. polynom $x^2 + 1 = 0$, vedoucí k pojmu algebraického komplexního čísla (tj. komplexního kořenu racionálního polynomu), žádné kořeny nemá. Podstatné pro toto kartézské rozšíření pojmu reálného čísla je právě ona kombinace názorného a pojmového, na níž fakt, že lze kartézská čísla popsat také na čistě algebraické bázi, nic nemění, neboť se jedná o popis vymyšlený dodatečně.[51]

Lindemannův důkaz (1882), že konstanta π 'transcenduje' nejen eukleidovské, ale i algebraické metody Descartovy, tedy že nemůže být ani algebraickým číslem, řeší pak negativně problém kvadratury kruhu a spolu s Liouvillovým starším důkazem (1844) transcendence některých čísel ukazuje, že klasické představy kontinua volají po mnohem důkladnější revizi.[52] V tomto okamžiku jsme zažili již tři rozšíření

$$\mathsf{Q} \subset \mathsf{P} \subset \mathsf{E} \subset \mathsf{K}$$

a stále nedisponujeme definitivní charakteristikou toho, co je obor reálných čísel zač. To, že lze obvod či obsah kruhu uchopit jako veličinu či číslo, patří samozřejmě k požadované revizi. Mezi ní, jak se uskutečnila

[50] Detaily např. viz van der Waerden [1971]. Relativně stručný důkaz lze najít in Eves [1990, dodatek A.2]. Komplexní přehled o celém problému lze získat z knihy Hartshorne [2000].

[51] K definici algebraického čísla viz oddíl 5.12.

[52] Příklady důkazů transcendence Liouvillových a jiných čísel podává např. Truss [1997, kap. 9].

v devatenáctém století u Cantora a Dedekinda, a Descartovou analytickou geometrií leží jakožto prostředník teorie diferenciálního a integrálního počtu, v jejímž rámci jsou reálná čísla specifikována jaksi holisticky, nepřímo, coby hodnoty proměnných, případně argumentů v rámci nově se utvářející teorie funkcí. K tomuto stadiu vývoje dějin čísla bychom se chtěli dostat ke konci této kapitoly.

1.8 Fluenty a fluxe

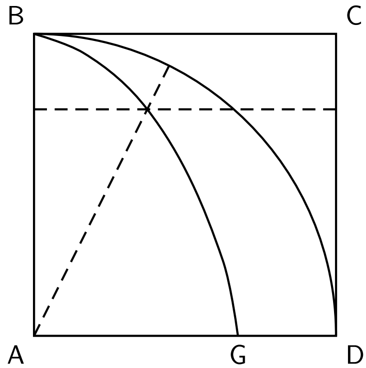
Jak jsme zmínili úvodem, z hlediska rigoróznosti základů znamenaly Newtonovy a Leibnizovy metody výpočtu obvodů, ploch a objemů ve srovnání s antickými vzory bezesporu krok zpátky. Newton i Leibniz systematicky využívali pojmu nekonečně malé (infinitesimální) veličiny, který — vědomi si dobře jeho problematické povahy — nebyli přes četné pokusy schopni uspokojivě vysvětlit či eliminovat ve prospěch jistějších rozlišení. Jediným způsobem zdůvodnění infinitesimálních metod jim tedy byla v posledku extrapolace názorných příměrů (dělení přímky na menší části, konstrukce mnohoúhelníků o zvětšujícím se počtu stran atd.), u Newtona navíc obohacených o kinematické prvky. Tento historický fakt užívá Coffa [1991, s. 23 n] k vyslovení hypotézy, podle níž Kant právě na základě obeznámenosti s ostrovní (newtonovskou) tradicí kalkulu mohl prohlásit aritmetiku za závislou na čistém názoru času a dosáhnout tak svého pojetí matematiky coby paradigmatu disciplíny, která je zároveň syntetická (vztahuje se ke světu naší zkušenosti) a *a priori* (nemůže být touto zkušeností přímo vyvrácena).

Řekové přitom na rozdíl od Newtona a Leibnize nedisponovali jedinečnou možností uchopení křivek a geometrických tvarů prostřednictvím analytických výrazů, které jde následně algebraicky upravovat, především ale derivovat a integrovat. Čas jako přidaná souřadnice byl pro ně tedy mnohdy jedinou možností, jak popsat komplikované křivky a řešit úlohy, které se jich týkají. Hippias dospěl např. k již zmíněné KVADRATIX tak, že ve čtverci $ABCD$ na obrázku 1.21 rovnoměrně otáčel úsečku AB kolem bodu A směrem k úsečce AD, k níž současně rovnoměrně posouval úsečku BC. Kvadratix vznikla z průsečíků posouvaných úseček, přičemž víme, že se vlastně jedná o řešení kvadratury kruhu, neboť úsečka AG, která vznikne protnutím kvadratix se stranou AD, má délku $2AD/\pi$.[53] Toto řešení není ovšem podle řeckého standardu právě pro svoji kinematičnost dostatečně exaktní neboli 'geometrické'.

Přestože si tedy Newton na rozdíl od Řeků mohl dopřávat, a také dopřával plného luxusu Descartovy analytické geometrie, považoval za žádoucí doplnit ji o kinematickou legendu. To nemá samozřejmě vliv na

[53] Viz Mainzer [1980, s. 34]. K různým antickým řešením kvadratury srov. také Heath [1931, s. 139 nn].

význam výsledků, k nimž dospěl. Problém je, že infinitesimální metody, které k tomu používal, nás mohou snadno dostat do potíží. Tyto metody



Obrázek 1.21: Kvadratix

byly přitom v jeho době již dávno součástí obecné praxe řešení složitých geometrických úloh, jako jsou výpočty obsahů zakřivených ploch, obvodů křivek, úhlů zakřivení, maxim a minim, tečen atd. Newtonův a Leibnizův přínos k dějinám analýzy a matematiky obecně proto nespočívá ani tak v tom, že by přidali nějaká nová konkrétní řešení či jejich způsoby (což samozřejmě přidali), ale především

(1) v jejich redukci na dva základní typy, a to výpočet tečen, založený na metodě rozdílů (diferenciace), a výpočet ploch, opírající se o metodu sum (integrace),

(2) v demonstraci jejich inverzního vztahu, což je tvrzení tzv. základní věty analýzy, a

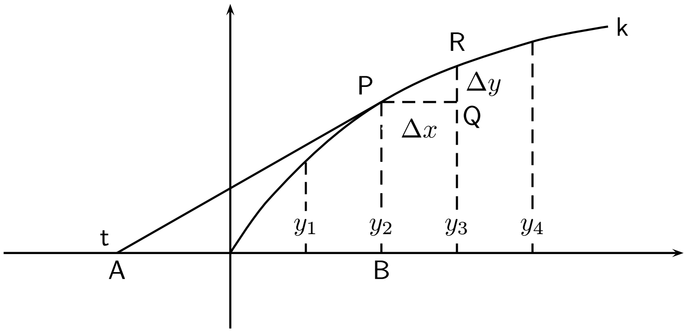
(3) v konstrukci výkonného algoritmu.

Ani Newton, ani Leibniz přitom na rozdíl od praxe zavedené Johannem Bernoullim a Eulerem[54] svůj kalkul a vůbec řeč o diferencích či míře změny (rychlosti růstu) neaplikovali přímo na funkce, ale na proměnné veličiny, reprezentované jednotlivými proměnnými, jejichž hodnoty mohly eventuálně záviset na proměnných jiných. Tyto veličiny se pak podle Newtona měnily s časem, zatímco u Leibnize probíhaly přes nekonečně blízké hodnoty. Nekonečně malý přírůstek veličiny proto nazývá Newton momentem, zatímco Leibniz hovoří o jejich nekonečně malém (infinitesimálním) rozdílu jako o diferenciálu.

Motivací jejich zavedení, stejně jako názvu “diferenciální a integrální kalkul” je následující úvaha. V obrázku 1.22 určuje zakreslená křivka k

[54] Viz Jahnke [1999, s. 143].

posloupnost souřadnic $y_1, y_2, \ldots$ o stejné vzdálenosti Δx. Poměr rozdílu Δy dvou sousedních souřadnic, konkrétně třeba y_2, y_3, a vzdálenosti Δx, tedy poměr stran tzv. CHARAKTERISTICKÉHO TROJÚHELNÍKA ΔPQR, přitom zhruba odpovídá poměru PB, AB trojúhelníka tvořeného tečnou t křivky k v bodě P, souřadnicí y_2 a subtangentou AB, neboli aproximuje směrnici dané tečny. Stejně tak součet obdélníků $y_i \Delta x$ pro všechna uva-



Obrázek 1.22: Metoda rozdílů a součtů

žovaná i aproximuje obsah plochy mezi křivkou a osou x, a to s přesností nepřímo úměrnou velikosti Δx. Nyní se zdá být nasnadě, že pro nekonečně malý rozdíl dx v proměnné x musí být příslušný součet, Leibnizem sugestivně značený jako

$$\int y dx,$$

přesným odhadem aproximované plochy, stejně jako je poměr $\frac{dy}{dx}$, kde je dy rozdílem dvou sousedních, nekonečně blízkých souřadnic y, přesným odhadem směrnice tečny. Pouze na základě tohoto pozorování postuluje také Leibniz vzájemnou reciprocitu diferenciace a integrace, a je mu v tomto ohledu třeba přiřknout (mírně pochybné) prvenství.[55]

Předpokládáme-li nyní, že je křivka k pojmenována výrazem tvaru $f(x) = y$, jímž je každému x z předpokládaného oboru veličin určeno právě jedno y z téhož oboru, je směrnice tečny v bodě $[x, f(x)]$ neboli míra růstu funkce f pro daný argument x dána vztahem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}.$$

Předpokládáme-li dále, že pro určité hodnoty x daný poměr existuje, lze jej snadno uchopit jako funkci x, kterou tradičně nazýváme derivací

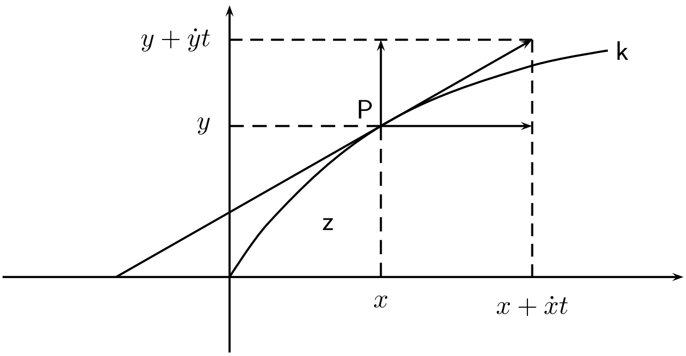
[55] Viz Grattan-Guinness [1980, s. 62] a Kline [1972, s. 374].

funkce f a značíme f'. Z rovnice

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

pak snadno dospíváme k dodnes užívané notaci $dy = df = f'(x)dx$. Newton ani Leibniz ovšem, jak již jsme vlastně naznačili, primárně nevyznačovali jednu z proměnných jako závislou, ale podobně, jako je to ještě dnes běžné ve fyzice, udělovali oběma proměnným x a y stejný status. Užité proměnné jsou pak formálně nezávislé, v praxi se však ‘mění’ podle nějaké společné veličiny třetí, jíž je pro Newtona implicitně veličina času. Newton proto nazývá proměnné veličiny, reprezentované užitými proměnnými, FLUENTY a jejich ‘derivace’, které značí jako $\dot{x}$, $\dot{y}$, ..., FLUXEMI. Z prototypické fyzikální aplikace kalkulu na (průměrnou) rychlost coby poměr dráhy a času ($v = \frac{s}{t}$) dostaneme, že se v případě fluxe jedná o jakousi okamžitou rychlost, kterou veličina x v daném okamžiku roste, tedy že $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. V nekonečně malém čase o vyroste x o nekonečně malý přírůstek $\dot{x}o$, tzv. MOMENT.

Newton nás dále vyzývá, abychom si představovali čáry jakožto vzniklé z pohybu bodů, plochy z pohybu čar a tělesa z pohybu ploch. Křivku k v obrázku 1.23 např. nahlíží jakožto dráhu bodu P, jenž se v jistém časovém okamžiku nachází v níže zakresleném místě. Jeho pohybem se mění (plynou) proměnné veličiny x a y, ale třeba i veličina z, značící obsah plochy mezi křivkou k, osou x a momentální souřadnicí y bodu P, a sice s nějakými okamžitými rychlostmi $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, danými okamžitou rychlostí bodu P. Zůstane-li tato rychlost konstantní, dospěje bod P



Obrázek 1.23: Metoda fluentů a fluxí

v čase t z místa $[x, y]$ do místa $[x + \dot{x}t, y + \dot{y}t]$. To zjevně neleží na křivce k, pro nekonečně malé o ale Newton předpokládá, že bod křivku neopustí, neboli $f(x + \dot{x}o) = y + \dot{y}o$, kde $f(x) = y$ je opět rovnice křivky k.

Jednoduchou transformací lze pak dospět k známému vztahu

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f(x + \dot{x}o) - f(x)}{\dot{x}o}.$$

Jelikož platí $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ a $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, máme v tomto poměru zachyceno vlastně i Leibnizovo $\frac{dy}{dx}$. Newton v tomto ohledu zjednodušoval svůj formalismus tak, že nechal jednu z proměnných plynout konstantně, což znamenalo zpravidla položit $\dot{x} = 1$. To vše ale dává smysl až v kontextu dalších transformací pravé strany uvedených rovností, především eliminace infinitesimálních výrazů dx, resp. $\dot{x}$ a o. Teprve tak lze dospět k vlastnímu výpočtu směrnice tečny křivky f v bodě $[x, f(x)]$, neboli hodnoty funkce f' pro argument x, či plochy pod křivkou f v intervalu $[a, b]$ hodnot proměnné x, symbolicky

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Příští oddíl ovšem začneme již ohlášeným zdůvodněním inverzního vztahu těchto úloh, resp. převodem druhého typu na první.

1.9 Diferenciál a integrál

Řekli jsme, že se na obsah plochy určené křivkou k, souřadnicí x a bodem P v obrázku 1.23 můžeme podle Newtona dívat jako na plynoucí s pohybem bodu P po křivce k, neboli na hodnotu proměnné veličiny z. Oprostíme-li se od zbytného kinematického rámce, znamená to uchopit jednoduše daný obsah jako funkci proměnné x, dejme tomu $G(x)$. Křivka je dána jako funkce $f(x)$. Nyní uvažujeme následovně. Zvětší-li se hodnota x o nekonečně malou hodnotu dx, zvětší se plocha $G(x)$ o nekonečně tenký obdélník $f(x)dx$, který takto odpovídá přírůstku $G(x+dx)-G(x)$ funkce G v bodě x. Jednoduchou transformací tak dospějeme k rovnici

$$\frac{G(x + dx) - G(x)}{dx} = f(x),$$

ze které okamžitě plyne, že f je derivací G, neboli $G' = f$. Funkce G se obvykle nazývá PRIMITIVNÍ FUNKCÍ funkce f. Z toho lze nyní již 'odvodit' ZÁKLADNÍ VĚTU ANALÝZY jako

$$G(x) = \int f(x)dx = \int G'(x)dx = \int \frac{dG}{dx}dx = \int dG.$$

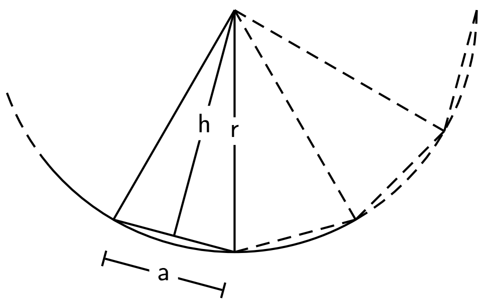
Větu můžeme chápat jako výrok o samotné primitivní funkci (resp. funkcích) coby tzv. NEURČITÉM INTEGRÁLU, nebo o jejích hodnotách neboli

INTEGRÁLU URČITÉM. Pak je ji třeba formulovat takto:

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G'(x)dx.$$

Fakt, že je úloha výpočtu obsahu plochy pod křivkou f ekvivalentní úloze nalezení funkce primitivní k f, si Newton uvědomil a v rámci možností i dokázal ještě před rozvinutím teorie fluxí. Zůstává ovšem neoddiskutovatelnou zásluhou Leibnizovou, že inverzní charakter obou úloh podpořil výše užitou sugestivní notací. Ta hraje velkou roli při vlastním derivování a integraci.

Pro ilustraci síly a provázanosti nových metod se pokusme nejprve přesvědčit o tom, že poměr $\frac{O}{r^2}$ obsahu a druhé mocniny poloměru kruhu vyjadřuje tatáž konstanta jako poměr $\frac{o}{2r}$ jeho obvodu a průměru, totiž π. Kvadratura kruhu, tj. převedení výpočtu obsahu kruhu na jednodušší tvary, vede k jeho aproximaci vepsaným mnohoúhelníkem o n stranách, který lze snadno rozdělit na n rovnoramenných trojúhelníků o základně a, výšce h a straně odpovídající poloměru kruhu r, jak to ukazuje obrázek 1.24. Obsah pravidelného polygonu o n stranách je dán zjevně rovnicí



Obrázek 1.24: Vyčerpání kruhu

$O_n = n\frac{ah}{2}$. Pro rostoucí počet stran n se zmenšuje rozdíl mezi h a r a obvod polygonu $o_n = na$ přechází v obvod kruhu, jenž je nám předem dán jako $o = 2\pi r$. V okamžiku, kdy se strany stanou nekonečně malé, tedy pro '$n = \infty$', začne platit i $o_n = 2\pi r$ a $h = r$ a my dospějeme k obsahu kruhu jako

$$n\frac{ah}{2} = \frac{o_n h}{2} = \frac{2\pi r r}{2} = \pi r^2.$$

To byla aplikace metody vyčerpání v Leibnizově stylu. Předpokládáme-li naopak, že je nám dán obsah kruhu, a to jakožto funkce poloměru $O(r) = \pi r^2$, můžeme uvažovat takto. Změní-li se veličina r o nekonečně malou hodnotu dr, bude se přírůstek obsahu kruhu dO rovnat nekonečně tenkému pruhu na jeho obvodu, jenž musí být co do obsahu identický s obdélníkem $o\,dr$. Stačí tedy vypočítat derivaci funkce O. Pro tu skutečně platí $O'(r) = 2\pi r$, i když ještě nevíme, jak jsme k tomuto závěru došli. Máme tu ale zároveň ukázku toho, jak lze na problém diferenciací převést nejen úlohu výpočtu ploch, ale i délek. Nyní ovšem již ke konkrétní technice výpočtu derivací, tj. Newtonovu a Leibnizovu *kalkulu*.

Ten byl od počátku paradigmaticky vázán na polynomiální funkce. Ty se jednak mimořádně dobře vyčíslují (stačí aplikovat pouze základní operace sčítání a násobení), snadno se s nimi operuje (samy mohou být předměty obvyklých operací) a mají spoustu jiných žádoucích vlastností: jsou spojité na celé číselné ose, neomezeně derivovatelné a integrovatelné. Newton navíc objevil, že lze binomickou poučku

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}x^2 + \cdots + x^n$$

zobecnit také pro racionální a záporná n. To mu umožnilo reprezentovat řadu komplikovaných křivek pomocí tzv. mocninných řad (*power series*, *Potenzreihe*), tedy jako jakýsi 'nekonečný polynom'.[56] Tím se jejich funkce staly jednak dobře aproximovatelné (skrze příslušný polynomiální rozvoj), jednak na ně šly aplikovat obvyklé algebraické operace, včetně postupné derivace a integrace. Jejich bází byla derivace prostých (tj. konečných) polynomů.

Celou metodu lze tedy demonstrovat na jednoduchém, prototypickém příkladu: Mějme funkci $y = f(x) = x^3$ a ptejme se, o kolik se změní proměnná y, změní-li se nepatrně proměnná x, neboli kolik činí rozdíl $f(x+dx) - f(x)$. Zde se jedná o vyhodnocení výrazu $(x+dx)^3 - x^3$. To podle binomické poučky vede na $x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3 - x^3$, a tedy $3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3$. Jelikož se zajímáme o poměr rozdílů dx a dy, můžeme nyní dx vytknout nebo jím přímo uvažovaný výraz vydělit. Zbude $3x^2 + 3xdx + (dx)^2$. Všechny sčítance, v nichž se dx vyskytuje v součinu, nyní Newton i Leibniz jako nekonečně malé škrtnou a získají $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, resp. $dy = d(x^3) = 3x^2dx$. Obecně byl takto vlastně odvozen vztah

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx,$$

z něhož dostáváme inverzí podle základní věty analýzy

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Aplikujeme-li nyní zobecněný binomický teorém na rovnici jednotkové (půl)kružnice $y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, získáme mocninný rozvoj

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots.$$

[56] K definici pojmu řady, zejména v jeho odlišení od pojmu posloupnosti, se dostaneme v oddíle 2.4.

Jeho postupnou integrací pak dospějeme k výrazu

$$\int (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = 1x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 - \frac{1}{8\cdot 5}x^5 - \frac{1}{16\cdot 7}x^7 - \cdots,$$

který nám umožní s libovolnou přesností vyčíslit plochu kruhu. To vše dohromady jsou ty nejpodstatnější momenty Newtonova výzkumu před obecnou formulací pravidel kalkulu fluxí, navíc ve sledu, který zdaleka neodpovídá historické genezi.[57] Newton totiž nejprve z kvadratur křivek jednodušších rovnic odvodil mocninný rozvoj plochy kruhu, na nějž pak aplikoval známý vztah pro integraci polynomu a dospěl k mocninnému rozvoji rovnice kružnice. Z něho uhodl zobecnění binomické poučky.

Tím vším si ale nemusíme nechat naše metodicky správné odvození kazit a můžeme rovnou přejít k explicitní formulaci pravidel kalkulu a jeho prvním kritikům. Bázi infinitesimálního kalkulu i kalkulu fluxí přitom netvoří nic jiného nežli výše aplikované instrukce eliminace výrazu dx z výrazu $(f(x+dx)-f(x))/dx$, což jsou:

(1) rozepsání rozdílu $f(x+dx)-f(x)$,

(2) jeho transformace do tvaru $dx(A(x)+B(x,dx))$, v němž se dx v B vyskytuje pouze v součinu,

(3) vydělení hodnotou dx,

(4) zanedbání $B(x,dx)$ jako nekonečně malého.

Výsledkem jsou rovnice

$$\frac{dy}{dx} = A(x), \qquad \text{případně} \qquad dy = A(x)dx.$$

V případě polynomů je tento postup aplikovatelný triviálně, tj. především nenastávají problémy v bodě (2). Potíže, i když mnohem obecnějšího charakteru, se však objevují jinde, totiž v bodech (3) a (4).

Podle Leibnize i Newtona máme v rovnici $dy/dx = A(x)$ napravo konkrétní reálné číslo (případně dané v závislosti na nějakém jiném konkrétním reálném čísle x jako hodnota funkce $A(x)$), nalevo pak poměr dvou infinitesimálních veličin dy a dx. Ty byly tradičně z oboru veličin vyloučeny, resp. jim byl z dobrých důvodů (viz oddíl 1.4) poměr odepřen. Změnily se snad tyto důvody? — V principu nikoli, a Leibniz i Newton si toho byli dobře vědomi. Leibniz se obvykle hájil tím, že se v případě dx a dy jedná o užitečné symboly, které jsou prostředníky úspěšných výsledků — jakési momenty osvědčené praxe —, aniž by samy měly nějaký samostatný význam. V tomto synkategorematickém duchu je, či by alespoň měla být, Leibnizova notace užívána dodnes. To však nic nemění na

[57] Viz Grattan-Guinness [1980, s. 54 n].

tom, že samotný odkaz na úspěch či formální analogie s běžnými výpočty nemohou samy stačit např. k ospravedlnění pravidla typu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx},$$

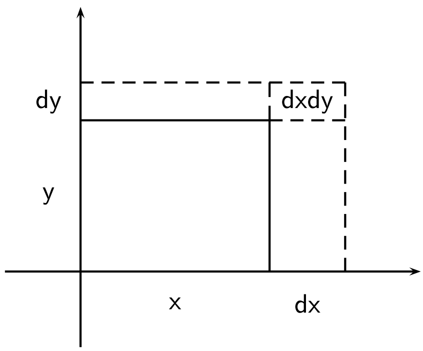
podle něhož lze v Leibnizově kalkulu derivovat složené funkce. Jeho řádná aplikace totiž přes nepopiratelnou mnemotechnickou přednost nijak přímočará není, a může tak snadno vést k nežádoucímu výsledku.[58] Totéž platí např. pro pravidlo pro derivaci součinu

$$d(xy) = xdy + ydx,$$

z jehož čistě formálního odvození

$$\begin{aligned} d(xy) &= (x + dx)(y + dy) - xy \\ &= xdy + ydx + dxdy \\ &= xdy + ydx \end{aligned}$$

není nikterak jasné, proč můžeme ve finální úpravě škrtnout nekonečně malý čtverec $dxdy$, a ne třeba nekonečně tenký obdélník xdy. Viz obrázek 1.25. Ve své slavné kritice kalkulu, kterou později (ovšem bez udání



Obrázek 1.25: Derivace součinu

zdroje) přebírá i Hegel,[59] poznamenává Berkeley [1734, § 9], že "v každé jiné disciplíně jsou závěry dokazovány pomocí principů, nikoli principy pomocí závěrů", aby pak ironicky ocitoval Newtonovo vlastní motto: "Ve věci matematiky nesmí být ignorovány chyby, byť by byly sebemenší." Kdyby šlo pouze o úspěch výsledku, nebylo by ostatně třeba takováto krajně pochybná zdůvodnění vůbec podávat.

[58] Tak např. pro $y = \sin x^2$ a $u = x^2$ musíme počítat následovně: $dy/du = \cos u$, $du/dx = 2x$, $dy/dx = 2x \cos u = 2x \cos x^2$.
[59] Viz Stekeler-Weithofer [2004, kap. 7].

Avšak překvapivě, podle Newtona bylo dosaženo vytěsnění infinitesimálních veličin z jeho systému již zavedením fluxí. Skutečnost, že třeba přímka vzniká pohybem bodů, ukazuje podle něho, že není jejich prostým souhrnem, jak se to zdá např. předpokládat Leibnizova teorie integrálu. Při pohybu závislých veličin x a $y = f(x)$, pokračuje Newton, se k sobě jejich přírůstky, vždy interpretované jako konečná čísla, mají v jistém poměru. V okamžiku, kdy tyto přírůstky zmizí, nazývá se tento jejich poměr POSLEDNÍM RÁCIEM (*ultimate ratio*) a je označován výrazem $\dot{y}/\dot{x}$. Jestliže naopak ony přírůstky přerostou z nicoty v bytí, nazývá se tentýž poměr RÁCIEM PRVOTNÍM (*prime ratio*). Výraz $\dot{y}/\dot{x}$ tedy označuje konečný poměr mizejících veličin či prvotní poměr veličin vznikajících (*evanescent and nascent augments*).

Nejvíce citovaná část slavného Berkeleyho dopisu *The Analyst* se týká právě tohoto Newtonova kinematického odůvodnění. Berkeley [1734, § 35] píše:

> A co jsou tyto fluxe? Rychlosti mizejících přírůstků? A co jsou tyto mizející přírůstky? Nejsou to ani konečné veličiny, ani veličiny nekonečně malé, ani nic jiného. Nemáme je nazývat přízraky zesnulých veličin?

Jádro Berkeleyho kritiky je potom velmi konkrétní. Správně upozorňuje na nekonzistenci, plynoucí z toho, že v bodě (3) výše uvedeného vyčíslování derivací dělíme veličinou dx, čímž předpokládáme, že je nenulová,[60] zatímco ji v bodě (4) škrtáme jakožto zanedbatelnou, tedy rovnou nule. Tím Berkeley otevírá celou řadu spřízněných a velmi závažných otázek: Co víme vlastně o ‘veličinách’ dx a dy (resp. $\dot{x}, \dot{y}$), kromě toho, že mají být menší nežli libovolná veličina konečná? Je třeba dx pokaždé týmž nekonečně malým přírůstkem? Pak by dy muselo variovat, jinak by nemohly dávat dohromady rozličná rácia, na rozdíl od “dx” by tedy “dy” nebylo jméno, ale proměnná. Proč ale podíl toho, co označují, vede ke konečnému číslu, a jejich součin nikoli? Jak si lze vysvětlit, že součet nekonečně mnoha nekonečně malých veličin udává obvod libovolného kruhu, jak mohou být takto získané obvody porovnávány mezi sebou a s jinými veličinami? Úhrnem:

> Na základě jakých kritérií identity a ohodnocení relevantních vět (rovností, nerovností, relací daných aritmetickými operacemi) jsme zařadili tzv. infinitesimália či fluxe do oboru uvažovaných veličin, tj. učinili z nich (abstraktní) předměty?

[60] Jenom pro pořádek. Jelikož platí $0m = 0n$ pro libovolné m, n, po připuštění dělení nulou by muselo platit i $m = n$.

Pokud neznáme žádnou konzistentní odpověď, nekonečně malé veličiny jednoduše neexistují.[61] Berkeley [1734, § 20] samozřejmě ani na okamžik nepochyboval o tom, že jsou metody kalkulu úspěšné: “Vůbec nezpochybňuji Vaše závěry, pouze Vaši logiku a metody. Jak dokazujete? S jakými objekty pracujete a jak jsou evidentní? Na základě jakých principů postupujete; jak jsou spolehlivé?” Zjevná neexistence uspokojivé odpovědi musí vést k pokusu o nový základ. Jeho východiskem může být samozřejmě pokus o analýzu toho, proč byl kalkul fakticky úspěšný, a teprve v tomto bodě se Berkeley ukazuje jako podjatý, když označuje vše jen za jakousi ‘kompenzaci omylů’:

A Nejprve usoudíme z ‘přibližné’ podobnosti charakteristického ‘trojúhelníku’ a trojúhelníku mezi tečnou, subtangentou a souřadnicí na to, že poměry (konečných) přírůstků $f(x+\Delta x)-f(x)$ a Δx odpovídají směrnici tečny.

A′ Později však zanedbáme všechny členy výrazu, v nichž se Δx vyskytuje v součinu.

Seriózní a zároveň funkční návrhy reformy na sebe tedy ještě chvíli nechaly čekat.

1.10 Lagrangova reforma

Moderní výklad kalkulu, proklamativně řešící nejednoznačnosti spojené s užitím nekonečně malých veličin, se jak známo opírá o teorii limit. Typicky jsme opět konfrontováni s křivkou pojmenovanou nějakým analytickým výrazem $f(x) = y$, uvažujeme rozdíly Δx a $\Delta y = f(x + \Delta x)$ a jejich poměr udávající směrnici sečny

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

jenž se nazývá DIFERENČNÍ KVOCIENT. Směrnice a tečny je pak definována jako limita tohoto poměru pro zmenšující se Δx

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a,$$

tedy nikoli jako Leibnizův poměr nekonečně malých diferencí neboli tzv. DIFERENCIÁLNÍ KVOCIENT

$$\frac{dy}{dx} = a.$$

[61] Robinsonovu nestandardní analýzu je samozřejmě možné chápat jako pokus o rehabilitaci pojmu nekonečně malé veličiny, a tedy pěstování analýzy v Leibnizově a Newtonově stylu. Problém je, že Robinsonův přístup je cele závislý jak na Cantorově koncepci kontinua, tak na jeho teorii množin. Berkeleyho otázky se pak jeví vlastně ještě aktuálnější. Více k tomu viz oddíl 5.12.

Je ovšem naivní domnívat se, že toto prosté přepsání jednoho výrazu jiným samo o sobě nějak objasňuje pravidla kalkulu, neboť stále není zřejmé, jak jsme vlastně dospěli k hodnotě a a co to znamená, že je limitou, kromě neurčitého odkazu na "blížení se přes všechny meze".

Sám Newton [1686, díl I, oddíl I, věta XI] ostatně považoval svá prvotní a poslední rácia právě za limity[62] a ještě u Cauchyho, označovaného za otce současné analýzy, nacházíme podivuhodnou a často nepřehlednou směsici řeči o limitních hodnotách a nekonečně malých veličinách, a to jednoduše proto, že obraty prvního typu jsou dostatečně názorné (právě této názornosti se využívá v úvodních kurzech kalkulu dodnes) a obraty druhého typu dostatečně pohodlné (toho se zase dodnes využívá v úvodních kurzech fyziky). Ke Cauchyho teorii se ale ještě dostaneme.

Na základě řečeného není divu, že se první pokusy o to, jak postavit analýzu na pevný základ, odehrávaly pod hlavičkou jejího očištění "od nekonečně malého, mizejících veličin, limit a fluxí", a to na základě "algebraické analýzy konečných veličin".[63] Langrange, který se do čela tohoto radikálního proudu postavil, se rozhodl pro čistě algebraickou prezentaci subjektu, v němž nemají nekonečně malé veličiny, ani názorné příměry žádné místo. Jelikož byl pojem limity založen právě na názorné bázi, rozhodl se jej eliminovat také. V citovaném fragmentu nacházíme vlastně první seriózní vyhlášení programu aritmetizace analýzy coby její definitivní 'degeometrizace'. V úvodu k *Mécanique analytique* se také objevuje často citovaná věta:

> V této knize nenajdete žádné obrazce.[64]

Pro Lagrange, stejně jako pro Eulera, který byl v tomto pohledu pionýr, se kalkul netýká proměnných, ale funkcí. Již samo zavedení pojmu funkce bylo velkým přínosem oboru, i když zpočátku nebylo zdaleka jasné, o jak široký pojem se jedná, resp. jednat má. To není ale v jistém, i když užším smyslu jasné dodnes.

Podle Lagrange jsou funkcemi v první řadě polynomy, což také vysvětluje, proč se podle něho metodicky striktní a nenapadnutelný fundament kalkulu rovná obecné možnosti vyjádřit funkce ve tvaru

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \cdots.$$

K němu jsme kdysi dospěli při vyčíslování diferenciálního kvocientu polynomu. Diferenciální kvocient je nyní, tolik Lagrangův plán, jednoduše de-

[62] "Tato poslední rácia, s nimiž veličiny mizí, nejsou ve skutečnosti rácia posledních veličin, ale limity, k nimž se rácia veličin neomezeně se zmenšujících blíží a k nimž se mohou přiblížit přes každou danou diferenci, aniž by ji kdy překročila, dokud ony veličiny nezmizí *in infinitum*."

[63] Citován Lagrange [1797] podle Grattana-Guinnesse [1980, s. 100].

[64] Lagrange [1788]. Citováno podle Grattana-Guinnesse [2000, s. 16].

mystifikován jako koeficient p tohoto rozvoje, jenž, jak se později ukáže, odpovídá známému mocninnému rozvoji Taylorovu:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots.$$

V něm jsou koeficienty uchopeny jako funkce proměnné x a Lagrangem nazvány DERIVACEMI funkce f. První derivace je značena jako f', druhá jako f'' atd. Proces utváření derivací funkce lze nyní nahlédnout jako pokus o její polynomiální aproximaci daného stupně v okolí bodu x. O tom se ještě krátce zmíníme v oddíle 1.12.

Z historického hlediska nebyl reformní návrh Lagrangův úspěšný především pro svoji praktickou odtažitost, koncentrující se na formální stránku problému, tedy jeho symbolicko-algebraickou část. Většina námitek, které se proti jeho řešení uvádějí, není ale zcela korektní. Píše se např., že výše uvedený mocninný rozvoj nepřijímají všechny známé funkce. Jak jsme ale již zmínili, nebylo tehdy docela jasné, co za 'všechny' funkce vůbec považovat, přičemž Lagrange, jenž si byl existence výjimek dobře vědom, provedl příslušná odvození pro ty funkce, které považoval za relevantní. Dnešní maximálně liberální koncept funkce jakožo "jakéhokoli jednoznačného přiřazení" pochází až od Johanna Dirichleta, tedy z doby mnohem pozdější, v níž se již postupně začala formovat a posléze i prosazovat Cantorova teorie množin. Původní vazba pojmu funkce na analytické výrazy, ba co víc, na výrazy, které uvozuje nějaký algoritmus, je proto přirozená. (Zde si stačí položit otázku, co je např. funkcí z hlediska výpočetní techniky, tedy předpisu zadatelného počítači.)

V každém případě to bylo teprve Lagrangovo jasné, byť implicitní vymezení funkce, co přivedlo jiné matematiky k zjištění, že je lze za určitých okolností překročit, tedy i rozšířit pojem funkce určitým směrem. To znamená učinit jisté rozhodnutí. Z povahy věci totiž nijak neplyne, jakým směrem by nová definice měla jít či že je Lagrangovo vymezení chybné. V tomto duchu je také třeba argumentovat, proč není Lagrangova redukce nekonečně malých veličin na úkor nekonečně dlouhých výrazů (mocninných rozvojů) krokem zpět. Ona nekonečnost jde totiž nyní zcela na vrub užitému "atd.", tj. obvyklým třem tečkám následujícím po několika explicitně zmíněných členech rozvoje. Ty jsou ovšem typicky implicitně spojeny s nějakým obecně následovatelným pravidlem "jak dále", tj. jak generovat další členy rozvoje a následně vyčíslovat příslušnou hodnotu s libovolnou měrou přesnosti, přičemž toto pravidlo musí být právě pro svoji obecnou následovatelnost vždy konečné.

Na tom všem nic nemění okolnost, že i tento aspekt konečnem 'zkroceného' nekonečna byl později překročen směrem k nekonečnu nespoutanému, transcendujícímu všechny dané meze, neboť zmiňovaný spor ohledně povahy funkce trvá dodnes a nespočívá vlastně v ničem jiném nežli v míře docenění zmíněné diference. K tomu se ale dostaneme v pozdějších kapitolách. Momentálně je významné, že se mocninné řady vyhýbají uváděným nectnostem nekonečně malých veličin, neboť je rámcově jasné, jak s nimi počítat, sčítat je, dělit či jak vyhodnocovat, zda se co do svých hodnot rovnají, či nikoli. Proto je také s jejich pomocí možné uchopit některé transcendentní funkce, jako je obecné mocnění (exponenciální funkce), jeho inverze (logaritmická funkce) či sinus a cosinus (funkce goniometrické).

Na druhou stranu je třeba přiznat, že aplikace nekonečných polynomů byly zprvu skutečně zatíženy značnou nejasností, nikoli nepodobnou problémům nekonečně malých veličin, která je dnes vysvětlována nedostatečnou citlivostí k problémům konvergence. Říkáme, že nekonečná řada může reprezentovat nějaké číslo jen tehdy, jestliže konverguje, tedy jestliže se k němu v jistém smyslu blíží. To jsme však zpátky u teorie limit, kterou tedy Langrangovým způsobem definitivně obejít nelze. Že si toho byl Lagrange částečně vědom, dokládá již jeho důkaz, že se v Taylorově rozvoji uvažovaných funkcí stává pro dostatečně malá h rozdíl mezi jistým členem rozvoje a tím, co následuje, dostatečně velký na to, aby šlo tento zbytek zanedbat a příslušný koeficient vyčíslit jako směrnici tečny v daném bodě, případně hodnotu vyšší derivace.[65] Teprve tím je skutečně poodhaleno mystérium Leibnizova a Newtonova zanedbání zbytku při zachování nenulového poměru.[66]

Grattan-Guinness [1980, s. 101] v této souvislosti také upozorňuje, že v době Lagrangova předsedání matematické sekci Berlínské akademie byla touto institucí vyhlášena soutěž týkající se vytěsnění pojmu nekonečně malého a velkého ze základů analýzy. Cena byla udělena Simonu Lhuilierovi, jenž definoval derivaci ve výše popsaném moderním stylu jako limitu diferenčních kvocientů, přičemž explicitně upozornil, že "dy/dx" je třeba číst jako jediný symbol, nikoli poměr veličin. Tak je tento výraz používán i dnes, když ve svých dvou nejtypičtějších variantách

$$\frac{df}{dx} = A(x), \qquad \text{resp.} \qquad df = A(x)dx$$

umožňuje zachytit, která z užitých proměnných byla uchopena jako nezávislá, a působí tedy jako kvantifikátor svého druhu.

Okolnost, že 'mít limitu' či 'mít derivaci' nejsou vlastnosti garantované libovolné řadě či funkci, ale něco, co je třeba dokázat, protože to v mnoha případech nemusí nastat, se do obecného povědomí dostávala velmi pozvolna. Kritické případy byly přitom známy dlouho. Tak např. řada

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

[65] Srov. Kline [1972, s. 432].

[66] Srov. také Stekelerův [2004, s. 251 nn] komentář k Hegelově kritice kalkulu.

vede při jednom uzávorkování k součtu $(1-1)+(1-1)+\cdots = 0$, při jiném k součtu $1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1$. Leibniz z toho usoudil, že jsou oba výsledky stejně pravděpodobné, a přiřadil řadě hodnotu aritmetického průměru $\frac{1}{2}$. Zdůvodnění, založené na dosazení 1 za x v rozvoji

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots,$$

podal Grandi a posléze akceptoval i Euler, který ostatně se součty tzv. divergujících řad příležitostně pracoval.[67] To nebezpečně připomíná anabázi infinitesimálních veličin, a skutečně, touto cestou jakýchsi *ad hoc* postulátů a pravidel by šlo definitivně znehodnotit také nekonečné výrazy, resp. hodnoty, kterých pro dané argumenty nabývají.

Cauchyho teorie limit, kterou dnes vnímáme jako samozřejmé řešení, je z tohoto důvodu zásadní pro rozlišení obou nekonečných konceptů na neudržitelný a nosný. Je proto zvláště příznačné, že ve svém *Cours d'Analyse* [1821] neohlašuje Cauchy dnes obligátní:

divergující řady nemají součet

jako trivialitu, ale jako poznanou a nejspíš i šokující nutnost, s níž lze koncepci analýzy stavějící na nekonečných řadách udržet při životě.[68] Cauchyho tvrzení je proto třeba číst na stejné úrovni jako větu o neexistenci nekonečně malé veličiny, tedy nikoli ve smyslu deskriptivním, jakéhosi fyzikálního objevu, ale praktického, a proto externího zjištění, že za jistých předpokladů (užití sum divergujících řad, nekonečně malých veličin) nemá jinak plodná teorie jako celek dobrý smysl.

Spolu s Cauchyho tezí však vzniká i jiná, tentokráte již interní otázka, totiž proč by konvergující řady (ve specifickém významu posloupnosti čísel zhušťujících se pod libovolnou mez) součet mít měly, tedy za předpokladu, že již víme, co znamená, že nekonečná řada nějaký součet má (že konverguje k nějakému číslu). Od teorie limit jsme tak odkázáni zpátky k teorii reálných čísel.

1.11 Cauchyho definice

Pojmů funkce, řady, posloupnosti, konvergence či limity jsme v minulém oddíle užívali značně vágně, což do jisté míry odpovídalo i době tvořící rámec našeho výkladu. Příslušné moderní definice, a tím i vyjasnění užité terminologie, podáme v příští kapitole. Pointa by však měla být jasná: Díky Lagrangovu programu, byť ve všech detailech neudržitelnému, byl další vývoj matematické analýzy nastaven směrem, jenž

[67] Srov. Kline [1972, kap. 20].
[68] Srov. komentář in Grattan-Guinness [1980, s. 117] a Jahnke [1999, s. 208].

uvažuje proměnné a jejich funkce pouze ve vztahu ke konečným veličinám — reálným číslům, i když za cenu zavedení nekonečných posloupností a řad těchto veličin. Ty byly ovšem, jak jsme viděli, příležitostně užívány i předtím. Užité pojmy limity, konvergence, spojitosti atd. jsou však ve své geometrické motivaci shledávány stále jako neostré, a je požadována jejich důsledná ‘konceptualizace’, tj. jejich analytické definice a důkazy, které se opírají jen a jen o ně, tedy především ne o geometrické příměry ‘blížení se’, ‘nepřerušené dráhy’ apod. “Analytickým” je zprvu míněno především “aritmetické”, i když postupně se tento význam posouvá směrem k logice a teorii množin.

Oproštěna od geometrického rámce dává i jasnější smysl naše původní a nyní znovu zopakovaná otázka, proč by např. konvergující (libovolně houstnoucí) posloupnost reálných čísel, např. ta aproximující obvod kruhu, měla mít limitu, což není vlastně nic jiného nežli otázka po definici reálného čísla:

> Co znamená, že existuje číslo π označující délku obvodu kruhu (vzhledem k danému poloměru)?

S ohledem na proběhnuvší inkorporaci nekonečných posloupností do inventáře standardních aritmetických prostředků se ukázalo být nejschůdnější oprášit původní pythagorejskou ideu poměru veličin jako posloupnosti racionálních, případně přirozených čísel, tedy navázání na opuštěný program aritmetizace (geometrického) světa. V těchto bodech, tj. ve

(1) vytěsnění nekonečně malých veličin,

(2) vytěsnění geometrického názoru z definicí a důkazů, tj. konceptualizaci základních rozlišení analýzy a

(3) opětovné aritmetizaci reálného čísla,

máme zhruba rozvržen program ARITMETIZACE ANALÝZY, dokončený Weierstrassem v první polovině 19. století. Ve výsledcích jeho díla, stejně jako díla Cauchyho a Bolzanova, je pak zaděláno na východiska navazujících hnutí, usilujících o další, tentokráte ještě radikálnější revizi matematiky a především pojmu čísla, a to na čistě konceptuální bázi, což se vlastně týká především rozpracování bodu (3). Mezi tato hnutí patří v první řadě Cantorova a Dedekindova teorie množin spolu s Fregovou logikou a filosofií matematiky. K těm se dostaneme v dalších kapitolách. Nyní nám zbývá probrat jejich předpoklady. Začněme bodem (2), tj. onou konceptualizací užitých rozlišení.

Většina základních definicí moderní analýzy bývá tradičně připisována Cauchymu. Po zběžném nahlédnutí do jeho díla však zjistíme, že jím předložená vymezení za současnými standardy exaktnosti značně zaostávají. Cauchy, jak jsme již zmínili, stále operuje pojmem nekonečně malého. Jelikož tak podle svých vlastních slov dělá ve významu “proměnné, jejíž numerické hodnoty libovolně ubývají", lze to vstřícně interpretovat synkategorematicky, např. ve smyslu pohodlného opisu okolnosti, že se členy nějaké posloupnosti odlišují od nuly, resp. jiného čísla a o libovolně malý rozdíl, rozuměj: od jistého vhodně zvoleného členu. Tak lze jednoduše vyjádřit, že je 0, resp. a limitním bodem dané posloupnosti. Zmíněné pohodlí ovšem v komplikovanějších případech přestává být výhodou, jak to ukazuje např. Cauchyho [1821, s. 23] definice spojitosti:

> Funkce $f(x)$ je v daných mezích spojitá ve vztahu k x, jestliže mezi těmito mezemi nekonečně malý přírůstek proměnné způsobí nekonečně malý přírůstek funkce.[69]

K tomu je zapotřebí předeslat několik slov. U pojmu spojitosti jsou tradičně rozlišovány dva základní způsoby, jimiž může být funkce na intervalu, na němž je totálně definovaná, spojitá, a sice bodově a stejnoměrně. Obecnější případ bodové spojitosti je založen na definici SPOJITOSTI FUNKCE f V BODU x. V principu se zakládá na přesvědčení, vyjádřeném i výše uvedenou Cauchyho definicí, že by se hodnoty funkce f neměly v okolí bodu x příliš odchylovat od hodnoty $f(x)$, tedy že by je mělo jít touto hodnotou aproximovat s libovolnou přesností, což znamená najít okolí bodu x takové, že žádná hodnota funkce f pro žádný z bodů tohoto okolí nepřekračuje příslušnou mez.

Předpokládáme-li, že v daném oboru disponujeme pojmem vzdálenosti dvou bodů (veličin) a, b, typicky coby veličiny $|b-a|$,[70] tedy i pojmem (otevřeného) α-OKOLÍ bodu coby množinou všech bodů vzdálenosti menší než α, lze bodovou spojitost definovat známým způsobem prostřednictvím Weierstrassovy epsilontiky, totiž jako tvrzení, že pro každé ϵ coby předem danou míru přesnosti existuje δ tak, že pro každé y z δ-okolí bodu x leží $f(y)$ v ϵ-okolí bodu $f(x)$, neboli je aproximováno hodnotou $f(x)$ s přesností ϵ. BODOVOU SPOJITOSTÍ FUNKCE v intervalu I pak rozumíme spojitost v každém jeho bodě. Zapíšeme-li tuto vlastnost moderním zápisem, získáme výraz

$$(\forall x \in I)(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in I)\,(|x-y| < \delta \rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon),$$

jejž čteme doslovně jako:

> (pro každé x z intervalu I) a (pro každé kladné ϵ) (existuje kladné δ takové, že) (pro všechna y z intervalu I platí, že) (náleží-li y δ-okolí x, pak $f(y)$ náleží ϵ-okolí $f(x)$).

Z definice je zřejmé, že velikost δ, na niž je třeba okolí bodu x restringovat, obecně nezávisí jen na míře přesnosti ϵ, ale i na bodu x. Tato

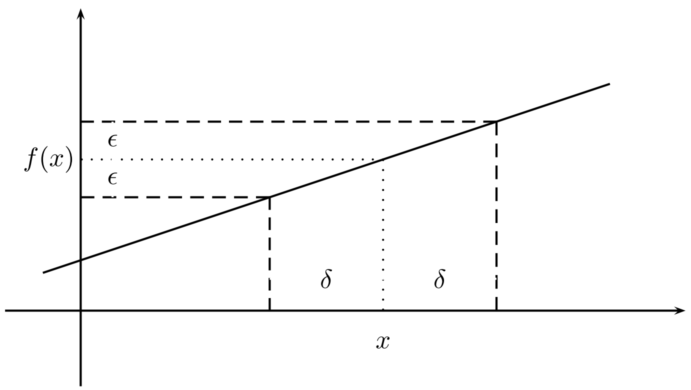
[69] Citováno podle Jahnke [1999, s. 196].

[70] V eukleidovském oboru je vzdálenost veličin A, B veličina C téhož oboru, pro kterou platí $A+C=B$, případně $B+C=A$, případně $C=0$, pokud $A=B$.

závislost je v mnoha případech nepodstatná. Např. hned v obrázku 1.26, zachycujícím spojitost lineární funkce $f(x) = ax + b$, lze δ získat pouze na základě ϵ jako ϵ/a, s platností pro libovolné x intervalu I, neboli:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(\forall y \in I)\,(|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

Funkci této vlastnosti se říká STEJNOMĚRNĚ SPOJITÁ na intervalu I a jediná formální odlišnost mezi ní a bodovou spojitostí, jak si lze snadno všimnout, spočívá v pozici kvantifikátoru $(\forall x \in I)$ ve zmíněné definici.

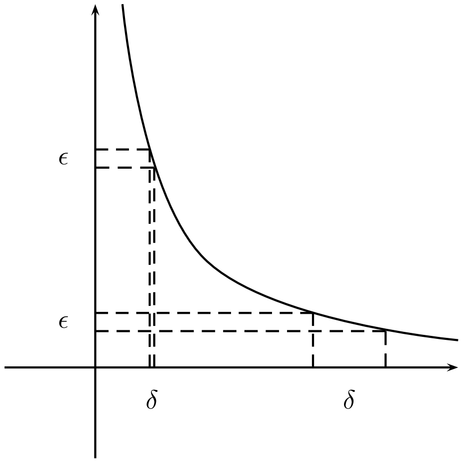


Obrázek 1.26: Spojitost v bodě

Zatímco je každá stejnoměrně spojitá funkce v daném intervalu bodově spojitá, opačné tvrzení neplatí, jak to lze demonstrovat např. na funkci $1/x$ v otevřeném intervalu $(0, \infty)$. Viz obrázek 1.27. Ta je spojitá, ale pro hodnoty blížící se k 0 roste neobyčejně rychle, jinými slovy, rychlost jejího růstu překračuje všechny meze. Pro volbu δ je proto kromě ϵ třeba vzít v úvahu bod x, v jehož okolí se mají argumenty hledaných ϵ-aproximací nacházet. Jakmile se ovšem omezíme na interval uzavřený, je každá spojitá funkce dokazatelně stejnoměrně spojitá, jednoduše proto, že tam nemůže stoupat neomezeně.

Cauchy je bezesporu otcem hlavní myšlenky výše uvedeného *způsobu* definování spojitosti a četných základních pojmů jiných, které byly díky němu definitivně vyrvány obvyklé metodické nedbalosti, počítající s představivostí čtenáře, ve prospěch čistě verbálního, na názoru, a tedy subjektivitě jedince nezávislého určení, jež je z povahy věci intersubjektivně přístupné a kontrolovatelné. V Cauchyho případě však do hry vstupuje jiný druh laxnosti, totiž až příliš velká vyjadřovací úspornost, která pak v mnoha případech nedovoluje rozeznat, který z výše uvedených druhů spojitosti má vlastně autor na mysli.

Citovaná Cauchyho definice sama upomíná spíše na spojitost stejnoměrnou, stejně tak jako některá její využití, v nichž se např. Cauchy o spojitosti funkce $1/x$ zmiňuje vždy v explicitním omezení na okolí nějakého bodu intervalu $(0, \infty)$, nikoli na interval celý. Jeho alternativní



Obrázek 1.27: Nestejnoměrná spojitost

definice spojitosti však naopak evokuje spojitost bodovou. Analogicky nepřehledná situace nastává u Cauchyho definice konvergence posloupnosti funkcí. I zde lze obdobně jako v případě spojitosti rozeznávat konvergenci bodovou a stejnoměrnou. Na tomto rozlišení pak ovšem závisí platnost Cauchyho věty, která tvrdí:

> Konverguje-li posloupnost spojitých funkcí f_1, f_2, ... k funkci g, je i tato funkce spojitá.

Tato věta totiž platí pouze v případě konvergence stejnoměrné, a Cauchyho důkaz byl proto tradičně považován za chybný. Tento případ se stal mimořádně známým poté, co jej Lakatos [1978] prezentoval jako ukázkovou proměnu paradigmat, která postihuje přechod od leibnizovské analýzy k analýze weierstrassovské. V pojmovém rámci nestandardní analýzy Robinsonovy, která se pokouší o znovuvzkříšení ideje nekonečně malých veličin, lze totiž Cauchyho tvrzení předvést jako platné pro funkce definované na nestandardním kontinuu. Takto se mohou v jiném světle ocitnout i Cauchyho odkazy na nekonečně malé. Tento výklad má ovšem přes svoji zajímavost příliš velká úskalí, než abychom ho mohli a chtěli dále sledovat.[71]

Podstatné je, že nutným krokem konceptualizace či, chceme-li, verbalizace analýzy byla i její cílená symbolizace, zohledňující vzájemné

[71] Srov. k tomu Potter [2004, s. 85 n], případně Jahnke [1999, kap. 6.3, 6.6]. K Robinsonovu způsobu zavedení nekonečně malých veličin se stručně vyjádříme v oddíle 5.12.

závislosti jednotlivých proměnných a jejich kvantifikace. Pro ni připravila pole právě Weierstrassova epsilontika, v jejímž rámci pak mohl Heine [1872, s. 184] podat explicitní definici stejnoměrné spojitosti takto:

> Funkce $f(x)$ je [...] *stejnoměrně spojitá* od a po b, jestliže pro každou danou veličinu ϵ, jakkoli malou, existuje kladná veličina η_0 taková, že pro všechny kladné hodnoty η menší než η_0 zůstává $f(x \pm \eta) - f(x)$ menší než ϵ. Ať dáme x jakoukoli hodnotu, pak za předpokladu, že x a $x \pm \eta$ zůstanou v intervalu od a do b, musí *totéž* η_0 vést k požadovanému výsledku.[72]

Systematické užití symbolů ve funkci křížících se anaforických odkazů — indexovaných zájmen — je zde zásadní. Samotná symbolizace ale otázku analytického vedení důkazu neřeší.

Zmíněná souvislost stejnoměrné spojitosti se spojitostí bodovou, tj. skutečnost, že první z nich implikuje druhou, nikoli naopak, je v jistém ohledu výhradně záležitostí permutace kvantifikátorů, tj. nezávisí na vlastním těle, (mimologickém) obsahu příslušné věty. Na základě čeho je ovšem přechod

$$(\exists x)(\forall y)A(x, y)\ /\ (\forall y)(\exists x)A(x, y)$$

obecně povolen, zatímco opačný zakázán jako neplatný? Pomůžeme si při jeho zdůvodnění tím, že jednoduše zopakujeme:

> jestliže existuje x, které je v daném vztahu ke každému y, pak *nutně* pro každé y existuje x, které je s y v daném vztahu?

Toto vše jsou otázky po hlubším zdůvodnění inferenčních vztahů komplexních, zde tedy kvantifikovaných vět aritmetizované analýzy. Od Cauchyho a Weierstrassovy reformy expresivní, formulující zděděná rozlišení novým, bezpečnějším způsobem, vede tedy cesta k Fregově reformě inferenčně-deduktivní, vyrůstající z hlubší nežli jen gramatické analýzy užitých větných forem, jednoduše řečeno: cesta k nové matematické (resp. aritmetické) logice. Ve zkratce lze také říci: "není Frega bez Weierstrasse" a "není logiky bez geometrie a její aritmetizace".

1.12 Bolzanova věta

Konceptualizace analýzy, tedy její oproštění od prostorového názoru prostřednictvím úplné verbalizace užitých definicí, má své pochopitelné výhody. S každým takto velkoryse koncipovaným projektem jsou ale spjata i nepříjemná překvapení, jež se mohou zprvu zdát stejně paradoxní jako

[72] Citováno podle Grattana-Guinnesse [1980, s. 135].

důvody, které k nastoupení nové cesty vedly. Takto byly paradoxy nekonečně malého nahrazeny paradoxy nekonečných součtů, přičemž skutečná žeň antinomií nekonečna, spjatých s pojmem nekonečně velkého, měla teprve přijít. Nás ale nyní zajímá jiný typ paradoxů, který se v souvislosti s aritmetizací analýzy objevil, totiž paradoxy názoru.

Přes zažitou představu, že se nekonečno v empirickém světě nevyskytuje, a nemá tedy názornou, leč abstraktní, čistě konceptuální povahu, bylo fakticky nekonečně malé odvozeno z geometrických demonstrací nesouměřitelnosti či neomezené dělitelnosti přímek. Ty jsou co do charakteru podstatně bližší antické *epagógé* nežli čistě deduktivnímu odvození v současném smyslu slova. Rovněž pojmy spojitosti, limity a konvergence čerpaly tradičně ve svém určení především z geometrických zdrojů, konkrétně nákresů čar 'jediným tahem', zmenšujících se diferencí úseček či úhlů mezi sečnou a tečnou. Totální závislosti na prostorových demonstracích odpomohla kalkulu do velké míry až reforma Cauchyho a Weierstrassova, která v návaznosti na Lagrangovy plány učinila doprovodné ilustrace v učebnicích analýzy zbytné, případně jim přisoudila pouhou pomocnou, didaktickou roli. Pointa této reformy proto nebyla zpochybněna, ale naopak podtržena faktem, že se některé z nových definicí ukázaly být co do svých důsledků s běžnými geometrickými představami neslučitelné.

Zopakujme tedy: Ve zpětném zrcátku dějin tedy paradoxy nevyznačují pouze okamžik, v němž došlo k nějaké krizi, ale především místo paradigmatického rozhodnutí, jež jsme si poté, co se prosadilo, navykli chápat jako přirozený stav (jak to 'skutečně je' a vždy být 'mělo'), nikoli jako historicko-pragmaticky podmíněnou alternativu, kterou lze, jsou-li k tomu příznivé podmínky, nahradit alternativou jinou. Přitom právě okolnost, že *před* zavedením určitých distinkcí problémy s názorem nevznikaly, je dána jednoduše tím, že byla fenomenální rovině přisouzena role posledního arbitra korektnosti výsledků. To se stalo v jisté době z jistých důvodů neudržitelné, např. proto, že míra vágnosti v posuzování platnosti či neplatnosti důkazu nezávislosti Eukleidova tvrzení o rovnoběžkách na ostatních axiomech přerostla únosnou mez. Totéž lze říci o problému reálných čísel.

Žádná fenomenologie (číselné) přímky nám totiž sama o sobě nedá a nemůže dát jednoznačnou odpověď na otázku, co jsou reálná čísla či jakou mají strukturu, neboť taková odpověď v sobě již zahrnuje určité rozhodnutí, normu, tedy i zavedení jistých teoretických pojmů jakožto pendantu k čisté deskripci aktuálního stavu. Že s sebou takováto rozlišení přinášejí nové a možná i nečekané konsekvence, že tedy dovytvářejí obraz matematického světa jistým způsobem, je jenom přirozené, a je záležitostí externího posouzení, tedy otázkou pragmatickou, zda uznáme za žádoucí či alespoň únosné projikovat daný matematický model v té které podobě na vnější, empirický svět.

Na názorné rovině je např. snadné pochopit, že spojitá funkce nemusí být v určitém bodě, např. prudkého zlomu, derivovatelná, tj. mít tam tečnu. Představa, že není derivovatelná v bodě žádném, se ale může zdát na čistě zkušenostním, jevovém základě (cokoli to je) obtížně stravitelná. Analytické definice přitom nic takového nevylučují. Podle definice spojitosti v bodě se jednoduše rozdíl $f(x+h) - f(x)$ blíží nule, jestliže se k ní blíží h, což jinými slovy znamená, že lze hodnoty $f(x+h)$ funkce v okolí bodu x aproximovat konstantou $f(x)$, neboli

$$f(x+h) = f(x) + r(h),$$

kde $r(h)$ je chyba mizející se zmenšujícím se h, tj. $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$. Derivovatelnost funkce v daném bodě obnáší oproti tomu existenci konstanty a takové, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a,$$

v závislosti na x značené jako $f'(x)$. V řeči aproximací to znamená, že lze funkci f v okolí bodu x popsat rovnicí

$$f(x+h) = f(x) + ah + r(h),$$

tj. lineárně aproximovat přímkou $f(x) + ah$ — což není nic jiného nežli tečna v bodě x —, přičemž chyba $r(h)$ je tak malá, že i po vydělení hodnotou h konverguje k 0, tj. $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Vyšší derivace f lze takto přirozeně nahlédnout jako pokus o aproximaci polynomiální, kde se $r_n(h)$ v rovnici

$$f(x+h) = f(x) + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + r_n(h)$$

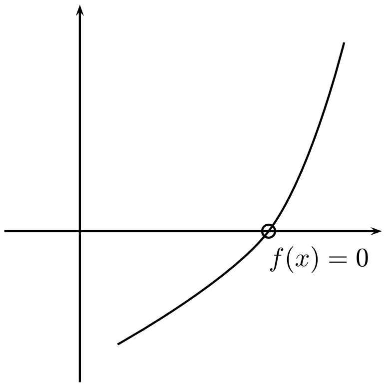
blíží 0 i po vydělení n-tou mocninou h. Nyní je zřejmé, že derivovatelnost implikuje spojitost, neboť pro funkci $s(h) = ah + r(h)$ platí $\lim_{h\to 0} s(h) = 0$. Opačný směr je ale při daném základě nesamozřejmý, stejně jako domněnka, že by na tom rozšíření spojitosti na celý interval mohlo něco změnit. Ve skutečnosti lze pouze na bázi definicí a jisté konstrukce (limity k dané posloupnosti více a více 'zlámaných' funkcí) ukázat, že může existovat funkce spojitá v každém, leč nederivovatelná v žádném bodě daného intervalu. Bolzano byl jedním z prvních, kdo tento 'paradox názoru' na bázi uvedených rozlišení předvedl.

V otázce, jak vyhodnocovat vliv takovýchto paradoxů na formování základů nové analýzy, tj. vztahu sporu k vývoji matematiky a vědy obecně, nám prokáže klíčovou roli známý příklad Bolzanova [1817] důkazu věty o mezihodnotě, někdy nazývané také Bolzanovou větou:

> Je-li funkce f spojitá na nějakém intervalu, na němž navíc nabývá hodnot s opačným znaménkem, pak má rovnice $f(x) = 0$

v daném intervalu kořen, resp. existuje x z tohoto intervalu, pro nějž funkce nabývá hodnoty 0.[73]

Toto tvrzení se zdá být z názorného hlediska trivialitou (spojitá čára s konci nad a pod osou musí tuto osu protnout), a tak je také interpretován Bolzanův důkaz, totiž jako projev systematického odhodlání proponentů algebraického, případně logicistického projektu odvodit názorné samozřejmosti analytickými oklikami. Takto postaven nedává ale celý



Obrázek 1.28: Věta o mezihodnotě

projekt smysl a bylo by ho možné kritizovat ze stejných pozic, z jakých později kritizovali představitelé novodobé matematické fenomenologie — intuicionismu — počínání abstraktní a symbolické matematiky, totiž jako bezpředmětné, snažící se pouze vtěsnat výsledky dosažené jiným, přirozenějším způsobem na prokrustovské lože metod, které jsou matematice cizí. Skutečnost je ale drasticky odlišná ze dvou prostých důvodů:

(1) Definice verbalizované analýzy, které Bolzano na rozdíl od Cauchyho podal bez užití či alespoň zmínky infinitesimálních veličin, nejsou ani náhodou evidentní, tj. není jasné, proč by na jejich základě měla věta o mezihodnotě platit.

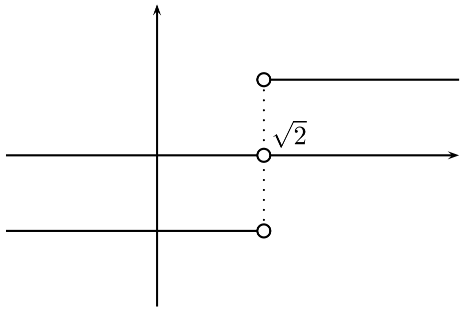
(2) Věta o mezihodnotě na jejich bázi ve skutečnosti neplatí, tj. neplatí obecně, ale pouze nad oborem veličin určité struktury.

Tvoří-li např. naše kontinuum výhradně racionální čísla, tj. eukleidovský obor splňující předpoklad obecné dělitelnosti, je funkce f definovaná jako

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{jestliže } x^2 \leq 2 \vee x \leq 0, \\ +1 & \text{jestliže } x^2 > 2 \wedge x > 0 \end{cases}$$

[73] Věta v tomto znění je vlastně speciálním případem věty, která říká, že spojitá funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ v něm nabývá libovolné hodnoty z intervalu určeného hodnotami $f(a)$ a $f(b)$. Obě věty, obecná i speciální, jsou si ovšem ekvivalentní.

dokazatelně spojitá v každém bodě číselné přímky. To nemá nic společného s názorem, ale s *pojmovou* skutečností, že změnu hodnot ze záporných na kladné nelze spojit s žádným konkrétním argumentem x coby okamžikem skoku, jak se to zdá sugerovat obrázek 1.29. V zakresleném



Obrázek 1.29: Spojitost na racionálním kontinuu

bodu přímky by příslušná funkce byla nespojitá, ale tento bod v oboru racionálních bodů chybí, neboť se (neformálně řečeno) jedná o iracionální číslo $\sqrt{2}$, k němuž se lze sice racionálními čísly přiblížit na libovolnou vzdálenost menší než je předem daná (racionální) mez, jejich rozdíl ale zůstane vždy pozitivní. Formálně to znamená tolik, že ne každá 'konvergující' posloupnost racionálních čísel musí konvergovat k racionálnímu číslu.

S přihlédnutím k tomuto faktu není vlastně Bolzanovým hlavním výkonem analytické odvození názorné samozřejmosti, ale především poukaz na to, že kontinuum, v němž mají platit určité postuláty, jako ten o mezihodnotě, musí mít určitou netriviální formu, především by se v něm neměla vyskytovat prázdná místa výše uvedeného typu, jinými slovy: každá 'konvergující' posloupnost by měla mít v daném oboru limitu. Namísto *interního důkazu*, tj. důkazu v rámci předem daných pravidel, zde tedy máme spíš *externí zdůvodnění* potenciálního rozhodnutí zavést reálná čísla určitým způsobem.

Původ moderních reálných čísel je tedy podstatně holisticko-pragmatický, což především znamená: neartikulovatelný na čistě názorné bázi. Na druhou stranu si povšimněme, že uvedené rozšíření racionálních čísel na reálná nemá analytický či abstraktní charakter prostého zobecnění proveditelnosti aritmetických operací, jako to šlo říci o číslech celých či racionálních ve vztahu k přirozeným či jako to půjde říci o číslech komplexních ve vztahu k číslům reálným. Preteoretický odkaz k zúplňování číselné přímky je tady podstatný.

Ani definice reálných čísel Cantorova, Dedekindova, Weierstrassova či Fregova střihu proto nemohou přes často proklamovanou konceptuální čistotu či nejvyšší možnou obecnost zapřít geometrický původ kontinua.

Ztráta této souvislosti, jak ji lze sledovat na pozvolné proměně Cantorovy teorie množin od jakési topologie reálné osy, tedy jistého druhu abstraktní analýzy, k nauce o nekonečnu, má pak za následek nový druh paradoxů, vyplývající z pojmové nedourčenosti, prázdnosti užitých rozlišení, jak je známe především díky hypotéze kontinua. Cantor také tyto případy nerozhodnutelných tvrzení právem považoval za podstatně vážnější otřes základů budované teorie nežli známé množinové či logické paradoxy, aniž by dokázal nahlédnout, že chyba se nejspíš stala již na počátku, v pokusu postavit analýzu na *čistě* pojmový základ. Je-li tomu tak, pak tuto chybu a osud Cantorovy teorie množin sdílí i Fregův a Dedekindův logicismus.

2 Struktura reálné osy

Zmínili jsme, že aritmetizace reálného čísla byla bodem, v němž došlo k uskutečnění Lagrangova a Weierstrassova plánu aritmetizace analýzy a zároveň byl zahájen plán nový, totiž její postavení na logický, případně množinově-teoretický základ. Šlo tedy o moment spojující a z hlediska vývoje základů aritmetiky centrální. Významné při tom bylo pozorování, že zmíněné nejasnosti v určení oboru reálných čísel a pojmech konvergence a limity spolu souvisejí.

První obrat v přístupu k problému uchopení reálného čísla lze nalézt v následující změně perspektivy: Neptáme se již, zda jisté úsečky, křivky či plochy nějakou veličinu *mají*, ale zda jim lze nějakou veličinu koherentně *připsat*. Východiskem nám tedy není pouze *praxe* geometrického měření, ale především *teorie* reálného čísla, tedy specifikace předmětného oboru, jenž je dostatečně široký na to, aby v něm otázky praktického měření našly teoretickou oporu. To klade zjevné nároky na míru obecnosti dané definice a vždy hrozí nebezpečí, že ve snaze uspokojit všechny praktické aspekty nezachytíme ani jeden. Začněme proto tím z nich, který se ukázal být jako zvláště nosný, totiž aproximovatelností veličin, jež chceme definovat, veličinami, jež definovány jsou.

Oproti minulým kapitolám musíme ovšem s ohledem na přehlednost užitých distinkcí značně utvrdit ve způsobu jejich prezentace, což zahájíme úmluvou, že se na studované obory předmětů (veličin, čísel atd.) nebudeme dívat jenom jako na pouhé množiny, ale množiny vybavené operacemi (funkcemi) a relacemi určitého typu. Racionální kontinuum je tedy např. čtveřice $\langle \mathsf{Q}, +, \times, < \rangle$ apod. Obecně hovoříme o struktuře $\langle M, f, g, \ldots, R, S, \ldots \rangle$ s nosičem M a na něm definovanými funkcemi f, g, ... a relacemi R, S, ...[1] Často k ní ale referujeme jen jako k M. Nebude-li řečeno jinak, pak v dalším textu hovoříme vždy o prvcích (bodech, veličinách, číslech) nějakého kontinua $\langle M, +, \times, < \rangle$.

[1] Tento způsob zápisu bude částečně odpovídat obvyklému zápisu interpretací formálního jazyka, jak jej ještě zmíníme v oddíle 3.9.

2.1 Fundamentální posloupnosti

Z názorně zdůvodněného vyčerpání obsahu křivky (např. kružnice) mnohoúhelníky ještě nevyplývá, že je dosažené číslo určeno jednoznačně či že se 'opomenutý' obsah pod zakřivením neukáže být přece jen významný. Jasné je, že nestačí disponovat řadou lepších a lepších odhadů 'čísla π', neboť ty ho nejsou samy o sobě s to specifikovat jednoznačně, nýbrž s řadou odhadů libovolné přesnosti, tedy posloupnostmi veličin blížících se k π přes všechny meze. Právě v tomto případě říkáme, že je π, resp. nějaké číslo b limitou posloupnosti $(a_1, a_2, \ldots)$, případně že k němu daná posloupnost konverguje. Zapíšeme-li danou posloupnost $(a_1, a_2, \ldots)$ obvyklým způsobem jako $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ nebo jako (a_n), když je množina indexů jednotlivých členů implicitně známa, vypadá řádná definice konvergence ve Weierstrassově stylu, již jsme dosud stále skloňovali, ale fakticky neformulovali, následovně:

> Posloupnost $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ prvků kontinua KONVERGUJE k prvku b kontinua tehdy a jen tehdy, jestliže platí
>
> $$(\forall m \in \mathsf{N})(\exists p \in \mathsf{N})(\forall q \in \mathsf{N}, q \geq p)\left(|b - a_q| < \frac{1}{m}\right).$$
>
> V tomto případě také říkáme, že je prvek b LIMITOU dané posloupnosti, a zapisujeme to jako $\lim(a_n)_{n\in\mathsf{N}} = b$.

Všimněme si, že proměnné m, n, p probíhají pouze přes přirozená čísla. Podle definice je možné ke každé míře přesnosti dané racionálním číslem $\frac{1}{m}$ najít člen a_p posloupnosti (a_n) takový, že se členy následující od čísla b odchylují méně než o hodnotu $\frac{1}{m}$. Obrazně to znamená, že se posloupnost kolem b libovolně zhušťuje, případně je s ním od jistého členu identická. Ve vztahu k předloženým definicím kontinua, jež splňovaly archimédovský axiom, lze dokázat, že je limita posloupnosti dána jednoznačně, tj. platí:

> Jestliže $\lim(a_n) = b$ a $\lim(a_n) = c$, pak také $b = c$.

Důkaz: Kdyby totiž $b \neq c$, pak pro $d = |c - b|$ vezmeme m takové, že $\frac{1}{m} \leq \frac{d}{2}$. Platí, že $(\frac{1}{m})$-okolí bodu b a $(\frac{1}{m})$-okolí bodu d jsou takto disjunktní, což je v rozporu s faktem, že v nich od určitého p mají ležet všechny členy posloupnosti s vyššími indexy. □

Posloupnost (a_n) tedy určuje svoji limitu jednoznačně a v tomto smyslu ji může 'definovat'. Tento způsob 'definování' jedné veličiny prostřednictvím veličin jiných ale očividně předpokládá, že nám ono 'definované' bylo již předtím nějak dáno. Číslo b vystupuje v předložené definici konvergence, mezi ním a jinými čísly je definována vzdálenost atd. Jedná se tedy jen o jeho alternativní popis či, jak později, konkrétně v oddíle 4.4, uvidíme, 'určitou deskripci', která již předpokládá nějaké předem dané 'kanonické pojmenování' příslušného čísla.

Způsob, jak uchopit neznámou veličinu pomocí veličin daných, aniž by přitom tato neznámá byla zmíněna, ukazuje již metoda vyčerpání kruhu, totiž v paralelním využití dolních a horních aproximací coby monotónních posloupností racionálních čísel. K tomu nejprve důležitou terminologickou poznámku:

> MONOTÓNNÍMI posloupnostmi rozumíme posloupnosti rostoucí a klesající, případně neklesající a nerostoucí. ROSTOUCÍ, resp. KLESAJÍCÍ je posloupnost $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$, pro niž platí $a_k < a_{k+1}$, resp. $a_k > a_{k+1}$ pro libovolné $k \in \mathsf{N}$. Nahradíme-li symbol $<$, resp. $>$, symbolem $\leq$, resp. $\geq$, získáme pojmy posloupnosti NEKLESAJÍCÍ, resp. NEROSTOUCÍ. S ohledem na ně se posloupnosti rostoucí a klesající nazývají RYZE MONOTÓNNÍ. Jelikož je, jak záhy uvidíme, posloupnost speciálním případem funkce, jsou uvedené pojmy definovány obecně jako vlastnost '$f(x) < f(y)$, resp. $f(x) > f(y)$, případně $f(x) \leq f(y)$, resp. $f(x) \geq f(y)$, kdykoli $x < y$', pro příslušně monotónní funkci f.

Vrátíme-li se k problému aproximací veličin spojených s kruhem, pak vedle rostoucí racionální posloupnosti (a_n), založené na vepsaných polygonech, uvažujeme ještě klesající posloupnost (b_n), odvozenou z polygonů opsaných. Nyní lze dokázat, že od určitého indexu p je vzájemná vzdálenost $|b_q - a_r|$ následujících $(q, r \geq p)$ členů obou posloupností menší nežli $\frac{1}{m}$ pro předem zvolené m. Obvod, případně obsah kruhu je tedy mezi oběma posloupnostmi nejen uzavřen, ale ve výše uvedeném smyslu i jednoznačně lokalizován, aniž by při tom byl jakkoli zmíněn. Díváme-li se na posloupnosti dolních a horních aproximací (a_n), (b_n) jako na posloupnost (c_n) jedinou, danou např. předpisem $c_{2k-1} = a_k$ a $c_{2k} = b_k$, pak vidíme, že uvedenou vlastnost jednoznačné lokalizace bodu splňuje nejen ona, ale i posloupnosti (a_n) a (b_n) dílčí, a můžeme definovat konvergenci coby (unární) vlastnost posloupností v kontrastu k dřívější definici binární relace konvergence posloupnosti a nějakého bodu takto:

> Posloupnost $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ prvků kontinua nazýváme KONCENTROVANOU, případně CAUCHYHO, jestliže platí:
>
> $$(\forall m \in \mathsf{N})(\exists p \in \mathsf{N})(\forall q, r \in \mathsf{N}, q, r \geq p)\left(|a_r - a_q| < \frac{1}{m}\right).$$

Názvy "koncentrovaná", resp. "Cauchyho", namísto "konvergující" volíme z pochopitelných důvodů terminologické jednoznačnosti, jejíž porušení by mohlo vést k záměně definicí konvergence a koncentrovanosti. Porovnáme-li je, vidíme takřka okamžitě, že platí:

Každá posloupnost prvků kontinua, která konverguje k nějakému bodu, je posloupnost koncentrovaná.

Důkaz: Máme nějaké m a chceme najít index p členu, od něhož dále jsou rozdíly členů posloupnosti omezeny hodnotou $\frac{1}{m}$. Pro hodnotu $2m$ existuje přitom podle definice konvergence posloupnosti k bodu b index r takový, že se další členy posloupnosti liší od b méně než o $\frac{1}{2m}$, jejich vzájemná vzdálenost tedy zůstává pod $\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}$. □

Zároveň tušíme, že v dosud uvažovaných kontinuích Q, P, E, K neplatí opačné tvrzení, totiž že každá koncentrovaná posloupnost prvků kontinua konverguje k nějakému jeho prvku. To odpovídá dříve zmíněné tezi, že ne každá konvergující posloupnost musí mít limitu. Za příklady koncentrovaných posloupností, které v žádném z oborů Q, P, E, K nekonvergují, stačí vzít racionální aproximaci čísla π, resp. délky půlkružnice o jednotkovém poloměru. Naším cílem je samozřejmě takové kontinuum, v němž tento defekt nenastává.

Způsob, jak dospět od kontinua racionálního ke kontinuu 'všech reálných čísel' tak říkaje jednou ranou, je nyní nasnadě. Stačí ho rozšířit o všechny chybějící limity koncentrovaných posloupností, tj. učinit ze všech koncentrovaných posloupností posloupnosti konvergující k nějakému prvku oboru. Toto rozšíření, jež je historicky spjato se jménem Cantorovým, se ve srovnání s metodami geometrické konstrukce (pravítkem a kružítkem) a algebraických pojmenování (kořeny polynomů) může zdát zprvu poněkud libovolné, tj. založené na pouhém přání či platonistově *fiat!* Jelikož ony chybějící prvky ale nejsou od počátku ničím jiným nežli momenty naší řeči o koncentrovaných posloupnostech, na něž v příslušném objektovém modu *per analogiam* přenášíme vlastnosti posloupností konvergujících, resp. čísel, která určují, je metodicky zcela oprávněné uchopit tyto neexistující limity, resp. řeč o nich, přímo jako řeč o koncentrovaných posloupnostech samotných, byť s jinými pravidly hry. Ke slovu potom přichází jazykově-analytická metoda konstituce předmětného oboru. Tato, jak již víme z příkladu Eudoxovy definice proporcí v oddíle 1.4, spočívá ve

(1) volbě jazykových reprezentací, resp. jmen předmětů konstituovaného oboru,

(2) specifikaci všech rovností mezi nimi, tj. stanovením kritéria identity,

(3) volbě predikátů a relací příslušného diskurzu, tedy v popisu jeho elementárních vět a jejich ohodnocení v souladu se základními sémantickými principy, které je samozřejmě ještě třeba specifikovat.

V případě reálných čísel uchopíme jednoduše výrazy "$\lim(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$" jako *jména* potenciálních předmětů i tehdy, když posloupnost $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ racionálních čísel racionálně nekonverguje, ale je pouze koncentrovaná. Tím je vyřízen bod (1). Bodu (2), tj. potřebě definovat IDENTITU CANTOROVA KONTINUA, vyhovíme takto:

$$\lim(a_n)_{n\in\mathsf{N}} = \lim(b_n)_{n\in\mathsf{N}} \rightleftharpoons \lim(a_n - b_n)_{n\in\mathsf{N}} = 0.$$

Výrazy "$\lim(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$" a "$\lim(b_n)_{n\in\mathsf{N}}$" tedy takto označují tentýž předmět tehdy a jen tehdy, jestliže posloupnost rozdílů jejich členů konverguje k nule. V tradiční terminologii to znamená, že se rozdíly obou posloupností stávají nekonečně malé, případně mizí. Všimněme si také, že definující strana ekvivalence pracuje s podstatně slabší podmínkou, než jsme dříve formulovali ve vztahu k dvojité posloupnosti dolních a horních odhadů čísla π, totiž že se od jistého členu liší pouze členy téhož indexu, nikoli členy všechny. To je dáno jednoduše tím, že nyní o posloupnostech (a_n), (b_n) předpokládáme, že jsou koncentrované, zatímco v dřívějším případě byla jejich koncentrovanost implikována.

Krokem (2), tedy ohodnocením rovností výše uvedenou definicí, je teprve ospravedlněno samostatné použití výrazů typu "$\lim(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$", které se původně mohly vyskytovat pouze v kontextech jako

$$\lim(a_n)_{n\in\mathsf{N}} = b,$$

kde "b" je již ustanovené označení dříve zavedeného čísla. Tak je tomu v pravé straně definice identity. K tomu, co je onou samostatností přesně míněno, se ještě dostaneme v kapitole 4 v souvislosti s Fregovou filosofií jazyka. Část (3) obnáší stanovení základních aritmetických operací, resp. relací, v první řadě tedy '$x + y = z$', '$x \times y = z$' a '$x < y$'. To je víceméně neproblematické, vyžaduje to pouze řadu dodatečného ověřování požadavků korektnosti. My proto bez dalšího zdůvodnění[2] stanovíme USPOŘÁDÁNÍ CANTOROVA KONTINUA jako:

$$\lim(a_n)_{n\in\mathsf{N}} < \lim(b_n)_{n\in\mathsf{N}} \rightleftharpoons$$
$$(\exists m, p \in \mathsf{N})(\forall q \in \mathsf{N}, q \geq p)\left((b_q - a_q) > \frac{1}{m}\right).$$

Všimněme si, že na rozdíl od definice rovnosti nelze v definici uspořádání napsat jednoduše

$$\lim(a_n)_{n\in\mathsf{N}} < \lim(b_n)_{n\in\mathsf{N}} \rightleftharpoons \lim(b_n - a_n)_{n\in\mathsf{N}} > 0,$$

neboť není zřejmé, že limitou příslušných diferencí je racionální číslo, tedy něco, pro co je vztah 'větší než' již definován. Mezi racionálními

[2] Čtenář může konzultovat příslušnou základní literaturu, např. Cohen & Ehrlich [1963].

čísly pravé strany definice, mezi nimiž již uspořádání definováno bylo, a reálnými čísly levé strany definice, pro něž je v ní uspořádání teprve zaváděno, existuje tedy kategoriální rozdíl a symbol $<$ je užíván víceznačně.

To platí samozřejmě i o operacích sčítání a násobení, resp. o číslovkách jako 1, 2 atd. coby současném označení čísel přirozených, celých, racionálních a reálných. V jakém smyslu je ale tato víceznačnost neškodná, tj. proč můžeme v praxi rezignovat na případné zavádění indexů $+_{\mathsf{N}}$, $+_{\mathsf{Q}}$ apod., není obtížné pochopit, třeba právě na studovaném vztahu čísel racionálních a reálných. Jelikož je konstantní posloupnost

$$(b, b, b, \ldots)$$

zcela triviálně posloupností koncentrovanou, lze tímto způsobem původní racionální čísla vnořit do oboru koncentrovaných posloupností racionálních čísel a prezentovat jej jako zamýšlené rozšíření racionálního kontinua. Tímto způsobem také definoval své kontinuum Cantor, s jediným rozdílem, že naše koncentrované posloupnosti nazýval POSLOUPNOSTMI FUNDAMENTÁLNÍMI. Označíme-li jejich celek jako C a ustanovíme-li SČÍTÁNÍ a NÁSOBENÍ jako:

$$\lim(a_n)_{n\in\mathsf{N}} + \lim(b_n)_{n\in\mathsf{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim(a_n + b_n)_{n\in\mathsf{N}},$$
$$\lim(a_n)_{n\in\mathsf{N}} \times \lim(b_n)_{n\in\mathsf{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim(a_n \times b_n)_{n\in\mathsf{N}},$$

pak systém $\langle \mathsf{C}, +, \times, < \rangle$ nazýváme CANTOROVÝM KONTINUEM. S ohledem na racionální aproximovatelnost veličin spjatých s kruhem není těžké nahlédnout, že platí $\mathsf{Q} \subset \mathsf{P} \subset \mathsf{E} \subset \mathsf{K} \subset \mathsf{C}$ ve výše uvedeném smyslu jistých vnoření jedněch systémů do systémů druhých. Pojem vnoření, případně pojem izomorfismu bude samozřejmě třeba ještě blíže specifikovat, což učiníme v oddíle 5.3.

2.2 Dedekindovy řezy

K dalšímu zkoumání strukturálních vlastností Cantorova kontinua neuškodí porovnat jeho ontologický *design*, tj. konkrétní volbu číselných reprezentantů, s jednou z jeho běžných a historicky spřízněných alternativ. Tou je definice Dedekindova. Toto srovnání je o to cennější, že se oba návrhy kýženého zúplnění racionálního kontinua přes jistou rovnocennost významně liší. Zúplnění Dedekindovo se totiž týká pouze užitého uspořádání, zatímco Cantor v definici fundamentální posloupnosti užívá podstatným způsobem metrických vlastností racionálního kontinua, tj. pojem vzdálenosti spjatý s operacemi sčítání, resp. násobení. Na první pohled může být ale na Cantorově způsobu zavedení reálných čísel zarážející, jak mnoho různých reprezentací jednoho a téhož čísla připouští. Číslo

π je nám např. dáno prostřednictvím dolních a horních aproximací, které mohou dále variovat, aniž by přestaly aproximovat totéž číslo. Obecně totiž platí, že změníme-li v posloupnostech (a_n), (b_n) pouze konečný počet členů, nezmění se pravdivost tvrzení $\lim(a_n) = \lim(b_n)$, tj. jedno a totéž číslo má vlastně nekonečně mnoho cantorovských reprezentací.

Dedekindův způsob zavedení reálných čísel v tomto (čistě extenzionálním) ohledu vypadá jako značné zjednodušení, vycházející z toho, že je-li a_p nějaký prvek dolní aproximace reálného čísla, tj. rostoucí koncentrované posloupnosti (a_n), mohou v takové aproximaci vystupovat i všechna čísla menší než a_p. Vezmeme-li nyní všechna takováto čísla pro libovolný člen posloupnosti neboli množinu všech racionálních čísel r takových, že pro nějaký index p platí $r < a_p$, symbolicky:

$$\{r \in \mathsf{Q} \mid (\exists p \in \mathsf{N})(r < a_p)\},$$

získáme tzv. DOLNÍ MNOŽINU, tj. množinu, která s každým svým prvkem obsahuje i všechny prvky menší, a současně levou část Dedekindova řezu. Ten je definován jako rozdělení všech čísel daného oboru, primárně tedy oboru Q všech racionálních čísel, na dvě části, či přesněji:

> DEDEKINDŮV ŘEZ (*Schnitt*, *cut*) na (totálně) uspořádaném oboru $\langle M, < \rangle$ je dvojice $[A, B]$ jeho podmnožin A, B takových, že platí následující podmínky:
>
> (1) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,
>
> (2) pro každé $a \in A$ a $b \in B$ platí $a < b$, a tedy i $A \cap B = \emptyset$,
>
> (3) $A \cup B = M$.

Podobně jako u koncentrovaných posloupností lze mezi řezy na racionálních číslech, tj. oboru $\langle \mathsf{Q}, < \rangle$, najít řezy takové, které nejsou v daném oboru ‘konvergující’. Nazveme-li prvek r uspořádané množiny $\langle M, < \rangle$, pro nějž platí:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)\,(a \leq r \leq b),$$

PRVKEM ŘEZOVÝM, pak to jednoduše znamená, že u některých řezů na $\langle \mathsf{Q}, < \rangle$ tento prvek neboli tzv. ŘEZOVÉ ČÍSLO (*Schnittzahl*) chybí, tj. mezi levou a pravou částí řezu se nachází jakási ‘mezera’. Příkladem takového řezu je již dříve užité rozdělení Q na části

$$A = \big\{r \in \mathsf{Q} \mid r^2 \leq 2 \vee r \leq 0\big\} \quad \text{a} \quad B = \big\{r \in \mathsf{Q} \mid r^2 > 2 \wedge r > 0\big\}.$$

Dedekind proto racionální přímku, či obecně všechny uspořádané obory, kde některé řezy nemají odpovídající řezové prvky, nazývá nespojitými.

Jeho klíčový spis, věnovaný tomuto tématu, se právě proto nazývá *Stetigkeit und irrationale Zahlen* [1872]. Čtenář nechť ale vezme na vědomí, že spojitostí, resp. nespojitostí je zde míněno něco jiného nežli dříve definovaným pojmem, totiž to, čemu se dnes říká (ne)úplnost oboru neboli právě (ne)existence řezových prvků dedekindovských řezů, případně limit koncentrovaných posloupností. Jelikož, jak jsme zmínili, požadavek na existenci řezových prvků v množině je spjat pouze s uspořádáním, zatímco Cantorova podmínka se vztahuje také k aritmetickým operacím, nezbývá nám než rozlišit mezi ÚPLNOSTÍ DEDEKINDOVSKOU a CANTOROVSKOU. První z nich, jak ještě ukážeme, je ekvivalentní tzv. úplnosti vůči uspořádání, vyjádřené ve větě o suprému. Nyní vysvětlíme, co je touto větou míněno.

Jelikož řezový prvek řezu $[A, B]$ na $\langle M, <\rangle$ musí *per definitionem* náležet jedné z částí A či B, je tvrzení jeho existence ekvivalentní tvrzení existence supréma části A a infima části B. Tyto obecně známé pojmy lze definovat ve třech krocích.

> Mějme (částečně) uspořádanou množinu $\langle M, <\rangle$ a její podmnožinu C. Pak (1) HORNÍ, resp. DOLNÍ MEZÍ množiny C v M nazveme libovolný prvek $a \in M$, pro nějž platí:
>
> $$(\forall c \in C)(c \leq a), \qquad \text{resp.} \qquad (\forall c \in C)(a \leq c).$$
>
> Všimněme si, že horní, resp. dolní mez množiny jí nemusí, ale může náležet. (2) NEJVĚTŠÍM, resp. NEJMENŠÍM PRVKEM množiny C nazveme takový prvek $a \in C$, pro který platí tatáž podmínka. Rozdíl spočívá v tom, že největší, resp. nejmenší prvek množiny této množině z definice náleží, a je v důsledku toho nejvýše jeden, pokud vůbec existuje. (3) SUPRÉMEM, resp. INFIMEM množiny C v M, symbolicky $\sup C$, resp. $\inf C$, nazveme nejmenší horní mez, resp. největší dolní mez množiny C v M. Všimněme si, že suprémum, resp. infimum množiny nemusí existovat a nemusí, ale může jí náležet.

S ohledem na potřeby dalšího výkladu dodáme ještě bod čtvrtý, v němž zavedeme

> (4) MAXIMÁLNÍ PRVEK či MAXIMUM množiny C, resp. MINIMÁLNÍ PRVEK či MINIMUM množiny C jako takový prvek $a \in C$, pro který platí:
>
> $$(\forall c \in C)\neg(c > a), \qquad \text{resp.} \qquad (\forall c \in C)\neg(a > c).$$
>
> Na rozdíl od největšího, resp. nejmenšího prvku není maximum ani minimum nutně určeno jednoznačně. Pokud tomu tak je, značíme je jako $\max C$, resp. $\min C$.

S ohledem na existenci a výskyt supréma a infima v části A, resp. B lze řezy na uspořádaných množinách rozdělit na čtyři základní typy, znázorněné v obrázku 2.1. V prvních dvou případech je suprémum množiny

Obrázek 2.1: Dedekindovy řezy

A zároveň infimem množiny B a *vice versa*, liší se jen svým náležením k jedné z nich. Tato odlišnost je z hlediska našeho záměru nepodstatná, významné je, že je řezem v obou případech určen jeden a týž řezový prvek. Proto považujeme obě rozdělení nosné množiny za identická ve stejném smyslu, v jakém jsme považovali za identické dvě koncentrované posloupnosti, jejichž rozdíly konvergovaly k nule. Toto je také (pro tento okamžik) jediná dvojznačnost dedekindovských reprezentací.

Případ třetí, tzv. skok (*Sprungstelle*), v němž se příslušné suprémum a infimum liší, můžeme z našich úvah vyloučit, pokud se zabýváme řezy na kontinuích. V nich s ohledem na jejich dělitelnost platí, že ke každým dvěma prvkům a, b takovým, že $a < b$, existuje prvek c takový, že $a < c < b$, např. $\frac{(a+b)}{2}$. O uspořádaných množinách, které mají tuto vlastnost a v nichž se tedy žádné skoky nevyskytují, říkáme, že jsou HUSTÉ (VZHLEDEM K USPOŘÁDÁNÍ).

Čtvrtým případem je konečně ona kritická mezera, která se v tradičních kontinuích vyskytuje a jejímž odstraněním chceme přejít k jejich finální — úplné — podobě. Abychom se ale nezapletli do obrazné řeči: Výskyt mezery znamená, že nejsme s to dolní množinu A řezu na $\langle M, < \rangle$ pro žádné $r \in M$ určit žádným z následujících způsobů:

$$A = \{x \in M \mid x < r\} \qquad \text{nebo} \qquad A = \{x \in M \mid x \leq r\}.$$

Totéž platí přirozeně *mutatis mutandis* o části B. Dedekindova cesta k příslušnému zúplnění je přitom stejná jako Cantorova, totiž identifikace chybějících, potažmo tedy všech řezových čísel v Q, se samotnými řezy. Výraz "řezové číslo" tak můžeme začít podobně jako výraz "limita" užívat i u řezů, které řezové číslo v Q nemají. Ke Q, resp. $\langle \mathsf{Q}, < \rangle$ se budou implicitně vztahovat všechny naše další úvahy týkající se řezů.

Rozšíření užití výrazu "lim (a_n)" pro libovolnou koncentrovanou posloupnost "(a_n)" odpovídá zavedení výrazu "$[[A, B]]$" ve významu zobecněného řezového čísla, kde $[A, B]$ je libovolný řez na Q. Platí, že dva výrazy "$[[A, B]]$" a "$[[C, D]]$" označují tentýž předmět (reálné číslo), jestliže se množina A od množiny C liší nanejvýš pozicí supréma. Tím je dáno kritérium IDENTITY DEDEKINDOVA KONTINUA:

$$[[A, B]] = [[C, D]] \rightleftharpoons \\ (A = C) \vee (A - \sup A = C) \vee (C - \sup C = A).$$

Všimněme si dále, že řez je vlastně jednoznačně určen již svojí levou částí, tedy dolní množinou, která je neprázdná a zároveň neobsahuje všechny prvky množiny, na níž je řezem. To je vlastně alternativní definice řezu, ukazující, proč se v *definiens* zmíněných definicí pravá část řezů nevyskytuje, případně vyskytovat nemusí. Toho si můžeme opět všimnout při zavedení USPOŘÁDÁNÍ DEDEKINDOVA KONTINUA jako

$$[[A, B]] < [[C, D]] \rightleftharpoons [[A, B]] \neq [[C, D]] \wedge A \subset C.$$

Stanovení aritmetických operací je rámcově jasné, i když v provedení nepříliš pohodlné. Zavedeme-li nejprve označení "$A + C$" pro množinu

$$\{a + c \mid a \in A \wedge c \in C\},$$

je definice SČÍTÁNÍ V DEDEKINDOVĚ KONTINUU relativně snadná:

$$[[A, B]] + [[C, D]] \stackrel{\text{def}}{=} [[A + C, (A \cup B) - (A + C)]].$$

Definici NÁSOBENÍ nelze podat takto přímočaře s ohledem na výskyt záporných prvků v příslušných dolních množinách. Obsahují-li množiny A, C daných řezů nezáporné prvky, pak definujeme jejich součin podobně jako součet, ovšem s poznámkou, že výraz "$A \times C$" označuje množinu

$$\{x \mid (\exists a \in A, a \geq 0)(\exists c \in C, c \geq 0)(x \leq a \times c)\}.$$

Ostatní případy převedeme na předchozí tak, že od řezu $[A, B]$, resp. $[C, D]$ s celozápornou množinou A, resp. C přejdeme změnou znamének jednotlivých bodů k inverznímu řezu $[-B, -A]$, resp. $[-D, -C]$, provedeme příslušné operace a eventuálně se opět vrátíme zpět, totiž tehdy, jestliže u jednoho z řezů změna polarity nebyla nutná, tj. jestliže reprezentoval nezáporné číslo. Opět je třeba ověřit korektnost této definice, tedy především její nezávislost na reprezentantech $[A, B]$ 'čísla' $[[A, B]]$, což dělat nebudeme.[3]

Kontinuum založené na řezech v Q nazývejme KONTINUEM DEDEKINDOVÝM a značme je D, resp. $\langle \mathsf{D}, +, \times, < \rangle$. Ekvivalenci Dedekindova a Cantorova návrhu a její podmínky probereme později, nyní zmiňme

[3] Viz třeba Deiser [2007].

otázku jejich odlišné motivace. Cantorova verze se zdá být spjata s racionální aproximaci poměrů a délek, tedy praxí měření. Dedekindova vykazuje zase společné rysy s Eudoxovou původní definicí (rovnosti) proporcí, a má tedy jistou pachuť umělosti. Na druhou stranu lze právě na této spřízněnosti pochopit jádro Eudoxova komplikovaného návrhu. Podle Eudoxovy definice jsou totiž veličiny A, B a C, D ve stejném poměru, jestliže pro každá dvě celá čísla m, n platí jedna z možností:

(1) $mB < nA$ a zároveň $mD < nC$,

(2) $mB = nA$ a zároveň $mD = nC$,

(3) $mB > nA$ a zároveň $mD > nC$.

Přepíšeme-li tyto podmínky do zlomkové notace, dostáváme:

(1) $\frac{m}{n} < \frac{A}{B}$ a zároveň $\frac{m}{n} < \frac{C}{D}$,

(2) $\frac{m}{n} = \frac{A}{B}$ a zároveň $\frac{m}{n} = \frac{C}{D}$,

(3) $\frac{m}{n} > \frac{A}{B}$ a zároveň $\frac{m}{n} > \frac{C}{D}$.

Okamžitě vidíme, že $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ zde vlastně fungují jako řezová čísla, přičemž definice pak vyjadřuje totožnost řezů, které tyto poměry v oboru racionálních čísel $\frac{m}{n}$ vytvářejí.

Přes tuto pozoruhodnou souvislost má podobnost Eudoxova, resp. Eukleidova kontinua E a Dedekindova kontinua D velkou trhlinu. Eudoxovy řezy, dělení racionálních čísel na dvě části, jsou totiž vázány na proporce $A : B$, $C : D$ *konstruovatelných* veličin A, B, C, D. To Eudoxovi umožňuje zachytit rovnost iracionalit, které jsou konstruovatelné pravítkem a kružítkem, nikoli však třeba $\sqrt[3]{2}$ či π. Dedekind se pokouší překonat toto omezení tím, že uvažuje jakékoli — tedy nejen konstruktivně definované — rozdělení oboru Q na dvě části. V tomto smyslu je jeho řešení úmyslně tím nejliberálnějším možným.

Přece je však, jak ještě mnohokráte zmíníme, tato liberálnost pouze relativní, neboť závisí na vágním pojmu ‘(pod)množiny’ a naivní řeči o *všech* podmnožinách daného nekonečného oboru, stejně jako závisí Cantorova definice na dosud nevyjasněném pojmu ‘posloupnosti’, resp. ‘funkce’. To se snaží do jisté míry napravit teorie množin, k níž dospěl Cantor v průběhu dekád, které následovaly a velkou měrou vlastně i doprovázely jeho modelování a výzkum reálné osy. Zcela vědomě se tomuto problému věnuje až Fregova logika coby nástroj analýzy aritmetických výrazových forem. Bude na nás, abychom v dalších kapitolách posoudili, do jaké míry v tom byly úspěšné. Nyní nás ovšem čeká důležitý exkurz na téma úplnosti Cantorova a Dedekindova kontinua, zahrnující i několik poznámek k jejich obvyklým reprezentacím.

2.3 Přímky a jejich úplnost

V základech pokusů o rozšíření racionálního kontinua byl přirozeně objev veličin, které racionální nejsou. Jednalo se zde vlastně o paradigmatické setkání teorie s praxí, totiž obvyklého měření, které systematickým dělením výchozí jednotky dospěje nakonec vždy k překrytí jejích dílů s měřenou veličinou na straně jedné, a zjištěním, že to v některých relativně jednoduchých případech není principiálně možné na straně druhé. Protiklad této praktické teze a její teoretické antiteze, navracející se znovu a znovu v nových krizích a antinomiích, byl motorem postupného rozšiřování původních definicí kontinua tu konstruktivně-geometrickým, tu algebraickým směrem. Jelikož se zdálo, že jsme dosud nedospěli ke kýženému cíli definitivního oboru všech reálných (měrných) čísel, vrátili jsme se v této kapitole zpátky na začátek k racionálním číslům v jejich roli zlepšujících se odhadů měřených veličin. Tato role je zjevně umožněna jejich hustotou, odpovídající původní definici kontinuity ve smyslu neomezené dělitelnosti jistých veličin v protikladu k diskrétnosti veličin jiných.

Z historického hlediska se ovšem nejedná o nijak překvapivý krok, neboť to byl právě antický objev nesouměřitelnosti, jenž odhalil jistou posloupnost přirozených, případně racionálních čísel, určující délku úsečky, resp. nějaký poměr délek, jako principiálně neterminující. Možnost uchopit reálná čísla jako nekonečné posloupnosti, případně množiny racionálních čísel, byla tedy ve hře takřka od samého počátku, a skutečnost, že tyto posloupnosti nemají v oboru racionálních čísel bod, k němuž by konvergovaly, samozřejmým poznatkem. Teprve reflexe na strukturální rysy oboru, podnícená konceptualizací tradičních geometrických pojmů spojitosti, konvergence a limity, dala však rozhodující impuls redefinici kontinua v Cantorově a Dedekindově stylu.

Tento historicky podmíněný rozdíl nám umožňuje také teoreticky rozdělit zkoumání kontinua na dvě části. První se bude týkat specificky uspořádaných množin, tzv. přímek (*lines*), jež Cantor nazýval lineárními množinami (*lineare Mannigfaltigkeiten*), druhý pak specifickým algebraickým oborům, Dedekindem pro jejich uzavřenost vůči klasickým operacím nazývaných tělesy (*Körper*, *field*). Oběma částem je společná značná míra abstrakce, která se nezabývá povahou jednotlivých prvků oboru, ale jejich strukturou. Právě na tomto abstraktním pozadí je smysl cantorovského, resp. dedekindovského rozšíření zřejmý: Jakmile ho máme, můžeme zapomenout na to, jak jsme k němu dospěli, a chovat se k jeho prvkům jako k atomům, tj. nechat stranou problém, jak může být předmět číslem a zároveň množinou, resp. posloupností jiných čísel. Začněme teorií přímek.

> PŘÍMKOU nazýváme (totálně) uspořádanou množinu $\langle A, < \rangle$, která je hustá (vzhledem k $<$) a nemá největší a nejmenší prvek. Prvky přímky se nazývají body.

Zavedeme-li pojem OTEVŘENÉHO INTERVALU uspořádané množiny jakožto její podmnožiny jednoho z tvarů

$$(-\infty, a) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x < a\},$$
$$(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid a < x < b\},$$
$$(a, +\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid a < x\},$$

pak přímka je uspořádaná množina, v níž je každý otevřený interval neprázdný. Poznamenejme, že výrazy $-\infty$, $+\infty$ jsou zatím pouze částí zavedené notace, nemají tedy žádný samostatný význam. Není obtížné nahlédnout, že obor $(\mathsf{Q}, <)$ je přímkou.

V závěru minulé kapitoly jsme zmínili, že Q postrádá jednu z žádoucích vlastností obvykle spojovaných s kontinuem, totiž platnost věty o mezihodnotě pro spojité funkce. Zároveň jsme naznačili, že tato okolnost souvisí s tvrzením známým jako VĚTA O SUPRÉMU:

> Shora omezená neprázdná podmnožina uspořádané množiny $\langle A, < \rangle$, tj. neprázdná podmnožina, k níž v A existuje horní mez, má v A suprémum.

Jelikož se zde podobně jako v podmínce dedekindovské úplnosti vztahujeme k uspořádání daného oboru, je nasnadě domněnka, že se ve všech třech případech jedná o ekvivalentní vlastnosti přímky. Tak tomu skutečně je, i když je třeba vysvětlit, jak v definici spojitosti, která ve větě o mezihodnotě figuruje, eliminovat odkaz ke vzdálenosti, která ve větě o suprému chybí.

Zde je podstatné, že nám v definici spojitosti, jak jsme ji poloformálně podali v oddíle 1.11, stačilo uvažovat body v blízkosti zkoumaného bodu a, aniž bychom specifikovali, 'jak blízko' se nacházejí, tj. že můžeme namísto α-okolí bodu a operovat pouze jeho OKOLÍM. To už je definovatelné jenom s odkazem na relaci $<$. V moderní terminologii bychom řekli, že máme co do činění s metrickými a topologickými vlastnostmi daného oboru a že spojitost je uchopitelná jako vlastnost topologická. Okolím bodu a, symbolicky $U(a)$, uspořádané množiny $\langle A, < \rangle$ budeme proto nyní rozumět každý otevřený interval, jenž obsahuje a. Definujeme:

> Funkce f z uspořádané množiny $\langle A, < \rangle$ do uspořádané množiny $\langle B, < \rangle$ se nazývá SPOJITÁ V BODĚ $a \in A$, jestliže pro každé okolí $J(f(a))$ existuje okolí $I(a)$ takové, že $f[I(a)] \subseteq J(f(a))$.

Symbolem "$f[C]$" míníme v jistém předstihu množinu všech obrazů bodů z C, jak to zavedeme důsledně v oddíle 2.6. Zcela analogicky se potom funkce nazývá BODOVĚ SPOJITÁ na intervalu, jestliže je spojitá v každém jeho bodě. VĚTA O MEZIHODNOTĚ v obecné verzi pak vypadá takto:

> Pro každou spojitou funkci z uspořádané množiny $\langle A, < \rangle$ do uspořádané množiny $\langle B, < \rangle$ platí, že pro každé $b \in B$ takové, že $f(a_1) < b < f(a_2)$, existuje $a \in A$ takové, že $f(a) = b$.

Nyní již můžeme dokázat kýženou ekvivalenci vět o suprému a mezihodnotě:

> Mějme přímky $\langle A, < \rangle$, $\langle B, < \rangle$. Pak v $\langle A, < \rangle$ platí věta o suprému tehdy a jen tehdy, jestliže pro každou spojitou funkci z $\langle A, < \rangle$ do $\langle B, < \rangle$ platí věta o mezihodnotě.

Důkaz: V oddíle 1.12 jsme ukázali, jak zdůvodnit jednu část, totiž že na přímce, pro niž neplatí věta o suprému, neplatí ani věta o mezihodnotě. Nyní zbývá dokázat opačný směr. Mějme tedy spojitou funkci z $\langle A, < \rangle$ do $\langle B, < \rangle$ a bod $b \in B$ ležící mezi $f(a_1)$ a $f(a_2)$. Uvažme množinu $C = \{x \in A \mid f(x) < b\}$ a bod $a = \sup C$. Nechť platí $f(a) < b$. Vezměme okolí $J(f(a))$ zprava určené nějakým bodem c takovým, že $f(a) < c < b$. Ze spojitosti existuje okolí $I(a)$ takové, že $f[I(a)] \subseteq J(f(a))$, což znamená, že pro všechny prvky $x \in I(a)$ platí $f(x) < b$. Pak ale $I(a) \subseteq C$, což znamená, že $a \neq \sup C$. Spor. Pro případ $b < f(a)$ vede analogická úvaha k závěru, že $I(a) \cap C = \emptyset$, což rovněž vylučuje předpoklad $a = \sup C$. Zbývá možnost $f(a) = b$, kterou jsme chtěli dokázat. □

Uspořádanou množinu nyní nazveme ÚPLNOU VŮČI USPOŘÁDÁNÍ, jestliže splňuje větu o suprému. Pokud je to z kontextu jasné, hovoříme prostě o úplnosti. Nyní zbývá dokázat úplnost dedekindovského kontinua.

Ve skutečnosti je jeho konstrukce standardním prostředkem zúplnění neúplných množin a proces přidání chybějících řezových čísel terminuje již v prvním kroku jeho aplikace na racionální kontinuum, tj. poté již nevznikají nové mezery, tedy potřeba další zúplňující iterace. Zdá se, že si Cantor na rozdíl od Dedekinda tohoto aspektu svého typu zúplnění nevšiml, i když na druhou stranu platí, že ve zcela obecném případě nemusí jít u zúplnění Cantorova typu vše tak hladce jako u Dedekinda. Jeho fundamentální posloupnosti jsou totiž indexovány přirozenými čísly a ve vztahu k některým uspořádaným množinám tak eventuálně příliš 'krátké' na to, aby mohly hned napoprvé zacelit každou mezeru, která se v nich vyskytne. To ale předbíháme jednak s ohledem na otázku porovnávání 'délky' nekonečných množin, jednak je pro nás tato kapitola analýzy již příliš abstraktní.[4]

[4] Něco detailů lze najít např. in Truss [1997, s. 136].

Jistou míru abstrakce nicméně podržíme i nyní, když naznačíme ideu VĚTY O MINIMÁLNÍM ZÚPLNĚNÍ, jejímž bude přechod od $\langle \mathsf{Q}, < \rangle$ k Dedekindovým reálným číslům konkrétním případem:

> Uspořádanou množinu $\langle A, < \rangle$ lze rozšířit na takovou úplnou uspořádanou množinu $\langle A', < \rangle$, jejíž žádná vlastní podmnožina obsahující A úplná není.

Důkaz: Konstrukce pomocí řezů je zde výhodná právě pro svoji reprezentační jednoduchost, kterou ještě zdokonalíme tím, že definujeme REDUKOVANÝ ŘEZ na A jako (1) vlastní dolní podmnožinu A, která je neprázdná, nemá-li A nejmenší prvek,[5] a která (2) obsahuje své suprémum pouze tehdy, když má její doplněk nejmenší prvek. Množinu A' definujeme nyní podle očekávání jako množinu všech redukovaných řezů v A s uspořádáním $<$ odpovídajícím inkluzi neboli pro dva redukované řezy B, C platí:

$$B < C \rightleftharpoons B \subset C.$$

To je *mutatis mutandis* naše stará definice uspořádání řezů. Množina $\langle A', < \rangle$ je zjevně (totálně) uspořádaná. Nyní jde o její úplnost. Dokážeme, že platí věta o suprému. Nejprve zaveďme standardní operaci SJEDNOCENÍ množiny (množin) R jako

$$\bigcup R \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid (\exists z \in R)(x \in z)\},$$

tj. jde o množinu všech prvků prvků z R. Za R vezměme nyní nějakou shora omezenou podmnožinu množiny A' redukovaných řezů. Lze snadno nahlédnout, že se v případě $\bigcup R$ jedná (1) opět o redukovaný řez, jenž je (2) horní mezí všech redukovaných řezů z R, (3) a to horní mezí nejmenší, neboli suprémum. Tím jsme hotovi s úplností.

V jakém smyslu je $\langle A', < \rangle$ rozšířením $\langle A, < \rangle$, jsme naznačili dříve, totiž díky identifikaci prvků z A s jistými prvky z A'. Tato identifikace je nějaká funkce f, která oboustranně zachovává uspořádání neboli splňuje podmínku: $a < b$ tehdy a jen tehdy, když $f(a) < f(b)$, pro $a, b \in A$. Funkce této vlastnosti se nazývá ‘vnoření’ A do A' a její obecnou definici podáme v oddíle 5.3. Konkrétní implementace je nasnadě: jednoduše přiřadíme každému prvku $a \in A$ dolní množinu

$$A_{<a} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x < a\},$$

tedy (redukovaný) řez tímto prvkem určený. Analogicky budeme užívat značení $A_{\leq a} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \leq a\}$. Skrze toto zobrazení, tj. $f(a) = A_{<a}$,

[5] Již v původní obecné definici jsme mohli připustit prázdnost dolní, resp. horní množiny řezu na množině A v případě, že má tato nejmenší, resp. největší prvek. Není to ale obvyklé, proto dáváme přednost takovýmto *ad hoc* úpravám.

resp. obraz $f[A]$, můžeme nyní chápat A jako podmnožinu A'. Tato konvence se také použije v důkazu minimality rozšíření, v němž pro libovolnou úplnou množinu $X \subseteq A'$ takovou, že $A \subseteq X$, ukážeme, že platí $X = A'$.

Vezměme libovolný prvek $Z \in A'$, tedy nějaký redukovaný řez v A. Je-li Z prázdná, musí mít A nejmenší prvek x a platí $f(x) = Z \in f[A] = A$ (viz předchozí dohoda), a tedy $Z \in X$. Má-li množina Z největší prvek x, má její doplněk nejmenší prvek y a platí obdobně $f(y) = Z \in X$. Můžeme tedy předpokládat, že je Z neprázdná a nemá největší prvek. Jelikož se jedná o shora omezenou neprázdnou množinu prvků z A, tedy skrze uvedené vnoření také prvků z X, musí mít v X suprémum W. Platí tedy mj. $Z \subseteq W$. Pokud $Z \neq W$, pak existuje prvek $w \in W - Z$, který je v A horní mezí Z. Jelikož $f(w) \in X$, platí $f(w) < W$, a W tak nemůže být suprémem Z. Spor. Platí tedy $Z = W$, ergo $Z \in X$. Úhrnem je každý prvek A' prvkem X, tedy $X = A'$. $\square$

Jelikož jsme zatím stihli rozlišit tři různé typy úplnosti množiny, cantorovskou, dedekindovskou a vůči uspořádání, podívejme se ještě jednou, co jsme o tomto společném pojmu vlastně dokázali.

Uspořádanou množinu umíme pomocí řezů rozšířit na uspořádanou množinu, pro niž platí věta o suprému. To speciálně znamená, že je-li onou výchozí množinou racionální přímka $\langle \mathsf{Q}, < \rangle$, dospíváme k přímce $\langle \mathsf{D}, < \rangle$, tj. uspořádané bázi Dedekindova kontinua, a dokazujeme o ní, že je úplná vůči uspořádání. Důkaz toho, že je úplná dedekindovsky, tj. že každý řez v $\langle \mathsf{D}, < \rangle$ má tamtéž řezové číslo, je neproblematický, resp. obě podmínky jsou triviálně ekvivalentní. Každopádně je třeba pečlivě rozlišovat mezi dedekindovským (způsobem) rozšíření a dedekindovskou úplností, která samozřejmě může platit i pro jiné typy zúplnění, např. pro to cantorovské.

K tomu, abychom vůbec mohli prezentovat myšlenku minimálního zúplnění v Cantorově duchu, případně dokázat očekávanou ekvivalenci zmíněných variant úplnosti, potřebujeme nejprve přejít od přímek k tzv. tělesům.[6] Nežli tak učiníme, věnujme se stručně ještě jedné z nejmarkantnějších odlišností obou konstrukcí, totiž okolnosti, že ve srovnání s konstrukcí Dedekindovou operuje konstrukce Cantorova s příliš mnoha (extenzionálními) reprezentacemi téhož. Idea kanonického zápisu reálných čísel staví ovšem právě na myšlence, jak vybrat z těchto reprezentací, tj. koncentrovaných posloupností, jednu, která by byla jakousi obdobou našeho redukovaného řezu. Různým pokusům na toto téma, ale především jejich teoretickému pozadí, se budeme věnovat v dalším oddíle.

[6] Sama cantorovská úplnost je sice definovatelná na mnohem obecnější bázi, v rámci tzv. metrických prostorů, o čemž se stručně zmíníme v oddíle 5.12, tento rámec však neumožňuje srovnání s úplností dedekindovskou, o něž nám nyní jde.

2.4 Kanonické reprezentace kontinua

Moderní teorie kontinua jsou založeny na pozorování, že obory tradičně za kontinua považované vykazují určitý strukturální deficit, neúplnost, a sice vzhledem ke koncentrovaným posloupnostem a řezům jejich prvků. Snažili jsme se zdůraznit, že řeč *o* chybějících limitách či řezových číslech je zprvu jenom pohodlným opisem faktu, že některé koncentrované posloupnosti v daném oboru nekonvergují a některé dolní množiny řezů nemají suprémum, podobně jako byla řeč o nekonečně malých veličinách zkratkou za okolnost konvergence nějaké posloupnosti k nule apod. Na rozdíl od infinitesimálií lze ale v případě limit a řezových čísel provést takovou revizi původního oboru, v níž nebude daný opis zapotřebí, protože všechny jeho koncentrované posloupnosti limitu mají a všem řezům odpovídá řezové číslo. Popíšeme-li tuto úpravu jakožto zacelení stávajících mezer, pak je zřejmé, odkud brát zacelující materiál, neboť příslušné mezery jsou od počátku definovány právě skrze nekonvergující koncentrované posloupnosti, resp. řezy bez řezových čísel, a jsou tedy s těmito posloupnostmi, resp. řezy identické ve výše uvedeném smyslu dvou odlišných vyjádření téhož.

Uchopení oboru koncentrovaných posloupností racionálních čísel jakožto oboru reálných čísel ve stylu výše popsané předmětné konstituce je ovšem spjato s tahem, jenž nemusí být zprvu zcela průhledný, a tím je prohlášení některých posloupností za reprezentanty téhož čísla neboli stanovení kritérií rovnosti mezi jejich jmény. Ve skutečnosti je tento krok klíčovým pro pochopení celého procesu předmětné konstituce, právě proto, že se v něm děje něco na první pohled nemožného, totiž označení *různého za stejné* jako ostatně v každém tvrzení identity $M = N$ dvou odlišných výrazů M, N. Námitka, že větou $M = N$ přeci není tvrzena rovnost dvou očividně odlišných výrazů, ale těmito výrazy označovaných předmětů, přehlíží, že 'označovaný předmět' je kýženým výsledkem celé konstituce, a zapřahá tedy vůz před koně. Pointa celého procesu přitom nespočívá právě v ničem jiném nežli ve vytvoření takového diskurzu, v němž se z uvedeného čtení věty $M = N$ stane tautologie. Položením $M = N$ tedy manifestujeme rozhodnutí užívat dané výrazy jako jména téhož, a to podle návodu daného příslušnými kritérii identity.

Aplikujeme-li toto obecné pozorování, jemuž věnujeme podstatnou část kapitoly 4, na náš případ, je obor koncentrovaných posloupností prvků nějakého oboru dán jednak definicí koncentrovanosti, jednak kritériem

$$(a_n)_{n\in\mathsf{N}} = (b_n)_{n\in\mathsf{N}} \rightleftharpoons (\forall n \in \mathsf{N})(a_n = b_n),$$

vymezujícím, kdy jsou dva výrazy "$(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$", "$(b_n)_{n\in\mathsf{N}}$" považovány za jména téže posloupnosti, neboli co je to POSLOUPNOST. Podle tohoto vymezení označují první dva ze tří vzájemně různých výrazů

$(2n)_{n\in\mathsf{N}}$ $\qquad$ $(n+n)_{n\in\mathsf{N}}$ $\qquad$ $(3n)_{n\in\mathsf{N}}$

tutéž posloupnost, poslední dva posloupnosti různé. Všimněme si, že kromě uvedených výrazů (jmen) a daného kritéria identity zde není nic třetího, žádné abstraktní předměty, posloupnosti *per se*, ale nanejvýš obrat "posloupnost $2n$" nebo zápis "$(2n)_{n\in\mathsf{N}}$". Právě jejich prostřednictvím poukazujeme ke změně užití výrazu ve smyslu platnosti jiných identit, např.

posloupnost $2n$ = posloupnost $n+n$

v protikladu k

výraz $2n \neq$ výraz $n+n$,

což z příslušného obratu ("posloupnost", "výraz") činí vnější znak prováděné abstrakce. Ta má přitom od počátku striktně jazykový, neontologický charakter, proto o ní ve vědomém odlišení od tradičních psychologicko-platonizujících pojetí mluvíme jako o abstrakci logické. Její bází je přechod od ekvivalence mezi původními, (relativně) *konkrétními* předměty k rovnosti předmětů nových, (relativně) *abstraktních*, přičemž předmětem rozumíme vždy výraz plus kritérium identity vázané na nějaký větný kontext, jinými slovy: každý předmět je vlastně již vždy výsledkem nějaké abstrakce.

Konkrétní aplikaci metody logické abstrakce jsme již několikráte zažili, naposledy v případě oboru posloupností. Východiskem byly výrazy jako $2n$, $n+n$, relací ekvivalence totožnost hodnot na totožných indexech. Možná není nemístné zopakovat, že relace R, definovaná na oboru M, se nazývá EKVIVALENCÍ, jestliže platí

(1) $(\forall x \in M)R(x,x)$,

(2) $(\forall x,y \in M)[R(x,y) \to R(y,x)]$,

(3) $(\forall x,y,z \in M)[R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)]$,

tj. je-li to po řadě relace (1) reflexivní, (2) SYMETRICKÁ a (3) tranzitivní. Tyto vlastnosti uvažovaná relace totožnosti hodnot splňuje. Dalším krokem procesu abstrakce je přechod k rovnosti, tedy od větné formy $R(a,b)$ k $a=b$, jak jsme jej pravidelně prováděli v uváděných definicích reálných čísel. Nové užití původních jmen zpravidla podtrhujeme i symbolicky pomocí tzv. abstraktoru, tj. nepíšeme jen "$a=b$", ale "$A(a)=A(b)$".

V naší poslední definici abstrakcí, tj. definici posloupnosti, reprezentují abstraktor závorky a indexová množina. V Cantorově definici se pak podobně jako zde výraz "$(\frac{1}{n})_{n\in\mathsf{N}}$" k výrazu "$\frac{1}{n}$" chová výraz "$\lim(\frac{1}{n})_{n\in\mathsf{N}}$" k výrazu "$(\frac{1}{n})_{n\in\mathsf{N}}$". Výraz "$\lim(\frac{1}{n})_{n\in\mathsf{N}}$" tedy v jistém smyslu reprezentuje všechny (koncentrované) posloupnosti ekvivalentní té, na niž je abstraktor lim aplikován. V tomto smyslu musíme rozumět obvyklému ztotožnění abstraktního předmětu $A(a)$ s množinou všech předmětů, které jsou s a v dané relaci R ekvivalence, neboli tzv. TŘÍDĚ EKVIVALENCE:

$$[a]_R \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid R(x,a)\}.$$

Soubor všech tříd ekvivalence definované na nějaké množině M dává dohromady tzv. KVOCIENT množiny M podle relace R, neboli

$$M/R \stackrel{\text{def}}{=} \{[a]_R \mid a \in M\}.$$

Jeho prvky tvoří ÚPLNÝ ROZKLAD množiny M, neboť každý z prvků M je v některém z prvků M/R, a to právě v jednom, jinými slovy: jednotlivé třídy ekvivalence jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocení dá dohromady celou M.

Celý tento výklad, zejména uchopení abstraktních předmětů jakožto množin předmětů konkrétních, ještě zopakujeme a podrobíme důkladné revizi v kapitole 4. Momentálně je pro nás významné, že konstrukce jako je Cantorova či Dedekindova neztotožňují reálná čísla přímo s posloupnostmi či řezy, ale s jistými jejich ekvivalenčními třídami. V případě řezů má příslušná třída nejvýše dva prvky, totiž tehdy, když pro daný řez v původním oboru existuje příslušné řezové číslo, či podrobněji: IDENTITA ŘEZU

$$[A,B] = [C,D] \rightleftharpoons A = C \wedge B = D$$

je definována jako speciální případ IDENTITY USPOŘÁDANÉ n-TICE

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \rightleftharpoons a_1 = b_1 \wedge \cdots \wedge a_n = b_n.$$

Příslušná třída ekvivalence $[[A,B]]$, tj. řez dedekindovský coby představitel reálného čísla, obsahuje vždy řez $[A,B]$ samotný a případně také jeho variantu se suprémem v opačné části, jak to odpovídá dříve formulovanému kritériu identity dedekindovského kontinua. V definici redukovaného řezu jsme jednu z těchto možností zvolili za kanonickou, tj. reprezentující příslušnou třídu ve výrazu "$[[A,B]]$". Analogicky dospíváme k racionálnímu číslu $\frac{a}{b}$ jako všem dvojicím $\langle c,d \rangle$ celých čísel, pro něž platí $ad = bc$. Za reprezentanta se zpravidla volí dvojice nesoudělná. Obvyklé zápisy reálných čísel ve formě nekonečných desetinných rozvojů se o podobné zjednodušení pokouší v oboru koncentrovaných posloupností.

Začneme-li obecněji, pak p-ADICKOU REPREZENTACÍ reálného čísla x, pro $p \geq 2$ přirozené, nazýváme jeho zápis ve formě $x = \pm n, a_1a_2a_3\ldots$, v níž jsou všechna užitá čísla z N_0, a platí $0 \leq a_i < p$ a

$$x = \pm n, a_1a_2a_3 \ldots \stackrel{\text{def}}{=} \pm\left(n + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_3}{p^3} + \cdots\right).$$

Nekonečný součet na pravé straně je vlastně také zkratkou, kterou lze obecně vysvětlit následovně: Budiž $(b_n)_{n\in\mathsf{N}}$ nějaká posloupnost čísel, pak n-tým částečným součtem posloupnosti nazýváme číslo

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \stackrel{\text{def}}{=} b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Posloupnost částečných součtů posloupnosti $(b_n)_{n\in\mathsf{N}}$ nazýváme její ŘADOU a obvykle značíme jako "$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$". Tento výraz, případně výraz "$\sum_{i=1}^{\infty} b_i$", také označuje limitu dané řady, tj.

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} b_i \stackrel{\text{def}}{=} \lim(\sum_{i=1}^{n} b_i)_{n\in\mathsf{N}},$$

pokud ovšem tato limita existuje! To v našem případě nastává tehdy, je-li daná posloupnost částečných součtů koncentrovaná, což prokazatelně platí pro libovolný p-adický zápis reálného čísla, neboť opakovaným dělením intervalu na p částí se v archimédovském oboru, jako je Q, můžeme dostat pod libovolnou racionální mez. DEKADICKÝ ZÁPIS je jednoduše p-adický zápis pro $p = 10$. My budeme ještě využívat zápis BINÁRNÍ a TERNÁRNÍ pro $p = 2$, resp. 3.

Z řečeného je zřejmé, že díky koncentrovanosti libovolného p-adického rozvoje reprezentuje každý takový, tedy speciálně i dekadický zápis nějakou třídu ekvivalence koncentrovaných posloupností, tedy nějaké cantorovské číslo. Úmyslem kanonické notace samozřejmě je, aby tato korespondence byla co nejúspornější, tedy aby naopak každou třídu ekvivalence reprezentoval pouze jediný dekadický zápis. Tak tomu bohužel není, neboť řady

$$\pm n, a_1 \ldots a_k 000 \ldots \quad \text{a} \quad \pm n, a_1 \ldots (a_k - 1)999 \ldots,$$

kde $a_k > 0$, a samozřejmě také $\pm n, 000 \ldots$ a $\pm(n-1), 999 \ldots$ pro $n > 0$, jsou si rovny ve smyslu výše uvedeného kritéria identity, tj. reprezentují totéž reálné číslo. Tentýž fenomén se vyskytuje u všech p-adických zápisů, jednoduše proto, že k místům zvoleného dělení se lze dostat buď přímo, tj. konstantně od určitého stupně rozlišení $\frac{1}{p^k}$, nebo monotónním odhadem zleva.

Nazveme-li rozvoj, jenž od určitého místa pokračuje samými nulami, TRIVIÁLNĚ KONČÍCÍM, pak můžeme na Cantorovy fundamentální posloupnosti aplikovat stejný trik jako na dedekindovské řezy v definici redukovaného řezu, tj. dodatečně vyloučit triviálně končící rozvoje z oboru kanonických reprezentací. To se ukáže být žádoucí při mnoha důkazech v teorii množin. U nuly je pak ovšem třeba speciálně stanovit kanonický (p-adický) rozvoj jako $0, 000 \ldots$.

Z hlediska dosavadního výkladu je pozoruhodné, že velmi elegantní způsob zápisu, jejž není zapotřebí tolik přistřihávat, nabízí staropythagorejská *anthyfairesis*. Na začátku jsme zmínili, že Řekové použili *anthyfairetický* výraz, tedy výsledek Eukleidova algoritmu, jako kritérium identity dvou proporcí, u nichž ovšem předpokládali souměřitelnost členů. Objev poměrů iracionálních veličin se rovnal postřehu, že *anthyfairetický* proces vzájemného odečítání obecně nekončí, vede tedy v mnoha případech k nekonečné posloupnosti přirozených čísel. Ta se zjevně Řekům nezdála být jako kritérium identity dost vhodná, a přešli proto ke geometrické definici Eudoxově. Jelikož její vazbu na pojem konstruovatelné veličiny odstranila již liberalizace Dedekindova, nečiní nám z dnešního pohledu návrat k původnímu pythagorejskému způsobu definování žádné (nové) problémy. Prozkoumejme tedy tuto cestu.

V první fázi přiberme ke konečným *anthyfairetickým* reprezentacím také nekonečné posloupnosti, které jsou ale spjaty s nějakým konstrukčním předpisem, tj. pravidlem, které nám dovolí vypočítat každý člen posloupnosti v konečně mnoha krocích. V protikladu k rozšířením reálných čísel na P, E a K tak získáme kromě $[1, 2, 2, 2, \ldots]$ pro $\sqrt{2}$ či $[1, 1, 1, \ldots]$ pro $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ také reprezentaci $[3, 7, 15, 1, 292, \ldots]$ pro číslo π; evidentně se tedy jedná o rozšíření. V této fázi sice pracujeme s nekonečnými posloupnostmi, ty jsou ale z definice konečně popsatelné či pojmenovatelné, totiž právě příslušným konstrukčním předpisem. V druhé fázi abstrahujeme i od tohoto předpisu a za reprezentanta reálných čísel uznáme libovolnou posloupnost $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ přirozených čísel (s výjimkou a_1 odlišných od nuly), kde ony tři tečky "…" nemusí představovat žádné následovatelné pravidlo. Právě tento krok odpovídá Dedekindově liberalizaci Eudoxovy konstruktivní definice, tj. teorii řezů na jedné straně a Dirichletovu zobecnění pojmu funkce coby libovolného jednoznačného přiřazení prvků prvkům na straně druhé.

Zobecněná *anthyfairesis* je tedy posloupnost $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ přirozených čísel s výjimkou a_1 odlišných od nuly (všimněme si: všech přirozených čísel, tj. nejen přirozených čísel z nějakého omezeného intervalu) taková, že posloupnost

$$[a_1],\ [a_1, a_2],\ [a_1, a_2, a_3],\ \ldots$$

řetězových zlomků je posloupností koncentrovanou, již lze eventuálně 'zapsat' ve formě NEKONEČNÉHO ŘETĚZOVÉHO ZLOMKU jako:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

Z toho, co jsme zmínili o uspořádání řetězových zlomků v oddíle 1.4, je zřejmé, že na rozdíl od p-adických aproximací, které jsou vůči určovanému reálnému číslu monotónní (neklesající), posloupnost $[a_1]$, $[a_1, a_2]$, $[a_1, a_2, a_3]$, … *anthyfairetických* odhadů kolem čísla $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ osciluje.

Ve srovnání s p-adickou reprezentací má *anthyfairetická* především tu výhodu, že je v nekonečných případech zcela jednoznačná. Konečný případ kazí výjimka

$$[b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n, 1] = [b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n + 1],$$

kterou lze ale plně připsat na vrub až současnému abstraktně-algebraickému popisu problematiky, neboť v původním algoritmickém čtení nepřichází odpověď $[b_1, b_2, \ldots, b_n, 1]$ automaticky v úvahu: každý člen b_k je záznamem toho, kolikrát se poslední zbytek vejde do předchozího, poslední jednotka by tak znamenala, že se poslední zbytek vejde do předposledního celý, a byl tedy pouze zopakován. *Anthyfairetická* reprezentace nám dále dovoluje přehledně rozlišit čísla racionální od iracionálních. Prvním z nich totiž odpovídají vždy posloupnosti konečné, druhým nekonečné. V p-adických zápisech je tato vlastnost porušena, neboť racionální čísla mohou být také určena (netriviálně končící) nekonečnou posloupností, nicméně tato posloupnost musí být periodická, tedy popsatelná konečnými prostředky. To vše jsou ale důvody teoretické, v praktických ohledech, didaktických i výpočetních, zůstávají řetězové zlomky podřazeny obvyklým metodám.

2.5 Tělesa a jejich úplnost

Byl to pravděpodobně Weierstrass, kdo jako první požadoval, aby byla k definici kontinua skrze uspořádání připojena ještě podmínka, že se jedná o obor jisté vlastnosti algebraické, konkrétně těleso. Dedekind [1871] zavedl termín “těleso” pro obor, jenž je uzavřen na operace sčítání, násobení a jejich inverze, ovšem opět v konkrétním vztahu k oboru (tentokráte již) reálných čísel: těleso je libovolná podmnožina reálných čísel uvedené vlastnosti. Potřeba abstraktní formulace pojmu je do značné míry nasnadě, neboť uvažujme: Pojem sčítání byl nejprve zaveden pro přirozená čísla, později *per analogiam* přenesen na geometrické veličiny ve smyslu nastavování jedné druhou. S každým dalším rozšířením číselného oboru došlo vlastně k zavedení zcela nových operací, vzájemně identifikovatelných jedině díky jistým společným strukturálním rysům, jimiž je v případě sčítání bezpochyby komutativnost a asociativita. Je samozřejmě věcí ryze praktickou, zda lze nějakou operaci nazývat již proto sčítáním, že je komutativní a asociativní, stejně jako obor, na němž je definována, oborem číselným. Úspěšnost projekce původně aritmetických operací na obor, v němž se primárně nepočítá ani neměří, předvedl exemplárně Leibniz v definici tzv. logického sčítání v dvojím významu (i) adjunkce pojmových znaků (hnědý a kůň = hnědý kůň) a (ii) sjednocení tříd (žena a muž = člověk). Výraz $A + Y = B$ pak vyjadřuje obsaženost pojmu A v pojmu B jak (i) v Kantově intenzionálním smyslu přítomnosti A v seznamu predikátů vymezujících pojem B, tak (ii) v Aristotelově extenzionálním, množinovém smyslu spadání předmětů vlastnosti A pod pojem B. Leibniz takto zřetelně anticipoval moderní logiku, tedy především tzv. algebru logiky Boolovu, a tím i abstraktní algebru, která staví právě na možnosti různé interpretovatelnosti operačních symbolů, a tedy jejich studiu bez ohledu na vztažný obor.

Tělesem v abstraktním slova smyslu chceme dále rozumět obor, na němž jsou definovány dvě operace typu sčítání a násobení, úhrnem tedy nějakou trojici $\langle M, f, g \rangle$, kde místo f, g budeme psát obvykle $+_M$, $\times_M$ či jenom $+$, $\times$, nebude-li hrozit nedorozumění. Dané OPERACE musí být v první řadě KOMUTATIVNÍ a ASOCIATIVNÍ, tj. musí platit:

1a) $x + y = y + x$,

1b) $x \times y = y \times x$,

2a) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

2b) $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$.

Přibereme-li dále požadavek existence NEUTRÁLNÍCH PRVKŮ:

3a) $(\exists z)(\forall x)(x + z = x)$,

3b) $(\exists u)(\forall x)(x \times u = x)$,

lze dokázat jejich jednoznačnost.

Důkaz: Předpokládáme-li, že vzhledem ke sčítání existují dva neutrální prvky z_1, z_2, pak musí platit $z_1 = z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = z_2$. Podobně pro násobení. □

V důsledku toho lze užívat značení 0_M, 1_M, resp. 0, 1. O těchto prvcích se také přirozeně hovoří jako o NULOVÉM, resp. JEDNOTKOVÉM PRVKU tělesa. Díky této konvenci se zjednoduší formulace požadavku PRVKŮ INVERZNÍCH:

4a) $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$,

4*) $(\forall x)(\exists y)(x \times y = 1)$.

Opět lze dokázat jejich jednoznačnost (vzhledem k danému x):

Důkaz: Předpokládejme, že $x + y_1 = x + y_2 = 0$. Platí $y_1 = 0 + y_1 = (y_2 + x) + y_1 = y_2 + (x + y_1) = y_2 + 0 = y_2$. Podobně pro násobení. □

Můžeme tedy psát obvyklé $-_M x$, $\frac{1}{x}_M$, resp. $-x$, $\frac{1}{x}$. Ani po tomto rozšíření ale nejsme s to obě operace od sebe nijak odlišit. To znamená, že spolu formálně nijak nesouvisí, zcela v protikladu k zavedení obvyklého násobení coby 'rychlého' sčítání. Za takový spojující a zároveň odlišující prvek bývá zvolen distributivní zákon

5) $x \times (y + w) = (x \times y) + (x \times w)$.

Díky němu je ovšem neutrální prvek sčítání tzv. ANIHILUJÍCÍM PRVKEM násobení neboli

$$0 \times y = 0.$$

Důkaz: Platí totiž $(y \times 0) + (y \times 0) = y \times (0 + 0) = y \times 0$. Příslušný závěr je možný díky platnosti tvrzení, že z $a + x = a + y$ plyne $x = y$, k němuž se dostaneme níže. □

V důsledku toho je třeba v požadavku (4*) na inverzní prvek k násobení omezit volbu x na $x \neq 0$. Stanovujeme tedy:

4b) $(\forall x \neq 0)(\exists y)(x \times y = 1)$.

Právě z tohoto důvodu nemají výrazy jako $\frac{1}{0}$ a obecně i $\frac{x}{0}$ žádný význam, jak se to tvrdí ve známém, leč ne vždy průhledném sloganu "nulou nelze dělit".

Zavedení výrazů jako $b - a$ a $\frac{b}{a}$ je možné právě díky dokazatelné existenci a jednoznačnosti řešení rovnice $a + x = b$, resp. $a \times x = b$ pro libovolné a, b, což je v druhém případě opět nutné spojit s podmínkou $a \neq 0$.

Důkaz: Dokažme tvrzení $(\forall a, b)(\exists x)(a + x = b)$ a $(\forall a)(\forall x, y)(a + x = a + y \rightarrow x = y)$. Máme dány a, b; vezměme jednoznačně určený $-a$ a počítejme: $a + (-a + b) = (a + (-a)) + b = b$. Hledaným řešením je tedy $-a + b$. Důkaz jednoznačnosti vypadá takto: Mějme a, x, y takové, že $a + x = a + y$. Platí $x = 0 + x = (-a + a) + x = -a + (a + x) = -a + (a + y) = (-a + a) + y = 0 + y = y$. Analogicky postupujeme v případě násobení. □

Jako poslední určení tělesa se klade nerovnost

6) $0 \neq 1$,

obvykle se zdůvodněním, že je tím vyloučen případ tělesa jednoprvkového. To naznačuje, že souhrn (1–6), jímž jsme nyní TĚLESO definovali, nemusí zdaleka odpovídat původní představě toho, co by tělesem mělo být. I pro dvojprvkovou množinu $\{0, 1\}$ mohou být definovány operace

$+$, $\times$ tak, že $\langle\{0,1\},+,\times\rangle$ vyhovuje uvedeným axiomům, a je tedy tělesem. Jelikož obor racionálních a perspektivně i obor reálných čísel uvedené axiomy evidentně splňují taktéž, je zřejmé, že budeme mít tělesa konečná i nekonečná.

S ohledem na možné konfúze, vyplývající z tvrzení vět jako $1+1=0$, které platí v prvním z uvedených těles, je vhodné podle okolností aplikovat i indexované varianty notace. Původní znaky operací a prvků si ponecháváme jednak pro obvyklá čísla, ale i pro případy, kdy nebezpečí zmatku nehrozí. Bez ohledu na konkrétní podobu tělesa v něm tedy nyní můžeme rozlišit podmnožinu N_M všech jeho prvků získaných přičítáním 1_M k 1_M, tj.

$$N_M \stackrel{\text{def}}{=} \{1_M, 1_M +_M 1_M, 1_M +_M 1_M +_M 1_M, \ldots\}.$$

Lze dokázat, že je tato množina uzavřená na sčítání a násobení, a je tedy z tohoto hlediska jakousi obdobou přirozených čísel v M. V případě konečných těles musí ovšem zjevně nastat situace, kdy se nějaký prvek m_M v posloupnosti 1_M, $1_M +_M 1_M$, $1_M +_M 1_M +_M 1_M$, $\ldots$, již můžeme zapisovat také standardně jako 1_M, 2_M, 3_M, $\ldots$, rovná nějakému prvku n_M předchozímu. To znamená, že se nějaký prvek posloupnosti, totiž $p_M = m_M -_M n_M$, rovná 0_M. Je-li p nejmenší nenulové přirozené číslo této vlastnosti, pak říkáme, že má příslušné těleso CHARAKTERISTIKU p. Nejmenší možné těleso $\langle\{0_M,1_M\},+_M,\times_M\rangle$ má např. charakteristiku 2. Tělesa $\langle M,+_M,\times_M\rangle$, pro něž platí, že $0_M \in N_M$, se obecně nazývají MODULÁRNÍ. Definujeme-li pro $p \geq 2$ obor $\left\langle \mathbb{Z}_p, +_{\mathbb{Z}_p}, \times_{\mathbb{Z}_p}\right\rangle$ jako $\mathbb{Z}_p$=$\{0,1,\ldots,p-1\}$, $0_{\mathbb{Z}_p}=0$, $1_{\mathbb{Z}_p}=1$, $x +_{\mathbb{Z}_p} y = x+y \mod p$, $x \times_{\mathbb{Z}_p} y = x \times y \mod p$, kde výraz "$a \mod b$" označuje operaci MODULO p, která číslu a přiřadí zbytek po dělení číslem p, pak je $\mathbb{Z}_p$ těleso právě tehdy, když je p prvočíslem (jindy tomu brání požadavek (4b) na inverzní prvek vůči násobení). Jeho charakteristika je p. Vedle všech konečných existují i nekonečná modulární tělesa. Naopak tělesa, pro něž $0_M \notin N_M$, se nazývají tělesa CHARAKTERISTIKY 0 a musí být, zcela triviálně, nekonečná.

Analogicky k zavedení 'přirozených čísel v tělese M' můžeme nyní provést jejich rozšíření o inverzní prvky vůči sčítání, a dospět tak k podmnožině všech 'celých čísel v M', definované jako

$$Z_M \stackrel{\text{def}}{=} N_M \cup \{0_M\} \cup \{x \in M \mid -x \in N_M\}.$$

Jejím rozšířením o inverzní prvky vůči násobení pak dospějeme k množině všech 'racionálních čísel v M'

$$Q_M \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in M \mid (\exists a,b \in Z_M)(x = \frac{a}{b})\right\}.$$

Lze dokázat, že Q_M je rovněž těleso a že se ve skutečnosti jedná o nejmenší těleso obsažené v M, či přesněji: Q_M je PODTĚLESO M, protože platí, že (1) Q_M je těleso, (2) $Q_M \subseteq M$ a (3) operace $+$, $\times$ těles M a Q_M na prvcích Q_M koincidují. Q_M je PRVOTĚLESO M, neboť pro každé podtěleso O tělesa M platí, že je Q_M podtělesem O, či alternativně, Q_M je průnikem všech podtěles tělesa M. Z faktu, že je těleso podtělesem jiného tělesa, již plyne, že jejich neutrální prvky koincidují.[7] Je-li O podtěleso tělesa P, nazývá se P ROZŠÍŘENÍM TĚLESA O.

Nyní se věnujme opět zamýšlené definici kontinua. Je nasnadě, že je chceme uchopit jako těleso, které je zároveň úplnou přímkou. To znamená v první řadě zavedení pojmu tělesa uspořádaného, daného čtveřicí $\langle M, +, \times, < \rangle$. Přirozeně nestačí požadavek (totálního) uspořádání množiny M, ale současné propojení relace $<$ s operacemi sčítání a násobení. Vezměme tedy axiomy uspořádání

7a) $\neg(x < x)$,

7b) $(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$,

7c) $x < y \vee x = y \vee y < x$

a doplňme je o axiomy

8a) $x < y \rightarrow (x + z < y + z)$,

8b) $(0 < x \wedge 0 < y) \rightarrow 0 < x \times y$.

Tím, tedy požadavky (1–8), je USPOŘÁDANÉ TĚLESO definováno. Alternativní charakterizací uspořádatelnosti libovolného tělesa je existence tzv. KLADNÉ TŘÍDY $P \subseteq M$, definované (1) svojí uzavřeností na sčítání a násobení a (2) podmínkou, že pro každé $a \in M$ platí právě jedna z možností $a \in P$, $a = 0$, $-a \in P$. Uspořádání, splňující axiomy (7–8), je indukováno definicí

$$x < y \rightleftharpoons (\exists z \in P)(x + z = y).$$

Ekvivalenci těchto určení nebudeme dokazovat a zaměříme se na vlastnosti struktury splňující podmínky (1–8) uspořádaného, resp. uspořádatelného tělesa. Tak především každý model těchto axiomů musí mít charakteristiku 0, a nemůže být tedy konečný.

Důkaz: Charakterizace uspořádaného tělesa pomocí kladné třídy to dává nahlédnout velmi rychle, neboť $1 \in P$ a P je uzavřeno na sčítání, tj. $1 + 1 + \cdots + 1 \in P$ pro libovolný počet 1. Vztah $1 \in P$ přitom plyne z toho, že $0 \neq 1$, a kdyby $1 \notin P$, muselo by platit $-1 \in P$. Jelikož ale v každém tělese platí $(-a)(-b) = ab$, dostáváme z uzavřenosti P na násobení vztah $(-1)(-1) = 1 \in P$, což je spor. □

[7] Příslušné důkazy jakož i další materiál k tomuto oddílu lze najít in Gleason [1966].

Stejně jako v právě předvedeném důkazu, budeme i v dalším textu užívat obvyklou konvenci zápisu násobení, konkrétně vynechávání znaku $\times$. Další z odvoditelných vlastností uspořádaného tělesa je jeho hustota.

Důkaz: Opět jen v náznaku: Mějme $x < y$, pak z (8a) platí $x + x = 2x < x + y < y + y = 2y$. Z dokazatelné varianty (8a) pro násobení kladným prvkem plyne $2x\frac{1}{2} = x < (x + y)\frac{1}{2} < 2y\frac{1}{2} = y$. □

Tyto skutečnosti ovšem napovídají, že uspořádatelnost tělesa je okolnost značně netriviální. Nejen všechna konečná, ale i některá nekonečná tělesa uspořádat nelze, nejznáměji snad těleso všech komplexních čísel.

Důkaz: Stačí se přesvědčit o tom, že v uspořádaném tělese pro každé $a \neq 0$ platí $a^2 > 0$. Vyjdeme-li z definice kladné třídy, platí pro dané $a \neq 0$ buďto $a > 0$, pak i $a^2 > 0$ z uzavřenosti P na násobení, nebo $-a > 0$, a tudíž $(-a)^2 = a^2 > 0$ ze stejného důvodu. Číslo i coby kořen rovnice $x^2 + 1 = 0$ tuto vlastnost nesplňuje. □

A z druhé strany, i když těleso nějaké uspořádání kompatibilní se svojí aditivní a multiplikativní strukturou má, neznamená to, že je to jediný možný způsob, jak ho definovat.

Jelikož uspořádané těleso nemá největší, resp. nejmenší prvek, je automaticky přímkou. Největší, resp. nejmenší prvky ovšem nezaměňujme s nekonečně velkými, resp. malými čísly, jež se nevyskytují v tzv. TĚLESE ARCHIMÉDOVSKÉM, formálně definovaném jako uspořádané těleso $\langle M, +, \times, < \rangle$, v němž je třída N_M jeho ‘přirozených čísel’ neomezená:

$$(\forall x \in M)(\exists y \in N_M)(x < y).$$

Je zřejmé, že v archimédovském tělese nemohou existovat veličiny nekonečně velké, ve shodě s antickým axiomem měření. Analogicky je dokazatelné, že archimédicita vylučuje i veličiny nekonečně malé, a uvedená podmínka je tím pádem ekvivalentní větě

$$(\forall x \in M, x > 0)(\exists y \in N_M)(\tfrac{1}{y} < x)$$

a také tomu, že se mezi každými dvěma prvky z M nachází prvek z Q_M, neboli

$$(\forall x, y \in M, x < y)(\exists z \in Q_M)\,(x < z < y).$$

Na základě této podmínky říkáme, že je množina Q_M HUSTÁ V M. Uvědomme si, že na rozdíl od dříve definované prosté hustoty, která je *absolutní* vlastností množiny, je hustota množiny v množině vlastností *relativní*, tj. táž množina v nějaké množině být hustá může, v jiné nikoli. Jestliže platí $A \subseteq B$, což obvykle tiše předpokládáme, pak z relativní hustoty množiny A v B plyne absolutní hustota obou, jedná se tedy o silnější vlastnost.

Jelikož racionální čísla s obvyklým uspořádáním a operacemi, tj. čtveřice $\langle \mathsf{Q}, +, \times, < \rangle$, představují archimédovské těleso, je zřejmé, že z archimédičnosti neplyne úplnost tělesa ve vztahu k uspořádání, přičemž uspořádané TĚLESO $\langle M, +, \times, < \rangle$ nazýváme ÚPLNÝM (VŮČI USPOŘÁDÁNÍ), jestliže je jeho restrikce $\langle M, < \rangle$ úplná uspořádaná množina. Kupodivu platí opak:

> Každé úplné těleso je archimédovské, což také znamená, že je úplnou přímkou.

Důkaz: Vezměme úplné těleso a jeho libovolný prvek x. Kdyby neexistoval prvek z N_M větší než x, bylo by x horní mezí množiny N_M. To znamená, že musí existovat její suprémum a. Z vlastností supréma plyne, že $a - 1$ není horní mezí množiny N_M, čili musí existovat nějaký prvek $n \in N_M$ takový, že $a - 1 < n$. To ovšem znamená, že $a < n + 1 \in N_M$. Spor. $\square$

Podobně, jako jsme definovali úplnost vůči uspořádání, a potažmo úplnost dedekindovskou pro uspořádané množiny, speciálně přímky, můžeme nyní, tj. takto abstraktně, definovat i úplnost cantorovskou neboli tzv. úplnost sekvenční. Ta je ve své nejobecnější variantě formulována pro tzv. metrické prostory, pro něž je také možné formulovat příslušnou větu o minimálním zúplnění.[8] Pro naše účely však postačí, vezmeme-li za východisko libovolné uspořádané těleso.

Definice konvergence a koncentrovanosti posloupností prvků uspořádaného tělesa M jsou pak v principu stejné jako dříve, první kvantifikátor $(\forall m \in \mathsf{N})$ je ale třeba přepsat na $(\forall m \in M, m > 0_M)$, neboť nepředpokládáme, že by byl vztah $<$ definován mezi prvky tělesa a racionálními čísly. Máme tedy definice

$$(\forall m \in M, m > 0_M)(\exists p \in \mathsf{N})(\forall q \in \mathsf{N}, q \geq p)(|b - a_q| < m),$$

$$(\forall m \in M, m > 0_M)(\exists p \in \mathsf{N})(\forall q, r \in \mathsf{N}, q, r \geq p)(|a_r - a_q| < m),$$

kde operátor ABSOLUTNÍ HODNOTY $|a|$ je definován podle očekávání jako a v případě, že $a \geq 0$, a $-a$ v případě opačném. Lze opět dokázat, že je limita koncentrované posloupnosti určena jednoznačně, pokud vůbec v daném tělese existuje. Toto tvrzení by neplatilo, pokud bychom inkriminovanou klauzuli $(\forall m \in \mathsf{N})$ nahradili klauzulí $(\forall m \in N_M)$, tj. nechali prvky (a_n) libovolně aproximovat pouze lokální verzí kladných racionálních čísel. V případě nearchimédovských těles by takto byl danou konvergující posloupností spolu s daným číslem určen i celý *cluster* nekonečně malých veličin z jeho bezprostředního okolí. Přirozeně definujeme:

[8] K tomu viz Truss [1997, s. 129]. Definici metrického prostoru podáváme in 5.12.

> Uspořádané TĚLESO nazýváme SEKVENČNĚ ÚPLNÉ, když v něm každá koncentrovaná posloupnost konverguje.

Chceme-li nyní dokázat ekvivalenci obou, dedekindovského a cantorovského typu úplnosti nad uspořádaným tělesem, podaří se nám to jen jedním směrem, totiž od dedekindovské úplnosti ke cantorovské. Důvod je ten, že na rozdíl od dedekindovské konstrukce, kterou jsme předvedli pro speciální případ uspořádaného *archimédovského* tělesa Q, je cantorovská konstrukce reálných čísel neomezená, tj. funguje pro každé uspořádané těleso s tím, že přenáší jeho (ne)archimédicitu.[9] Z existence nearchimédovského uspořádaného tělesa plyne tedy existence uspořádaného tělesa, které je úplné sekvenčně, ale ne dedekindovsky, neboť, jak jsme ukázali, z dedekindovské úplnosti tělesa již plyne jeho archimédicita.

Celou záležitost si můžeme vizualizovat následovně: V uspořádaném, nearchimédovském tělese M nejenže neplatí $\lim(\frac{1}{n})_{n\in\mathsf{N}} = 0$,[10] uvedená posloupnost navíc nemůže být koncentrovaná (pro nekonečně malý odhad), a tudíž nemusí mít v M limitu ani v případě, kdy je sekvenčně úplné. Posloupnost $(\frac{1}{n})_{n\in\mathsf{N}}$ je nicméně zdola omezená a jako taková určuje na tělese řez, který musí mít řezové číslo, aby toto těleso mohlo být úplné dedekindovsky. Vnucuje se tak domněnka, že by šlo dedekindovskou úplnost z úplnosti sekvenční získat tehdy, kdybychom ji vztáhli nejen na posloupnosti koncentrované, ale na všechny omezené, monotónní posloupnosti. A tak tomu i skutečně je, neboť z toho, že každá taková posloupnost konverguje, již plyne, že je dané těleso archimédovské (důkaz je v podstatě identický s posledním), a zbytek dostaneme z požadované věty o ekvivalenci užitých pojmů úplnosti, kterou dokážeme za okamžik. Nejprve ale musíme dokázat dvě tvrzení, která jsou v uvedené 'hypotéze' tiše předpokládána, když umožňují chápat koncentrované posloupnosti jako jistý podpřípad omezených monotónních posloupností, totiž:

> (1) Každá koncentrovaná posloupnost je omezená a (2) když už není monotónní, má alespoň monotónní podposloupnost s toutéž limitou.

Poslední tvrzení přitom platí zcela obecně, tj. pro libovolnou posloupnost v lineárně uspořádané množině, kdy PODPOSLOUPNOSTÍ posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ rozumíme takovou posloupnost $(b_n)_{n\in\mathsf{N}}$, která z $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ vznikne vynecháním některých členů při zachování pořadí a nekonečného počtu členů zbývajících. Z této definice již plyne, že posloupnost a její podposloupnost musí mít shodné limity. Nyní již k příslušnému důkazu:

[9] K obojímu viz Deiser [2007, s. 100, 108 nn].

[10] Platí dokonce ekvivalence, tj. v uspořádaném tělese nastává $\lim(\frac{1}{n})_{n\in\mathsf{N}} = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li archimédovské.

Důkaz: Nejprve chceme dokázat část (1), tj. že pro (a_n) koncentrovanou existuje m takové, že $|a_n| < m$ pro každé $n \in \mathsf{N}$. Vezměme nějakou pevnou mez, např. 1. Podle definice koncentrovanosti existuje p takové, že pro každé $r, q \geq p$ platí $|a_q - a_r| < 1$. Konečná množina $\{|a_1|, \ldots, |a_p|\}$ má nějaké maximum s, tj. pro každé $n \leq p$ platí $|a_n| \leq s$ a zároveň pro každé $n > p$ platí $|a_n| \leq |a_n - a_p| + |a_p| < 1 + |a_p|$. Zde se použije tzv. trojúhelníková nerovnost $|c - a| \leq |b - a| + |c - b|$, jejíž důkaz je snadný. Tím pádem máme dohromady $|a_n| < 1 + s$ pro libovolné n. Nyní dokážeme část (2).

Předpokládejme, že (a_n) neobsahuje žádnou klesající podposloupnost. Ukážeme, že obsahuje podposloupnost (b_n) neklesající. Za uvedeného předpokladu musí mít pro každé $n \in \mathsf{N}$ množina $\{a_m \mid m \geq n\}$ nejmenší prvek x_n. Symbolu ":=" budeme nadále používat ve významu prostého přiřazení a položíme (i) $b_1 := a_k$, kde k je nejmenší index takový, že $a_k = x_1$, a (ii) když $b_n = a_k$, pak $b_{n+1} := a_l$, kde l je nejmenší index takový, že $l > k$ a $a_l = x_k$. Tím získáme kýženou podposloupnost (b_n). □

Důkaz části (2) je pozoruhodný tím, že je podstatně nekonstruktivní, neboť neukazuje, jak sestrojit příslušnou monotónní posloupnost přímo, ale jen s odkazem na předpoklad neexistence posloupnosti klesající. K tomuto problému se ale ještě mnohokráte dostaneme. Nyní již přejděme k větě o ekvivalenci, o kterou nám v tomto oddíle jde především:

> Budiž M uspořádané těleso. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní: (1) M je úplné (vůči uspořádání), (2) M je dedekindovsky úplné, (3) M je archimédovské a cantorovsky (sekvenčně) úplné.

Důkaz: Předvedeme jenom klíčová místa přechodů mezi podmínkami (2) a (3).[11] Začněme odvozením (3) z předpokladu (2). Úkol je jednoduchý: K dané koncentrované posloupnosti (a_n) chceme najít řez, s jehož řezovým číslem (suprémem dolní množiny) získáme zároveň limitu posloupnosti. Nyní můžeme buďto využít tvrzení, že má posloupnost (a_n) monotónní podposloupnost (b_n), dejme tomu, že neklesající, a vzít $\{x \mid (\exists n)(x \leq b_n)\}$ za dolní množinu A hledaného řezu, nebo to učinit rovnou konvencí

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid (\exists m \in \mathsf{N})(\forall n \in \mathsf{N}, n \geq m)(x \leq a_n)\}.$$

Dále je třeba dokázat, že (i) je A dolní množinou řezu a že (ii) platí $\sup A = \lim(a_n)$. (i) Podle definice řezu by měly být A a $B := M - A$

[11] Celý důkaz lze najít např. in Cohen & Ehrlich [1963, s. 95 nn] nebo Behrends [2004, s. 129 nn]. Srov. také Deiser [2007, s. 98 n].

neprázdné. To plyne z faktu, že jsou koncentrované posloupnosti omezené. Ověření zbylých částí definice je snadné. (ii) Zbývá dokázat, že $a := \sup A$ je limitou (a_n). Vezměme nějaké $m \in M$ takové, že $m > 0$. (ii.i) Pak platí $a - m < a$, tudíž $a - m \in A$, což znamená, že existuje $c \in \mathsf{N}$ takové, že $a_p > a - m$ pro všechna $p \geq c$. (ii.ii) Jelikož je (a_n) koncentrovaná, existuje $d \in \mathsf{N}$ takové, že $|a_q - a_p| < m$ pro všechna $p, q \geq d$. Platí tedy, že $a_p < a + m$ pro všechna $p \geq d$. Z (ii.i) a (ii.ii) tak dostáváme, že $|a_p - a| < m$ pro všechna $p \geq \max\{c, d\}$.

Nyní odvodíme podmínku (2) z (3). K danému řezu $[A, B]$ na M chceme najít vhodnou koncentrovanou posloupnost (c_n), jejíž limita by byla hledaným řezovým číslem. Z definice řezu existují prvky $a \in A$ a $b \in B$. Prvek b je opět z definice řezu horní mezí A a z archimédicity M platí, že pro každé $n \in N_M$ existuje $m \in N_M$ takové, že $a + \frac{m}{n} \geq b$. Pro každé $n \in N_M$ je tedy množina $\left\{m \in N_M \mid a + \frac{m}{n} \in B\right\}$ neprázdná, a má tudíž nejmenší prvek m_n. Pro každé n položme $y_n := a + \frac{m_n}{n}$ a $x_n := y_n - \frac{1}{n}$. Zjevně platí, že $x_n \in A$ a $y_n \in B$, a tudíž i $x_p < y_q$ pro libovolné p, q. Odečtením x_q z obou stran nerovnosti dostáváme vztah $x_p - x_q < \frac{1}{q}$ pro každé q. Pro každé $p, q \in N_M$ tudíž platí

$$|x_q - x_p| < \max\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right\}.$$

Z archimédicity (!) M plyne, že je (x_n) koncentrovaná, a má tedy limitu c. Z konstrukce je zřejmé, že je c příslušným řezovým číslem. □

Vedle zmíněných existuje samozřejmě řada dalších, ekvivalentních podmínek úplnosti a s nimi spojených konstrukcí kontinua.[12] Z nich se snad vyplatí ještě zmínit podmínku Weierstrassovu, odpovídající jeho původní (a historicky zřejmě nejstarší) konstrukci moderního typu kontinua metodou vnořených intervalů:

> Posloupnosti (a_n), (b_n) v uspořádaném tělese M nazveme VNOŘENÍM INTERVALŮ, jestliže (1) pro každé $n \in N$ platí $a_n < b_n$, (2) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ a $b_1 \geq b_2 \geq \cdots$ a (3) $\lim(a_n - b_n) = 0$. Uspořádané TĚLESO M nazýváme WEIERSTRASSOVSKY ÚPLNÝM, jestliže pro každé vnoření intervalů v M existuje $c \in M$ takové, že $a_n \leq c \leq b_n$ pro každé $n \in \mathsf{N}$.

Je zřejmé, že weierstrassovská úplnost představuje jakési zkřížení úplnosti cantorovské a dedekindovské. V příslušném tvrzení ekvivalence je právě proto zapotřebí doplnit podmínku archimédicity. Jelikož se dále budeme zabývat racionálními a reálnými čísly, tedy archimédovsky uspořádanými tělesy, můžeme k úplnosti odkazovat bez dalšího rozlišení. Jelikož nám v obecném případě nesejde ani na způsobu jeho konstrukce,

[12] Některé modernější jsou popsány in Deiser [2007, s. 112 nn]. Užitečná jsou srovnání uvedená in Truss [1997, s. 132 nn].

budeme v tomto smyslu namísto C či D používat obvyklé R ve významu libovolného úplně uspořádaného tělesa. K němu také budeme obvykle referovat jakožto ke kontinuu.

2.6 Mohutnosti kontinua

Vlastní definice oboru reálných čísel skrze fundamentální posloupnosti a důkaz jejich úplnosti byly pouhými prvními kroky na Cantorově cestě výzkumu struktury kontinua. Obě rozlišení byla podána v článku *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* [1872], v němž, jak název napovídá, Cantor uzavřel své dosavadní výzkumy v oblasti reprezentace reálných funkcí trigonometrickými řadami.[13] Jednalo se o tematiku úzce spjatou s tzv. problémem 'vibrující struny', v němž máme k dané pozici a pnutí struny zjistit, jak se bude po uvolnění pohybovat. V reakci na předchozí pokusy Eulerovy a d'Alembertovy navrhl Daniel Bernoulli roku 1753 trigonometrickou řadu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

spolu s tvrzením, že nekonečně mnoho koeficientů a_n je vždy možné zvolit tak, aby funkce $f(x)$ reprezentovala každý počáteční tvar struny, ba obecně každou křivku, resp. funkci. Jelikož v popisu vlastního výpočtu těchto koeficientů nebyl Bernoulli příliš specifický, vše samozřejmě záviselo na tom, jak je definován pojem funkce. Problém vibrující struny měl tímto způsobem rozhodující vliv na další formaci ponewtonovské analýzy.

Euler zobecnil pojem funkce do té míry, že jej nevázal na jediný analytický výraz, ale dovolil i jejich skládání. Takové funkce pak nazýval 'nespojitými', čímž ale myslel jejich nespojitost reprezentační, nikoli grafickou. Především v tomto smyslu proto nevěřil, že by graf 'každé funkce' byl převeditelný na problém vibrace struny. Z dnešního hlediska se tato námitka zdá být malicherná, neboť se můžeme omezit vždy na dostatečně malý úsek funkce, tento krok ale právě předpokládá, že funkci do značné míry ztotožníme s 'průběhem jejích hodnot'. První významný krok tímto směrem *de facto* učinil Jean Baptiste Joseph de Fourier v práci *Théorie analytique de la chaleur* [1822, § 417], když otázku reprezentace funkce f trigonometrickou řadou formuloval jako problém konvergence hodnot s tím, že "funkce $f(x)$ reprezentuje posloupnost hodnot nebo souřadnic, z nichž každá je libovolná".[14] Fourier v tomto duchu nahradil problém

[13] Detaily lze najít v Daubenově [1979] cantorovské biografii. Kechrisův [2007] preprint, ač technicky zaměřen, sleduje historickou linii Cantorova výzkumu.
[14] Citováno podle Grattan-Guinness [1980, s. 153].

vibrace struny problémem distribuce tepla v železné tyči, které se může měnit skokem, v principu tedy pokrývá i případy funkcí, jež Euler nazýval nespojitými, a ukázal, že přijímají trigonometrické reprezentace. Zvolené příklady ovšem naznačují, že v oné 'libovolnosti' nepřekročil koncept Eulerův a ztotožnění funkce s libovolným grafem je teprve záležitostí Dirichletovou. V tomto pojmovém rámci se již pohyboval Cantor. Další vývoj proto již sledovat nebudeme a vrátíme se rovnou k prvním Cantorovým pracím.[15]

Tématem reprezentace funkcí trigonometrickými řadami se Cantor zabýval pod Heinovým vedením od svého nástupu na místo soukromého docenta na univerzitě v Halle roku 1869, dva roky poté, co v Berlíně ukončil svá studia u Weierstrasse, Kummera a Kroneckera úspěšným obhájením disertace z oblasti teorie čísel. Otázkou, k níž Cantora podnítil Heine, byl přitom Riemannův nedořešený problém jednoznačnosti reprezentace funkce trigonometrickou řadou v případě, že takováto reprezentace existuje. Cantor [1870] dokázal již ve svém prvním tištěném pojednání, že stačí, aby příslušná trigonometrická řada konvergovala v každém bodě. V dalších výzkumech pak uvažoval možné výjimky z této konvergence, nejprve s výsledkem, že množina bodů, v nichž daná řada nekonverguje, musí být konečná. Ve zmíněném článku z roku 1872 pak onu výjimku dokázal rozšířit i na nekonečné množiny reálných čísel, které jsou v kontinuu rozloženy jistým způsobem. Tím jednak položil základy topologie přímek ve výše uvedeném smyslu, jednak umožnil rozšíření řady přirozených čísel o tzv. transfinitní ordinály. K teorii množin coby samostatnému studiu těchto nových typů nekonečných množin a nekonečných čísel sice zbývala ještě dlouhá cesta, nicméně okolnost, že se vyvinula právě z reflexe na bohatost a jemnost struktury reálné osy, bychom neměli pustit ze zřetele.

Ačkoli to byla ordinální čísla, k jejichž zavedení byl Cantor motivován nejdříve, možnost srovnávání množin co do mohutnosti, na níž jsou založena čísla kardinální, sahá rovněž k počátkům jeho kariéry. Zprvu byla samozřejmě spjata s poměřováním reálných čísel, tedy s mohutnostmi v kontinuu. V korespondenci s Dedekindem[16] (29. listopadu 1873) vznáší Cantor otázku, kterou lze formulovat takto:

> Je možné přiřadit množinu přirozených čísel množině čísel reálných tak, aby každému přirozenému číslu odpovídalo právě jedno reálné a *vice versa*?

[15] Stručný přehled o problému vibrace struny spolu s patřičnými odkazy na podrobnější literaturu podává Grattan-Guinness [1980], Kline [1972, s. 503–522] a Lavine [1994, 22–29].

[16] Cantorova korespondence byla vydána jako Cantor [1991]. Reprezentativní výběr Cantorových dopisů Dedekindovi je v anglickém překladu otištěn in Ewald [1996]. Dopisy z pozdějších let vyšly i jako součást antologie Cantor [1932].

Cantor si sám zprvu nebyl jist, proč vlastně tento dotaz Dedekindovi položil, neboť, jak poznamenává v dopise z 2. prosince téhož roku, nezdá se, že by měla nějakou praktickou hodnotu. Jisté bylo alespoň to, proč byl jejím adresátem právě Dedekind, také autor definice reálných čísel, bez níž by nemohla být uvedená otázka ani formulována. Cantor sám se s Dedekindovou definicí, tj. se spisem *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, seznámil hned roku 1872, v němž se Dedekind konečně rozhodl své čtrnáct let staré myšlenky publikovat, povzbuzen mj. Cantorovými alternativními pokusy v této oblasti. Oba se na základě takto započaté korespondence spřátelili. Vraťme se ale k poměřování množin.

Celky, které jsou vzájemně jednoznačně přiřaditelné podmnožinám přirozených čísel, se tradičně nazývají SPOČETNÉ, přičemž zajímavé případy představují právě ta přiřazení, na jedné z jejichž stran stojí všechna přirozená čísla, tj. ona spočetná množina je množinou nekonečnou. Značíme-li mohutnost neboli kardinalitu množiny A obvyklým způsobem, totiž prostřednictvím znaku absolutní hodnoty $|A|$, je uvedený vztah jednoduše zachycen rovností $|A| = |\mathsf{N}|$. První z významných případů množiny této vlastnosti přitom představují čísla racionální. Na tom, že platí vztah

$$|\mathsf{Q}| = |\mathsf{N}|,$$

se Dedekind a Cantor shodují v dalších dopisech.[17] V nich je také v důsledku obsažen důkaz spočetnosti libovolné množiny uspořádaných n-tic $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ prvků spočetných množin A_1, A_2, …, A_n, tj. množiny

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \overset{\text{def}}{=} \{\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge a_n \in A_n\},$$

standardně nazývané KARTÉZSKÝ SOUČIN množin A_1, A_2, …, A_n. Jestliže pro každé A_i, kde $1 \leq i \leq n$, platí $A_i = B$, můžeme psát pouze B^n.

Bází je zde přitom platnost vztahu $|\mathsf{N} \times \mathsf{N}| = |\mathsf{N}|$, jejíž ideu lze nahlédnout na obrázku 2.2. Jednotlivé body představují dvojice čísel na souřadnicích, šipky potom průchod všemi takovými dvojicemi, jenž každému přirozenému číslu přiřadí právě jednu dvojici, aniž by některou vynechal. Jiný průchod je explicitně zajištěn Cantorem [1878, s. 132] navrženou PÁROVACÍ FUNKCÍ

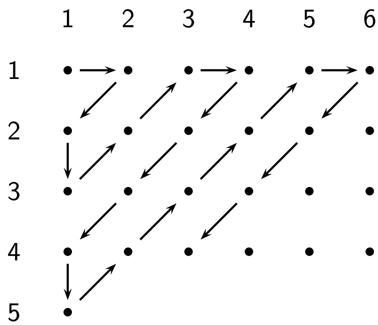
$$\pi(x, y) = x + \tfrac{1}{2}(x + y - 1)(x + y - 2),$$

jejíž iterovanou aplikací lze získat tentýž vztah pro libovolný konečný kartézský součin množiny N, tj. vztah $|\mathsf{N}^m| = |\mathsf{N}|$ pro $m \in \mathsf{N}$. Před dalším výkladem o spočetnosti a nespočetnosti nekonečných množin zaveďme několik obvyklých definic.

[17] Viz Cantorův dopis z 29. listopadu 1973 a Dedekindovy poznámky k němu.

> Přiřazení f, které každému prvku množiny C přiděluje nejvýše jeden prvek množiny D, a je tedy jednoznačné vpravo, nazýváme funkcí z C do D a značíme $f : C \to D$. Prvek d z D, pro nějž platí $f(c) = d$, kde c náleží C, nazýváme obrazem prvku c; o c hovoříme jako o vzoru prvku d (přes funkci f). Pro množinu X prvků z C značíme množinu jejich obrazů $\{f(x) \mid x \in X\}$ jako $f[X]$ a hovoříme o ní jako o obrazu množiny X (přes funkci f).

U funkce $f : C \to D$ obecně nevyžadujeme, aby měl každý prvek z C obraz; množinu $\{x \in C \mid (\exists y \in D) f(x) = y\}$, pro niž je funkce v C definována, nazýváme jejím definičním oborem a značíme $dom(f)$. V případě, že platí $C = dom(f)$, říkáme, že je f totální. O takovéto funkci



Obrázek 2.2: Spočetnost racionálních čísel

také hovoříme jako o zobrazení množiny C do D. Podobně nevyžadujeme, aby měl u funkce $f : C \to D$ každý prvek z D nějaký vzor; množinu $\{y \in D \mid (\exists x \in C) f(x) = y\}$ nazýváme oborem hodnot funkce a značíme $rng(f)$.

> Platí-li $rng(f) = D$, říkáme, že je daná funkce surjektivní. V případě funkce totální říkáme, že se jedná o zobrazení množiny C na množinu D. Funkci, resp. zobrazení f, které žádným dvěma odlišným prvkům nepřiřazuje tentýž prvek, a je tedy jednoznačné i vlevo, nazýváme prosté nebo také injektivní. Jeho specifickým rysem je, že i jeho inverze f^{-1}, která přiřazuje prvku y z D prvek x z C tehdy a jen tehdy, jestliže $f(x) = y$, je funkcí. Zobrazení $f : C \to D$, které je prosté a na, se nazývá bijektivní nebo též bijekce množin C a D. Značíme je $f : C \leftrightarrow D$. V tomto významu hovoříme také o vzájemně jednoznačném či jedno-jednoznačném přiřazení. Je zřejmé, že injektivní zobrazení $f : C \to D$ je bijekcí množin C a $f[C] = rng(f)$.

Cantorova definice kardinálního čísla vychází z možnosti srovnání dvou množin jedno-jednoznačným přiřazením. Cantor ovšem zprvu nehovořil o číslech, nýbrž o mohutnostech dvou množin, a i to teprve 20. června 1877 v dopise Dedekindovi. O rok později, ve svém prvním článku explicitně věnovaném teorii množin, který vyšel pod názvem *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* [1878], Cantor stanovuje, že dvě množiny mají stejnou mohutnost, jestliže si lze jejich prvky vzájemně jedno-jednoznačně přiřadit. Přitom platí:

> Možnost bijektivního zobrazení dvou množin je relací ekvivalence.

Důkaz: (1) Existuje bijekce mezi C a C, totiž tzv. IDENTITA $f(x) = x$, v obecnosti (bez udání domény) značená jako id. (2) Z existence bijekce f mezi C a D plyne skrze inverzní zobrazení f^{-1} existence bijekce mezi D a C. (3) Zavedeme-li zkratku $f \circ g$ pro funkci h takovou, že $h(x) = g(f(x))$, jíž se říká FUNKCE SLOŽENÁ, pak z existence bijekcí $f : C \leftrightarrow D$ a $g : D \leftrightarrow E$ plyne existence bijekce $f \circ g : C \leftrightarrow E$. □

V Cantorově konvenci se tím pádem jedná o definici abstrakcí, jak jsme ji již dílem popsali v oddíle 2.4. V ní fixujeme ROVNOST MOHUTNOSTÍ jako

$$|C| = |D| \rightleftharpoons (\exists f)(f : C \leftrightarrow D).$$

Neřešme zatím, zda náš koncept definice abstrakcí skutečně odpovídá Cantorovým intencím, a vyjděme jednoduše z toho, že se pokusil použít bijektivní přiřazení k alternativnímu odlišení kontinua od přirozených a racionálních čísel, tj. k jejich rozrůznění jiným způsobem nežli jen prokázanou úplností.

Důkaz spočetnosti Q totiž spíše podporuje dojem, že se tímto směrem nemá cenu vydávat, neboť rozdíl mezi racionálními čísly a čísly přirozenými (tj. hustota prvních), který byl jejich bijektivním porovnáním setřen, se nezdál být zprvu o nic méně drastický nežli rozdíl mezi čísly reálnými a racionálními (tj. úplnost prvních). Dalo by se tedy očekávat, že všechny nekonečné množiny mají v tomto ohledu jednu jedinou — a sice spočetnou — velikost. Byly to ostatně právě tyto dílčí důsledky poměřování množin bijektivními zobrazeními, co vedlo nejprve Galileiho a později i Bolzana k odmítnutí porovnatelnosti nekonečných množin,[18] speciálně s odkazem na jeden z nejstarších 'paradoxů nekonečna' (tak se jmenuje Bolzanův spis [1851]), podle něhož lze nekonečnou množinu

[18] Bolzano [1851, § 20] tvrdí na bázi několika příkladů, že jsou na sebe libovolné dvě nekonečné množiny jedno-jednoznačně zobrazitelné, a usuzuje [1851, § 21] z toho, že z bijektivní srovnatelnosti množin neplyne, že jsou stejně velké. Pro stručný úvod k dějinám porovnávání množin bijekcí srov. Deiser [2004, s. 68 nn].

prostě zobrazit na část sebe sama, tj. fakt, že existuje $f : A \leftrightarrow B$ pro $B \subset A$. Označení tohoto výsledku za "paradoxní" je důvodné již proto, že je v rozporu s předpokladem Eukleidových *Základů* [El., I, obecný pojem 5]:

> Celek je větší než část.

Příkladem zobrazení, které tento požadavek porušuje, je třeba bijekce přirozených a sudých, resp. lichých čísel, znázorněná na obrázku 2.3. Ta

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \cdots
\end{array}$$

Obrázek 2.3: Zobrazení množiny na vlastní část

je vlastně ale jen krotkou variantou již dokázaného $|\mathsf{N} \times \mathsf{N}| = |\mathsf{N}|$, v němž bylo N rozloženo nejen na dvě, ale nekonečně mnoho stejně velkých kopií. Na základě této ideje lze nyní nahlédnout spočetnost celé řady dalších množin, v první řadě tedy dokončit důkaz spočetnosti Q, a to třeba pomocí dvou pomocných tvrzení:

> (1) Podmnožina spočetné množiny je opět množinou spočetnou a (2) sjednocení dvou či spočetně mnoha spočetných množin je opět množina spočetná.

Důkaz: (1) Máme $A \subseteq B$, kde zobrazení $f : B \rightarrow \mathsf{N}$ je injektivní. Pak stačí vzít funkci g vzniklou restrikcí funkce f na množinu A. Restrikcí funkce $f : C \rightarrow D$ na množinu $B \subseteq C$ přitom obecně rozumíme funkci $g : B \rightarrow D$, takovou, že pro každé $x \in B \cap dom(f)$ platí $f(x) = g(x)$. Značíme ji $f|B$. (2) Máme systém $\{A_n \mid n \in \mathsf{N}\}$ spočetných množin a jeho sjednocení A. Pro každé n vezmeme příslušné injektivní zobrazení $f_n : A_n \rightarrow \mathsf{N}$, existující z definice. S pomocí Cantorovy párovací funkce $\pi : \mathsf{N} \times \mathsf{N} \leftrightarrow \mathsf{N}$ definujeme funkci $g(x) = \pi(f_n(x), n)$, kde n je nejmenší index takový, že $x \in A_n$. Tím pádem je $g : A \rightarrow \mathsf{N}$ injektivní, a A spočetné. $\square$

Přestože Cantor [1878, s. 120] ohlašuje větu (2) jako triviálně dokazatelnou, důkaz, jak jsme jej předvedli, není zase tak nevinný, neboť vyžaduje, abychom si mezi zobrazeními, zajišťujícími spočetnost dané množiny, některé *vybrali*, bez bližšího udání toho, které, a to (v obecném případě) více než konečněkrát. Tím pádem je předpokládán tzv. axiom výběru, jenž se z jistých důvodů ukazuje být problematickým, resp. problematičtějším nežli předpoklady ostatní. Blíže se k tomu vyjádříme v kapitole 6. Spočetnost konkrétních množin, jako je Q, lze samozřejmě zdůvodnit i na základě konkrétních bijekcí.

Na možnosti prostého zobrazení nekonečné množiny na vlastní část je nejprve bezesporu paradoxní to, že se tím vlastně stává menší sebe sama. Tuto ‘antinomii’ lze ovšem snadno ošetřit, když vztah $f : C \leftrightarrow D$ pro $C \subset D$ neuchopíme jako relaci ‘menší’, ale ‘menší nebo roven’, tj. stanovíme-li nejprve USPOŘÁDÁNÍ MOHUTNOSTÍ SLABÉ:

$$|C| \leq |D| \rightleftharpoons (\exists f)(\exists X \subseteq D)(f : C \leftrightarrow X),$$

abychom poté mohli definovat jejich SILNÉ (OSTRÉ) USPOŘÁDÁNÍ:

$$|C| < |D| \rightleftharpoons |C| \leq |D| \wedge |C| \neq |D|.$$

Tím ovšem výčet paradoxů nekonečna nekončí. Redukci dimenzí $|A^n| = |A|$ jsme již potvrdili pro případ spočetných množin. Cantor ji ale později dokázal i pro případ kontinua, kde se v nejjednodušších případech $|\mathsf{R}| = \left|\mathsf{R}^2\right| = \left|\mathsf{R}^3\right|$ jedná o jedno-jednoznačné přiřazení bodů přímky bodům roviny, resp. prostoru. To bylo nejen obecně, ale i samotným Cantorem do poslední chvíle považováno za něco zhola nemožného. “Je le vois, mais je ne le crois pas” (“vidím to, ale nevěřím tomu”), píše v dopise Dedekindovi z 29. června 1877.

Základem důkazu, jejž Cantor sdělil Dedekindovi v dopise z 20. června téhož roku, je přitom desetinný, obecně tedy p-adický rozvoj reálného čísla spolu s myšlenkou přiřadit dvěma číslům $a = 0, a_1a_2\ldots$, $b = 0, b_1b_2\ldots$ z intervalu $[0, 1]$ číslo

$$c = 0, a_1b_1a_2b_2\ldots$$

z téhož intervalu. Dedekind Cantora obratem upozorňuje, že uvedená konstrukce nezajišťuje s ohledem na dvojznačnost p-adického rozvoje existenci bijektivního zobrazení mezi úsečkou $[0, 1]$ a čtvercem $[0, 1] \times [0, 1]$, jednoduše proto, že následkem zákazu triviálně končících rozvojů neodpovídá číslu

$$0, c_1d_1\ldots c_kd_kc_{k+1}0c_{k+2}0\ldots$$

žádná dvojice z $(0, 1)^2$. Tento defekt Cantor záhy, v dopise z 25. června, opravil prostřednictvím dosti komplikované konstrukce, založené na reprezentaci reálných čísel pomocí řetězových zlomků. Ta se také objevuje v článku [1878], v němž byl objev publikován.

Z dnešního pohledu je ovšem podstatné, že se Cantorovi v uvedeném dopise podařilo prosté přiřazení bodů čtverce bodům jeho strany, tedy důkaz $\left|[0,1]^2\right| \leq |[0,1]|$, neboť disponujeme tzv. Cantorovou-Bernsteinovou větou:

> Jestliže $|C| \geq |D|$ a $|C| \leq |D|$, pak $|C| = |D|$.

Toto zdánlivě evidentní tvrzení formuloval Cantor [1883a], explicitně ho však dokázal až roku 1897 jeho žák Felix Bernstein. Výsledek zveřejnil Borel [1898]. Dedekind přitom objevil již roku 1887 jiný, často používaný důkaz, aniž by jej však, jak bylo jeho zvykem, publikoval. Zmínil se o něm pouze v dopise Cantorovi z 29. srpna 1899,[19] aby pak důkaz roku 1906 zcela nezávisle objevil Zermelo, což víme díky Poincarého [1906b, § 12] zmínce. Celý důkaz byl publikován jako Zermelo [1908b]. V anglosaském milié se teorému také někdy říká Schröderův-Bernsteinův podle chybného pokusu, který učinil Schröder [1898]. My předvedeme stručný důkaz v podobě, kterou podal Julius König [1906]:

Důkaz: Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že máme disjunktní množiny C, D a injektivní zobrazení $f : C \to D$ a $g : D \to C$. Pro každé $a \in C$ definujeme rekurzí: $a_1 := a$,

$$a_{n+1} := \begin{cases} g^{-1}(a_n) & \text{jestliže je } n \text{ liché,} \\ f^{-1}(a_n) & \text{jestliže je } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

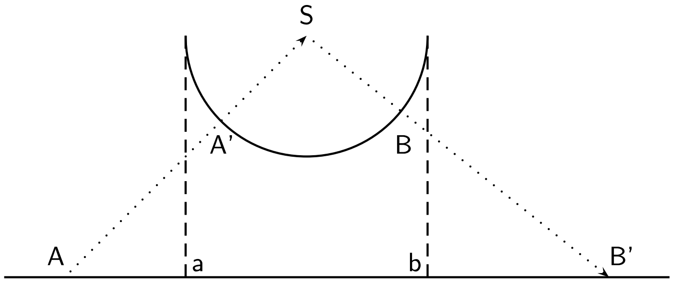
Vzniká tak řetězec $a_1 = a$, $a_2 = g^{-1}(a)$, $a_3 = f^{-1}(g^{-1}(a))$, $\ldots$, který skončí, jakmile není příslušný člen v oboru hodnot jedné z funkcí, tj. neexistuje příslušné $g^{-1}(a_n)$, resp. $f^{-1}(a_n)$. Kromě těchto dvou případů, kdy řetězec pro dané a skončí v C nebo v D, může nastat i případ nekonečný. Prvky C prvního a třetího typu nechme nyní tvořit množinu C_1, prvky druhého typu množinu C_2. Platí, že (i) $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ a $C_1 \cup C_2 = C$, (ii) $C_2 \subseteq rng(g)$ a (iii) $f[C_1] \cap g^{-1}[C_2] = \emptyset$ a $f[C_1] \cup g^{-1}[C_2] = D$. Proto můžeme definovat funkci $h : C \to D$ jako

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jestliže } x \in C_1, \\ g^{-1}(x) & \text{jestliže } x \in C_2 \end{cases}$$

a tvrdit, že je požadovanou bijekcí. Netriviální je pouze podmínka (iii), zajišťující injektivitu a surjektivitu funkce h. Nejprve k injektivitě. Pokud by platilo $f(x) = g^{-1}(y)$ pro $x \in C_1$ a $y \in C_2$, pak by se v řetězci počínajícím y objevilo v třetím kroku jako člen x, což by v rozporu s předpokladem $y \in C_2$ znamenalo, že řetězec končí v C nebo vůbec. Co se týče surjektivity, mějme nějaký prvek $y \in D$ takový, že $g(y) \notin C_2$. Pak $g(y) \in C_1$, čili řetězec začínající $g(y)$ končí v C nebo je nekonečný. V obou případech musí mít alespoň tři členy, totiž $g(y)$, $g^{-1}(g(y)) = y$ a $f^{-1}(y) = x$. Máme tedy x takové, že $h(x) = f(x) = y$. $\square$

[19] Dopis otištěn in Cantor [1932, s. 449].

Platnost vztahu $|\mathsf{R}| = |\mathsf{R} \times \mathsf{R}|$ se nyní snadno odvodí z možnosti prostého zobrazení kontinua na $(0,1)$, resp. libovolný interval (a,b), což lze zase nejrychleji nahlédnout na obrázku 2.4. Přímky kolmé na reálnou osu



Obrázek 2.4: Zobrazení kontinua na vlastní část

v něm konstruují bijektivní zobrazení mezi body půlkružnice a intervalem (a,b), zatímco přímky procházející středem S půlkruhu přiřazují každému bodu A reálné osy právě jeden bod A' půlkružnice a každému bodu B půlkružnice právě jeden bod B' osy, a to různým bodům různé.[20] Nenázorný důkaz spočívá potom ve dvou krocích, a to (1) v konstrukci bijekce mezi libovolnými intervaly (a,b), (c,d) pro $a,b,c,d \in \mathsf{R}$, k čemuž dospějeme jednoduchou deformací

$$f(x) = c + \frac{x-a}{b-a}(d-c)$$

pro $x \in (a,b)$, a (2) v konstrukci bijekce mezi $(-1,1)$ a R

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 & \text{jestliže } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jestliže } x = 0, \\ \frac{1}{x} + 1 & \text{jestliže } -1 < x < 0 \end{cases}$$

pro $x \in (-1,1)$. Nemožnost bijektivní redukce kontinua na přirozená, resp. racionální čísla byla tedy objevem, díky němuž vzala záležitost poměřování nekonečen zcela nový obrat. Cantorův původní důkaz přitom přímo nevede k transfinitní hierarchii větších a větších kardinálních čísel jako známější a pozdější důkaz diagonální, neboť je založen na specifické vlastnosti reálných čísel. Cantor na něj přišel roku 1873, jak o tom podává svědectví dopis Dedekindovi ze 7. prosince, a ze dne na den si uvědomil, že celá otázka není zjevně tak nepraktická, jak si původně myslel. Na Weierstrassovo doporučení proto také svůj důkaz prezentoval jakožto

[20] Podobné názorné úvahy jsou velmi staré. Roger Bacon takto např. přiřazoval body úhlopříčky čtverce bodům jeho strany. Viz Deiser [2004, s. 68].

nekonstruktivní variantu Liouvillova důkazu toho, že existují TRANSCENDENTNÍ ČÍSLA, tj. nealgebraická reálná čísla z oboru $\mathsf{R} - \mathsf{K}$, a to v článku *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* [1874]. Cantorův důkaz existence transcendentních čísel se zakládá na pozorování:

> Čísel algebraických, tedy prvků kartézského kontinua K, je spočetně mnoho.

Důkaz: Nahlédnutí příslušné bijekce není a historicky ani nebylo nijak obtížné. Algebraická čísla jakožto kořeny racionálních polynomů jsou určena jednak jejich koeficienty, jež lze redukovat na konečné posloupnosti přirozených čísel, a jednak stupněm polynomu, omezujícím počet daných kořenů shora. Přiřadíme-li, jako Cantor, polynomu n-tého stupně s celočíselnými koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_n$ číslo

$$N = n - 1 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|,$$

je zřejmé, že každému odpovídá konečně mnoho racionálních polynomů, tedy i konečně mnoho algebraických čísel. Seřadíme-li je podle velikosti, pak posloupnost začínající posloupností algebraických čísel pro $N = 1$, následovaná těmi pro $N = 2$ atd. určuje příslušné zobrazení N na K. To není očividně prosté, nám ale opět stačí, že indukuje $|\mathsf{K}| \leq |\mathsf{N}|$. □

Na tomto důkazu mj. vidíme, že všechna předcantorovská pojetí kontinua byla co se týče (cantorovského pojetí) mohutnosti velmi chudá! Z důkazu nespočetnosti kontinua R přitom plyne přímo existence nealgebraických reálných čísel, a to dokonce neobyčejně velkého, tj. nespočetného množství, neboť předpoklad jejich spočetného počtu by v rozporu s právě dokázaným vedl opět ke spočetnému kontinuu. Přesto, na rozdíl od Liouvillova důkazu transcendence čísel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n!}}$ pro $k \in \mathsf{N}$ z roku 1844, neznáme díky takto — tj. nepřímo — vedenému důkazu jediný příklad transcendentního čísla. To ovšem neznamená, že by se analýzou tohoto důkazu nedalo takové číslo zkonstruovat, jak se o tom zmíníme později v kapitole 7. Co se týče konkrétních příkladů nealgebraických čísel, transcendenci Eulerovy konstanty e dokázal roku 1873 Hermite, transcendenci π roku 1882 Lindemann. Teprve roku 1930 bylo např. dokázáno, že je transcendentní číslo $2^{\sqrt{2}}$.

Tak jako tak se nám zde, zvláště na pozadí našich poznámek k některým důkazům této kapitoly, pozvolna začíná rýsovat problém rozdílu mezi konstruktivními a nekonstruktivními důkazy. Ten nás zajímá proto, že dal na přelomu století podnět k prvnímu a dalo by se říci i jedinému rozštěpení matematiků na filosofickém základě. Jádro tohoto sporu, jemuž se budeme věnovat podrobně později, se různými způsoby dotýká obou Cantorových důkazů nespočetnosti kontinua. Ten původní, z roku 1873, se přitom zakládá na větě:

Žádné injektivní zobrazení $f : \mathsf{N} \to \mathsf{R}$ není surjektivní.

Důkaz: Mějme nějaké injektivní zobrazení $f : \mathsf{N} \to \mathsf{R}$ a posloupnost $(a_n)_{n \in \mathsf{N}}$ prvků z R, kterou f určuje, tj. pro niž platí $f(n) = a_n$. Posloupností $(a_n)_{n \in \mathsf{N}}$ prvků z A není ostatně nic jiného nežli zobrazení $f : \mathsf{N} \to A$. První krok důkazu spočívá v konstrukci dvou podposloupností (b_n) a (c_n) posloupnosti (a_n) takto: (i) $b_1 := a_1$, (ii) $c_1 := a_m$, kde m je nejmenší index takový, že $b_1 < a_m$, (iii) $b_{n+1} := a_m$, kde m je nejmenší index takový, že $b_n < a_m < c_n$ a (iv) $c_{n+1} := a_m$, kde m je nejmenší index takový, že $b_{n+1} < a_m < c_n$. Tím dospějeme k posloupnosti vnořených intervalů

$$b_1 < b_2 < \cdots < c_2 < c_1.$$

Jsou-li obě posloupnosti (b_n), (c_n) konečné, vezmeme jejich poslední členy b_r, c_s. Z definice plyne, že neexistuje žádný prvek posloupnosti (a_n), který by mezi nimi ležel, a jelikož platí $b_r \neq c_s$, získali jsme celý interval (b_r, c_s) reálných čísel, která nejsou v oboru hodnot funkce f. Pokud by již neexistoval ani prvek c_1, získali bychom interval $(b_1, +\infty)$. Zbývá případ, kdy proces definování obou posloupností, tedy vnořování intervalů $b_1 < b_2 < \cdots < c_2 < c_1$, nekončí. Prvky posloupnosti (b_n) tak tvoří nekonečnou množinu $B = \{b_n \mid n \in \mathsf{N}\}$, omezenou shora všemi prvky posloupnosti (c_n). Podle věty o suprému proto musí existovat $x = \sup B$, pro něž z definice platí $b_n < x < c_n$ pro libovolné n. Z definice obou podposloupností pak ihned dostáváme $x \neq a_m$ pro libovolné m. □

Z předchozí věty plyne, že není možná bijekce mezi N a R. Jelikož platí $|\mathsf{N}| \leq |\mathsf{R}|$, musí platit i $|\mathsf{N}| < |\mathsf{R}|$. Přirozeně tak vyvstává otázka, zda se mezi mohutnostmi podmnožin kontinua nevyskytují ještě jiné nežli mohutnost přirozených a reálných čísel. My se k ní ovšem, sledujíce historický vývoj, dostaneme až po zavedení transfinitní řady ordinálních čísel. V ní dojde také poprvé k proměně Cantorova výzkumu kontinua ve studium nekonečen.

2.7 Indexy nekonečných iterací

Podmínka, kterou Cantor kladl na množinu bodů, pro něž daná trigonometrická reprezentace funkce nemusela konvergovat, a přesto zůstala jednoznačná, se týkala rozložení těchto bodů v kontinuu. Za tímto účelem zavedl v dříve jmenovaném článku z roku 1872 některá standardní topologická rozlišení, v první řadě pojem hromadného bodu, o němž hovoří jako o bodu limitním (*Grenzpunkt*). Východiskem je mu tedy teorie přímek, jak jsme ji popsali v oddíle 2.3.

> Mějme přímku $\langle A, < \rangle$. HROMADNÝ BOD množiny $M \subseteq A$ je takový bod $a \in A$, v jehož každém okolí leží nekonečně mnoho bodů z M. Ekvivalentně lze definovat jako hromadný takový bod $a \in A$, v jehož každém okolí leží alespoň jeden bod různý od a. Ty body M, které nejsou hromadné, se nazývají IZOLOVANÉ.

Lze říci, že hromadný bod a množiny M je libovolně aproximovatelný body množiny M, tj. pro každý bod b, představující nějakou aproximaci bodu a, lze najít bod c, jenž jej aproximuje lépe, tj. platí $a < c < b$. Ze způsobu, jímž vzniklo R z Q, je zřejmé, že všechna reálná čísla jsou hromadnými body množiny $\mathsf{Q} \subseteq \mathsf{R}$. Všimněme si, že hromadný bod množiny M nemusí být jejím prvkem, zatímco izolovaný bod podle definice ano. Izolovaný bod množiny M lze na rozdíl od jejího hromadného bodu uzavřít do intervalu disjunktního se zbytkem množiny M.

Na základě těchto definicí a konstrukce kontinua Cantor [1872, s. 98] obratem postuluje snadnou dokazatelnost tvrzení známého také jako BOLZANOVA-WEIERSTRASSOVA VĚTA:

> Je-li $\langle A, < \rangle$ úplná přímka, pak má každá množina $M \subseteq A$, která je nekonečná a (shora i zdola) omezená, alespoň jeden hromadný bod. Uvažujeme-li namísto úplné přímky $\langle A, < \rangle$ úplné těleso $\langle A, +, \times, < \rangle$, můžeme říci, že má každá omezená posloupnost konvergující podposloupnost.

Důkaz: Idea je jednoduchá. Uvažujme posloupnost $c_1, c_2, \ldots$ prvků z A a posloupnost $C_1, C_2, \ldots$ podmnožin M takovou, že $C_1 = M$, $c_n = \inf C_n$, $C_{n+1} = C_n - \{c_n\}$. Vzhledem k tomu, že je M nekonečná, je posloupnost (c_n) definována pro každé $n \in \mathsf{N}$. Předpokládejme nyní, že platí $c_{p+1} = c_p$ pro nějaké $p \in \mathsf{N}$. To znamená, že infimum množiny C_{p+1} se v této množině nevyskytuje. Jelikož uvedeným způsobem bylo v každém kroku n z množiny M odstraněno jen konečně mnoho prvků, je C_{p+1} nekonečná a z vlastnosti infima plyne, že se v každém okolí $U(c_p)$ vyskytuje nekonečně mnoho bodů z C_{p+1}, čili že je to její hromadný bod. Předpokládejme nyní, že situace $c_{p+1} = c_p$ nenastává, tj. platí $c_p < c_{p+1}$ pro každé $p \in \mathsf{N}$ a každý prvek posloupnosti (c_n) náleží množině M. Jelikož je M omezená, musí být omezená i $\{c_n \mid n \in \mathsf{N}\}$, ergo existuje její suprémum. Toto suprémum je zjevně hromadným bodem M. Verzi pro úplná tělesa dostaneme snadno z existence monotónní podposloupnosti, a to buďto uvážením příslušného řezu, nebo z tvrzení, podle něhož je v archimédovském tělese každá omezená monotónní posloupnost koncentrovaná. $\square$

Podobně jako Cantorův důkaz existence transcendentních čísel je i důkaz Bolzanovy-Weierstrassovy věty proslavený tím, že má výrazně nekonstruktivní rysy, neboť v něm dospíváme k existenčnímu tvrzení, aniž bychom byli obecně s to onen prokazatelně *existující* předmět pojmenovat. Tato výtka se týká především známější varianty důkazu pro úplná tělesa, jenž postupuje tak, že omezený interval, v němž se nachází daná nekonečná množina, dělí na dvě stejně velké části. Tím je rozdělena i tato množina, a jedna z jejích částí musí být nekonečná. Ta je dělena opět na dvě části, čímž dosahujeme koncentrované posloupnosti dělících bodů, která musí mít s ohledem na předpoklad úplnosti limitu. V každém jejím okolí se pak z uvedené definice musí nacházet nekonečně mnoho bodů výchozí množiny, a jedná se tedy o onen hledaný hromadný bod. Bolzanova-Weierstrassova věta je takto vlastně korolárem věty o suprému.

Od analýzy se ale již pomalu dostáváme ke zrodu ordinálních čísel coby indexů více než konečného opakování operací. Ke každé podmnožině M kontinua R je přesně definována množina jejích hromadných bodů, přičemž z Bolzanovy-Weierstrassovy věty plyne, že pro nekonečnou omezenou množinu se jedná o množinu neprázdnou. Cantor zde hovoří o DERIVACI (*abgeleitete Menge*, *Ableitung*) MNOŽINY M a značí ji jako M'. Podmnožiny kontinua jsou dále studovány s ohledem na chování svých derivací, přičemž Cantor [1883*b*, s. 195], [1884, s. 226] později rozlišuje tři základní typy:

(1) Množiny, které již všechny své hromadné body obsahují, pro něž tedy platí $M' \subseteq M$, se nazývají UZAVŘENÉ (*abgeschlossen*).

(2) Množiny, které sestávají výhradně ze svých hromadných bodů, pro něž tedy platí $M \subseteq M'$, se nazývají HUSTÉ V SOBĚ (*in sich dicht*).

(3) Množiny, které jsou husté v sobě a uzavřené zároveň, pro něž tedy platí $M = M'$, se nazývají PERFEKTNÍ (*perfekt*).

Příkladem uzavřených množin jsou tzv. UZAVŘENÉ INTERVALY, definované jako

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

Množina je hustá v sobě jednoduše tehdy, jestliže neobsahuje žádné izolované body. To nám umožňuje rychle nahlédnout, že podmnožina M kontinua může být *hustá v sobě*, aniž by byla *hustá v kontinuu* či prostě *hustá*: stačí vzít v úvahu sjednocení dvou intervalů $[0, 1] \cup [2, 3]$. Naopak, z hustoty množiny M v kontinuu plyne její hustota v sobě, neboť každý bod M je bodem kontinua, a jako takový dále aproximovatelný body M, čili jejich hromadným bodem. Uzavřené intervaly jsou také příklady množin perfektních. Přidáme-li k nim nyní nějaký izolovaný bod, zůstanou uzavřenými množinami, přestanou být ovšem husté v sobě, a tudíž i perfektní. Příkladem podmnožiny, která je hustá v sobě i v kontinuu, není ale uzavřená, a tudíž ani perfektní, je Q.

Cantor zjistil, že zatímco vztah první derivace množiny M může být různý, tj. jak jedním z výše uvedených typů $M' \subseteq M$, $M \subseteq M'$ či $M = M'$, tak třeba typu $M \cap M' = \emptyset$ pro M, M' neprázdné, chovají se další derivace M'', M''', ..., zapisované obecně jako $M^{(n)}$, podstatně ukázněněji, a to díky platnosti následující věty:

Nechť je $\langle A, < \rangle$ přímka a $M \subseteq A$. První derivace M' je uzavřená množina, čili $M'' \subseteq M'$.

Důkaz: Věta říká, že hromadné body hromadných bodů množiny M jsou opět hromadné body množiny M. Vezměme tedy nyní nějaký prvek $a \in M''$ a jeho okolí $U(a)$. V tomto okolí se musí vyskytovat nějaký prvek $b \in M'$ různý od a. Z definice okolí jakožto otevřeného intervalu a hustoty přímky platí, že existuje okolí $U(b) \subseteq U(a)$ takové, že $a \notin U(b)$. Jelikož je b hromadný bod množiny M, musí v $U(b)$ existovat $c \in M$ odlišné od b. To ovšem znamená, že v $U(a)$, zvoleném naprosto libovolně, existuje bod $c \in M$ odlišný od a. □

Díky tomuto tvrzení nemohou od druhé derivace počínaje přibývat nové body, ale nanejvýš ubývat staré, tj. platí

$$M' \supseteq M'' \supseteq M''' \supseteq \cdots.$$

Pro Cantorův problém nalezení co nejobecnější podmínky pro zachování jedinečnosti trigonometrické reprezentace se přitom ukázaly být významné ty podmnožiny kontinua, u nichž opakovaná aplikace uvažované operace vedla ke konečné množině hromadných bodů, výsledně tedy k množině prázdné. Tyto množiny, pro něž platilo $M^{(n+1)} = \emptyset$ a zároveň $M^{(n)} \neq \emptyset$, nazval Cantor [1872, s. 98] n-TÉHO DRUHU (*Art*). Jejich příkladem je třeba

$$A_1 = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{m+1} \mid m \in \mathsf{N} \right\},$$

tj. množina racionálních čísel aproximujících 0. Jelikož je zde 0 jediným hromadným bodem A_1, znamená to, že se jedná o množinu prvního druhu. Na bázi tohoto příkladu lze nyní zkonstruovat množinu druhu libovolného, když totiž všechny izolované body již zkonstruované množiny n-tého druhu aproximujeme řadou nových izolovaných bodů, a uděláme z nich tedy body hromadné, čímž dospějeme k množině druhu $n + 1$. Druhý krok konstrukce pak vypadá třeba takto:

$$A_2 = A_1 \cup \left\{ \frac{1}{m+1} + \frac{1}{k} \mid k > (m+1)(m+2) \wedge k, m \in \mathsf{N} \right\}.$$

To, co se v článku z roku 1872 pouze nabízelo, totiž odlišit všechny podmnožiny M kontinua, u nichž pro některé $n \in \mathsf{N}$ nastane $M^{(n)} = \emptyset$, od množin ostatních, učinil Cantor [1879] explicitně v prvním ze série článků věnovaných přímkám (lineárním množinám bodů), vycházejícím pod názvem *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten.* V těchto statích také začala systematická reflexe na práci s množinami, nejprve v rámci kontinua, včetně zavedení běžných množinových operací, jako je průnik či sjednocení, specificky však operace $X' = Y$, přiřazující každé podmnožině X kontinua její derivaci Y. Příklad množiny, pro kterou žádné konečné opakovaní $X^{(n)}$ nevede k prázdné množině, není přitom těžké najít, stačí, je-li hustá v sobě. Platí totiž tvrzení:

Je-li X hustá v sobě, je X' perfektní množina, čili $X'' = X'$.

Důkaz: Z definice plyne, že $X \subseteq X'$. Jelikož lze snadno dokázat, že z předpokladu $P \subseteq Q$ plyne vždy $P' \subseteq Q'$, můžeme nyní usoudit na $X' \subseteq X''$. Podle dříve dokázané věty je derivace množiny vždy uzavřená množina, a platí tedy $X'' \subseteq X'$, z čehož dostáváme kýžené $X' = X''$. □

Máme-li operaci f a objekt a takový, že $f(a) = a$, nazýváme obvykle a PEVNÝM BODEM operace f. Právě obecná otázka počtu kroků, které u dané operace a prvku potřebujeme k dosažení pevného bodu, stojí u zrodu teorie ordinálních čísel.

Ne u všech podmnožin R dochází totiž k jevu, jehož jsme byli svědky u množin n-tého druhu, které Cantor [1879, s. 140] souhrnně označuje jako množiny PRVNÍHO RODU (*Gattung*, *species*), nebo u množin hustých v sobě, totiž že je pevný bod nalezen v konečně mnoha krocích. Může se také stát, že řada derivací klesá, tj. platí

$$M' \supset M'' \supset M''' \supset \cdots,$$

aniž by existovalo n konečné takové, že $M^{(n)} = M^{(n+1)}$. Skutečnost, že neplatí $M^{(n)} = \emptyset$ pro žádné $n \in \mathsf{N}$, můžeme chtít zapsat jako $M^{(\infty)} \neq \emptyset$. Tento zápis použil poprvé Cantor [1880, s. 147] v druhém ze zmíněné série článků, v němž zároveň definoval

$$M^{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n \in \mathsf{N}} M^{(n)}.$$

Zde předpokládáme, že je již definována operace PRŮNIKU (neprázdné)[21] množiny (množin) R jako

$$\bigcap R \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid (\forall z \in R)(x \in z)\},$$

[21] Podmínka neprázdnosti množiny je významná, pracujeme-li již v obecné teorii množin, neboť pak by se z celého systému mohl stát systém všech předmětů, jejž obvykle nepovažujeme za definovanou množinu. Tyto potíže by samozřejmě nevznikly, pokud bychom se, jako původně Cantor, implicitně omezovali pouze na prvky nějaké přímky, konkrétně tedy body Cantorova kontinua.

z níž pak odvodíme průnik systému množin R_x indexovaných neprázdnou množinou A jako

$$\bigcap_{x\in A} R_x \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\{R_x \mid x \in A\}.$$

Podobnou definici lze samozřejmě zavést pro případ sjednocení, jak jsme jej zmínili v oddíle 2.3.

Nezávislá definice nekonečné derivace $M^{(\infty)}$ jako průniku derivací konečných nás staví před otázku, zda je pravda, že neplatí-li $M^{(n)} = \emptyset$ pro žádné n, neplatí ani $M^{(\infty)} = \emptyset$, jak se zdá sugerovat výše zavedený zápis. Cantor [1879, s. 148] přitom explicitně tvrdí, že tomu tak je, resp. že vztah $M^{(\infty)} = \emptyset$ nastává pouze pro množiny prvního rodu, a plně je tak charakterizuje. Ve skutečnosti jsme k tomuto tvrzení oprávněni pouze pro množiny omezené, s ohledem na větu:

> Průnik klesající (ve smyslu relace $\supset$) či nerostoucí (ve smyslu relace $\supseteq$) posloupnosti $(C_n)_{n\in\mathsf{N}}$ omezených, uzavřených a neprázdných množin je rovněž uzavřený a neprázdný.

Důkaz: (i) Je-li a hromadný bod průniku, pak v libovolném okolí $U(a)$ leží nekonečně mnoho bodů z průniku, tím pádem z každého C_n. Z jejich uzavřenosti plyne, že jim všem a náleží, a tudíž je i v jejich průniku. (ii) Vezměme posloupnost $(c_n)_{n\in\mathsf{N}}$, kde $c_n := \inf C_n$ existuje z omezenosti a z uzavřenosti náleží C_n. Posloupnost (c_n) je monotónní a omezená, tím pádem existuje $\lim(c_n)$, která je navíc hromadným bodem každé množiny C_n, tudíž jim všem náleží. □

Za předpokladu, že se zabýváme množinami omezenými, můžeme nyní definovat množiny DRUHÉHO RODU jako ty, pro něž platí $M^{(\infty)} \neq \emptyset$. Jejich příklady jsme samozřejmě již nalezli u množin hustých v sobě, kde se proces po konečně mnoha krocích zastavil na neprázdném pevném bodě, což samo o sobě znamená, že tento pevný bod musí být nekonečný. Nám jde ovšem o méně triviální příklady, od nichž dospějeme ke konečné, a tedy i prázdné množině bodů, ale až po více než konečně mnoha krocích. K tomu nám pomůže výše uvedený postup odvození množin libovolného n-tého druhu. Není ovšem možné vzít jednoduše jejich sjednocení $\bigcup_{n\in\mathsf{N}} A_n$, neboť tak bychom dospěli k množině husté v sobě, kterou lze dalšími kroky pouze zvětšovat. Jednotlivé množiny prvního, druhého, … druhu musíme klást za sebe do nekonečně mnoha separátních částí nějakého (omezeného) intervalu, dejme tomu $[0,1]$, rozděleného např. pomocí posloupnosti $(\frac{1}{n})_{n\in\mathsf{N}}$. Do první části, určené body $\frac{1}{2}$ a 1, tak vložíme množinu prvního druhu aproximující $\frac{1}{2}$, do druhé, určené body $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$, vložíme množinu druhého druhu aproximující jednak bod $\frac{1}{3}$ a jednak každý z bodů této aproximace atd. Aplikujeme-li na takto vzniklou množinu A_∞ operaci derivace, pak v prvním kroku zmizí všechny body prvního intervalu, s výjimkou bodu $\frac{1}{2}$, v druhém kroku všechny body druhého intervalu, s výjimkou bodu $\frac{1}{3}$, atd. Teprve po nekonečně mnoha krocích dospějeme k 0 jakožto jedinému hromadnému bodu, jenž zmizí v kroku $\infty+1$.[22] Operaci má tedy smysl opakovat nejen nekonečně krát, tj. pro libovolný konečný počet, ale i více než nekonečně krát, čímž se otevírá přirozená cesta ke známé transfinitní řadě

$$\infty, \infty+1, \ldots, \infty\cdot 2, \infty\cdot 2+1, \ldots, \infty^2, \ldots, \infty^\infty, \ldots, \infty^{\infty^{\infty^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}, \ldots.$$

Jelikož tu nejsou žádná kritéria identity ani žádné alternativní reprezentace, nepředstavuje tato řada zatím samostatné entity, nýbrž jen a jen indexy možných iterací určité operace na množinách kontinua, přičemž významné je, že pro každý z uvedených nekonečných indexů lze popsat množinu reálných čísel příslušného druhu. Právě a pouze v této souvislosti zavádí Cantor [1880, s. 147 n] poprvé 'ordinální čísla'.

Pomineme-li pozdější zdůvodnění řady ordinálních čísel jako zobecnění procesu úplného vyčíslení (dobrého uspořádání) množiny, vztaženého na množinu jakoukoli, tedy nejen spočetnou, má sama myšlenka původu čísel v indexech opakovaných operací velkou teoretickou přitažlivost, jak to uvidíme jednak na Fregově adjektivní definici čísla z *Grundlagen*, a především pak na Wittgensteinově teorii čísla, jak ji obsahuje jeho *Tractatus logico-philosophicus* [1922] (dále jen "Tractatus"). Je samozřejmě otázkou, do jaké míry by se s nimi Cantor mohl a chtěl identifikovat, z hlediska dějin idejí je to ale lhostejné. Vraťme se proto zpět k teorii ordinálů a její souvislosti s poměřováním množin v kontinuu, resp. nekonečných množin vůbec.

2.8 Ordinální a kardinální čísla

K přechodu od indexů množinových operací k číslům, která jsou sama objekty takových aplikací, se odhodlal Cantor v pátém ze série článků o lineárních množinách, jenž vyšel separátně pod názvem *Grundlagen der allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* [1883*a*] (dále zpravidla "Grundlagen") a s nímž bývá konvenčně spojován vznik teorie množin. Samo zavedení ordinálních čísel ale bylo do značné míry verbální a dočkalo se ještě v průběhu vývoje Cantorova díla několika upřesnění a změn. Současná explicitní definice ordinálů coby množin jistého typu je až dílem von Neumannovým z roku 1923. Cantorovy spisy ovšem obsahují všechny

[22] Kdybychom množiny typu A_n kladli do neomezeného intervalu $(-\infty, 0]$, rozděleného např. celými čísly, byla by výsledná množina prázdná, pokud bychom samozřejmě nepřestali chápat znak $-\infty$ synkategorematicky a nezačali jej používat ve významu nejmenšího prvku reálné osy. Tato úprava by měla své výhody, např. s ohledem na formulaci Bolzanovy-Weierstrassovy věty a dalších tvrzení.

fundamentální ideje, které jsou s ordinálními čísly spojovány, včetně té, podle níž je řada ordinálních čísel kostrou celé množinové hierarchie, v technickém i ideovém smyslu tohoto slova, což znamená, že s jejich adekvátním vysvětlením a propojením s dalšími pojmy Cantorova univerza, především tedy pojmem čísla kardinálního, celá smělá koncepce stojí a padá. K tomu se ještě dostaneme v kapitole 6.

Teorie transfinitních čísel je podle Cantorova vlastního vyjádření v dopise Mittag-Lefflerovi z 20. října 1884[23] spjata s jejich definicí nezávislou na jakékoli aplikaci, tedy především původním indexickém užití. Zmíněná problematičnost Cantorova pokusu z roku předešlého spočívá v tom, že jsme v principu konfrontováni pouze s myšlenkou generování nových čísel za tradičním prostorem čísel přirozených, která je příznačně uvozena studií o svobodné povaze matematiky (*freie Mathematik*) a jejích pojmů. Cantor [1883*b*, s. 182] říká:

> Matematika je ve svém vývoji naprosto svobodná a vázaná pouze přirozeným ohledem na to, aby její pojmy byly jednak vnitřně bezesporné, jednak aby stály v pevných, definicemi řízených vztazích k dříve utvořeným, stávajícím a osvědčeným pojmům. [...] Jakmile nějaké číslo tyto podmínky splňuje, může a musí být v matematice bráno jako existující a reálné.

Toto a podobná vyjádření nesou sice jisté shodné rysy s programem konceptualizace matematiky, později raženým zejména Fregovým logicismem. Na druhou stranu je to právě vágní odkaz k svobodnému tvoření nových předmětů, jejž Frege považoval za obecně neudržitelný a právem kritizoval z pozic, které jsou obvykle vydávány za platonistické. Skutečnost, že se k platonismu hlásí i Cantor, dává předběžně tušit, proč je tato interpretace Fregových názorů mylná.

Cantor měl přitom s ohledem na své náboženské založení s myšlenkou volného vytváření nekonečen problémy teologického charakteru, jež v průběhu života, zvláště po plném propuknutí duševní choroby (pravděpodobně trpěl maniodepresivní psychózou) konzultoval velmi intenzivně s vatikánskými teology, aby pak výsledky této debaty použil na podporu svojí teorie.[24] U člověka Cantorova intelektu lze samozřejmě očekávat, že teologické argumenty, které ve prospěch svojí teorie uvádí, vykazují značný stupeň sofistikovanosti, na druhou stranu musí být brány jako to, čím skutečně jsou, totiž literárním komentářem k něčemu, co vyžaduje hlubší zdůvodnění teoreticko-filosofické. Obecně je proto třeba rozlišovat mezi tím, co Cantor o svých teoriích říká, od toho, v čem skutečně spočívá jejich síla a nevyhnutelnost. To se ukáže být zvláště významné v pozdější konfrontaci množinové matematiky s Brouwerovým intuicionismem, jenž

[23] Citováno podle Hallett [1984, s. 51].
[24] Něco k tomu řekneme ještě v oddíle 6.4.

na úrovni externího sebezdůvodnění operuje stejně jako Cantor pojmy svobodné kreativity, a je pak tváří v tvář tradiční otázce po možnosti objektivního poznání stejně bezmocný. K tomu ale až později.

Ačkoli není Cantorova expozice nekonečných ordinálů z roku 1883 ideální, vstřícný čtenář má k dispozici dostatečné množství materiálu pro její uspokojivou rekonstrukci. Ta vychází z běžné praxe vyčíslování konečných množství. Chceme-li např. zjistit, kolik je vajec v nějakém košíku, bereme jedno po druhém a v duchu konstruujeme řadu 1, 2, 3, ..., dokud nedospějeme k číslu, které jim náleží, řekněme 12. To pak prohlásíme za jejich kardinální číslo ve smyslu existence jedno-jednoznačného přiřazení množiny vajec množině čísel $\{1, \dots, 12\}$. Pointa tohoto postupu nicméně spočívá právě v tom, že jsou přirozená čísla uspořádaná a že je pro ně v právě uvedeném smyslu ono uspořádání určující. To, jak jsme již poznamenali v oddíle 1.4, zakládá metodický primát ordinálních čísel před kardinálními. Tolik množiny konečné, nyní k nekonečným.

Spočetnost nekonečné množiny A s sebou nepřináší prostou existenci bijekce mezi ní a přirozenými čísly, ale i možnost jejího uspořádání do řady, která se řadě přirozených čísel podobá. Jeden z prvků A, totiž ten přiřazený číslu 1, je uchopen jako první, prvek přiřazený číslu 2 jako druhý atd., přičemž víme, že se v uvedené řadě někdy vyskytne *každý* prvek A. Představme si nyní, že podobně vyčíslujeme samotnou množinu N a že jsme při tom zvolili ‘špatný’ postup, např. jsme začali řadou 2, 4, 6, ... Je zřejmé, že tímto způsobem nevyčerpáme nikdy všechny prvky N, neboť k žádnému lichému číslu nelze dojít od 2 přičítáním 2. Předpokládejme však, že je nám po fiktivním ukončení tohoto procesu dovoleno začít ještě jednou. Pak lze vyčíslení všech přirozených čísel uvedeným způsobem prezentovat jako

$$2, 4, 6, \dots, 1, 3, 5, \dots$$

a přiřadit mu coby jejich možnému způsobu uspořádání ‘číslo’

$$\omega + \omega,$$

kde symbolem ω Cantor [1883*b*, s. 195] nahradil původní ∞. Toto ω je zároveň ordinálním číslem přiřazeným přirozeným číslům v jejich původním uspořádání, které začíná číslem 1 a každému členu předchází pouze konečně mnoho prvků. Může se také stát, že jsme si po započetí řady 1, 2, 3, ... vzpomněli, že chceme mezi přirozená čísla počítat i nulu. Jelikož po stanovení pravidla $a_n := n$ již není cesty zpět, nabízí se nám nyní možnost připojit ji nakonec, čímž dospějeme k posloupnosti

$$1, 2, 3, \dots, 0$$

s ordinálním číslem

$$\omega + 1.$$

Od původního uspořádání se liší tím, že má prvek 0 nekonečně mnoho předchůdců. Racionální čísla, pro jednoduchost v omezení na kladná a reprezentovaná jako v oddíle 2.6 tabulkou, vypadají zprvu jako nespočetná právě proto, že při jejich vyčíslování tíhneme k tomu začít řádkou $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, což nám pak zamezí projít čísla všech řádek zbývajících. V nynějším zobecnění si ale tento luxus můžeme dovolit, tj. po fiktivním průchodu řádkou první začít řádkou druhou, pak třetí atd.:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \ldots, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \ldots,$$

čímž dospějeme k číslu

$$\omega + \omega + \omega + \cdots,$$

stručně označenému jako ω^2. Jelikož jsme měli celou dobu vlastně co do činění pouze s přirozenými čísly (v posledním případě skrze bijekci $|\mathsf{Q}| = |\mathsf{N}|$) a různými způsoby $\langle \mathsf{N}, < \rangle$ jejich uspořádání, je zřejmé, v jakém smyslu byla řeč o nekonečných průchodech, číslech apod. pouze obrazná a v jakém by mohla být mystická. Cantor [1883*a*] motivaci zavedení svých nových čísel ze studia různých uspořádání bohužel pouze zmínil, ale zatím nezužitkoval. Namísto toho nechal svá ordinální čísla vzejít ze dvou základních generativních principů (*Erzeugungsprinzipien*), totiž:

(1) vytvoření čísla připojením jednotky k číslu stávajícímu,

(2) vytvoření nejmenšího většího čísla jakožto hranice (limity) nějaké neomezené řady čísel.

Samotný princip (1) pak vedl k tzv. PRVNÍ ČÍSELNÉ TŘÍDĚ (I), identické s čísly přirozenými. Spojením obou principů vznikla námi započatá řada ordinálů

$$\omega, \omega + 1, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1 \ldots, \omega^2, \omega^2 + 1, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}, \ldots.$$

Ta je, jak dokládají i uvedené příklady, ještě dlouho spočetná, což znamená, že každý z jejích prvků reprezentuje nějaké uspořádání spočetné množiny či ekvivalentně má jenom *spočetně* mnoho předchůdců. Cantor v souvislosti s třídou všech spočetných ordinálů hovoří o tzv. DRUHÉ ČÍSELNÉ TŘÍDĚ (II), ke které ovšem počítá pouze ta z čísel, která mají mohutnost třídy (I), tj. jsou spočetně nekonečná. Toto rozhodnutí není šťastné, neboť dělá definici třídy (α) závislou na mohutnosti třídy bezprostředně předcházející, čímž se vyhýbá transfinitnímu zobecnění pro třídy typu (ω), které bezprostředního předchůdce nemají! Tomu lze snadno odpomoci, postupujeme-li právě kumulativně, tj. chápeme-li třídu ordinálů jako systém všech ordinálů mohutností tříd předchozích plus konečných.

Ustanovení celé hierarchie, počínaje třídou (II), je ovšem podle Cantora možné teprve za cenu reformulace druhého generativního principu ve smyslu

(3) vytvoření nejmenšího většího čísla ke každé množině čísel.

Tuto reformulaci nazývá Cantor třetím generativním principem, konkrétně principem omezujícím (*Hemmungsprinzip*), neboť bez něho, tj. bez možnosti vztáhnout (omezit) druhý princip na libovolně popsanou *množinu* dosud zkonstruovaných čísel, by mohl proces generování čísel na bázi principů (1) a (2) pokračovat do nekonečna, pouze se spočetnými ordinály jakožto produkty. Princip (3), resp. reformulovaný princip (2), pak Cantorovi dovoluje produkovat první nespočetný ordinál Ω jakožto první číslo větší než jakýkoli prvek třídy (II), tj. aplikovat princip limitního prvku na 'množinu všech spočetných ordinálů'.

Jakkoli se může zdát tento způsob zavedení transfinitní řady vágní, Cantorovi umožňuje dokázat, že má třída (II) vyšší mohutnost nežli třída (I), a to dokonce první možnou, tj. že mezi velikostí třídy (I), neboli velikostí přirozených čísel, a velikostí třídy (II) již není žádná další. Předveďme nejprve Cantorův důkaz první části věty, a to i proto, že má podobnou strukturu jako jeho první důkaz nespočetnosti kontinua předvedený v oddíle 2.6. Tvrdíme tedy:

Třída (II) je nespočetná.

Důkaz: Vezměme jistou posloupnost $(\alpha_n)_{n\in\mathsf{N}}$ spočetných ordinálů a konstruujme její podposloupnost $(\beta_n)_{n\in\mathsf{N}}$ následovně: $\beta_1 := \alpha_1$, $\beta_{n+1} := \alpha_k$, kde k je nejmenší číslo takové, že $\beta_n < \alpha_k$. Takto dospějeme k rostoucí posloupnosti ordinálních čísel. Je-li konečná, pak vezmeme její poslední člen β_k a v souladu s prvním generativním principem vytvoříme číslo $\beta_k + 1$, které je také spočetné a není přitom v (α_n). Je-li posloupnost (β_n) nekonečná, pak vezmeme množinu B všech ordinálů menších než nějaký ordinál z (β_n), tj.

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{\beta \in (\mathrm{II}) \mid (\exists n \in \mathsf{N})(\beta < \beta_n)\} = \bigcup_{n\in\mathsf{N}} \{\beta \mid \beta < \beta_n\}.$$

Jako sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je B opět spočetná a podle druhého generativního principu existuje její 'hranice', tj. nejmenší vyšší číslo γ, které z definice náleží (II). Číslo γ se jistě liší od všech prvků z (β_n), přičemž to, že se liší i od všech prvků posloupnosti (α_n), plyne z toho, že je v ní (β_n) rostoucí. Máme tak nespočetnost (II). □

Problematickým bodem tohoto důkazu je teorém, že je sjednocení spočetně mnoha spočetných množin opět spočetné, díky němuž se příslušný ordinál γ opět nachází ve třídě (II). Jednak v něm totiž předpokládáme axiom výběru, což ale z Cantorova pohledu, jak se s ním seznámíme v kapitole 6, nevadí, co je ale významnější, důkaz v této podobě nelze zobecnit pro libovolnou třídu. Teorém je v něm totiž použit ke zdůvodnění teze, že posloupnost ordinálů třídy (α), která je indexována ordinálem této třídy, má v této třídě také suprémum. To ale neplatí obecně, třeba hned pro třídu (ω) získanou jako sjednocení (spočetně mnoha!) tříd předcházejících.[25]

Skutečnost, že má třída (II) vyšší mohutnost nežli třída (I), plyne ale *de facto* již z její definice, neboť za ní podle principu (3) musí následovat nějaký ordinál Ω, který v ní (z definice) nemůže být, což (opět z definice) znamená, že třída jeho předchůdců nemůže mít spočetnou mohutnost. A toto pozorování již lze zobecnit pro (α) libovolné. Druhá část Cantorova důkazu je neproblematická:

> Každá podmnožina třídy (II) je buďto konečná, nebo má mohutnost třídy (I), nebo má mohutnost třídy (II).

Důkaz: Vyjděme z okolnosti, že v souladu s uvedenou 'generativní' definicí má každá množina ordinálních čísel nejmenší prvek. To se ukáže být později zásadní. Předpokládáme-li nyní, že je A nějaká podmnožina třídy (II), jsou její prvky menší nežli první nespočetné číslo Ω. Navíc jsou všechny již uspořádány, existuje tedy nejmenší prvek A označený jako α_1, první větší α_2, tedy nejmenší prvek množiny $A - \{\alpha_1\}$ atd. Takto získáme vyčíslení $(\alpha_\beta)_{\beta\in\Delta}$ všech čísel z A, kde Δ je nějaký počáteční segment ordinální řady. Tento segment nemůže být přitom delší než Ω, neboť platí $\beta \leq \alpha_\beta < \Omega$. Mohou tedy nastat jen tři případy: (1) Prvky $\beta \in \Delta$ nepřesahují nějaké číslo z třídy (I). Pak je A konečná. (2) Prvky $\beta \in \Delta$ přesahují libovolné číslo z (I), ale nepřesahují nějaké číslo z (II). A má tedy mohutnost třídy (I). (3) Prvky $\beta \in \Delta$ přesahují libovolné číslo třídy (II). Pak má A mohutnost celé třídy (II). V každé z uvedených variant přitom posloupnost $(\alpha_\beta)_{\beta\in\Delta}$, tedy přiřazení prvků A prvkům Δ, určuje příslušné bijektivní zobrazení. $\square$

Všimněme si, že jsme zde, zcela přirozeně, začali používat rozšířený pojem POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n\in A}$, kde $\langle A, < \rangle$ je uspořádaná množina specifického typu, v němž má každá podmnožina A nejmenší prvek vůči uspořádání. Takovéto (částečné) USPOŘÁDÁNÍ se nazývá DOBRÉ a z jeho definice už přímo plyne, že je lineární. Je-li A konečné, nazýváme i příslušnou POSLOUPNOST KONEČNOU.

Souvislost ordinálních čísel s dobrým uspořádáním Cantor zmiňuje již při jejich zavedení v *Grundlagen* [1883*a*, s. 168]. Teprve roku 1885 však věnuje celou studii uspořádaným množinám a jejich typům, s tím,

[25] K diskuzi Cantorova původního důkazu srov. Hallett [1984, s. 75 nn].

že ji otiskne jako mnohé předchozí příspěvky v časopise *Acta Mathematica* svého příznivce, švédského matematika Gösty Mittag-Lefflera. Ten mu však po jisté době a z ne zcela jasných důvodů navrhnul, aby článek raději stáhl. Je otázka, zda tak činil v Cantorův, nebo svůj vlastní prospěch, jeho rozhodnutí v každém případě podstatně ochladilo vztahy mezi oběma muži.[26] Spolu s Cantorovým mentálním zhroucením z předchozího roku zde můžeme spatřovat důvody, proč je jeho novou teorii ordinálních čísel zvykem odvozovat až ze dvou článků z let 1895 a 1897, vydaných pod názvem *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* [1895/1897] (dále "Beiträge") a představujících vlastně prvního systematického následníka *Grundlagen*.

Principem Cantorovy teorie se zdá být opět definice abstrakcí, založená na relaci izomorfie, Cantorem nazývané podobností (*Ähnlichkeit*) dvou uspořádaných množin $\langle A, <\rangle$, $\langle B, <\rangle$. Ta nastává, existuje-li bijektivní zobrazení $f : A \leftrightarrow B$, které je vnořením, tj. zachovává uspořádání ve smyslu toho, že pro každé $a, b \in A$ platí $a < b$ tehdy a jen tehdy, když $f(a) < f(b)$.[27] K takto definované relaci $\cong$ ekvivalence lze nyní pro uspořádané množiny definovat abstrakcí TYP USPOŘÁDÁNÍ (*Ordnungstyp*) jako

$$\mathsf{Ord}(\langle A, <\rangle) = \mathsf{Ord}(\langle B, <\rangle) \rightleftharpoons \langle A, <\rangle \cong \langle B, <\rangle.$$

Ordinální čísla, v Cantorově terminologii "Anzahlen", jsou pak zavedena jakožto typy dobře uspořádaných množin. I na těchto typech lze definovat uspořádání, totiž prostřednictvím izomorfie jedné z výchozích množin s počátečním segmentem druhé. Použijeme-li dříve zavedenou konvenci $A_{<a}$ pro dolní segment $\{x \in A \mid x < a\}$ uspořádané množiny $\langle A, <\rangle$ určený prvkem $a \in A$, získáme USPOŘÁDÁNÍ ORDINÁLNÍCH ČÍSEL takto:

$$\mathsf{Ord}(\langle A, <\rangle) < \mathsf{Ord}(\langle B, <\rangle) \rightleftharpoons (\exists b \in B)(\langle A, <\rangle \cong \langle B_{<b}, <\rangle).$$

Jako dříve je samozřejmě třeba rozlišovat mezi různým použitím znaku $<$. Ačkoli se zatím zdá jít všechno hladce, řečí o typech uspořádání množin se Cantor dostal do obtížné situace, která je v souvislosti se zaváděním nových předmětů abstrakcí spjata s otázkou jejich zařazení mezi předměty původní, v tomto případě mezi množiny, *nota bene* množiny uspořádané. Chtěli bychom dosáhnout toho, aby ordinální čísla sama byla takovýmito množinami. Tato okolnost byla ostatně konstitutivní pro výše uvedený Cantorův důkaz!

Podíváme-li se ovšem na Cantorovu vlastní definici kardinálního a ordinálního čísla blíže, zjistíme nejprve, že nemá čistou podobu námi

[26] Viz Dauben [1979, s. 137 nn]. Článek vyšel později jako Cantor [1970].

[27] Obecnou definici izomorfie podáváme v oddíle 5.3.

popsané definice *logickou* abstrakcí, ale operuje s tradičními psychologickými prvky 'odhlížení' a 'přihlížení', později tak vehementně kritizovanými Fregem. V tomto vymezení pojmu množiny *psychologickou* abstrakcí Cantor [1895/1897, s. 297] říká, že

> každé uspořádané množině M náleží určitý *typ uspořádání*, či stručněji určitý "*typ*", jejž chceme značit $\overline{M}$ a jímž rozumíme *obecný pojem, jejž získáme z M, odhlédneme-li od povahy jejích prvků m, ale přihlížíme-li stále k jejich uspořádání.*

Cantor přitom již dříve [1895/1897, s. 282] analogicky definoval kardinální číslo, s tím, že u něho má být abstrakce od povahy prvků totální, a jedná se tedy o výsledek $\overline{\overline{M}}$ dvojité abstrakce, od povahy a od uspořádání počítaných prvků. Nás ovšem zajímá především jeho poznámka [1895/1897, s. 297], že

> ordinální typ $\overline{M}$ je sám uspořádaná množina, jejímiž prvky jsou 'pouhé jednotky', zachovávající totéž vzájemné uspořádání jako odpovídající prvky M,

a to nikoli z důvodu, že obráží v té době oblíbené, leč věcně neudržitelné pojetí čísla jakožto množiny jedniček (které se ostatně datuje již od Aristotela a Eukleida), ale že umožňuje kýžené ustanovení vztahů

$$\mathsf{Ord}(\langle A, <\rangle) \cong \langle A, <\rangle \qquad\qquad (\exists f)(f : |A| \leftrightarrow A).$$

Tím se otevírá potřeba explicitní definice ordinálních a kardinálních čísel jako množin určitého typu. — Na základě dosud řečeného lze přitom tušit, že máme-li již k dispozici ordinální čísla, lze kardinály zavést explicitně jako ty ordinály, množinu jejichž předchůdců nelze prostě zobrazit na její vlastní počáteční fragment. Moderní explicitní definice ordinálů pak spočívá na von Neumannově ideji ztotožnění ordinálního čísla s množinou svých předchůdců,[28] s prázdnou množinou $\emptyset$ jakožto počátkem a operacemi $\alpha \cup \{\alpha\}$ coby vytvářením bezprostředního následníka (prvním generativním principem) a sjednocováním dosaženého coby vytvářením limitního bodu (druhým, resp. třetím generativním principem). Kardinální čísla jsou potom jednoduše vydělitelná jako nejmenší ordinály dané mohutnosti. Tím se budeme ještě zabývat v kapitole 6.

Žádná z naznačených definicí není zcela neproblematická, včetně otázky, zda lze všechna rozlišení provádět explicitně či zda se bez nějakého implicitního způsobu přece jen neobejdeme. Tomu se budeme věnovat v souvislosti s Fregovou filosofií aritmetiky v kapitole 4. Nyní nás

[28] Viz von Neumann [1923]: "Základem našeho zkoumání je vlastně věta: 'Každé ordinální číslo je typ množiny všech předcházejících čísel.' Abychom však eliminovali vágní pojem 'typu', užijeme tuto formu: 'Každé ordinální číslo je množina všech předcházejících ordinálních čísel.'"

zajímá především to, že v rámci možnosti explicitního zavedení kardinálních čísel jako ordinálů jistého typu použil Cantor [1895/1897, s. 293] známé $\aleph$-notace, s $\aleph_0$ jakožto označením mohutnosti třídy (I) a $\aleph_1$ pro mohutnost třídy (II). Cantorova cesta od matematické analýzy k čisté teorii množin a dva důkazy nespočetnosti s touto cestou spjaté, tj. důkaz nespočetnosti kontinua a důkaz nespočetnosti druhé třídy ordinálních čísel, přitom přivádějí na svět otázku po mohutnosti kontinua ve smyslu jejího vztahu k druhému nekonečnému kardinálu $\aleph_1$. Tato otázka, resp. tvrzení, že kontinuum má mohutnost $\aleph_1$, a pro jeho podmnožiny tedy existují jen dva typy nekonečné mohutnosti, je známa jako hypotéza kontinua. Její obvyklá formulace a zobecnění pro libovolný kardinál jsou ovšem závislé na Cantorově druhém, slavnějším důkazu nespočetnosti kontinua a jeho zobecnění, jimž se budeme věnovat v dalším oddíle.

Nyní zbývá vysvětlit totéž, co u proporcí, totiž co dělá abstrakta přiřazená určitým množinám jako jejich kardinály a ordinály čísly. Pochopitelně jsou to operace, které nesou určitou podobnost s operacemi aritmetickými a mají, kromě čistě algebraické zajímavosti, také nezanedbatelnou roli praktickou v mechanickém usuzování, výpočtu typu uspořádání, resp. velikosti jistých množin z typů, resp. velikostí množin jiných. Kardinální aritmetika, kterou při výkladu ještě párkrát využijeme, je založena na následujících třech definicích, zavedených explicitně Cantorem [1895/1897, § 3, 4]: Pro kardinály $\kappa = |A|$ a $\lambda = |B|$ nechť

$$\begin{aligned}
\kappa + \lambda &\overset{\text{def}}{=} |(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})|, \\
\kappa \times \lambda &\overset{\text{def}}{=} |A \times B|, \\
\kappa^{\lambda} &\overset{\text{def}}{=} \left|A^B\right|.
\end{aligned}$$

Z těchto operací komentář nevyžaduje pouze násobení, snad jen, že jeho znak zpravidla vynecháváme, tj. píšeme $\kappa\lambda$. U sčítání představují 0 a 1 libovolné dva neidentické prvky, které výchozí množiny A, B rozrůzní, tj. zabrání existenci společných prvků. Symbolem A^B značíme systém všech (totálních) funkcí z B do A ve smyslu zobecněného kartézského součinu množiny A, indexovaného množinou B. Ten je pro systém množin $\{A_i \mid i \in B\}$ definován jako

$$\prod_{i \in B} A_i \overset{\text{def}}{=} \left\{ f \text{ totální} \mid f : B \to \bigcup\nolimits_{i \in B} A_i \wedge (\forall i \in B)(f(i) \in A_i) \right\}.$$

Již zavedené $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ lze nyní chápat také jako $\prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} A_i$, i když se v prvním případě jedná o množinu n-tic $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, zatímco v druhém máme množiny $\{\langle 1, a_1 \rangle, \ldots, \langle n, a_n \rangle\}$. To je ale nevýznamný detail. S uvedenou definicí v ruce můžeme zavést zobecněné sčítání a násobení kardinálů, kde pro $\kappa_i = |A_i|$ pro A_i z $\{A_i \mid i \in B\}$ položíme

$$\sum_{i \in B} \kappa_i \overset{\text{def}}{=} \left| \bigcup_{i \in B} (A_i \times \{i\}) \right| \qquad \prod_{i \in B} \kappa_i \overset{\text{def}}{=} \left| \prod_{i \in B} A_i \right|.$$

Je věcí běžné rutiny ověřit, že jsou příslušné operace definované nezávisle na výběru reprezentantů a že splňují obvyklé vlastnosti svých aritmetických protějšků, především komutativitu a asociativitu u $+$, $\times$ a distributivitu $\times$ vůči $+$. Pro mocnění platí $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \kappa^\mu$, $(\kappa\lambda)^\mu = \kappa^\mu \lambda^\mu$, $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\mu}$. Další podrobnosti si ušetříme. Zmíníme ale, že ordinální aritmetika se s tou obvyklou rozchází již v těchto bodech, když např. ordinální sčítání, odpovídající přidělování typu uspořádání za sebe položených uspořádaných množin, obecně nekomutuje, jak je to snadno vidět na příkladu $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$. Obecné zásady ordinální aritmetiky zavedeme stručně ještě v oddíle 6.6. V případě aritmetiky kardinální se odchylek dočkáme v omezení na čísla nekonečná, jak je to prominentně vyjádřeno rovností

$$\kappa + \lambda = \kappa \times \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

Ta platí primárně pro kardinály explicitně zavedené jako $\aleph$, tj. odvozené z dobře uspořádatelných množin, obecně až za předpokladu axiomu výběru, jak to alespoň z části vyplyne z dalšího výkladu. Tuto rovnost si je užitečné zapamatovat jako instanci obecnějšího:

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \max\{|I|, \sup\{\kappa_i \mid i \in I\}\}$$

pro κ_i nenulová a I nebo některé κ_i nekonečné. Příští kapitola bude věnována vztahu

$$\kappa < 2^\kappa,$$

jehož důkaz je co do množinově-teoretických předpokladů zcela neproblematický, ba křišťálově jasný. Brzy uvidíme, že s předpoklady filosofickými je tomu právě naopak.

2.9 Hypotéza kontinua

Svůj slavnější důkaz nespočetnosti kontinua podal Cantor roku 1891 v přednášce uveřejněné v článku *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre* [1892], a to přímo v jeho obecnější verzi, z níž se usuzuje, že řada různých velikostí nekonečen nemůže mít horní mez, a není tedy v žádném případě vyčerpána nekonečnými mohutnostmi podmnožin kontinua, neboť ke každé množině existuje množina mohutnosti větší. —

Principem tohoto důkazu je tzv. diagonální metoda, která má ve filosofii matematiky prominentní postavení nejen proto, že je s ní a s důsledky, které s sebou nese, spjata řada ideových kontroverzí, např. právě v otázce existence vyšších mohutností a jejich interpretace, ale i díky úzké vazbě na některé z logických paradoxů, jak se s nimi seznámíme v příštích kapitolách. Přitom to byla právě udivující jednoduchost Cantorova argumentu, která zajistila a stále zajišťuje teorii množin obecného přijetí u většiny matematiků a mnoha filosofů. Z didaktických důvodů začněme jeho speciální verzí, z níž plyne pouze nespočetnost kontinua.

Úvaha postupuje sporem, tj. předpokládáme, že je kontinuum, tj. obor R, spočetné. To znamená, že existuje jednoduché vyčíslení, v němž se na nějakém místě objeví každý z jeho prvků. Ve vlastní konstrukci hraje určitou roli volba reprezentantů, my rámcově vyjdeme z libovolných posloupností přirozených čísel neboli zobrazení N do N. Jedna část $(\leq)$ dále předpokládané rovnosti

$$|\mathsf{R}| = \left|\mathsf{N}^{\mathsf{N}}\right|$$

přitom plyne z toho, že má každé reálné číslo desetinný rozvoj (záporná čísla obsáhneme třeba tak, že necháme první číslo posloupnosti reprezentovat znaménko), druhá $(\geq)$ z toho, že každý nekonečný řetězový zlomek určuje právě jedno číslo z R. Nyní již k zajímavějším vztahům.

Předpokládáme, že máme vyčíslení množiny N^{N}, tj. nějakou (meta)-posloupnost F posloupností $f_1, f_2, f_2, \ldots \in \mathsf{N}^{\mathsf{N}}$, přičemž platí $F(x, y) = f_x(y) = a_{x,y} \in \mathsf{N}$, $x, y \in \mathsf{N}$. Jádro konstrukce spočívá v uvážení diagonály $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \ldots$, neboli posloupnosti

$$d(x) = F(x, x) = f_x(x) = a_{x,x}.$$

Ta se mezi prvky vyčíslení klidně může vyskytovat, tj. předpoklad, že pro nějaké n platí $f_n(x) = d(x)$ pro každé x, nevede ke sporu. To už

$$\begin{array}{llllllll l}
f_1 & \boldsymbol{a_{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & a_{1,7} & \cdots \\
f_2 & a_{2,1} & \boldsymbol{a_{2,2}} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} & a_{2,7} & \\
f_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & \boldsymbol{a_{3,3}} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} & a_{3,7} & \\
f_4 & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & \boldsymbol{a_{4,4}} & a_{4,5} & a_{4,6} & a_{4,7} & \\
f_5 & a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & \boldsymbol{a_{5,5}} & a_{5,6} & a_{5,7} & \\
f_6 & a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & \boldsymbol{a_{6,6}} & a_{6,7} & \\
f_7 & a_{7,1} & a_{7,2} & a_{7,3} & a_{7,4} & a_{7,5} & a_{7,6} & \boldsymbol{a_{7,7}} & \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

Obrázek 2.5: Diagonalizace kontinua

ale neplatí o posloupnosti, která z uvažovaného vyčíslení F vznikne, jestliže diagonální posloupnost v každém členu nějak deformujeme, tj.

přejdeme-li od posloupnosti d např. k posloupnosti d' takové, že $d'(x) = d(x) + 1$. Kdyby totiž existovalo n takové, že $f_n(x) = d'(x)$ pro každé x, pak musí platit i $f_n(n) = d'(n) = d(n) + 1$, což nelze, neboť $a_{n,n} = f_n(n) = d'(n) = d(n)+1 = F(n,n)+1 = f_n(n)+1 = a_{n,n}+1$. Důvod je jednoduše ten, že se d' od libovolného prvku vyčíslení F liší přinejmenším v jednom, totiž diagonálním členu. Jelikož je d' dobře definovaný prvek N^{N}, znamená to, že vyčíslení F nemohlo být totální, tedy že

$$|\mathsf{N}| < \left|\mathsf{N}^{\mathsf{N}}\right| = |\mathsf{R}|.$$

První zobecnění tohoto argumentu se týká množiny všech podmnožin N, kterou budeme obecně — tj. v aplikaci na libovolnou množinu M — značit jako $\mathcal{P}(M)$, v tomto případě tedy $\mathcal{P}(\mathsf{N})$, a hovořit o ní jako o POTENCI množiny M. Jelikož je v Cantorově pojetí každá množina určena výhradně svými prvky, lze každou množinu $X \subseteq \mathsf{N}$ prezentovat pomocí posloupnosti jedniček a nul, symbolizujících, zda je příslušné přirozené číslo prvkem X či nikoli. Obecně se totální funkci $f : M \to \{0,1\}$, pro niž platí

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } x \in X, \\ 0 & \text{jestliže } x \notin X, \end{cases}$$

říká CHARAKTERISTICKÁ FUNKCE množiny $X \subseteq M$. Množina $\{0,1\}^M$ či, jak se někdy píše, 2^M všech takovýchto funkcí má zjevně mohutnost $\mathcal{P}(M)$, platí tedy i vztah

$$|\mathcal{P}(\mathsf{N})| = \left|2^{\mathsf{N}}\right|.$$

Aplikujeme-li nyní výše uvedené diagonální schéma na 2^{N}, což znamená jednoduše uvažovat nějaké vyčíslení $F(x,y) = f_x(y)$ všech funkcí $f_x \in 2^{\mathsf{N}}$ pro $x \in \mathsf{N}$, pak podobnou úvahou jako dříve dospějeme nejprve k diagonální funkci $d(x) = F(x,x)$, a následně k její deformaci $d'(x)$ takové, že $d'(x) = 1$ tehdy a jen tehdy, když $d(x) = 0$. Tato funkce pak reprezentuje podmnožinu E přirozených čísel, která se v uvedeném vyčíslení F zaručeně nevyskytuje, a musí tedy platit

$$|\mathsf{N}| < \left|2^{\mathsf{N}}\right| = |\mathcal{P}(\mathsf{N})|.$$

Pomocí binární reprezentace reálných čísel lze snadno dokázat, že platí

$$|\mathcal{P}(\mathsf{N})| = |\mathsf{R}|,$$

v důsledku čehož můžeme k mohutnosti kontinua referovat skrze libovolnou z množin N^{N}, 2^{N}, $\mathcal{P}(\mathsf{N})$. HYPOTÉZU KONTINUA (CH) je přitom zvykem formulovat takto

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Druhé a finální zobecnění diagonálního argumentu se týká libovolné množiny M, resp. její potence $\mathcal{P}(M)$. Vezmeme-li nějaké zobecněné očíslování množiny $\mathcal{P}(M)$ prvky z M, tj. funkci F takovou, že $F(x,y) = f_x(y)$, kde $f_x \in 2^M$ a $x \in M$, pak podmnožinu E, jejíž charakteristická funkce se v uvedeném očíslování nevyskytuje, získáme zcela analogicky, tj. uvážením funkce d' takové, že $d'(x) = 1$ tehdy a jen tehdy, když $f_x(x) = 0$, přičemž

$$E = \{x \mid d'(x) = 1\}.$$

Pro názornost můžeme ještě celý výsledek prezentovat ve formě věty, podle níž žádné zobrazení $g : M \to \mathcal{P}(M)$ není surjektivní, kde zobrazení g odpovídá výše uvedenému vyčíslení F.

Důkaz: Máme-li nějaké zobrazení $g : M \to \mathcal{P}(M)$, stačí uvažovat množinu

$$E = \{x \mid x \notin g(x)\}$$

prvků, které nejsou prvky svých obrazů. To není zjevně nic jiného nežli deformovaná množina výše popsané diagonalizace. Kdyby bylo zobrazení g surjektivní, musela by být množina E obrazem nějakého prvku $e \in M$, tj. pro nějaké e by muselo platit $g(e) = E$. Přezkoumáme-li nyní možnosti $e \in E$ a $e \notin E$, dospějeme pokaždé ke sporu, neboť $e \in E$ tehdy a jen tehdy, když $e \notin g(e) = E$, a *vice versa*. Z toho plyne, že každé vyčíslení g prvků $\mathcal{P}(M)$ míjí množinu E, definovanou k němu výše uvedeným způsobem, a není tedy surjektivní. □

Tvrzení $|M| < |\mathcal{P}(M)|$ je v literatuře známo jako CANTOROVA VĚTA. Lze bez nadsázky říci, že tímto výsledkem, vedoucím k hierarchii větších a větších nekonečen:

$$\mathsf{N},\ \mathcal{P}(\mathsf{N}),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathsf{N})),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathsf{N}))),\ \ldots,$$

teprve začala éra emancipované teorie množin. Hypotéza kontinua, Cantorem [1878, s. 132] formulovaná relativně brzo, identifikuje tento okamžik s prolomením hranice kontinua, přičemž u Cantora [1883a, s. 192 n] nacházíme i náznak jejího zobecnění, tzv. ZOBECNĚNÉ HYPOTÉZY KONTINUA (GCH)

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1},$$

totiž v předpokladu, že N, $\mathcal{P}(\mathsf{N})$ a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathsf{N}))$ coby množina přirozených čísel, jejich potence a množina všech reálných funkcí reprezentují tři první mohutnosti. Přes veškerou snahu se ovšem Cantorovi uvedené tvrzení dokázat nepodařilo, což právem považoval za velkou ránu externí plauzibilitě svého systému. Hypotéza totiž představuje přirozené spojení obou, tedy právě popsané kardinální a ordinální transfinitní řady.

Nemožnost důkazu hypotézy kontinua ve smyslu jejího odvození z obecně přijímaných principů ukázal až Cohen [1963/1964], přičemž Gödel [1938] již dříve předvedl, že CH není na bázi stávajících axiomů vyvratitelná; úhrnem se tedy jedná o tzv. nezávislé tvrzení, rozuměj: nezávislé na daných axiomech. Na druhou stranu hypotéza kontinua dokazatelná je, předpokládáme-li, že lze celé množinové univerzum popsat pomocí jistých konstruktivních principů s řadou ordinálních čísel jakožto jeho kostrou, jak to vyjadřuje tzv. axiom konstruovatelnosti. Něco k tomu řekneme ještě v kapitole 6.

Vazba kardinálních čísel na čísla ordinální je přitom žádoucí ještě z jiného důvodu, který jsme vlastně již implicitně využili, když jsme hypotézu kontinua formulovali ve výše uvedené podobě $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, nikoli jako prosté tvrzení (Ch):

Mezi $\aleph_0$ a $2^{\aleph_0}$ neexistuje jiná kardinalita.

První přepis totiž implikuje, že lze mohutnost kontinua vyjádřit pomocí nějakého alef, tedy že lze kontinuum dobře uspořádat, a tím porovnat co do velikosti s $\aleph_1$. Obecná srovnatelnost kardinalit ale z implicitní definice jejich rovnosti a definice jejich uspořádání nijak nevyplývá, ačkoli ji Cantor také předpokládal jako triviálně platnou. Zermelo ji umožnil roku 1904 právě důkazem VĚTY O DOBRÉM USPOŘÁDÁNÍ (*Wohlordnungssatz*, *well-ordering theorem*, dále také WO), podle níž lze každou množinu dobře uspořádat. Předpokládáme-li totiž platnost WO, je důkaz věty o srovnatelnosti triviální. Cantor již v *Beiträge* [1895/1897, s. 319] ukázal, že dvě libovolná dobrá uspořádání jsou buďto izomorfní, nebo existuje počáteční segment jednoho, jenž je izomorfní s druhým. Uspořádání ordinálních čísel je tedy lineární a my můžeme přejít k VĚTĚ O SROVNATELNOSTI KARDINALIT:

Pro množiny X, Y platí buď $|X| \leq |Y|$, nebo $|Y| \leq |X|$.

Jsou-li libovolné dvě množiny X, Y dobře uspořádatelné, znamená to, že jim odpovídají nějaká ordinální čísla α, β, popisující typ jejich uspořádání. Těmto číslům ale již odpovídají nějaká alef ($\aleph$) coby nejmenší ordinály mohutnosti α a β, resp. množin všech jejich předchůdců. Coby ordinály jsou opět srovnatelné.

Stejně jako hypotéza kontinua byla i věta o dobrém uspořádání zprvu jen domněnkou Cantorovy teorie. Její široká aplikovatelnost však vedla brzy k tomu, že jí Cantor udělil nejen status principu spojujícího měření množin s jejich uspořádáním, ale dokonce principu určujícího, co ještě lze považovat za množinu a co nikoli. V této funkci se s WO ještě setkáme při líčení Cantorova střetu s množinovými paradoxy. Pozdějšímu přijetí věty do kánonu množinových principů oficiálně bránila její souvislost s axiomem výběru, resp. některé kontraintuitivní důsledky, které má. Původně tomu bylo ale spíše naopak, tj. axiom výběru se stal problematickým proto, že byl využit k důkazu dobrého uspořádání libovolné množiny, speciálně kontinua. Z hlediska výše uvedených variant hypotézy kontinua si je proto třeba zapamatovat, že jsou si ekvivalentní za podmínky přijetí axiomu výběru. Bez něho je první verze hypotézy kontinua (CH) silnější než druhá (Ch), a rovná se až její konjunkci s tvrzením, že lze kontinuum dobře uspořádat, tj. $2^{\aleph_0}$ je alef. Pak dostáváme $\aleph_0 < \aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ a příslušný závěr následuje. Zmíněná nezávislost hypotézy na obvyklé axiomatizaci teorie množin se přitom týká také jejího rozšíření o axiom výběru, tj. nesejde na tom, zda jsme ji formulovali v silnější nebo slabší verzi.

To všechno ale jsou objevy a rozlišení podstatně novějšího data. Mezi významné výsledky Cantorovy éry v oblasti poměřování mohutnosti množin lze jmenovat především Cantorovu-Bernsteinovu větu:

> Z platnosti $|X| \leq |Y|$ a $|Y| \leq |X|$ plyne $|X| = |Y|$.

Tu jsme již dokázali dříve. Cantor, jak jsme zmínili, tuto větu nedokázal, učinil tak ale jeho žák Felix Bernstein. Dalším pozitivním výsledkem bylo jiné podmíněné tvrzení, známé jako VĚTA CANTOROVA-BENDIXSONOVA:

> Je-li $M \subseteq \mathsf{R}$ uzavřená, lze ji rozložit na perfektní množinu M^*, kde $M^* = M^{(\gamma)}$ pro spočetné γ, a spočetnou množinu A.

Důkaz: Východiskem je pozorování, že klesající posloupnost $M' \supset M'' \supset M''' \supset \cdots$ derivací musí terminovat ve spočetně mnoha krocích. Mějme tedy nějakou takovou posloupnost $(M^{(\alpha)})_{\alpha<\gamma}$, indexovanou ordinálem γ, o němž chceme dokázat, že je spočetný. To by šlo snadno, kdyby v každém rozdílu $M^{(\alpha)} - M^{(\alpha+1)}$ bylo nějaké racionální číslo, neboť těch je jen spočetně. K tomu ale nejsme v obecném případě oprávněni. Namísto toho využijeme neprázdných otevřených racionálních intervalů, tj. takových intervalů (a, b), kde $a, b \in \mathsf{Q}$. Těch je rovněž spočetně, a lze je tak uspořádat v posloupnost $(I_n)_{n\in\mathsf{N}}$. Dále uvažujeme posloupnost $(N_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ množin takových, že $N_\alpha := \{n \in \mathsf{N} \mid I_n \cap M^{(\alpha)} \neq \emptyset\}$, o níž tvrdíme, že je rovněž klesající. Vztah $N_\beta \subseteq N_\alpha$ přitom platí triviálně pro všechna $\alpha < \beta < \gamma$. Z předpokladu existuje pro každé $\alpha < \gamma$ nějaké $x \in M^{(\alpha)} - M^{(\alpha+1)}$. Platí, že $N_x := \{n \in \mathsf{N} \mid x \in I_n\} \subseteq N_\alpha$. Kdyby nyní pro všechna $n \in N_x$ platilo, že $M^{(\alpha+1)} \cap I_n \neq \emptyset$, byl by x hromadným bodem množiny $M^{(\alpha+1)}$, což není možné, neboť je uzavřená. Existuje tedy $n \in N_x \subseteq N_\alpha$ takové, že $n \notin N_{\alpha+1}$, což jsme chtěli dokázat. Nyní pro $\Delta := \{\alpha \mid \alpha < \gamma\}$ vezměme zobrazení $g : \Delta \to \mathsf{N}$ takové, že $g(\alpha) = \min(N_\alpha - N_{\alpha+1})$. To je injektivní, a γ tudíž spočetné.

Z předchozího plyne, že posloupnost derivací *uzavřené* množiny M končí po spočetně mnoha krocích γ u perfektní množiny $M^* = M^{(\gamma)} =$

$M^{(\gamma+1)} \subseteq M$, která se nazývá jejím PERFEKTNÍM JÁDREM. Zbývá dokázat, že je množina $M - M^*$, nazývaná též množinou SKRYTÝCH IZOLOVANÝCH BODŮ, spočetná. To vyplyne z obecnějšího tvrzení, podle něhož je množina $B = M - M'$ izolovaných bodů spočetná vždy, tj. pro libovolné $M \subseteq \mathsf{R}$. Definujme zobrazení $f : B \to \mathsf{N}$ tak, že $f(x)$ je nejmenší $n \in \mathsf{N}$ takové, že $x \in I_n$ a $I_n \cap M = \{x\}$. Takové n vždy existuje právě proto, že je x izolovaným bodem M. Zobrazení f je injektivní, neboť z předpokladu $f(x) = f(y)$ dostáváme díky $\{x\} = I_{f(x)} \cap M = I_{f(y)} \cap M = \{y\}$ rovnost $x = y$. Tím pádem je B spočetná. Spočetnost $A = M - M^*$ získáme nyní snadno díky větě o spočetnosti spočetného sjednocení spočetných množin, totiž rozdílů $M^{(\alpha)} - M^{(\alpha+1)}$ pro $\alpha < \gamma$. Platí, že $M = M^* \cup A$ a $M^* \cap A = \emptyset$. □

Význam věty spočívá v tom, že z ní plyne platnost hypotézy kontinua pro speciální případ uzavřených podmnožin, neboli věta:

> Je-li $P \subseteq \mathsf{R}$ uzavřená, pak je buď spočetná, nebo má mohutnost kontinua.

I zde je ovšem zapotřebí několika netriviálních tvrzení, z nichž nejvýznamnější je lemma, podle něhož má každá perfektní neprázdná podmnožina kontinua jeho mohutnost. To by se zprvu mohlo zdát trivialitou, kdyby totiž jedinými neprázdnými perfektními množinami byly uzavřené intervaly či alespoň množiny, které takové intervaly obsahují, neboť pro $[a, b]$ platí $|\mathsf{R}| = |[a, b]|$ na základě dříve předvedených bijekcí. Cantor ovšem ukázal, že existují perfektní neprázdné množiny, které neobsahují vůbec žádný interval, a jsou v tomto smyslu totálně nespojité neboli: tvoří DISKONTINUUM. Tento případ bylo proto třeba ošetřit zvlášť, tj. dokázat, že mohutnosti kontinua a diskontinua koincidují. Máme-li tento důkaz, jejž ovšem předvádět nebudeme,[29] je důkaz hypotézy kontinua omezené na uzavřené podmnožiny snadný. Je-li M taková množina kontinua, pak je buď spočetná, nebo nespočetná. V druhém případě existuje její rozklad $M^* \cup A$, kde M^* musí být neprázdná a perfektní. Tudíž platí i $|M^*| = |\mathsf{R}|$ podle zmíněného lemmatu, čili i $|M| = |\mathsf{R}|$.

Větu Cantorovu-Bendixsonovu dokázal Cantor [1884, s. 221 n] v posledním ze série svých článků o lineárních množinách bodů poté, co v pátém článku [1883*b*, s. 193] příslušné tvrzení přehnal a byl na pravou míru uveden studií Mittag-Lefflerova žáka Ivara Bendixsona [1883]. Od koroláru, který jsme prezentovali jako dílčí případ hypotézy kontinua pro uzavřené množiny, si Cantor [1884, s. 244] v téže sérii sliboval rozšíření na libovolnou podmnožinu kontinua, a to prostřednictvím konstrukce uzavřené množiny M mohutnosti $\aleph_1$. Z její nespočetnosti by plynula exis-

[29] Viz třeba Deiser [2004, kap. 12].

tence perfektního jádra mohutnosti R, z čehož by již plynuly rovnosti $|\mathsf{R}| = |M| = \aleph_1$. Tato idea bohužel nefunguje.[30]

2.10 Kontinuum a diskontinuum

S koncem předešlého oddílu jsme dospěli do stavu, v němž by nám mělo být alespoň rámcově jasné, v čem spočíval přínos teorie množin k základům matematiky, zejména pak k programu konceptualizace analýzy. Tím je v první řadě užití abstraktních metod, jejichž povahu jsme zhruba opsali na předchozích stránkách. Stejně tak by nám měla být blíže známa odvrácená strana tohoto přístupu, totiž mnohé neurčenosti ve zcela základních pojmech, čímž momentálně myslíme pojmy a tvrzení, kvůli nimž byla celá redukce podniknuta. Negativní primát v tomto ohledu drží hypotéza kontinua. Situace se ale ještě zhorší, když se neurčenost přenese i na pojmy vlastní, totiž čisté teorie množin. K tomu dojde především v souvislosti s množinovými paradoxy a zasažena bude nejen oblast kardinálních a ordinálních čísel ale i samotný pojem množiny.

Skutečnost, že Cantor objevivší se antinomie na rozdíl od problémů typu hypotézy kontinua nepovažoval za vážné ohrožení svých výzkumů, může být potvrzením toho, že je měl za pojištěné jejich zakotvením v teorii reálného čísla, a neobával se tedy, že by je mohl čekat osud metafyziky hynoucí ve vzduchoprázdnu svévolných pojmů a nezdůvodněných diferencí, kde je možno tvrdit cokoli, a tudíž nic. Objektivní síla Cantorových vět a důkazů přitom spočívá v jednoduchosti užitých pojmů a argumentačních forem, mezi nimiž vyniká jak zavedení úplného oboru reálných čísel skrze koncentrované posloupnosti čísel racionálních, tak vykřesání teorie ordinálů z problematiky iterací množinových operátorů na specificky definovaném kontinuu, především však diagonální argument pro nespočetnost kontinua, včetně jeho zobecnění ve prospěch existence množin větších a větších mohutností. Jednoduchost ovšem není kritériem správnosti, a to, že je nějaký argument obecně přijímán, již teprv ne. Prozkoumat, v jakém smyslu jsou tedy Cantorovy závěry, především ve vztahu k povaze nekonečna, oprávněné, je prvořadou povinností filosofie matematiky. Dostáváme se zde přitom do stejné situace jako dříve u Bolzanova 'důkazu' věty o mezihodnotě, totiž k otázce, zda je skutečně tak jasné, o čem (množinách, jejich potencích, jejich mohutnostech) hovoříme, tedy jak máme vymezený pojem *pravdy*, abychom mohli něco jiného, v tomto případě Cantorův diagonální argument, považovat za *důkaz*. Nejde v Cantorově úvaze třeba jen o jakési upozornění, že je pojem reálného čísla třeba užívat jinak nežli pojem čísla přirozeného?

Nepřímou podporu tomuto kritickému čtení dává přitom už okolnost, na kterou nejspíše jako první upozornil Weyl [1918], totiž že se

[30] Srov. Hallett [1984, s. 90 nn].

takto bezstarostně užívané pojmy množiny, především tedy obraty jako "všechny podmnožiny přirozených čísel" či "všechny posloupnosti přirozených čísel", ukazují velmi brzy jako velmi problematické, konkrétně v nevyjasněném vztahu velikosti kontinua $|\mathsf{R}| = |\mathcal{P}(\mathsf{N})|$, obecně pak ve vztahu k již zmíněným pravidlům konstituce abstraktních oborů. Dospíváme-li totiž k předmětným oborům skrze kritéria identity zvolených reprezentací, musíme nejprve stanovit, co lze a co nelze považovat za jméno libovolné množiny či posloupnosti a jak budou vypadat příslušné identity. Ani Frege, jenž si tuto povinnost uvědomil v plné šíři, ovšem netušil, na jakou škálu problémů v tomto zdánlivě bezkonfliktním úkolu natrefí. Již to mluví proti 'přirozenosti' či 'ontologickému primátu' teorie množin, jak se i dnes ukrývají v názoru, že je jakýmsi rámcem, pracovní plochou matematiky či dokonce logiky, výmluvně shrnutém ve známém Hilbertově výroku o Cantorově ráji, z něhož se matematici již nenechají vyhnat. Je možná ironické, i když na druhou stranu pochopitelné, že první vážné otřesy, které Cantorův ráj postihly, přišly právě v důsledku pokusů postavit jej na pevnější, lépe kontrolovatelný základ v rámci studia užitých větných a inferenčních forem. Těm se budeme podrobně věnovat v další kapitole.

Nežli k ní ovšem přejdeme, zmiňme se ještě stručně o tom, co Cantor sám považoval za definitivní výsledek svých pokusů o zachycení podstaty kontinua, tj. o jeho finální charakterizaci tohoto pojmu v abstraktně-konceptuálním slovníku. Významnou roli při tom hraje pojem Cantorova diskontinua, jejž lze přes sugestivní název velmi rychle odkrýt jako čistě technický, tj. filosoficky nezajímavý. Samo diskontinuum se poprvé objevilo v Cantorových *Grundlagen* [1883*a*, s. 207] také v rámci studia perfektních množin coby příklad perfektní množiny, která 'není hustá v žádném intervalu'. Podle Cantorovy definice [1879, s. 141]:

> Množina M je HUSTÁ V INTERVALU I, je-li každý bod intervalu I aproximován body M, čili $I \subseteq M'$.

Z hustoty množiny M v intervalu I plyne, že pro každé dva body $a, b \in I$, kde $a < b$, existuje bod $c \in M$ takový, že $c \in (a, b)$, čímž se nám spojují definice hustoty skrze uspořádání a uzávěrovou operaci derivace, neboť tento vztah platí i obráceně. Shrňme pro přehlednost dosavadní definice hustoty.

(1) *Hustota prostá* (absolutní) množiny M je výskyt prvku c takového, že $a < c < b$ pro libovolné dva prvky $a, b \in M$ takové, že $a < b$.

(2) *Hustota množiny N v množině M* (relativní hustota) je výskyt prvku $c \in N$ s vlastností $a < c < b$ pro libovolné dva prvky $a, b \in M$ takové, že $a < b$.

(3) Množina M je *hustá v sobě*, jestliže $M \subseteq M'$, tj. jestliže neobsahuje žádné izolované body neboli každý její prvek lze aproximovat nějakými jinými prvky z M.

Relativní hustota implikuje absolutní hustotu obou množin, jestliže $N \subseteq M$. Z hustoty množiny v R plyne její hustota v sobě, nikoli naopak. Z hustoty množiny v sobě neplyne ani její hustota prostá. Množina hustá v intervalu I nemusí být hustá v sobě, není-li totiž v I zcela obsažena. Jestliže v něm ale obsažena je, pak je nejenom hustá v sobě, ale i hustá prostě.

Diskontinuum je naopak příkladem množiny, která je hustá v sobě, ale není hustá v žádném intervalu kontinua, což znamená, že pro každý interval $I \subseteq \mathsf{R}$ existuje interval $J \subseteq I$, v němž se nevyskytuje žádný bod dané množiny. Z toho již plyne, že daná množina neobsahuje žádný interval, jak jsme to při charakterizaci diskontinua zmínili dříve. Opačná implikace ovšem obecně neplatí, tj. množina, která neobsahuje žádný interval, např. množina racionálních čísel, může být hustá v nějakém (či dokonce v každém) intervalu kontinua. To se však netýká množin uzavřených, neboť kdyby takováto množina M byla hustá v nějakém intervalu I, tj. kdyby platilo $I \subseteq M'$, musela by jej s ohledem na $M' \subseteq M$ již obsahovat, v rozporu s předpokladem. Na pozadí Cantorovy teorie není přitom konstrukce diskontinua nijak konceptuálně komplikovaná:

> Cantorovým diskontinuem či též Cantorovou množinou nazýváme množinu všech reálných čísel c, jejichž ternární zápis $c = 0{,}c_1c_2c_3\ldots$ sestává pouze z čísel 0 a 2, tj. $c_i \in \{0, 2\}$ pro $i \in \mathsf{N}$. Značíme ji CD.

Přiřadíme-li k tomuto abstraktnímu popisu také popis názorný, pak řekneme, že diskontinuum vzniká sukcesivním dělením daného intervalu na tři stejné části a následným vynecháváním prostřední z nich. To odpovídá vypouštění čísla 1 z ternární reprezentace. Začínáme přitom intervalem $[0, 1]$, tj. odstraníme interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, a pokračujeme v podobném dělení intervalů zbývajících. V jednotlivých krocích tak máme množiny

$$
\begin{aligned}
C_1 &:= [0, 1],\\
C_{n+1} &:= C_n \cap \bigcup_{\substack{0 \le k < 3^n \\ k \text{ sudé}}} \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]
\end{aligned}
$$

pro $n \in \mathsf{N}$, přičemž platí

$$
\mathsf{CD} = \bigcap_{n \in \mathsf{N}} C_n.
$$

Cantorova množina je zjevně výsledkem průniku klesající posloupnosti uzavřených, omezených a neprázdných podmnožin. Jako taková je také uzavřená a neprázdná. Tím jsme získali důkaz části ohlášeného tvrzení:

> CD je perfektní množina, která neobsahuje žádný interval a má mohutnost kontinua.

Důkaz: Abychom dokázali perfektnost, musíme vedle uzavřenosti CD dokázat, že je hustá v sobě. To znamená, že každý bod $c \in \mathsf{CD}$ je hromadným bodem této množiny. Každé c je přitom dáno svým ternárním zápisem, jejž si lze vizualizovat jakožto proces lokalizace c v některém z třetinových intervalů. Hodnota $c_n = 0$ znamená, že byl v kroku n umístěn do levé, $c_n = 1$ do prostřední (přičemž tento případ z definice nepřipadá v úvahu) a $c_n = 2$ do pravé části dále děleného intervalu. Končí-li rozvoj triviálně, je zřejmé, že byl bod od jistého okamžiku umisťován stále vlevo a s ohledem na vynechávání prostřední části jej lze body CD aproximovat pouze zprava. Rozlišme proto dva případy. V prvním nemá číslo $c = 0,c_1c_2c_3\ldots$ triviální rozvoj, tj. pro každé $m \geq 1$ existuje $n \geq m$ takové, že $c_n \neq 0$. Uvážíme-li tedy množinu $C = \{0,c_1c_2\ldots c_n \mid n \geq 1\}$, je c jejím suprémem a díky $c \notin C$ i hromadným bodem, přičemž zjevně $C \subseteq \mathsf{CD}$. V druhém případě triviální rozvoj má, což znamená, že existuje $k \geq 0$ takové, že $c_k \neq 0$ a $c = 0,c_1\ldots c_k$. Nyní musíme konstruovat příslušnou aproximaci zprava, tedy ukázat bod c jako infimum. Uvažme proto množinu $D = \left\{c + \frac{2}{3^n} \mid n > k\right\}$. Platí opět, že $D \subseteq \mathsf{CD}$, c je infimum D a $c \notin D$, tedy c je hromadným bodem D, tím pádem i množiny CD.

Nyní dokažme, že CD neobsahuje žádný interval $[a,b] \subseteq [0,1]$. Kdyby ano, pak existují $n \in \mathsf{N}$ a $k \in \mathsf{N}_0$ takové, že $k < 3^n$ a $I = \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right] \subseteq [a,b]$. Podle konstrukce CD je ovšem zřejmé, že jsme v $(n+1)$-tém kroku z intervalu I vyňali jeho střední část $\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$. To je samozřejmě v rozporu s předpokladem. Poslední bod důkazu, tj. fakt, že má CD mohutnost kontinua, plyne snadno z úvahy nad ternárními rozvoji čísel v CD. Každé z nich má jednoznačný rozvoj uvedeného typu, tj. daný posloupností čísel 0 a 2, neboť alternativní reprezentace čísel s triviálními rozvoji musí použít číslo 1. Zároveň triviálně platí, že každé takto popsané reálné číslo je v CD. Z toho již dostáváme

$$|\mathsf{CD}| = \left|\{0,2\}^{\mathsf{N}}\right| = \left|2^{\mathsf{N}}\right| = |\mathsf{R}|,$$

a důkaz je tedy dokončen. □

Lze dokázat, že každá neprázdná podmnožina R, která je perfektní, omezená a neobsahuje žádný interval, je izomorfní Cantorově množině, a má tím pádem její mohutnost. Z toho již plyne výše ohlášená verze hypotézy kontinua pro uzavřené množiny. Z věcného a historického hlediska nás ovšem diskontinuum zajímá především jako příklad množiny, která by porušila představu, že lze kontinuum bodů uchopit jako perfektní množinu. To by, samo o sobě, mohlo vypadat jako absurdní nápad, protože k definici perfektní množiny již pojem kontinua ve smyslu struktury jistého typu potřebujeme. V tomto ohledu kritizuje Cantorovu definici např. Peirce [1931–1958, § 4121],[31] když říká:

> [...] perfektní množina je definována jako obsahující 'každý bod' jisté deskripce. Avšak není předložena jediná pozitivní idea, co jsou tyto body zač: jedná se o definici negací, která nemůže být povolena. Kdybychom ji připustili, mohli bychom říci rovnou, že spojitou posloupností bodů je taková, která obsahuje každý bod přímky mezi dvěma okraji.

Na druhou stranu je zřejmé, že i určité části kontinua představují jeho strukturální kopie, a lze se k nim tedy jako ke kontinuu chovat, zvláště když tradiční, např. Kantovo, vymezení kontinuity zdůrazňuje, že části kontinua jsou rovněž kontinui. Na tomto pozadí lze také pochopit Cantorův problém, který vyvstal s existencí perfektních množin, které nejsou husté v žádném intervalu. Cantor ovšem nepožadoval, aby příslušná perfektní množina, pretendující na roli kontinua, byla hustá v každém intervalu, právě proto, že by musel specifikovat, jaký celek intervalů uvažuje, ale definoval [1883*a*, s. 194] pomocný pojem souvislé množiny:

> Množina $M \subseteq \mathsf{R}$ je SOUVISLÁ (*zusammenhängend*), jestliže pro libovolné dva body $a, b \in M$ a číslo $\epsilon \in \mathsf{R}$ existuje konečná posloupnost bodů $c_1, c_2, \ldots, c_n \in M$ taková, že vzdálenosti $|a - c_1|, |c_1 - c_2|, \ldots, |c_{n-1} - c_n|, |c_n - b|$ jsou menší než ϵ.

Je zřejmé, že souvislá množina M je hustá v každém intervalu daném libovolnými body $a, b \in M$. Definice navíc využívá pojem vzdálenosti a Cantor tak k *topologické* charakterizaci kontinuity jako perfektní množiny přidává charakterizaci *metrickou.* V současnosti se pojem souvislosti užívá v jiném významu, který je ovšem s tím Cantorovým spřízněný. Zmíníme se o něm později, konkrétně v oddíle 7.3.

Chápat Cantorovu definici jako vylepšení antického vymezení kontinua je problematické již proto, že je v rozporu s oficiální tezí tehdejší geometrizované aritmetiky, totiž že přímku není možné redukovat na posloupnost či dokonce množinu bodů, jak to Cantor explicitně činí, ale že je to jen jakýsi potenciální prostor dalších dělení, jímž body teprve vznikají, resp. jehož prostřednictvím — jakožto průniky čar — jsou teprve definovány. V tomto smyslu, reprezentovaném Aristotelovou analýzou kontinua a v ní zužitkovaným pojmem potenciálního nekonečna, se

[31] Přestože mu — v jedné fázi vývoje jeho myšlení — Cantorův způsob definování kontinua jako jisté množiny bodů filosoficky i matematicky imponoval. Viz třeba Zink [2004].

pokouší později L. E. J. Brouwer a celá konstruktivistická škola obhájit tradiční filosofický pohled na kontinuum a aritmetiku obecně. Jelikož to však zcela schizofrenicky činí na pozadí Cantorova pojmového rámce, je její přínos k filosofické analýze pojmu kontinuity velmi problematický.

Jaké přednosti a omezení s sebou Brouwerův přístup k základům aritmetiky přináší, uvidíme v kapitole 7. V následujících kapitolách se budeme zabývat jedním z dalších Brouwerových terčů, totiž myšlenkou, že lze aritmetiku seriózně budovat teprve na základě analýzy a revize jejích jazykových forem, ba že je to jediná možná cesta, jak se dobrat adekvátního výkladu ontologických závazků, které jsou spojeny s řečí o číslech jakožto předmětech jistých vlastností, a výkladu závazků inferenčních, souvisejících s tvrzením a dokazováním aritmetických vět. Z této idey vyrůstá nejen koncept Fregovy logiky a její role v projektu finální konceptualizace analýzy, tj. Fregova logicismu, ale i sama myšlenka analytické filosofie coby metody řešení filosofických problémů.

3 Aritmetická logika a její možnosti

Otázka podmínek a motivů vzniku moderní logiky je záležitostí stejně komplikovanou a komplexní jako problematika vzniku moderní analýzy, ba v jistém smyslu ještě komplikovanější, neboť nám chybí jakákoli pevná vývojová linie, kterou by šlo stopovat více než sto let zpět od vydání Fregovy *Begriffsschrift*. Navíc se nezdá, že by nás studium dva tisíce let trvající tradice aristotelské logiky, na rozdíl od tradice matematické analýzy, přivádělo jakkoli blíže k logice moderního typu. To samozřejmě neznamená, že by se jednalo o zcela nesouvisející aktivity, u nichž je shoda jmen pouhým historickým nedopatřením, jak by se mohl domnívat ten, kdo si všiml, že logika předfregovská našla své uplatnění výhradně v oblasti úvah filosofických, zatímco těžiště úspěchu a kanonizace logiky moderní leží takřka cele v matematice. Chápeme-li logiku jakožto podnik zabývající se otázkami zdůvodnění platnosti úsudků, tj. přechodů od vět k větám, či moderní terminologií, otázkami inferenčních závazků spjatých s vynesením soudu, představuje Aristotelova sylogistika významný precedens, jejž Frege 'pouze' jistým způsobem upravil a rozvinul. To, že v praxi nejsme schopni toto jeho rozšíření z tradiční logiky odvodit, je pak dáno jednoduše faktem, že se Frege na rozdíl od Aristotela orientoval na jiný úsudkový diskurz, a musel proto začít *ab ovo*.

Ačkoli tedy Aristotelův systém neměl na to, co sledujeme, tj. dějiny čísla, prakticky žádný vliv, zatímco systém Fregův z nich dílem vyrostl, dílem se spolu s teorií množin podílel na jejich radikální proměně, je srovnání obou logických konceptů nejlepším způsobem, jak si udělat jasný názor na to, co logika je a jak může přispět k řešení problematiky základů aritmetiky. Náš výklad přitom musí být již s ohledem na zmíněný, bezprecedentní charakter fenoménu moderní logiky částečně ahistorický, tj. musíme v něm poskočit zhruba o padesát a více let dopředu, abychom pak mohli posoudit racionále některých diskuzí, které měly na její vývoj rozhodující vliv. Takto se náš výklad často významně protne se standardní náplní základního logického *curricula*, které chceme přesto, a nebo právě proto, že je považováno za elementární, alespoň v hrubých rysech projít a kriticky přezkoumat co do původních cílů a konstitutivních předpokladů. Kritický rozbor se v této části bude týkat ovšem jenom některých pojmů (logická pravdivost, interpretace), k jiným se teprve dostaneme, případně znovu vrátíme.

3.1 Co je platný úsudek?

Vývojová nespojitost Aristotelova a Fregova systému může znepokojit pouze toho, kdo by od logiky či vědeckých disciplín obecně očekával uniformní a vyčerpávající popis okolního světa, perspektivně sjednotitelný do jakési 'teorie všeho'. Logika by v této koncepci poznání měla na starosti vedení úsudků napříč disciplínami, a její jednotlivé dějinné instance by tedy byly jen dílčími kroky v procesu univerzální kanonizace principů správného myšlení a usuzování, stejně jako je v Popperově [1963] koncepci *verisimilitude* (přibližování se pravdě) Einsteinova fyzika dalším, byť stále nedokonalým zpřesněním Newtonovy teorie, ve smyslu lepší aproximace skutečného stavu světa. Paradoxně je tato zdánlivě skromná teorie lidského poznání bytostně metafyzická.

Na rozdíl od klasické pythagorejské a platónské teorie, jež jsou snadno interpretovatelné pragmaticky ve smyslu optimistické hypotézy, podle níž lze svět kolem nás, tj. vnější, ale i vnitřní realitu racionálně vysvětlit (neboť racionální vysvětlení je v posledku to, co je reálným činí), předpokládají empirické, naturalistické a fyzikalistické teorie již to, co chtějí zdůvodnit, totiž reglementaci světa způsobem, jejž považují za nějak přirozený, např. do počitkových kvalit, atomů nebo objektů všedního dne. Jejich odpovědi na otázku, jak poznáváme svět a proč je toto poznání nedokonalé, jsou tedy v praxi totožné s odpovědí ontologického platonisty:

> Svět je ve své existenci na nás nezávislý a naše schopnosti jej poznat jsou jenom konečné, omezené.

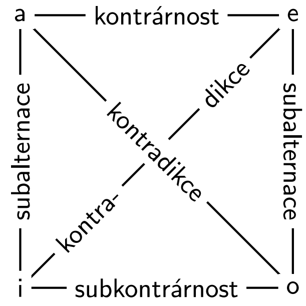
V konfrontaci s otázkou, jaké místo tento metavýrok v inkriminovaných teoriích zaujímá a kdo je garantem jeho správnosti, se nejčitelněji ukazuje jejich neudržitelnost. Pokud se na uvedenou otázku proponenti platonismu (resp. empirismu, naturalismu a fyzikalismu) vůbec pokoušejí odpovědět, uchylují se obvykle k nějaké verzi cimrmanovského 'kroku stranou', jehož je Popperova *verisimilitude* typickým příkladem. Tato vnitřně živená nedůslednost odsuzuje příslušné doktríny definitivně jako neúspěšné.

Úskalí přístupu, v němž je některý logický, resp. vědecký systém považován za přirozený, lze v dějinách vědy pozorovat průběžně. Frege si byl např. na jednu stranu vědom nepřiměřenosti očekávání, jež se v takovémto postoji skrývá, když totiž v úvodu k *Begriffsschrift* [1879, s. V] výslovně zdůraznil, že jeho písmo, na rozdíl od obdobného pokusu Leibnizova, je nástrojem určeným k *jistým* vědeckým cílům, jenž nesmí být odsuzovaný za to, že se pro jiné nehodí. Didaktická potřeba nějakých aplikací logiky mimo matematiku, na vybrané části přirozeného jazyka, posunula ovšem v praxi toto jeho základní, teoretické přesvědčení směrem, v němž se mu zákony logiky staly základními zákony pravdivosti či nejobecnějšími pravdami vůbec.[1] Russellův paradox byl jenom jedním z důsledků této proměny a zároveň symptomem neblahých konců, k nimž může vést a skutečně vedla. K tomu se ale dostaneme až v příští kapitole. K ilustraci toho, jak ošemetná je představa přirozeného kánonu vždy platných úsudků a pravd, nám nyní poslouží mnohem starší a jednodušší příklad, a to logika Aristotelova.

Je známo, že Aristotelés považoval za platné některé typy úsudků, které z hlediska logiky moderní, v podstatě již v její boolovské anticipaci, obecně platné nejsou. Označíme-li jednotlivé tvary Aristotelových vět obvyklými písmeny jako:

(a) každé A je B (e) žádné A není B
(i) některé A je B (o) některé A není B,

jde zcela typicky o přechod od věty tvaru (a) k větě tvaru (i) či od věty tvaru (e) k větě tvaru (o), nebo o tvrzení, že věty tvaru (a) a (e) nemohou být zároveň pravdivé, nepravdivé však ano. Tyto vztahy byly tradicí uspořádány v tzv. LOGICKÝ ČTVEREC, viz obrázek 3.1, zachycující napříč KONTRADIKCI, svisle SUBALTERNACI partikulárních forem formám obecným, vodorovně KONTRÁRNOST obecných forem a SUBKONTRÁRNOST forem partikulárních. Kontrárnost znamená zmíněnou nemožnost



Obrázek 3.1: Logický čtverec

současné pravdivosti, ale připustnost současné nepravdivosti, subkontrárnost je vztah inverzní. Vztah subalternace neplatí v moderní logice

[1] Viz Frege [1983, s. 139].

proto, že je obrat tvaru "některé A" spjat s existenčním závazkem vůči pojmu A, jejž obrat tvaru "každé A" nevyžaduje, tj. věta (a) je považována za pravdivou i tehdy, je-li A, např. v zastoupení pojmu 'jednorožec', prázdný. Z (a) tedy nelze obecně — při zachování pravdy — usoudit na (i), což znamená právě to, že příslušný přechod není logicky platný. Tentýž důvod mluví i pro možnost současné pravdivosti (a) a (e), totiž právě při prázdnosti pojmu A.

Snaha rozhodnout, které (zda klasické, nebo moderní) pojetí vede ke 'skutečně' platným úsudkům a které ne, je ovšem předem prohraný boj, neboť pro obě koncepce lze uvést plauzibilní důvody, stejně jako lze proti nim najít plauzibilní námitky. Každý jednorožec se např. zdá *být* živočichem (a ne třeba artefaktem) již z pojmových důvodů, na druhou stranu mezi existujícími živočichy žádný jednorožec *není*. Sama stávající jazyková praxe tedy arbitrem platnosti být nemůže. Přesto platí, že na rozdíl od lákavého odkazu ke světu, jenž se *má* jednoduše tak a tak, je jazykový úzus samozřejmým východiskem takových zdůvodnění, neboť přirozenou otázku, jak se vlastně svět má, nelze zase řešit jinak nežli odvoláním na nějakou stávající — což opět znamená nejednoznačnou a proměnlivou — jazykovou praxi. To, zda tedy je či není s výrazem tvaru "každé A" spjat existenční závazek, je problémem stejné povahy, jako zda lze všechny věty jazyka smysluplně vměstnat do výše uvedených čtyř větných tvarů, což znamená: není to záležitostí deskriptivně-empirického bádání, ale výsledkem jistého rozhodnutí. K němu jsme vedeni právě problémy výše uvedeného typu, totiž nejednoznačností jazykové praxe a konfliktů, které z ní vyplývají. Ty se snažíme průběžně ošetřit, eliminovat návrhy přehledných inferenčních systémů, pokud možno s vědomím nepřímé úměry mezi jejich přehledností a šíří potenciální aplikace. Ve skutečnosti je běžná reglementace jazykové praxe do specifických disciplín spoluurčena i tím, jaká schematizace vět a úsudků je vzhledem ke zkoumanému předmětu seznána jako nosná a produktivní.

Pragmatické jištění garantuje, že se z konvenčně, tj. nikoli ontologicky zdůvodněných teorií (ať logických, fyzikálních či jiných) nestanou teorie zdůvodněné svévolně, a tím pádem vůbec. Pragmatický koncept zdůvodnění je ovšem externí, tj. nelze jej použít v rámci teorie samé, jako nemá valný smysl říkat, že je přechod od vět typu (a) k (i) platný, protože v nějakém diskurzu funguje. Za interní důvody platnosti nějakého úsudku považujeme syntakticko-sémantický model, v jehož rámci bylo nejprve, resp. *teprve* explicitně řečeno, (1) jak vypadá správně utvořená věta daného inferenčního (logického) systému a (2) jak je pro ni, resp. pro skupiny vět definován pojem pravdy a platnosti. To, že jsou tyto pojmy zaváděny interně znamená, že při vlastní aplikaci mimo navržený formální systém je třeba použít zmíněného externího zdůvodnění (že se tato aplikace vyplatí), tj. není tomu tak, že by takováto projekce byla možná automaticky.

Vezměme opět příklad sylogistiky. Základní větné formy určuje výše uvedená čtveřice (a), (e), (i), (o). Tyto formy jsou reprezentované formulemi, z nichž sestává formální jazyk, syntax příslušné logiky. Na rozdíl od věty (jazyka přirozeného) je formule (jazyka umělého) pouhým reprezentantem formy, tj. není primárně nositelem obsahu, něčím, co by bez dalšího bylo pravdivé nebo nepravdivé. K podtržení tohoto rozdílu můžeme namísto poloformálních tvarů jako "každé A je B" uvažovat plně formální výrazy jako AaB, ve smyslu objektů zkoumaného formálního jazyka, či podrobněji:

> (1) FORMÁLNÍ JAZYK SYLOGISTIKY, stručně SL, tvoří pojmová písmena P_1, P_2, P_3, ... (2) SYLOGISTICKOU FORMULÍ nazýváme každý výraz tvaru AaB, AeB, AiB, AoB, kde A, B jsou libovolná pojmová písmena.

Kanonickým úsudkovým pravidlem Aristotelova systému, neboli tzv. KATEGORICKÝM SYLOGISMEM, je libovolný z přechodů

AxB, ByC / AzC, případně CzA,

AxB, CyB / AzC, případně CzA,

BxA, ByC / AzC, případně CzA,

kde symbol "/" odděluje premisy pravidla od závěru a písmena "x", "y", "z" reprezentují libovolné z písmen "a", "e", "i", "o". Podle uvedeného tvaru se sylogismy dělí do první, druhé a třetí FIGURY. Toto čtení je v principu aristotelské, neboť se k premisám chová jako k množině,[2] tj. umožňuje jejich prohození, což znamená, že členění do figur je pouze otázkou postavení STŘEDNÍHO TERMÍNU, jenž v závěru mizí. Tradiční scholastická úprava, pracující s mnemotechnickými poučkami pro jednotlivé MODY, což jsou různé posloupnosti písmen xyz, fixuje pořadí premis podle postavení termínu subjektu (NIŽŠÍHO) a predikátu (VYŠŠÍHO). Odtud také vzniká potřeba tzv. ČTVRTÉ FIGURY. Často je třeba vzít v úvahu fakt, že scholastický zápis sylogismu vychází z řecké formulace jednotlivých vět, indukující opačné pořadí termínů v zápisu, kdy např. modernímu "každé A je B" odpovídá původní "B obsahuje celé A", a tedy notace BaA. Tím se ale již zabývat nebudeme.

Přeme-li se nyní, které z možných sylogismů jsou platné a které ne, pomáháme si obvykle různými obrázky či diagramy, které zachycují obecné situace vyjadřované větami té které formy a vztahy, které mezi nimi nastávají. Myšlenka formální sémantiky nespočívá v ničem jiném nežli v explicitní artikulaci toho, jak vypadají příslušné 'diagramy', podle nichž se orientujeme v posuzování sémantických vztahů mezi větami jazyka přirozeného prostřednictvím vztahů mezi formulemi jazyka

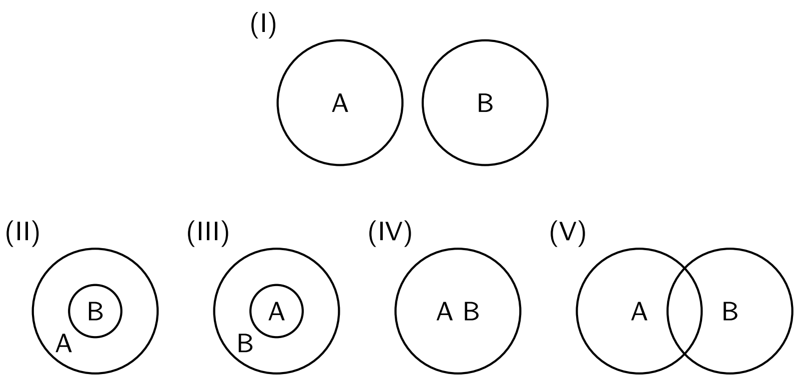
[2] Srov. poznámky in Stekeler-Weithofer [1986, s. 87 n].

formálního. Rozdíl mezi aristotelským a boolovským čtením platnosti sylogismu je ve skutečnosti zapříčiněn tím, že se implicitně řídí jinými sémantickými konvencemi. V Boolově případě za ně můžeme označit Eulerovy nebo Vennovy diagramy, kde se neprázdnost zachycuje vepsáním křížku $\times$ a prázdnost vepsáním symbolu $\emptyset$ do plochy reprezentující příslušný pojem. Tato sémantika ovšem předpokládá, že stejně jako Boolova algebra a další moderní systémy disponujeme rozlišením prázdnosti a neprázdnosti, interpretujíce aristotelské formy množinově-algebraickou dikcí takto:

(a)	$A(1 - B) = 0$	(e)	$AB = 0,$
(i)	$AB \neq 0$	(o)	$A - B \neq 0.$

Vedle standardního vztahu celku a části je v sémantice operující s (ne)prázdností pojmů (byť u Boola ještě implicitně) obsaženo i rozlišení celku a prvku, z něhož vychází moderní logika a teorie množin, když na rozdíl od logiky tradiční považuje věty "pes je savec" a "Lassie je savec" za věty odlišné syntaktické formy.

Adekvátní sémantický model sylogistiky, odpovídající Aristotelovým intencím a ontologickému pozadí jeho logiky, je založen na pouhé mereologické kombinatorice kruhů přiřazených písmenům P_1, P_2, P_3, ... uvažovaných schémat. Pro formuli AxB takto rozlišujeme pět možných



Obrázek 3.2: Gergonnovy diagramy

situací, znázorněných tzv. GERGONNOVÝMI DIAGRAMY na obrázku 3.2. Tyto obrázky můžeme po současném způsobu nazývat interpretacemi formule AxB, resp. explicitně stanovit:

> INTERPRETACÍ (konečné) třídy S formulí SL rozumíme diagram, v němž každému pojmovému písmenu nějaké formule z S odpovídá právě jeden kruh (s možnou výjimkou kruhů, které se

zcela překrývají) a každé dva kruhy jsou k sobě v některém ze vztahů (I–V).

Mezi interpretacemi daných formulí rozlišujeme takové, o nichž říkáme, že jsou v nich tyto formule pravdivé či že jsou modely těchto formulí, a to tak, že tyto modely nejprve přiřadíme každé z formulí tvaru (a), (e), (i), (o). Formuli AaB přitom odpovídají diagramy (III), (IV), formuli AeB diagram (I), formuli AiB diagramy (II), (III), (IV) a (V) a formuli AoB diagramy (I), (II), (V). Nyní již můžeme říci:

> Modelem (konečné) třídy S formulí SL je taková její interpretace, v níž pro každou formuli z S platí, že se kruhy přiřazené jejím pojmovým písmenům nacházejí v některém ze vztahů, jenž byl formuli tohoto tvaru přiřazen.

Všimněme si, že pravdivost v dané interpretaci je skutečně záležitostí čistě *interního* rozlišení v rámci naší sémantiky, tj. nemá přímý vztah k pravdivosti v obvyklém smyslu. Chceme-li náš model použít na přirozený jazyk, předpokládáme samozřejmě v jistém smyslu, že se svět chová tak, jak popisují užité diagramy, zároveň jsme si ale vědomi toho, že je to pouhý přímĕr, který má své přednosti a meze.

Větu jistého diskurzu, kterou lze vměstnat do aristotelské formy, nazýváme *externě pravdivou*, jestliže se svět chová tak jako některá z interpretací, která je této její *formě* přiřazená a činí ji interně pravdivou. Analogická dichotomie 'externí/interní' nastává i u pojmu platného úsudku, přičemž není obtížné odhadnout, že přechod od jisté (konečné) třídy formulí (premis) S k nějaké formuli jiné (závěru) φ nazýváme platným úsudkem, jestliže každá interpretace, splňující premisy, splňuje i závěr. V tomto případě také obvykle říkáme, že φ z S vyplývá, neboli:

> Sylogistická formule φ vyplývá z třídy S sylogistických formulí právě tehdy, když každá interpretace, která je modelem všech formulí z S, je i modelem formule φ. Symbolicky $S \vDash_{\mathsf{SL}} \varphi$.

Na základě této definice lze pojem vyplývání definovat i pro *věty* sylogistické formy, totiž přejdeme-li od nich dočasně k formulím, jimiž jsou formy příslušných vět reprezentovány, a stejným pojmům přiřadíme tatáž pojmová písmena.

Nyní již není obtížné ověřit, že takto definovaný pojem platnosti skutečně koinciduje s Aristotelovým v tom smyslu, že jako platné vyjdou právě a pouze ty případy sylogismů, které za ně považoval Aristotelés. Z formule AaB tak např. opravdu (interně) vyplývá formule AiB, neboť třída diagramů první je podmnožinou druhé, jak to požaduje definice. Stejně tak můžeme argumentovat pro kontrárnost forem AaB a AeB, neboť nemají žádný společný diagram, který by je splňoval, a naopak mezi diagramy, které je nesplňují, společné prvky existují, tj. obě formule mohou být v nějaké interpretaci, jmenovitě (II) a (V), zároveň nepravdivé. Interpretujeme-li jako negaci formule φ takovou formuli $\psi = \neg\varphi$, která je splněna právě těmi interpretacemi, jimiž φ splněna není, vyjde nám AaB jako negace AoB a *vice versa*, a totéž pak pro AeB a AiB. Právě o těchto formulích, které z definice nemohou být současně ani pravdivé, ani nepravdivé, říkáme také, že jsou kontradiktorické.

V projektování výše uvedených sémantických vztahů hraje zásadní roli předpoklad, že se kruhy přiřazené pojmovým písmenům P_1, P_2, P_3, ... po zakreslení do diagramu vždy jednoznačně nacházejí nebo nenacházejí v některém ze vztahů (I–V), a činí tedy libovolnou sylogistickou formuli pokaždé (interně) pravdivou nebo nepravdivou. Obecně se tento požadavek nazývá PRINCIPEM BIVALENCE neboli dvojhodnotovosti. Často jej můžeme rozšířit o věcně redundantní, zdůrazňující klauzuli, že je formule v dané interpretaci pravdivá nebo nepravdivá, *a nic třetího*. S ohledem na ni bývá někdy princip bivalence zaměňován s PRINCIPEM VYLOUČENÉHO TŘETÍHO, jejž je ovšem rozumné formulovat spíše pro negaci ve smyslu tvrzení, že z formulí φ a $\neg\varphi$ musí být pravdivá alespoň jedna. ZÁKON SPORU pak explicitně vylučuje současnou pravdivost obou.

Je zřejmé, že zákon vyloučeného třetího a zákon sporu jsou pouhé důsledky zákonu bivalence a sémantických konvencí fixujících negaci. Zákon bivalence je tedy pro (interní) pojem pravdivosti konstitutivní a je ho lépe formulovat v emfatičtější verzi, již nazýváme PRINCIPEM PRAVDIVOSTNÍM. Ten říká, že je každá formule v dané interpretaci pravdivá nebo nepravdivá, nic třetího a nikdy ne obojí. Tento princip je základním sémantickým principem Fregova modelu logiky.[3]

3.2 Substituční strategie

V první kapitole jsme dospěli k závěru, že ten, kdo chtěl formulovat úsudkový kánon použitelný v reformovaném kalkulu, musel začít analýzou inferenční struktury větných forem vyjadřujících vzájemnou závislost reálných proměnných. Weierstrassovské definice a praxe vedení důkazu byly v druhé polovině devatenáctého století již natolik stabilní, aby byl takový podnik realizovatelný ve smyslu výše zmíněné externí korigovatelnosti interně zavedeného pojmu platnosti; vzpomeňme případ vztahů mezi spojitostí uniformní a bodovou, kdy zřetězení kvantifikátorů první z nich implikuje druhé, nikoli naopak. I tak bylo ovšem zcela nejasné, jakou podobu by vlastně měla mít logika aplikovatelná v matematice a zda a v jakém smyslu je něco takového jako logika aritmetiky vůbec možné.

[3] Diskuzi pravdivostního principu coby 'kritéria smyslu' Fregovy logiky a teorie poznání, která se o ni opírá, provádí Stekeler-Weithofer ve svých *Grundprobleme der Logik* [1986], v obecně-filosofických souvislostech pak ve svých *Sinnkriterien* [1995].

Tyto pochybnosti trvaly navíc ještě dlouho poté, co Frege se svým systémem přišel, což dává tušit, o jak idiosynkratický příspěvek k dějinám matematiky se muselo jednat.

Pointa Fregova přístupu k analýze věty vynikne ve srovnání jak s logikou Aristotelovou, tak s algebraickým přístupem Leibnizovy-Boolovy školy. O obou lze souhrnně hovořit jako o logice pojmů, v níž je navíc (explicitně až v tradici novověké, věcně ale již v antice) rozlišováno mezi EXTENZIONÁLNÍM, množinovým pojetím a pojetím INTENZIONÁLNÍM, jež váže pojem blíže k výrazu a jeho struktuře. Podle těchto kritérií se předfregovská logika dělila také na tzv. nauku O ROZSAHU a OBSAHU (pojmu), kdy rozsahem výrazu "strakatý kůň" je skupina jím označovaných předmětů, tj. strakatých koní, a jeho obsahem situačně nezávislý způsob, jak tuto množinu v dané situaci (možném světě) vydělit, identifikovat, tj. jak rozpoznat strakaté věci a mezi nimi koně či naopak. Ať v té či oné verzi byla nauka o větě, její syntakticko-sémantické formě, odvozena z nauky o pojmu v tom smyslu, že nechávala větu vzniknout pouhým řazením, kombinací pojmů do (intenzionálně větších a extenzionálně menších) celků, po vzoru rovnice:

malý + strakatý + kůň = malý strakatý kůň,

kde "+" může symbolizovat jak extenzionální relaci průniku, s níž ubývá rozsahu, tak intenzionální relaci konjunkce, s níž přibývá obsahu.

Frege ve své *Begriffsschrift* a několika souvisejících spisech[4] programově označil tento postup za pomýlený a neproduktivní. Východiskem logické analýzy jakéhokoli diskurzu musí být věta jakožto nejmenší celek jazyka, jejž lze smysluplně tvrdit, Wittgensteinovými slovy [1953, § 49]: s nímž lze (na rozdíl od jména) učinit nějaký tah v jazykové hře. Ve Fregově pojetí je ona elementární samostatnost věty dána především tím, že na rozdíl od jiných výrazů může být pravdivá nebo nepravdivá. V možnosti nesení pravdy větou se skrývá klíč k její roli komunikační (roli nositele obsahu) a inferenční (závazku k vyvozování důsledků a podávání důvodů).

Fregova první odchylka od bezbřehé a mnohovrstevnaté jazykové praxe se proto odráží od ztotožnění kritéria smysluplnosti věty, rozuměj: toho, co bude dále větou rozuměno, s principem pravdivostním. Diskurz, na nějž může být Fregova logika aplikována, musí sestávat z vět, jež jsou jednoznačně pravdivé nebo nepravdivé. Často je nazýváme VÝROKY. Máme-li takovou třídu vět, lze eventuálně mezi výrazy, z nichž se tyto věty skládají, najít takové, jejichž vzájemnou náhradou v rámci nějaké věty vznikne opět věta popsané třídy. Tak např. nahrazením výrazu

[4] Viz především *Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift*, uveřejněný ve spisech z pozůstalosti Frege [1983]. Srov. k tomu také moji fregovskou knihu Kolman [2002, s. 91 nn].

"Brutus" ve větě "Brutus je Říman" výrazem "Caesar" vznikne opět smysluplná věta "Caesar je Říman", podobně jako nahrazením výrazu "4" ve větě "4 je prvočíslo" výrazem "5". Nemění-li se případnou substitucí smysluplnost věty, tj. to, zda je jednoznačně pravdivá či nepravdivá, neznamená to, že se nemůže měnit pravdivá věta na nepravdivou a *vice versa*. Neměla by se ovšem měnit při nahrazení stejného stejným, čímž typicky myslíme např. nahrazení výrazu "5" výrazem "$2 + 3$" či výrazu "Caesar" výrazem "dobyvatel Galie". 'Stejné' tedy mají být významy výrazu, nikoli výrazy samotné. Z toho plyne, že vztah pravdivosti věty a toho, co označují substituovatelné výrazy, by měl být funkcionální, ve stejném smyslu, jako je funkcionální vztah mezi argumenty a hodnotou výrazu "x^2".

Funkcionální analogie je přitom pro Fregův model logiky klíčová. Stejně jako je možné ve výrazu "3^2", případně "2^2" nahrazováním číslovek jinými číslovkami, případně naznačením možnosti tohoto nahrazení proměnnou, dospět k výrazům

x^2	3^x,
x^y	x^x

vyjadřujícím funkce, přiřazení čísel číslům, případně dvojicím čísel, lze podobným postupem dospět od výrazu "Brutus zavraždil Caesara", případně "Brutus zavraždil Bruta" k výrazům

x zavraždil Caesara	Brutus zavraždil x,
x zavraždil y	x zavraždil x

přiřazujícím předmětům (osobám) pravdu a nepravdu jako hodnoty. Na bázi tohoto příměru se o pravdě a nepravdě hovoří jako o PRAVDIVOSTNÍCH HODNOTÁCH,[5] funkcionální výrazy pak nahrazují tradiční *pojmy*, a to po řadě pojem 'Caesarova vraha', pojem 'Brutovy oběti', pojem, resp. relaci 'vraha' (vztahu vraha a zavražděného) a pojem 'sebevraha'. Již teď je zřejmé, v jakém smyslu je Fregův pohyb od věty k pojmům potenciálně plodnější nežli opačný postup Aristotelův a Boolův, kteří nejsou v principu schopni relační (vícemístné) pojmy vůbec adekvátně uchopit — ve smyslu jejich dalšího inferenčního zpracování.

Z metodického hlediska je ovšem řeč o významech výrazů, předmětech a funkcích, předčasná. Vycházíme z toho, že máme třídu vět splňujících pravdivostní princip a že v nich jsme s to rozlišit třídu substituovatelných výrazů. Vůči nim by měl platit jakýsi OBECNĚ SUBSTITUČNÍ PRINCIP, tj. po nahrazení substituovatelného výrazu substituovatelným výrazem by měla vzniknout opět smysluplná věta. Zde je ovšem zapotřebí jistého zamyšlení. Ve vztahu k substituční technice se nám výrazy rozpadají na

[5] Viz Frege [1891*b*, s. 13].

(1) substituovatelné,

(2) ty, v nichž je substituováno,

(3) rámce této substituce.

K substituovatelným výrazům přitom nemusí zjevně patřit pouze (jmenné) výrazy jako "Caesar" či "dobyvatel Galie", ale i celé věty, neboť i ty mohou splňovat výše zmíněný princip, že po nahrazení jedné druhou získáme opět smysluplnou větu. A naopak, k výrazům, v nichž substituce probíhá, nepatří obecně pouze věty, ale i výrazy jako "dobyvatel Galie" či "$2 + 3$". Tím pádem máme i dva typově odlišné substituční rámce, totiž výrazy jako "$x < 3$", z nichž po dosazení vznikne věta, a "$x + 2$", z nichž vznikne jméno.

Na rozdíl od Frega, jenž se později a ne příliš šťastně rozhodl v rámci svého systému odlišnost mezi větou a jinými substituovatelnými výrazy potlačit, což je známo především skrze jeho konvenci, podle níž je věta jménem pravdivostní hodnoty, a může jí být proto smysluplně nahrazen i nevětný substituent, budeme od počátku rozlišovat mezi VĚTAMI, coby výrazy specifické kategorie s, a SUBSTITUOVATELNÝMI TERMY, coby výrazy kategorie t, jež je s s disjunktní. Tím neříkáme, že věty za určitých okolností substituovat nelze, pouze je odlišujeme od nevětných susbtituentů. Oba typy výrazů mohou sloužit jakožto podklad dalších substitucí.

> Máme-li výraz $A(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ kategorie k, obsahující výrazy B_1, B_2, $\ldots$, B_n kategorií k_1, k_2, $\ldots$, k_n, pak nahrazením některých (tedy ne nutně všech) jejich výskytů proměnnými $x_1^{k_1}$, $x_2^{k_2}$, $\ldots$, $x_n^{k_n}$ odpovídajícího typu získáme výraz $A(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \ldots, x_n^{k_n})$ odvozené kategorie $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \prec k$.

Tento zápis sugestivně vyjadřuje fakt, že dosazením výrazů kategorie $k_1, k_2, \ldots, k_n$ do příslušného výrazu získáme výraz kategorie k. Obecný substituční princip lze nyní formulovat přesněji a zcela obecně:

> Výsledkem nahrazení výrazu kategorie l ve výrazu kategorie k výrazem kategorie l vznikne opět výraz kategorie k.

Tím je rámcově dána požadovaná formální syntax. Její funkcionálně-sémantická interpretace je přitom nasnadě. Necháme-li totiž výrazům kategorie t na formálně sémantické rovině neboli na rovině jejich (formálního) významu odpovídat nějaké objekty ze základního univerza G_t a výrazům kategorie s zcela speciální předměty z množiny $G_s = \{1, 0\}$, nutně disjunktní s G_t, pak:

> Za předpokladu, že výrazům kategorií k_1, k_2, $\ldots$, k_n odpovídají prvky množin $G_{k_1}, G_{k_2}, \ldots, G_{k_n}$, odpovídají výrazům kategorie $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \prec k$ přiřazení předmětů z G_k předmětům, resp.

uspořádaným n-ticím $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ předmětů z $G_{k_1}, G_{k_2}, \ldots,$ G_{k_n}, kde $a_i \in G_{k_i}$.

O nich se obvykle hovoří jako o n-ÁRNÍCH FUNKCÍCH z $G_{k_1} \times G_{k_2} \times \cdots \times G_{k_n}$ do G_k. Řeč o předmětech a funkcích je tedy pouhou artikulací substitučního mechanismu, odehrávajícího se na úrovni výrazů, ontologizující dikcí. Její přenesení z matematického diskurzu do oblasti logické sémantiky skrze substituční mechanismus je jádrem jak Fregovy logiky samotné, tak jejího úspěchu v rámci aritmetiky, ale i mimo ni.

V souvislosti s holistickým postupem od (větného) celku k (větné či nevětné) části, jehož úlohu jsme v tomto procesu prohlásili za konstitutivní, je třeba zdůraznit, že není v žádném rozporu s obvyklým popisem významu komplexního výrazu jako výsledku složení významů jeho částí. Obecně-sémantická klasifikace výrazů na ty, jež nesou význam samostatně, a lze se jim tak i naučit, a na tzv. SYNKATEGOREMATICKÉ VÝRAZY, jež nemají význam mimo kontext věty, jako např. větné spojky či relační slova jako "ležet mezi" apod., je víceznačná v tom smyslu, že za jistých okolností lze všechny (nevětné) výrazy považovat za synkategorematické, a v jistém smyslu zase všechny za uniformně referující. Nikdo se totiž neučí významu slov pouhým pojmenováváním okolo stojících předmětů, nýbrž celým větám v jejich inferenčně-pragmatickém užití. Na druhou stranu lze každému výrazu dodatečně přiřadit nějaký samostatný význam odpovídající jeho větné roli, což se v substituční analýze věty rovná jeho funkcionálnímu užití ve vztahu k zachování pravdivosti věty. Tugendhat [1970] v této souvislosti výstižně hovoří o tzv. pravdivostním potenciálu.[6] Popis významového celku jakožto kompozice dílčích významů není tedy svázán s atomistickou ontologií potud, pokud nepředpokládáme, že jsou nám ony dílčí významy předem dány nezávisle na větném užití výrazů, jimž odpovídají.

V samotné možnosti opětovného skládání konečně mnoha výrazů, které nám byly dány k dispozici přirozeným jazykem, se také, jak upozorňuje Frege [1983, s. 243], skrývá klíč k jeho odemčení coby potenciálně nekonečného reservoiru výrazů s rámcově jasným použitím, tj. obecnými podmínkami pravdivosti. Je to právě tato nekonečná potencialita, co zakládá objektivitu jazyka coby fenoménu, jejž nelze redukovat na souhrn aktuálních jazykových aktů, nýbrž je podstatně spojen s intersubjektivním užitím schémat, jejichž jsou tyto akty instancemi. Také objektivita pojmu (např. zajíc) je dána právě tím, že jsme jej schopni aplikovat na neomezené množství objektů (zvířat), tj. i těch, které nestály u jeho zrodu (příklady konkrétních zajíců a objektů, které zajíci nejsou). V matematice, resp. apriorních vědách, které si své pojmy do velké míry samy vytvářejí, je nositelem této cesty k nekonečnu induktivní definice a na ní

[6] Více viz oddíl 4.2, případně Kolman [2002, s. 130 nn].

založené důkazy indukcí. Indukcí je také popsána, případně rozšířena i třída (gramaticky správně utvořených) vět přirozeného jazyka.

3.3 Expresivní síla logiky výroků

Bližší specifikaci Fregova konceptu aritmetické logiky je z didaktického hlediska lépe začít jeho fragmentem, rozlišujícím pouze výrazy kategorie s. Vydělíme-li z nějaké třídy vět takové věty, jejichž vlastními částmi již žádné věty nejsou, můžeme se k nim chovat jako k větám logicky elementárním v tom smyslu, že jejich dělení na další části nebudeme považovat za inferenčně relevantní. Z třídy E elementárních vět, které splňují pravdivostní princip, lze získat jednoduchým rozšířením třídu K vět komplexních, pro něž uvedený princip také platí, a to ve dvou fázích. V první stanovíme, že

(i) každá elementární věta je větou z K,

(ii) jsou-li F a G věty z K, pak i věty "není pravda, že F" a "jestliže F, pak G" patří do K.

To je syntaktická fáze. V sémantické fázi stanovíme, že

(i) věta tvaru "není pravda, že F" je pravdivá tehdy a jen tehdy, je-li věta F nepravdivá, jindy je nepravdivá,

(ii) věta tvaru "jestliže F, pak G" je nepravdivá tehdy a jen tehdy, je-li F pravdivá a G nepravdivá, jindy je pravdivá.

Takto vlastně dospějeme k antickému konkurentovi Aristotelova kategorického sylogismu, totiž k logice megarsko-stoické školy, se speciálním pojetím implikace (spojky "jestliže ..., pak ...") v právě definovaném stylu. S ohledem na tuto historickou souvislost se někdy také hovoří o IMPLIKACI FILÓNSKÉ, většinou ale MATERIÁLNÍ.

Resurekce zapomenutého odkazu stoiků, k níž došlo sice dílem již v rámci algebraické tradice pod názvem algebra výroků, se všemi náležitostmi ovšem (jak později poznamenal Łukasiewicz [1935]) až ve Fregově *Begriffsschrift*, je dnes známa a studována jako tzv. výroková logika. Jejím specifikem je právě užití schematických proměnných pro celé výroky, nikoli již pro pojmy, jako v případě Aristotelově. Poloformální výklad předchozího odstavce, tedy především řeč o blíže neurčené třídě vět, můžeme odstranit v dalším kroku formalizace, založeném na postřehu, že nás z obsahu příslušných vět, tedy toho, co je dělá větami a k čemu chceme přihlížet v dalších inferencích, zajímá vlastně jen jejich pravdivost a nepravdivost, případně odvození této jejich pravdivosti a nepravdivosti z pravdivosti a nepravdivosti vět, z nichž se skládají. To znamená, že můžeme namísto elementárních vět nějakého blíže nespecifikovaného diskurzu začít následující definicí:

> FORMÁLNÍ JAZYK LOGIKY VÝROKŮ, zkráceně VL, sestává (i) ze sady E_{VL} VÝROKOVÝCH KONSTANT p_1, p_2, p_3, …, (ii) VÝROKOVÝCH SPOJEK $\neg$ a $\rightarrow$ a (iii) pomocných symbolů (,).

K příslušnému umělému diskurzu dospějeme skrze definici následující:

> FORMULÍ VL je (i) každá výroková konstanta, nazývaná též ATOMICKOU formulí, a (ii) cokoli, co vznikne z formulí φ, ψ předepsáním symbolu $\neg$, případně jejich spojením symbolem $\rightarrow$, jinými slovy: jsou-li φ a ψ formule, pak i $\neg\varphi$ a $(\varphi \rightarrow \psi)$ jsou formule, přičemž krajní závorky se na základě dodatečných konvencí obvykle vynechávají. Třídu všech formulí VL budeme značit jako F_{VL}.

F_{VL} je uskupení nekonečné, již z triviálního důvodu, že obsahuje nekonečně mnoho prvků z E_{VL}. Tato nekonečnost je ovšem také důsledkem induktivní definice formule VL, tj. platila by i při omezení na formule vystavěné z konečně mnoha výrokových konstant. Jednoznačné ohodnocení všech konstant z E_{VL} nazveme (výrokovělogickou) interpretací nebo přesněji:

> INTERPRETACÍ (jazyka, případně formule či třídy formulí) VL rozumíme libovolnou (totální) funkci $\mathcal{I} : E_{\mathsf{VL}} \rightarrow \{0, 1\}$, neboli nekonečnou posloupnost jedniček a nul. $\mathcal{I}(p_n)$ přitom označuje hodnotu přiřazenou konstantě p_n.

Ohodnocení konstant lze nyní induktivně rozšířit na ohodnocení libovolné formule φ: (i) Jedná-li se o konstantu, tj. $\varphi = p_k$ pro nějaké $k \in \mathsf{N}$, pak $\mathcal{I}(\varphi) = \mathcal{I}(p_k)$. (ii) Je-li φ tvaru $\neg\psi$, tj. jedná-li se o tzv. NEGACI, kde hodnota $\mathcal{I}(\psi)$ již byla specifikována, pak $\mathcal{I}(\varphi)$ je hodnotou inverzní, tj. $\mathcal{I}(\varphi) = 0$, jestliže $\mathcal{I}(\psi) = 1$ a *vice versa*. Platí-li $\varphi = \psi \rightarrow \theta$, pak za předpokladu předchozího stanovení hodnot $\mathcal{I}(\psi)$ a $\mathcal{I}(\theta)$ rozhodneme, že $\mathcal{I}(\psi \rightarrow \theta) = 0$, jestliže $\mathcal{I}(\psi) = 1$ a $\mathcal{I}(\theta) = 0$, a $\mathcal{I}(\psi \rightarrow \theta) = 1$ ve všech ostatních případech. Snadnou metaindukcí dokážeme, že třída F_{VL} všech formulí výrokové logiky splňuje pravdivostní princip za předpokladu, že ho splňuje E_{VL}. Podobně jako v sylogistice lze nyní definovat zcela přímočaře pojem pravdivosti v interpretaci:

> Interpretaci $\mathcal{I}$ třídy S formulí VL nazýváme jejím MODELEM, jestliže pro každou formuli φ z S platí $\mathcal{I}(\varphi) = 1$.

Z platnosti pravdivostního principu a ohodnocení negace plyne, že každá interpretace je modelem formule nebo její negace. Shodneme-li se, že výrazy z F_{VL} jsou nebo reprezentují výrazy kategorie s, náleží výrazy $\neg$

a $\rightarrow$ kategoriím $s \prec s$ a $(s, s) \prec s$. Jako takové vyjadřují tzv. VÝROKOVÉ FUNKCE. Pravdivostní hodnota formule je pak vlastně popsána jakožto výsledek aplikace výrokových funkcí na hodnoty přidělené výrokovým konstantám, přičemž jednoznačnost jejího určení plyne právě z toho, že jsou to funkce neboli totální přiřazení jednoznačná směrem vpravo. Dále je jasné, že hodnoty přiřazené interpretací třídě formulí S jsou závislé pouze na hodnotách přiřazených konstantám, které se v nich vyskytují. S ohledem na to můžeme poloformálně definovat pojem REDUKOVANÉ INTERPRETACE, resp. MODELU formulí S, jako posloupnost relevantních hodnot. Ta je v případě konečného S konečná, což pak platí i pro počet všech možných interpretací a modelů. To se záhy ukáže být významné.

Již na takovýchto jednoduchých případech přiřazení objektů objektům lze přitom (znovu a znovu) pozorovat problém víceznačnosti pojmu funkce, kterou můžeme chápat buď jako celý výpočetní proces vedoucí jistým způsobem od argumentů (ohodnocení konstant) k hodnotě celku, nebo jako prostý abstraktní vztah vstupu a výstupu. V prvním, *intenzionálním* smyslu vyjadřují výrazy "$\neg\neg p_1 \rightarrow p_2$" a "$p_1 \rightarrow p_2$" funkce odlišné, v druhém, *extenzionálním* tytéž. Skutečný význam těchto rozdílů vyvstane až v souvislosti s funkcemi nekonečného definičního oboru, k nimž funkce výrokové zjevně nepatří. Fregem navržený výrazový systém je nicméně tak silný, že v něm lze vyjádřit libovolnou extenzionálně chápanou výrokovou funkci libovolného počtu argumentů, tj. typu $(s, \ldots, s) \prec s$, a je tedy v tomto smyslu expresivně úplný. Tato okolnost je známa jako VĚTA O FUNKCIONÁLNÍ ÚPLNOSTI či ADEKVÁTNOSTI SPOJEK, a byla v principu dokázána již Fregem. Otcem jejího názvu (úplnost) a explicitního důkazu je ovšem Emil Post [1921]:

Množina $\{\rightarrow, \neg\}$ je funkcionálně úplná.

Důkaz: Definujeme-li nejprve pro jednoduchost KONJUNKCI

$$\varphi \wedge \psi \rightleftharpoons \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$$

a DISJUNKCI

$$\varphi \vee \psi \rightleftharpoons \neg\varphi \rightarrow \psi,$$

lze libovolnou n-argumentovou funkci vyjádřit jako disjunkci n-členných konjunkcí výrokových konstant, resp. jejich negací. Každá konjunkce přitom popisuje ta z možných ohodnocení n konstant, kterým funkce přiřazuje hodnotu 1, a to tak, že ohodnocení konstanty p_k pro $1 \leq k \leq n$ hodnotou 1 reprezentuje v příslušné konjunkci konstanta samotná, ohodnocení hodnotou 0 její negace. □

S ohledem na tento výsledek je zřejmé, proč jsme nemuseli do oboru základních výrazů zahrnout jiné spojky. K obvykle užívané sadě patří přitom kromě konjunkce, zachycující prostý vztah slučovací, vyjadřovaný obvykle spojkou "a", a disjunkce, která vyjadřuje vztah nevylučujících se alternativ spojky "nebo",[7] ještě EKVIVALENCE

$$\varphi \leftrightarrow \psi \rightleftharpoons (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi),$$

v přirozeném jazyce aproximovaná souslovím "tehdy a jen tehdy, když". Podobně jako u symbolu rovnosti je třeba stále velmi dobře rozlišovat mezi těmito výrazy coby objekty studia formálních systémů a jejich metajazykovými obdobami, které jsou užívány při tomto studiu samém. Konvence stanovující sílu vazby spojek byla zavedena úvodem (viz s. 29).

Viděli jsme, že (formální) význam formule, tj. její pravdivostní hodnota, je v dané interpretaci určen(a) významy výrokových konstant, udělených příslušnou interpretací, a významem výrokových spojek. Výskyt klauzule "v dané interpretaci" je zde ale podstatný, neboť formule není pravdivá či nepravdivá *per se*, jednak proto, že je to pouhá posloupnost znaků, a jednak, že její výrokové konstanty nemají žádný pevný význam. Právě proto se jim někdy také říká "výrokové proměnné", což je ale zase konfúzní s ohledem na užití pojmu proměnné v predikátové logice. V závislosti na ohodnocení konstant se tedy může měnit i pravdivostní hodnota téže formule.

V tomto druhém smyslu lze ale mezi formulemi VL najít výjimku, a to z následujících důvodů: Jelikož se v rámci popsaného modelu logiky na rozdíl od výrazů p_1, p_2, p_3, ... význam výrazů $\neg$ a $\rightarrow$ nemění, lze o těchto spojkách hovořit jako o LOGICKÝCH KONSTANTÁCH. Formule jako $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ či $\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$, kterým libovolná interpretace výrokových konstant přiřazuje vždy tutéž pravdivostní hodnotu, v prvním případě 1, v druhém 0, jsou tedy co do svého významu určeny již svými *logickými* konstantami neboli *na ohodnocení mimologických konstant nezávislé.* V důsledku toho o nich hovoříme jako o LOGICKÝCH PRAVDÁCH či TAUTOLOGIÍCH, resp. logických nepravdách neboli KONTRADIKCÍCH.

O formuli či množině formulí, která má model, říkáme také, že je SPLNITELNÁ. Tím máme formulováno několik sémantických vlastností čistě syntaktických objektů, formulí. Snad není na škodu poznamenat, že sylogistika kategorií logické pravdy vůbec nedisponuje, a když, pak se omezuje na formule tvaru AaA, případně AiA. To také naznačuje, proč byly Kantovy příklady analytických vět tak chudé a proč se mu — jak poznamenal Frege [1884, § 88] — ani při nejlepší vůli nemohla aritmetika jevit jako redukovatelná na logiku.

Logická (ne)pravdivost vedle vyplývání představuje vlastní (užší) předmět logiky jakožto formální disciplíny. VYPLÝVÁNÍ (výrokovělogické)

[7] Název "disjunkce" je v tomto ohledu velmi zavádějící, neboť by mu měly odpovídat alternativy vzájemně se vylučující. V Německu se z tohoto důvodu používá adekvátnější název "adjunkce". Implikace bývá označována zpravidla jako "subjunkce".

formule φ z množiny (výrokovělogických) formulí S definujeme obdobně jako v sylogistickém případě, tj. jako okolnost, že každý model formulí z S je i modelem formule φ. Jediná odlišnost spočívá v indexu značení

$$S \vDash_{\mathsf{VL}} \varphi,$$

který ovšem budeme většinou potlačovat, a v tom, že stávající pojem interpretace nevyžaduje, aby byla S konečná.[8] Souvislost mezi tautologičností a vyplýváním je snadno demonstrovatelná na konečném případě: $\varphi \vDash \psi$ platí tehdy a jen tehdy, když je $\varphi \to \psi$ tautologie, což značíme někdy také jako $\vDash \varphi \to \psi$. Tento vztah je konkrétním případem tzv. SÉMANTICKÉ VERZE VĚTY O DEDUKCI, podle níž platí:

$$S, \varphi \vDash \psi \text{ tehdy a jen tehdy, když } S \vDash \varphi \to \psi,$$

pro libovolnou množinu S formulí VL. "S, φ" či "$S + \varphi$" je přitom pohodlnou a často užívanou zkratkou za množinu "$S \cup \{\varphi\}$", tj. výsledek přidání formule φ k množině S.

Máme-li k dispozici výrokové spojky, můžeme definovat obvyklé množinové operace, a to po řadě PRŮNIK $A \cap B$, SJEDNOCENÍ $A \cup B$ a ROZDÍL $A - B$ jako

$$\{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \;\; \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \;\; \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\},$$

jak jsme to již načrtli úvodem (viz s. 30). Dalším předpokladem jsou zde ovšem ještě operátor množinové abstrakce a množinový vztah náležení, které, jak uvidíme, zdaleka nepatří k těm nejméně problematickým. Rovněž unární operace DOPLŇKU

$$-A \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \notin A\}$$

může být značně nebezpečná, není-li totiž vyjasněno, vůči čemu se v 'negaci' A vyhrazujeme. Říkáme-li např., že něco není prvočíslem, tj. že to nenáleží do jejich množiny, nemíníme tím obvykle, že to náleží množině všech objektů, které nejsou prvočísly, ale všech čísel, která nejsou prvočísly. Operaci $-A$ tedy čteme jako zkratku za $D - A$ pro nezmíněný, leč předpokládaný diskurz D, na nějž naši úvahu implicitně omezujeme. Kant nicméně upozornil na fakt, že některé výroky ve skutečnosti mají charakter absolutní negace, v němž překračujeme libovolný diskurz, a je proto třeba uvažovat zvlášť kategorii tzv. NEKONEČNÝCH SOUDŮ. Ve větách jako "duše není smrtelná", jak zní Kantův příklad [1781/1787, A 72/B 97], nebo lépe:

čísla nejsou zelená,

[8] Sylogistický případ by šel samozřejmě také rozšířit pro nekonečně mnoho formulí, diagram, tedy něco, co lze v principu nakreslit, by se ale nehodil jakožto báze užité sémantiky a musel by být nahrazen systémem (neprázdných) množin předmětů atd.

na rozdíl od vět jako

> prvočísla nejsou sudá,

"není dotčena kopula, nýbrž predikát",[9] který je zasazen mimo tento obor do indefinitního oboru všech možných předmětů řeči neboli:

> nekonečný soud neukazuje pouze to, že subjekt není obsažen ve sféře predikátu, nýbrž že leží někde mimo něj v nekonečné sféře [...].[10]

Řečeno dnešními slovy: v soudech uvedeného typu nevyjadřujeme nějaký přímočarý (mimojazykový) fakt, ale metajazykové (analytické) tvrzení týkající se užití jistých predikátů. V uvedeném případě vylučujeme aplikaci empirických distinkcí na aritmetický diskurz. Proto také není forma nekonečných výroků v důsledku záležitostí formální logiky, ale logiky transcendentální, nezkoumající formy jakéhokoli, ale jen smyslového světa. Tím je také dáno najevo, jak číst vyjádření typu:

> Pythagorova věta platila dávno před tím, než se první člověk objevil na Zemi

či "obor čísel se nachází mimo prostor a čas", totiž ne objektově, což vede vždy k nějaké primitivní formě platonismu, ale jazykově-analyticky, jako stenografický záznam o užití některých slov, např. vyloučení prostorových a časových určení z výroků aritmetiky. Nepoužíváme-li tedy např. v řeči o číslech predikáty jako "zelený", "visící svisle" apod., neznamená to, že bychom tak činit nemohli (protože by to nebyla pravda), nýbrž že tak činit nechceme, protože tím vzhledem k aritmetickému významu číslovek nedostáváme žádný praktický rozdíl. Lze úspěšně hájit tezi, že Frege četl uvedená tvrzení právě tímto, tj. nikoli prvním ze způsobů, a nálepka platonisty mu proto náleží neprávem.[11]

Za předpokladu, že disponujeme pojmem $\emptyset$ prázdné množiny, můžeme pomocí uvedených operací zavést obvyklé vztahy inkluze, tj. PODMNOŽINY a VLASTNÍ PODMNOŽINY stejně jako v algebře logiky:

$$A \subseteq B \rightleftharpoons A \cap -B = \emptyset \qquad\qquad A \subset B \rightleftharpoons A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

Preferováno je nicméně užití kvantifikace, jak k němu dojdeme o pár oddílů později a jak jsme je v této souvislosti již zmínili úvodem (viz s. 30).

[9] Kant [1800, A 163].
[10] Kant [1800, A 161].
[11] Srov. k tomu můj článek Kolman [2003], případně Kolman [2005*a*].

3.4 Axiomatická metoda

Ačkoli je vyplývání tím pojmem, od něhož se odvíjí specifikace vlastní, určující role logiky, totiž vedení platných a v jistém smyslu transparentních inferencí, je v našem formálním rámci koncipováno značně velkoryse. To platí již s ohledem na připuštění nekonečně mnoha premis. Ale i omezení na konečně mnoho premis nás při posouzení toho, zda platí $S \vDash \varphi$, staví před problém ověření *všech* možných interpretací, jichž je sice v případě VL ještě konečně mnoho, tedy omezíme-li se na ty redukované, jejich nárůst je ale i tak exponenciální vůči vstupu, tj. počtu různých konstant. Jelikož přechodů S/φ, pro něž platí $S \vDash \varphi$, je i v případě konečného S neomezeně mnoho, jejich přijetí za platná úsudková schémata nám situaci vedení transparentních inferencí také nijak neulehčí.

V souladu s původním požadavkem efektivní kontrolovatelnosti užité logiky jde tedy o to, jak vybrat mezi (konečnými) úsudkovými schématy nějakou (ještě restriktivnější) kanonickou sadu, na níž by bylo již na první pohled zřejmé, že se jedná o případy logicky platné, a prokázat, že to v nějakém ohledu stačí. Právě o to se pokusil Aristotelés, když po zavedení sylogistické platnosti (sémantického přechodu od třídy vět S k větě F) popsal sylogismus jakožto úsudkové pravidlo výše uvedeného jednoduchého tvaru a paralelně formuloval tvrzení, že lze každý případ platného zdůvodnění vést výhradně sylogisticky, tj. pouze pomocí sylogismů platných, případně rozšířených o zcela jednoduchá pravidla typu

$$AaB \,/\, BiA \qquad\qquad AeB \,/\, BeA \qquad\qquad AiB \,/\, BiA,$$

známá jako PRAVIDLA OBRATU. Platných sylogismů je evidentně konečný, a dokonce velmi malý počet, navíc je lze — jak Aristotelés rovněž ukázal — dále redukovat na sylogismy první figury. V sylogistice tím pádem byla poprvé explicitně formulována idea tzv. přímého důkazu.

> PŘÍMÝM neboli DEDUKTIVNÍM DŮKAZEM věty F z třídy S pravdivých vět rozumíme posloupnost $F_1, F_2, \ldots, F_n$ vět takovou, že (i) každý člen je buďto větou z S, nebo (ii) na něj bylo usouzeno z vět předchozích pomocí některého z úsudkových pravidel kanonické třídy D, přičemž (iii) poslední člen $F_n = F$.

Skutečnost, že pro S a F takováto posloupnost existuje, značme jako $S \vdash_D F$ a mluvme o ní jako o dokazatelnosti F z S v deduktivním systému D. Jeho index se obvykle potlačuje. — Platí-li $S \vdash_D F$, pak z předpokladu, že jsou věty v S pravdivé a že jsou úsudková pravidla z D platná, tj. přenášejí pravdivost, plyne okamžitě, že musí být pravdivá věta F. Podstatné je, že disponujeme-li příslušným přímým důkazem, jsme s ohledem na přehlednost skupiny kanonických úsudkových schémat schopni pravdivost F, resp. její vyplývání z S, na rozdíl od obecného případu, rychle ověřit, tj. překontrolovat, že se skutečně jedná o platné zdůvodnění. Tvrzení, že lze každý důkaz prezentovat v takovéto přímé formě, je tedy žádoucím a netriviálním výsledkem.

Obratem "každý důkaz" máme nyní na mysli zcela přirozeně vztah vyplývání, již proto, že v jistém smyslu zahrnuje třeba i tradiční pojem důkazu nepřímého, od počátku používaného v řecké matematice a filosofii. Je přitom dobré si uvědomit, že základním předpokladem aplikace nepřímého důkazu na daný diskurz je opět platnost pravdivostního principu! Pouze pak můžeme z faktu, že jsme nějakým způsobem přenášejícím platnost odvodili z pravdivých vět S a negace výroku F jak větu G, tak větu "není pravda, že G", usoudit, že věta F musí být pravdivá. Použijeme-li nyní namísto vět formule, rovná se tento postřeh obecnějšímu pozorování, že

$$S \vDash \varphi \text{ platí tehdy a jen tehdy, jestliže } S, \neg\varphi \vDash \psi \text{ a } S, \neg\varphi \vDash \neg\psi,$$

neboť skutečnost $S \vDash \varphi$ je podle definice jenom jiným vyjádřením toho, že množina $S, \neg\varphi$ nemá model.[12] Tvrdíme-li nyní, že jsme s to v daném logickém systému nahradit každý případ vyplývání přímým odvozením, tj. základní relaci $\vDash$ nějakou její skromnější, transparentnější aproximací $\vdash$, můžeme tím mít mimo jiné na mysli eliminaci odvození sporem, jak se o to v tradiční logice pokoušeli Aristotelés, Leibniz i Bolzano. Hlavní nevýhodou nepřímého důkazu je přitom okolnost, že jednotlivé kroky odvození nesměřují k dokazované větě, ale směrem od ní, a nelze je tedy zpravidla použít v dalších dedukcích. Z těchto důvodů, tj. s ohledem na průběžné odvozování nepravdivých vět, zavrhl nepřímé metody i Frege, když k tomu v polemice s Hilbertovou koncepcí formálních (a vzájemně neslučitelných) geometrií [1906, s. 425] říká:

> Někdo ale třeba namítne, že přece z určitých myšlenek můžeme čistě hypoteticky vyvozovat důsledky, aniž bychom soudili na jejich pravdivost. Jistě, čistě hypoteticky! Ale zmíněné myšlenky již nejsou úsudkovými premisami. Premisami jsou spíše jisté hypotetické myšlenky [tj. souditelný obsah kondicionálu] obsahující ony uvažované myšlenky jako své podmínky. Také v konečném výsledku se musí ony uvažované myšlenky objevit jako podmínky; a z toho vyplývá, že nebyly užity jako premisy; neboť pak by v konečném výsledku zmizely.[13]

[12] V případě sylogistiky je ovšem otázka, zda nemáme vztah vyplývání interpretovat tak, že S musí mít model, aby pro formuli φ platilo $S \vDash \varphi$, tj. přenést požadavek neprázdnosti i na metaúroveň. Pak ekvivalence neplatí, resp. je podmíněna splnitelností množiny S. Z hlediska adekvátního zachycení vyplývání se tento krok zdá být nezbytný již proto, že v jistých verzích Aristotelova původního deduktivního systému neplatí EX FALSO QUODLIBET, tj. nelze odvodit jakékoli tvrzení z množiny formulí obsahujících formuli a její negaci. Viz také pozn. na straně 190.

[13] K dalším odkazům a expozici problému srov. Kolman [2002, s. 67 nn].

Fregovy důvody ovšem nesmí být zaměňovány s námitkami matematického intuicionismu, podle něhož nejsou žádné formálnělogické postupy, přímé či nepřímé, s to ospravedlnit pravdivost aritmetického tvrzení, které je, jak tvrdí, v důsledku zdůvodnitelné pouze konstrukcí v strukturách naší mysli. Tomu se budeme věnovat v kapitole 7. Považujeme-li toto, tj. mentální konstrukci, za prototyp přímého důkazu, používáme tohoto pojmu v původním, prearistotelském smyslu názorného, epagogického důkazu, s geometrií jakožto jeho prominentním zdrojem. Protikladem geometrického důkazu je potom důkaz diskurzivní, apagogický, jehož doménou je spekulativní filosofie, jak ji známe z argumentů eleatské školy. Není náhodou, že právě eleaty s jejich úsudkovými schématy označil Aristotelés za zakladatele logiky, resp. dialektiky.[14]

Na rozdíl od těchto případů má eliminace nepřímého důkazu v rámci navrhovaných logických systémů značně nekontroverzní, protože neideologický, dílem praktický a dílem teoretický charakter. Převádění všech úsudků do výše uvedeného normovaného tvaru přímého odvození je nicméně spjato s ideologií jinou, kterou chci nazývat AXIOMATICKO-DEDUKTIVNÍ DOKTRÍNOU. Ta pochází rovněž od Aristotela a spočívá v tvrzení, že každá oblast poznání staví na nějakých elementárních pravdách, axiomech, z nichž jsou věty ostatní deduktivně odvozovány. Pojmy důkazu a deduktivního odvození přitom koincidují, což mj. znamená, že axiomy neboli 'první premisy' jsou považovány za nedokazatelné. Tento interní rys metody je externě zdůvodňován jednoduchostí axiomů, díky níž lze jejich pravdivost bezprostředně nahlédnout.

Zmíněná ideologická zátěž axiomaticko-deduktivní koncepce přitom spočívá v apriorních požadavcích kladených na *design* jakékoli vědy. Měla by mít podobu axiomatického systému s přímým důkazem jakožto kanonickou metodou. Eukleidova geometrie, která se (ne zcela právem) zdála tyto požadavky splňovat, byla pak po další staletí považována za prototyp takto vystavěné, — a proto tak úspěšné a spolehlivé — disciplíny, pročež se i pro tento způsob zdůvodňování pravdivosti ujala fráze 'more geometrico' (po způsobu geometrie). Ojedinělé pokusy o její širší aplikaci, jako je Spinozova etika či Hobbesova politologie, sice kritickému pozorovateli brzy naznačily, o jak utopický plán se jedná, uhrančivost a značná vágnost samotné ideje ale nikdy nedovolily vyslovit nahlas myšlenku, že by některé oblasti poznání axiomatizovatelné být nemusely.

Meze axiomatické metody bylo tedy lze pozorovat až mnohem později, když již byla prakticky i teoreticky založena v aparátu Fregovy logiky, a Hilbert ji proto mohl slavnostně prohlásit za oficiální metodu apriorních disciplín. U nich také jeho program plošné axiomatizace zaznamenal jisté úspěchy, aby pak za dramatických okolností selhal na případě nejžádanějším, totiž elementární aritmetice. Pro ni — v sou-

[14] Viz Diogenés Laertios [Vit., kniha IX].

ladu s Gödelovými výsledky — neexistuje žádný axiomatický systém, jenž by zároveň splňoval moderní požadavky transparentnosti, v nichž byla evidence nahrazena mechanickou kontrolovatelností. Historie se ale kupodivu opakuje. Namísto přirozeného závěru, že aritmetika není disciplína *more geometrico*, čelíme od Gödelových a Hilbertových dob systematickému zájmu o axiomatizace jejích fragmentů a jejich nezamýšlené modely. To by samo o sobě nebylo nic špatného, kdybychom se paralelně s tím dočkali hlubší revize základů a analýzy role logiky v aritmetice, nikoli závěru, že Gödelovy věty o neúplnosti svědčí o našich omezených, protože konečných schopnostech ve vztahu k uchopení aritmetické pravdy a my se s tím musíme jednoduše smířit. K tomu "že" a "proč" se jedná o naprostý kolaps analytického myšlení, se ještě vrátíme později.

V naší kritice axiomaticko-deduktivní doktríny přitom nejde o to, že by pokus o unifikaci důkazových metod v rámci nějaké disciplíny nemusel vést k úspěchu, byť by to byl jenom úspěch dílčí. Naopak, jsme si vědomi toho, že kanonizace jistých metod je vlastně jediným způsobem, jak nějakou lokálně pěstovanou oblast poznání pozvednout na vědeckou úroveň, tj. umocnit rozsah a sílu metod jejich zpřehledněním a zpřístupněním širší kontrole. V tomto smyslu lze např. rozumět Eudoxovu omezení geometrických metod na konstrukce pravítkem a kružítkem, tj. nechápat je primárně jako pokus o eliminaci ostatních metod, ale o jejich unifikaci, tj. umenšení *ad hoc* způsobů, jak řešit to či ono. Je příznačné, že se meze této unifikace definitivně potvrdily až na bázi jiné schematizace, totiž algebraizace veličin à la Descartes, která odkryla některé tradiční problémy (jako je kvadratura kruhu či trisekce úhlu) jako neřešitelné, rozuměj: neřešitelné uvedeným jednotným způsobem. Existence případů, které dané schematizaci unikají, není přitom přímým důvodem k jejímu odmítnutí, jednoduše proto, že coby 'schematizace' z definice připouští výjimky. Podstatné je zde vědomí toho, že

(1) bez nějakého zjednodušení dále pracovat nelze, protože vysvětlení něčeho (světa, jazyka, . . .) je vždy vysvětlení něčeho *něčím*, nutně jednodušším,[15] a že

(2) již proto není nahrazení jednoho schématu schématem jiným prostou otázkou lepší korespondence s (dosud neznámými) fakty, ale komplexním problémem širší koherence a praktické použitelnosti.

To platí jak o zmíněných geometrických metodách, tak o argumentačních kánonech a návrzích logických nebo důkazově-teoretických systémů.

[15] Alespoň pod čarou zmíním Ryleho notorický příklad mapy (nebo modelu), která, aby mohla sloužit svému účelu (lepší orientace v prostoru), musí mnohé vynechat. Jeho prominentním propagátorem a příčinou zmíněné notoričnosti v našich zeměpisných šířkách je Jaroslav Peregrin, viz třeba [1999, s. 201].

Gödelovy věty ve vztahu k navržené schematizaci důkazových metod ukazují totéž, co prostředky novověké algebry ve vztahu ke konstrukčním metodám geometrickým, totiž že jsou v jistém, dosti podstatném smyslu omezené. Nic víc a nic míň.

3.5 Kalkulizace logiky

Vrátíme-li se nyní k technickým aspektům axiomatizace vědeckých disciplín, vidíme, že má dva parametry, totiž:

(1) výběr axiomů, tj. nějakých pravdivých vět,

(2) výběr úsudkových pravidel, která pravdivost přenášejí.

V Aristotelově teorii je přitom pravdivost axiomů dána jejich evidencí, zatímco pravdivost odvozených vět, teorémů, evidencí užitých pravidel. Proto se také již v antice, zejména ale počátkem novověku, stala logika předmětem pochybností kritických jedinců, jimž se představa, že je možné pravdivost vět nějakého logice externího diskurzu garantovat pouhými jazykovými normami, zdála být příliš fantastická. S touto pochybností jsme se tváří v tvář setkali při problému logického zdůvodnění přechodu od stejnoměrné spojitosti k bodové, tj. univerzální platnosti schématu $(\exists x)(\forall y)A(x,y)/(\forall y)(\exists x)A(x,y)$. Situace je celkem prozaická, jak to lze nahlédnout na nejjednodušším, protože nejumělejším případě pravdivosti, totiž pravdivosti logické.

Tu jsme definovali pro jasně popsaný obor výrokovělogických schémat jakožto vlastnost, kterou mají ta z nich, která pro každou interpretaci konstant nabývají hodnotu 1. Odkaz k interpretacím proto činí logickou pravdivost vlastností sémantickou. Zároveň je zřejmé, že je tato vlastnost na oboru F_{VL} dobře definována v tom smyslu, že každá z formulí VL jednoznačně je nebo není tautologií. Ba co víc. To, zda je formule logicky pravdivá či nikoli, lze dokonce mechanicky ověřit, neboť relevantních ohodnocení konstant je vždy jenom konečně mnoho, konkrétně 2^n pro n různých konstant.

Otázka, zda lze z tautologických formulí vydělit nějakou přehlednou množinu a z ní poté pomocí nějaké přehledné množiny pravidel odvodit všechny ostatní tautologie, je přitom rovněž co do meritu věci jasná, aniž by bylo *a priori* jasné, zda to možné je či nikoli. A problémem zjevně není ani výběr zvláště 'evidentních' tautologií, ani zvláště 'evidentních' pravidel. Např. pravidlo

MP $\varphi, \varphi \to \psi \;/\; \psi$,

známé jako MODUS PONENS, přenáší pravdivost, a tudíž i tautologičnost pouze na základě výše uvedených definicí, a jakákoli další evidence s tím nemá co do činění, ba může být spíše na škodu, jak to (*cum grano salis*) ukazuje klasické sofisma:

> Co jsi neztratil, máš,
> neztratil jsi rohy
> ---
> máš rohy.

Místo pochybné evidence tedy nastupuje následující úvaha: Nechť jsou formule φ a $\varphi \rightarrow \psi$ pravdivé v nějaké interpretaci $\mathcal{I}$. Kdyby ψ v $\mathcal{I}$ pravdivá nebyla, byla by v ní nepravdivá, což by v souladu s pravidly ohodnocení implikace vedlo k závěru $\mathcal{I}(\varphi \rightarrow \psi) = 0$. To je ve sporu s předpokladem. Jelikož je tautologičnost definována jako pravdivost v každé interpretaci, dostáváme pro předpoklad tautologičnosti φ a $\varphi \rightarrow \psi$ obratem i tautologičnost ψ.

Ačkoli nás tedy MP nad oborem F_{VL} vede vždy od tautologií k tautologiím, není tomu tak, že by to byl on, co tautologičnost odvozených formulí zakládá. Ta je dána předem, a zdůvodňující role pravidla je podmíněna výše uvedeným důkazem přenosu tautologičnosti a způsobem vystavění oboru, na nějž bylo dané pravidlo aplikováno, tj. způsobem ohodnocení formulí z F_{VL}. Při konstrukci svého systému si Frege uvědomil, že jakékoli použití logiky na nějaký diskurz, speciálně diskurz aritmetický, vyžaduje jeho předchozí normaci odpovídajícími konstitutivními principy. K těm patří v případě Fregovy logiky na prvním místě princip pravdivostní. Jeho roli ve výše uvedené úvaze si je třeba důkladně promyslet. Substituční princip a zatím nediskutovaný princip Leibnizův patří až k logice predikátů (alespoň nedíváme-li se na věty jako na substituovatelné výrazy ve stejném smyslu, jako jsou jimi jména), dostaneme se k nim tedy později. Nyní se vraťme k vlastní axiomatizaci logiky výroků.

Systém, v jehož rámci jde odvodit všechny pravdy a pouze pravdy výrokové logiky, jinými slovy axiomatizaci pojmu logické pravdy, podal Frege již ve své *Begriffsschrift.* Vyšel přitom ze sady šesti axiomů

B1 $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$,

B2 $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$,

B3 $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$,

B4 $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$,

B5 $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$,

B6 $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

a jednoho pravidla, totiž právě MP. Toto jasné rozlišení axiomů od pravidel mělo pro deduktivní charakterizaci logické pravdivosti zásadní význam, zvláště když bylo zprvu často (např. u Peana a Russella) stíráno právě v důsledku zmíněné korespondence logických pravd a platného úsudku, konkrétně tedy objektového symbolu "$\rightarrow$" materiální implikace a metajazykového symbolu "$\vDash$" vyplývání, případně symbolu "$\vdash$" odvození.[16] Ten mj. pochází rovněž od Frega, ale má u něho odlišný význam, totiž performátoru, jenž předepsán před větu vyjadřuje její tvrzení ve smyslu nárokování pravdivosti. V tomto smyslu je tedy spíše symbolem sémantickým.

Rozlišení jazyka a metajazyka stejně tak jako pojem interpretace formulí a jasnou definici logické pravdivosti nelze samozřejmě najít ani u Frega, ani u jeho současníků. Nám bohatě stačí, že si je vynutil další vývoj, a že v něm tedy musí být alespoň v nějaké formě zakotveny. To se týká i rozlišení axiomu a axiomatického schématu, které je nutné, chceme-li vysvětlit okolnost, že si u výše uvedené axiomatizace vystačíme s jedním jediným pravidlem. Pak totiž výchozí množina axiomů nesestává z šesti, ale z nekonečně mnoha formulí, které mají formu některého z konečného počtu uvedených schémat. Nahradíme-li nyní tato schémata konkrétními formulemi, tj. zaměníme-li každé ze schematických písmen nějakou výrokovou konstantou, obdržíme sice konečnou axiomatizaci logiky, nicméně musíme přidat PRAVIDLO SUBSTITUCE

$$\mathsf{S} \quad \varphi \,/\, \varphi^p_\psi,$$

v němž φ^p_ψ značí výsledek nahrazení *všech* výskytů konstanty p ve formuli φ formulí ψ. Další úprava Fregova úvodního systému může spočívat v redukci užitých axiomů, neboť některé lze odvodit z druhých, a jejich celek tedy není NEZÁVISLÝ. Łukasiewicz[17] zjednodušil Fregův systém nahrazením axiomů (B3–6) axiomem

$$\mathrm{C} \quad (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi).$$

Výsledná trojice axiomů, resp. axiomatických schémat (B1–2), (C) a pravidla MP, případně S, je považována za standardní, i když samozřejmě existují také alternativní systémy, a to jak skromnější (s jedním axiomem), tak bohatší (s axiomy pro jednotlivé spojky).

První, nejskromnější případ je spojován s Nicodem [1917–1920] a nebyl by sám o sobě ani tak zajímavý (z konečně mnoha axiomů lze jeden udělat prostou konjunkcí), kdyby Nicod svůj axiom neformuloval pomocí jediné spojky, která sama tvoří funkcionálně úplnou množinu. Jednalo se o tzv. SHEFFERŮV OPERÁTOR (*Sheffer stroke*), jejž lze naopak pomocí známých spojek vyjádřit jako

---

[16] Peano [1889] používal symbol obráceného písmene "C" současně ve významu inkluze, implikace a dedukce. Ve druhém z nich si jej ponechal Russell [1910–1913], jenž také jeho opětovným obrácením zavedl moderní znak pro podmnožinu. K Russellovu zápolení s rozdílem mezi implikací a dedukcí, resp. vyplýváním srov. úvodní kapitoly jeho *The Principles of Mathematics* (dále "Principles") [1903], případně Coffův [1991, s. 161 nn] komentář.

[17] Viz poznámka in Łukasiewicz & Tarski [1930, § 2]. Srov. také Łukasiewicz [1935].

$$\varphi \mid \psi \rightleftharpoons \neg(\varphi \wedge \psi).$$

První jej ovšem neobjevil Sheffer [1913], ale, jako řadu jiných pojmů, již třicet let před ním Peirce [1931–1958, 4.12–20], spolu s další úplnou spojkou, známou jako PEIRCOVA ŠIPKA (*Peirce arrow*) $\varphi \downarrow \psi \rightleftharpoons \neg(\varphi \vee \psi)$. Méně úsporné, leč praktičtější deduktivní systémy, s axiomy rozdělenými podle spojek, byly typické pro Hilbertovu školu.[18] Łukasiewiczovo zjednodušení Fregova systému je nicméně optimální z důkazově-teoretického hlediska. Nadále o něm budeme hovořit jako o $\mathfrak{B}$, podle vzoru “Begriffsschrift”. Pro libovolný kalkul $\mathfrak{K}$ lze nyní definovat:

> (FORMÁLNÍ) DŮKAZ formule φ v kalkulu $\mathfrak{K}$ je posloupnost ψ_1, ψ_2, …, ψ_n taková, že každý člen (i) je buď axiom kalkulu, nebo (ii) na něj lze usoudit aplikací pravidel kalkulu na formule předchozí a (iii) $\psi_n = \varphi$.

O formuli φ, k níž existuje důkaz v kalkulu $\mathfrak{K}$, říkáme, že je v něm DOKAZATELNÁ či že je jeho TEORÉMEM. Zapisujeme to jako $\vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$ nebo jenom $\vdash \varphi$. Pro implicitní $\mathfrak{K} := \mathfrak{B}$ je tím induktivně charakterizována jistá podtřída

$$\mathsf{Th} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \mid \vdash \varphi\}$$

formulí z F_{VL}, a lze tudíž formulovat významná metateoretická tvrzení, která se jí, resp. kalkulu $\mathfrak{B}$ týkají. Velká část jich přitom byla zveřejněna Postem [1921], mezi nimi na prvním místě fakt, že Th koinciduje s množinou

$$\mathsf{Taut} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \mid \models \varphi\}$$

všech tautologií VL, a představuje tedy její alternativní, syntaktickou charakterizaci.[19] Tato syntaktičnost je ovšem relativní, neboť snazší část tvrzení

$$\mathsf{Th}{=}\mathsf{Taut},$$

tzv. KOREKTNOST kalkulu, podle níž tento generuje pouze tautologie, závisí na důkazu, že (1) jsou všechny axiomy $\mathfrak{B}$ logicky platné a že (2) pravidla MP, případně S, přenášejí logickou pravdivost, což jsou nutně úvahy nesyntaktické. Jako by se nám tu najednou znovu zjevil duch Aristotelova rozlišení mezi deduktivním (apagogickým) důkazem teorému a (epagogickým) důkazem axiomu prostým nahlédnutím.

Korektnost svého kalkulu přitom v jistém smyslu dokázal již Frege. Totéž lze říci o snadném důsledku této tzv. VĚTY O KOREKTNOSTI, totiž

[18] První souhrnnou prezentaci lze nalézt in Hilbert [1928].

[19] Termín “tautologie”, mimochodem, pochází z Wittgensteinova *Tractatu* [1921], vydaného téhož roku.

BEZESPORNOSTI kalkulu $\mathfrak{B}$, spočívající v pozorování, že třída Th nekoinciduje s třídou F_{VL}. Jelikož pro kalkul $\mathfrak{B}$ (a kalkuly klasické logiky obecně) platí *ex falso quodlibet*, je toto pozorování ekvivalentní tvrzení, že v $\mathfrak{B}$ není zároveň odvoditelná formule a její negace. Explicitní důkazy, resp. metody důkazů metateorémů o bezespornosti pocházejí ovšem až od Bernayse, jenž v rámci své habilitace [1918] ukázal bezespornost (jistých) axiomů výrokového počtu spolu s jejich nezávislostí prostředky rané Hilbertovy axiomatické školy, tj. reinterpretací daných formulí, uplatněnou poprvé s úspěchem v Hilbertových *Grundlagen der Geometrie* [1899] (dále zpravidla "Grundlagen"). Jelikož Bernays své výsledky a jejich další rozpracování nepublikoval před rokem 1926,[20] připadá hlavní zásluha na dalším vývoji Postovi, jenž dokázal jak výše zmíněnou (sémantickou) ÚPLNOST kalkulu $\mathfrak{B}$, podle níž generuje všechny tautologie VL, tak tzv. POSTOVU ÚPLNOST. Podle ní je $\mathfrak{B}$ maximálně bezesporný v tom smyslu, že se připojením libovolné neodvoditelné formule, tj. formule, která není v Th, k axiomům stane sporným.

Postova úplnost platí ovšem pouze pro $\mathfrak{B}$ s pravidlem substituce, neboť S, na rozdíl od MP, přenáší jen logickou pravdivost, nikoli pravdivost vůbec. Proto lze, z druhé strany, využít $\mathfrak{B}$ s pravidlem MP k axiomatizaci logického vyplývání. V obecné rovině totiž můžeme k axiomům nějakého kalkulu $\mathfrak{K}$ přidat libovolnou množinu premis S, v případě logických kalkulů nazývaných též MIMOLOGICKÝMI AXIOMY, a definovat:

> (FORMÁLNÍ) ODVOZENÍ formule φ z premis S v kalkulu $\mathfrak{K}$ je posloupnost $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ taková, jejíž každý člen (i) je buď axiom kalkulu $\mathfrak{K}$, nebo (ii) premisa z S, (iii) nebo na něj lze usoudit aplikací pravidel kalkulu na formule předchozí a (iv) $\psi_n = \varphi$.

O formuli φ, k níž existuje příslušné odvození, říkáme, že je odvoditelná z premis S v kalkulu $\mathfrak{K}$, nebo též, že je TEORÉMEM dané teorie S, což značíme jako $S \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$, případně $S \vdash \varphi$. Množinu všech teorémů teorie S nad kalkulem $\mathfrak{K}$ značíme $\mathsf{Th}_{\mathfrak{K}}(S)$, přičemž index kalkulu (tak jako dříve) zpravidla potlačujeme. Teorie se nazývá (deduktivně) BEZESPORNOU (vůči $\mathfrak{K}$), jestliže se v $\mathsf{Th}_{\mathfrak{K}}(S)$ nevyskytuje alespoň jedna formule jazyka, případně formule a její negace. Pro konkrétní případ $\mathfrak{K} := \mathfrak{B}$ formulujeme nyní tzv. SILNÉ VERZE VĚT O ÚPLNOSTI A KOREKTNOSTI, které říkají:

> $S \vdash \varphi$ tehdy a jen tehdy, když $S \vDash \varphi$.

Z toho snadno plyne SLABÁ VĚTA O ÚPLNOSTI (a korektnosti), tj. ekvivalence:

[20] Jako Bernays [1926]. Srov. k tomu Zach [1999].

$\vdash \varphi$ tehdy a jen tehdy, když $\vDash \varphi$.

Je přitom zřejmé, že silnou verzi věty o úplnosti bychom mohli formulovat i pro Aristotelovu sylogistiku, zvláště když jsme již výše zmínili, že se o to v nějakém směru snažil již Aristotelés sám. Do jaké míry v tom byl úspěšný, je přitom otázka, kterou se dále zabývat nebudeme a přejdeme rovnou k detailům důkazu věty o úplnosti pro výrokovou logiku.[21]

3.6 Bezespornost a úplnost

Způsobů, jak dokázat úplnost VL, je několik. Post přitom dokázal pouze slabou větu o úplnosti. Z ní lze dostat silnou větu v oslabené verzi pro S konečné pomocí sémantické a SYNTAKTICKÉ VERZE VĚTY O DEDUKCI. Ta syntaktická má formu:

$S, \varphi \vdash \psi$ tehdy a jen tehdy, když $S \vdash \varphi \to \psi$

a její ne zcela triviální důkaz lze připsat Herbrandovi, který jej podal ve své disertaci [1930] pro kalkul predikátové logiky. Je samozřejmé, že důkaz věty je podstatně závislý na zvoleném kalkulu.[22] K silné větě o úplnosti lze ze zmíněného oslabení pro S konečné eventuálně dospět přes tzv. VĚTU O KOMPAKTNOSTI:

> Třída S formulí má model tehdy a jen tehdy, když má model každá její konečná podmnožina.

Naznačme stručně, jak silnou úplnost ze slabé úplnosti pomocí kompaktnosti odvodit:

Důkaz: Z předpokladu $S \vDash \varphi$ můžeme usoudit, že existuje konečná podmnožina $U \subseteq S$ taková, že $U \vDash \varphi$, neboť v opačném případě by pro každou konečnou podmnožinu $V \subseteq S$ platilo $V \nvDash \varphi$, což je ekvivalentní tomu, že $V, \neg\varphi$ má model. Pak ale má model i $S, \neg\varphi$, čili $S \nvDash \varphi$ v rozporu

[21] Stekeler-Weithofer [1986] rozebírá problémovou situaci Aristotelových *Analytik* a formuluje větu o úplnosti také ve výše uvedeném tvaru s omezením na bezesporné množiny S formulí. Toto omezení se ale nezdá být dostatečné. Nejspíš z tohoto důvodu pracuje Corcoran [1972] ve svém důkazu úplnosti s rozšířeným konceptem odvoditelnosti $S \vdash_c \varphi$, definovaným pomocí stávajícího pojmu jako $S \vdash \varphi$ nebo ($S, \neg\varphi \vdash \psi$ a $S, \neg\varphi \vdash \neg\psi$). Věta o úplnosti v jeho podání se pak rovná eliminaci nepřímého důkazu až na jediný povolený případ. Na rozdíl od Stekelerova systému zde přirozeně platí *ex falso quodlibet*, nicméně úplnost je dokázána jen pro bezesporné množiny premis. Systém Smithův [1983] nahrazuje Corcoranovo nepřímé odvození tzv. odloučením (*ekthesis*), což jsou pravidla $AiC/BaA, BaC$ a $AoC/BaA, BeC$, užívaná již Aristotelem. Smith dokazuje, že při bezesporné množině předpokladů vede jeho systém ke stejné množině závěrů jako Corcoranův systém, a je tedy rovněž úplný. *Ex falso quodlibet* nicméně neplatí. Za upozornění na Smithův systém jsem vděčný Martinu Fontánovi.

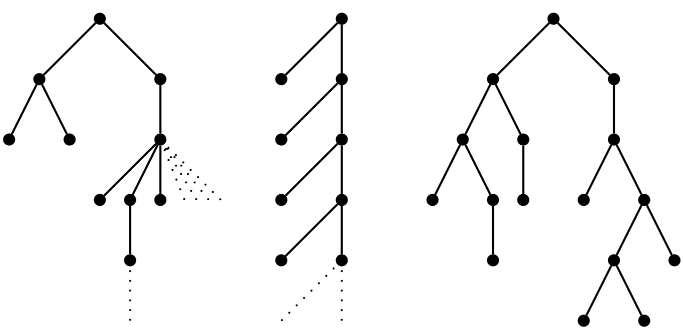
[22] Předvádět ho nebudeme, ideově není zajímavý a lze ho najít v každé učebnici.

s předpokladem. Existuje-li konečné U takové, že $U \models \varphi$, pak podle slabé věty o úplnosti platí i $U \vdash \varphi$, a tedy i $S \vdash \varphi$, což jsme chtěli dokázat. Opačný směr je založen na pozorování, že v odvození formule z premis vystupuje vždy jenom konečně mnoho formulí, automaticky můžeme tedy z $S \vdash \varphi$ usoudit na $U \vdash \varphi$ pro nějaké $U \subseteq S$ konečné. Z toho nyní podle slabé věty o úplnosti dostaneme $U \models \varphi$, což z vlastnosti vyplývání lze rozšířit na $S \models \varphi$. □

Věta o kompaktnosti patří mezi několik standardních charakteristik, na než jsou přezkoumávány logické systémy. Významná se ukáže být její souvislost s tzv. Königovým lemmatem, týkajícím se speciálních uspořádaných množin, tzv. stromů. Nejprve proto definujme:

> Strom je (částečně) uspořádaná množina $\langle A, < \rangle$, v níž (i) pro každé $x, y \in A$ platí, že má $\{x, y\}$ dolní mez, a (ii) pro každé $x \in A$ je $\{y \in A \mid y < x\}$ konečná a lineární. Prvky A jsou nazývány uzly. Řetězcem v (částečně) uspořádané množině $\langle A, < \rangle$ nazýváme její libovolnou lineární podmnožinu. Větví stromu $\langle A, < \rangle$ nazýváme každý jeho maximální řetězec, tj. řetězec, který již nelze rozšířit o další prvek a získat opět řetězec. Bezprostředním následníkem uzlu x se nazývá uzel y takový, že (i) $x < y$, tj. y je následníkem x, a (ii) pro žádné jiné z neplatí současně $x < z$ a $z < y$. Tento vztah značíme jako $x <_B y$. Řekneme, že se větev stromu větví ve svém uzlu x, jestliže existují dva nesrovnatelné uzly y, z takové, že $x <_B y$ a $x <_B z$.

V názorné rovině je strom dán jednoduše svým kořenem, tj. uzlem, jenž nemá žádné předchůdce, a následným větvením o další uzly, přičemž

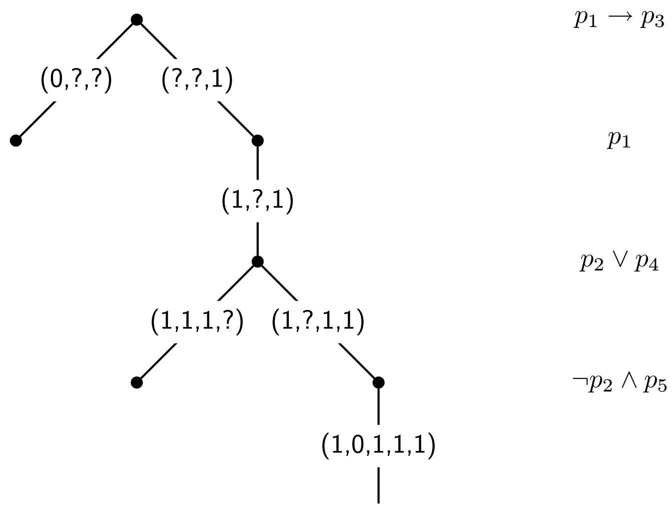


Obrázek 3.3: Stromy

toto větvení může být nekonečné. V matematice bývá z typografických a didaktických důvodů zvykem nechávat růst stromy shora dolů, jak je to vidět na obrázku 3.3. My se této konvence přidržíme pouze na úrovni grafické, aniž bychom jí přizpůsobovali notaci, tj. považovali kořen za největší uzel. Uzly, které již nemají žádné následníky, se nazývají LISTY. Nekonečné jsou ty větve, které nemají žádné listy. KÖNIGOVO LEMMA[23] se týká konečně se větvících stromů (viz druhý a třetí strom obrázku 3.3) a říká:

> Nekonečný strom, v němž má každý uzel pouze konečně mnoho bezprostředních následníků, má nekonečnou větev.

S tímto zdánlivě nevinným tvrzením jsou spjaty tytéž potíže, jaké jsme již kdysi zmínili u Bolzanovy-Weierstrassovy věty, a vlastně není divu, neboť obě tvrzení jsou si při vhodné topologické interpretaci stromu ekvivalentní.[24] Opět je sice zřejmé, že v konečně se větvícím stromu musí



Obrázek 3.4: Kompaktnost

mít uzel s nekonečně mnoha následníky nějakého přímého následníka, jenž má rovněž nekonečně mnoho následníků, a že tedy takto určená posloupnost přímých následníků kořenem počínaje dává onu požadovanou větev, na druhou stranu není obecně možné tuto cestu efektivně popsat, tj. udat konkrétní řadu uzlů, která ji tvoří, neboť průběžné testování, které z možných větvení vede k oné nekonečné větvi a které ne, může končit regresem. Jiný, podstatně vágnější původ nekonstruktivnosti lemmatu je axiom výběru, který potřebujeme k tomu, abychom z většího

[23] Pro pořádek uveďme, že jeho autorem není již zmíněný Julius (Gyula) König, ale jeho syn Dénes.

[24] K těmto souvislostem se ještě dostaneme v kapitole 7.

počtu uzlů, které mají nekonečně mnoho následníků, vybrali právě jeden, a to nekonečněkrát. Nyní předveďme rychlé odvození věty o kompaktnosti z Königova lemmatu:

Důkaz: Předpokládejme, že má každá konečná podmnožina formulí nějaké (spočetné) množiny S model. Víme, že v omezení na konečné množiny můžeme uvažovat pouze konečně mnoho (redukovaných) interpretací. Máme-li formule z S očíslovány přirozenými čísly jako φ_1, φ_2, $\ldots$, můžeme brát jednu po druhé, a vytvářet tak jakýsi strom jejich ohodnocení. Kořen je označen formulí φ_1 a větvení odpovídají těm ohodnocením, která ji splňují. Následnické uzly jsou pak všechny označeny formulí φ_2, větvení odpovídají ohodnocením, která rozšiřují ohodnocení dané větve a přitom splňují φ_2, atd. Pro konkrétní příklad množiny $\{p_1 \to p_3, p_1, p_2 \vee p_4, \neg p_2 \wedge p_5, \ldots\}$ to ukazuje obrázek 3.4. Je zřejmé, že takto musíme dík předpokladu splnitelnosti v každém stadiu přidat alespoň jeden další uzel, tím pádem jich má strom nekonečně mnoho, a jelikož je každé jeho větvení konečné, musí mít i nekonečnou větev. Ta určuje model množiny S. $\square$

Tímto máme naznačen důkaz (silné) věty o úplnosti za předpokladu, že bylo již dokázáno Königovo lemma a slabá věta o úplnosti. Důležité je přitom pozorování, že ekvivalence

$S \vdash \varphi$ tehdy a jen tehdy, když $S \models \varphi$

je vlastně rovnocenná ekvivalenci

množina je bezesporná tehdy a jen tehdy, jestliže má model.

Slabá věta o úplnosti se tím pádem rovná tvrzení, že má každá konečná bezesporná množina formulí model, a věta o kompaktnosti pak tuto vlastnost rozšiřuje i na bezesporné množiny nekonečné. Co se týče historie, větu o kompaktnosti (pro predikátovou logiku!) dokázal jako korolár (silné) věty o úplnosti Gödel [1930]. Její zobecnění pro nespočetné jazyky podal, byť nejprve implicitně, Malcev [1936].

Jak zkonstruovat model nějaké bezesporné množiny, je ale zajímavé obecně, a tento způsob důkazu věty o úplnosti také bývá první volbou. Fregova výroková logika má v tomto ohledu tu výhodu, že byla Wittgensteinem v *Tractatu* identifikována s logickým lešením světa, a příslušná konstrukce se tak může těšit i jiné nežli jen teoreticko-technické pozornosti. Ideovou bází celé stavby jsou přitom stavy věcí (*Sachverhalte*), případně elementární fakty (*Tatsachen*) jakožto stavy věcí, které nastávají. Prostředky jejich kombinací do komplexních situací (*Sachlagen*) jsou pak výrokové spojky. Úvodní věta [1922, § 1.11]:

svět je určen fakty a tím, že jsou to všechny fakty nabízí chápat aktuální a možné světy jako distribuce pravdivostních hodnot mezi pevně danou třídu elementárních vět, v našem případě reprezentovaných výrokovými konstantami p_1, p_2, ... Tyto distribuce jsou ekvivalentní vyčlenění některých konstant jakožto pravdivých a dodatku, že žádné jiné konstanty jako pravdivé ohodnoceny nejsou, čili: že jsou ohodnoceny jako nepravdivé. To plně odpovídá Fregově transcendentální dikci, podle níž

> skutečnost je věta, která je pravdivá.[25]

Věta (formule) vystavěná z elementárních vět (formulí) je v daném možném světě (interpretaci) jednoznačně pravdivá či nepravdivá, tj. daný možný svět určuje jednoznačně její pravdivostní hodnotu. To je výsledkem výše zmíněné metaindukce podle složitosti formule. Ale i naopak: věty (formule) vydělují ze souboru všech možných světů ty, v nichž platí, popisujíce některou jejich část jakožto nastávající. Obrazně interpretována funguje tato deskriptivní role komplexních vět coby reprezentací komplexních faktů především u konjunkcí coby obrazů příslušného výseku (možné) reality. Na jádru věci to však nic nemění, např. formule

$$p_2 \vee p_4$$

popisuje všechny interpretace, v nichž je alespoň jedné z konstant p_2, p_4 přiřazena hodnota 1. Tyto interpretace mohou být *de facto* popsány pomocí těchto konstant samých, uvážíme-li totiž jejich kombinace

$$\{p_2, p_4\},\ \{p_2, \neg p_4\},\ \{\neg p_2, p_4\}.$$

Každá z nich sice nechává ještě mnohé neurčeno, fixuje ale pevně alespoň tu část světa, které se týkají její konstanty. Vlastně se zde znovu uplatňuje deskriptivní povaha konjunkce, ovšem za cenu připuštění negovaných konstant mezi základní prostředky ‘světatvorby’.

Označíme-li nyní konstanty a negace konstant jako LITERÁLY, můžeme říci, že je možný svět určen totalitou všech literálů, v níž se každá konstanta objeví právě jednou (tj. buď ona sama, nebo její negace). Hledáme-li model nějaké bezesporné množiny S formulí, postačí samozřejmě jen množina literálů sestávající z konstant vyskytujících se v nějaké formuli z S. Zbytek je lhostejný.

Důkazy úplnosti, které k dané bezesporné množině formulí konstruují jinou množinu formulí, přímočaře popisující příslušný model, byly do logiky zavedeny Leonem Henkinem [1949], jenž na ně podle svých vlastních slov přišel (překvapivě) v kontextu predikátové logiky *druhého řádu* se speciální sémantikou.[26] Zmíněná překvapivost je dána tím, že

[25] Frege [1918*a*, s. 74] nehovoří o větě, ale myšlence, což je vlastně obsah věty, resp. věta jakožto nositel obsahu, nikoli pouhý artefakt.
[26] Viz Shapiro [1991, s. 96, pozn. 11].

u druhořádových logik se standardní sémantikou dochází k nežádoucímu výskytu bezesporných množin, které nemají model.[27] Jejich bezespornost je dána slabostí užité (korektní!) logiky, neschopné daný spor odvodit, ačkoli by to — ze sémantického pohledu — bylo na místě. Tím spíše se ale celá záležitost konstrukce modelu na bázi bezesporného deduktivního systému ukazuje jako netriviální.

Henkinův způsob je přitom velmi robustní. Spočívá totiž v sestrojení MAXIMÁLNĚ BEZESPORNÉ MNOŽINY formulí, tj. takové bezesporné množiny, jejíž libovolné rozšíření vede již k množině sporné. Maximálně bezesporná množina formulí VL kromě báze literálů, postačující pro určení daného možného světa, obsahuje pro libovolnou formuli výrokové logiky buďto ji, nebo její negaci, a reprezentuje tedy přímo i ohodnocení komplexních formulí. Jelikož je od počátku konstruována jakožto rozšíření výchozí množiny S, je indukovaný model celku i modelem hledaným. Nyní již zbývá jen předvést zmíněné rozšíření a ukázat, jak určuje příslušný model, neboli dokázat tvrzení:

> (1) Ke každé bezesporné množině S formulí existuje maximálně bezesporná množina S' taková, že $S \subseteq S'$, a (2) každá maximálně bezesporná množina má model.

Důkaz: Vyjděme (1) z toho, že je množina F_{VL} všech formulí spočetná, a tedy uspořádatelná do řady $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Nyní zkonstruujme rozšíření množiny S v induktivně definovaných stupních tak, že (i) položíme $S_1 := S$ a (ii) pro $n \geq 1$ definujeme

$$S_{n+1} := \begin{cases} S_n + \varphi_n & \text{jestliže je } S_n + \varphi_n \text{ bezesporná,} \\ S_n + \neg\varphi_n & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je věcí běžné rutiny (opírající se o vlastnosti kalkulu $\mathfrak{B}$) dokázat, že (i) je každé S_n pro $n \in \mathsf{N}$ bezesporné, že (ii) je tudíž bezesporné i výsledné sjednocení $S' = \bigcup_{n\in\mathsf{N}} S_n$, které (iii) je navíc bezesporné maximálně. Kdyby totiž (i) nebylo bezesporné ani $S_n + \varphi_n$, ani $S_n + \neg\varphi_n$, byla by S_n, v rozporu s induktivním předpokladem, sporná. To plyne např. z VĚTY O NEUTRÁLNÍ FORMULI, která dovoluje z $T, \varphi \vdash \psi$ a $T, \neg\varphi \vdash \psi$ usoudit na $T \vdash \psi$. Kdyby (ii) nebylo bezesporné sjednocení S', muselo by existovat nějaké odvození formule a její negace. V tomto odvození by ale z definice mohlo figurovat pouze konečně mnoho formulí z S'. Ty by tak musely náležet nějaké množině S_k pro $k \in \mathsf{N}$, což ale znamená, že je spor odvoditelný již z S_k, což je zase v rozporu s bodem (i). A za (iii), kdyby S' nebyla maximálně bezesporná, existovala by formule ψ, která by nebyla v S' a přitom by $S' + \psi$ zůstala bezesporná. Tato formule by se ovšem musela vyskytovat v daném vyčíslení, dejme tomu jako φ_k.

[27] Více v oddíle 4.5.

Jelikož se nestala součástí rozšíření S_{k+1}, muselo být $S_k + \psi$ sporné, což je v rozporu s předpokládanou bezesporností $S' + \psi$.

Nyní chceme (2) ukázat, jak určuje maximálně bezesporná množina svůj model. Z uvedené konstrukce přitom vyplývá, že v S' musí být pro danou formuli z F_{VL} buďto ona, nebo její negace, z bezespornosti, že tam nemohou být obě. Ohodnotíme-li tedy výrokové konstanty podle toho, zda v S' jsou či nikoli, hodnotou 1, resp. 0, je na základě snadné induktivní úvahy zřejmé, že pro takto určenou interpretaci $\mathcal{I}$ a libovolnou formuli ψ platí:

$$\psi \in S' \text{ tehdy a jen tehdy, když } \mathcal{I}(\psi) = 1.$$

Neboť: (i) tvrzení platí pro konstanty z definice, (ii) platí-li pro ψ, pak i pro $\neg\psi$ jednoduchou kontrapozicí a (iii) platí-li pro φ a ψ, pak i pro $\varphi \rightarrow \psi$, protože (iii.i) kdyby nastal případ, že $\varphi \rightarrow \psi \in S'$ a $\mathcal{I}(\varphi \rightarrow \psi) = 0$, platilo by $\mathcal{I}(\varphi) = 1$ a $\mathcal{I}(\psi) = 0$, což znamená, že $\varphi \in S'$ a $\neg\psi \in S'$ podle induktivního předpokladu. Pak je ale z S' odvoditelný spor jednoduchou aplikací MP. A naopak (iii.ii), kdyby $\mathcal{I}(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ a $\varphi \rightarrow \psi \notin S'$, pak $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \in S'$. Tím pádem musí platit i $\varphi \in S'$ a $\neg\psi \in S'$, neboť jinak by S' nebyla maximálně bezesporná (představujme si $\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ raději jako konjunkci $\varphi \wedge \neg\psi$), tudíž platí i $\mathcal{I}(\varphi) = 1$ a $\mathcal{I}(\psi) = 0$ podle induktivního předpokladu. To je ovšem v rozporu s předpokladem $\mathcal{I}(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. □

Podstatně skromnější konstrukce modelu k bezesporné množině formulí je založena na metodě sémantických stromů, usilujících o jakýsi model minimální. K tomu se dostaneme v souvislosti s predikátovou logikou, kde je metoda tohoto typu vlastně nutná, neboť v ní není indukována žádná pevná ontologická báze, kterou by šlo použít pro libovolnou formuli, tj. univerza diskurzu variují jak co do povahy, tak do počtu předmětů. K nahlédnutí toho, že je třeba sémantiku predikátové logiky uchopit tímto způsobem, tj. neomezit se na jediný univerzální diskurz, jak to vyžadoval Frege, potřebovala ovšem logika právě oněch zhruba padesát let svého vývoje. K tomu se vyjádříme ve zbytku kapitoly.

3.7 Substituce, substituce a substituce

Frege nám ve svých spisech nedává mnoho příležitostí pochopit, jak na svůj značně netriviální expresivní a úsudkový kánon přišel. Není přitom pochyb, že jej odvíjel od nijak staré, avšak v šedesátých letech tehdejšího století již dostatečně stabilizované praxe weierstrassovské analýzy. Fregova vlastní zhodnocení toho, v čem spočívá nadřazenost jeho systému logice tradiční a jaké z toho plynou důsledky vzhledem k některým zažitým názorům na povahu logiky, zejména názorům Kantovým, jsou ovšem přes jejich malý počet velmi sugestivní, tj. jakýsi základ k dalším úvahám určitě máme.

Ve svých *Grundlagen* [1884, § 88] vyjadřuje Frege již zmíněný názor, že Kant zařadil aritmetiku mezi syntetické disciplíny proto, že “zjevně podcenil hodnotu analytických soudů — bezpochyby v důsledku příliš úzkého určení tohoto pojmu”. Podle Kanta [1781/1787, A 6/B 10] jsou analytické ty soudy, u nichž je predikát obsažen v subjektu (jako je v pojmu ‘malého koně’ obsažen ‘kůň’ či, méně triviálně, v pojmu ‘grošáka’ pojem ‘strakatosti’), a které jsou proto [1781/1787, A 151/B 190] založeny na principu sporu coby PRINCIPU ANALYTICKÝCH SOUDŮ. Souvislost mezi (i) obsažeností pojmu v pojmu (jejich ‘identitou’) a (ii) principem sporu není na první pohled zcela jasná, začněme proto jejich vztahem k analytičnosti.

Otázku obsaženosti lze cele připsat na vrub intenzionální interpretace aristotelské logiky, uznávající v důsledku pouze unární pojmy, a proto i velmi omezenou třídu toho, co lze považovat za analytický (logicky pravdivý) výrok. Sylogistika, jak jsme již zmínili, *de facto* s větami této kategorie vůbec nepracuje a zavádí jen pojem logicky platného úsudku. K přechodu mezi logickou pravdou a platností, jak je běžný v logice moderní, potřebujeme zjevně nějakou formu implikace. Dále je možné zavést pojmy relační, tj. vyšší než unární arity. Jejich implementace do Fregova systému je ale uskutečněna v kontextu obecnějšího rozlišení mezi substituovatelným výrazem a substitučním rámcem, tedy v kontextu toho, co budeme nazývat technikou substituce. Tu lze totiž aplikovat nejen na věty elementární, jako v případě “Brutus zabil Caesara”, ale i věty složené, typu “Sókratés obdivuje Theaitéta nebo Platón obdivuje Theaitéta” či “Platón obdivuje každého, koho obdivuje Sókratés”, dávající pak vyvstat pojmům jako “být obdivován Platónem nebo Sókratem”, “být ve vztahu obdivovatele každého, koho někdo obdivuje” atd.

Co se týče principu sporu, ten lze dát nejprve do souvislosti s Leibnizovým odvozováním rozumových pravd (*vérités de raisonnement*) z identit, rozuměj: z identity pojmu predikátu s pojmem subjektu. Leibnizovo a Kantovo pojetí analytického soudu v tomto ohledu vlastně koincidují, i když má Leibniz občas tendence vyžadovat obsaženost predikátu v subjektu nejen u logicky pravdivých vět, ale u pravdivých vět obecně. Princip sporu coby jednoduché popření principu identity hraje pak v oblasti zdůvodnění analytičnosti nějakých vět tutéž roli. Michael Potter [2000, s. 32] navrhnul v této souvislosti věcně atraktivnější, i když historicky ne zcela věrohodné řešení, totiž vyložit Kantův princip analytických soudů na pozadí současné metody sémantických *tableaux*, k níž se dostaneme v oddíle 3.11. Její podstatou je testování logické pravdivosti formule φ právě na bázi vyvozování sporných důsledků z negace φ. To dělá Kantovu charakterizaci analytičnosti akceptovatelnou i z pozic jakékoli logiky, která je v tomto smyslu úplná, tj. jejíž formule jsou tautologické tehdy a jen tehdy, je-li z jejich negací jistým způsobem odvoditelný spor. V případě Fregově to platí o některých fragmentech jeho systému, a to výrokové logice a predikátové logice prvního řádu. Frege ovšem ve své *Begriffsschrift* zavedl predikátovou logiku *bez* řádového omezení, a ta úplná není, což znamená, že analogií, jako je ta Potterova, je třeba užívat velmi obezřetně.

Problém, jak postupovat, chceme-li co nejvíce úsudků daného diskurzu vykázat jako případy jistých platných inferenčních schémat, a ušetřit si tak další odkazy k matérii daného oboru (tj. předvést je jakožto logické, nikoli materiální inference), je otázka jistého rozhodnutí (výběru příslušné sady inferenčních vzorců), a má tedy konvenčně-instrumentální charakter. Podstatné je, že Frege svoji logiku takto také chápe, když v úvodu *Begriffsschrift* [1879, s. IV] líčí, že nejprve zkoušel, "jak daleko se v aritmetice lze dostat pomocí úsudků samých, pouze s oporou v zákonech myšlení, jež jsou nadřazeny všemu ojedinělému". Skutečnost, že se tato zkusmá redukce obvyklých aritmetických postupů na několik málo inferenčních vzorců podařila, považoval Frege právem za potvrzení původní hypotézy, podle níž by se v aritmetice dalo postupovat pouze tímto způsobem, tedy že by ji šlo plně konceptualizovat nebo, jak říká, založit na logice.

Odpověď na otázku, co konkrétně Frege svým logicismem myslí, musíme hledat především ve sledu dílčích úspěchů, selhání a pokusů o nápravu, jak se nacházejí v triádě jeho stěžejních spisů: *Begriffsschrift*, *Grundlagen der Arithmetik* a *Grundgesetze der Arithmetik* [1893/1903] (dále zpravidla "Grundgesetze"), tedy nikoli jen v několika poznámkách výslovně věnovaných tématu. Bez dalšího praktického upřesnění mohou být totiž takovéto odkazy mimořádně nejasné a zavádějící. To je ostatně také případ onoho hojně citovaného místa z *Begriffsschrift* [1879, s. IV], v němž Frege osvětluje jak název, tak cíl, k němuž by měl jeho spis sloužit, totiž

> k tomu, aby mohla být platnost úsudkového řetězce přezkoumána tím nejjistějším způsobem a aby každý předpoklad, jenž se chce nepozorovaně vetřít, mohl být předveden, a tím i prozkoumán co do svého původu. Proto jsem také rezignoval na vyjádření všeho, co nemá pro sled úsudků žádný význam. To, na čem mi jediném záleží, jsem v § 3 nazval pojmovým obsahem.

Co míní Frege "pojmovým obsahem", jehož vyjádřením se jeho logika zabývá, je přitom nejasné. Coffa [1982] se např. domnívá, že se zde Frege pokouší aktivovat informační zdroje věty, které Kant nechal nepovšimnuty, a musel se proto při jejím zdůvodnění utíkat k názoru i v případech, kdy to — jako u aritmetiky — nebylo nutné. To by činilo z Frega představitele širšího konceptualistického hnutí coby opozice vůči Kantovu přesvědčení, že je matematiku zapotřebí nějakým způsobem zakotvit v strukturách empirické zkušenosti. V uvedeném citátu je nám ale pojmový obsah především prezentován jako něco, co má být umělým písmem vyjádřeno (co tedy může tvořit formálněsémantickou stránku celého projektu) a co je v nějakém smyslu inferenčně relevantní. Otevírá se tu tak spíše otázka konstituce adekvátní (aritmetické) sémantiky a jejího vztahu ke standardním (aritmetickým) inferencím.

Není přitom nijak jasné, (1) zda je to (správná) inference, čehož prostřednictvím je pojmový obsah identifikován, nebo (2) zda je to pojmový obsah, na čem se zakládá (správná) inference. V § 3 své *Begriffsschrift* má Frege, zdá se, na mysli první z možností, když totiž odmítá tradiční rozlišení subjektu a predikátu právě jako inferenčně irelevantní. Věty

> Řekové zvítězili u Platají nad Peršany,
> Peršané byli poraženi u Platají Řeky

jsou podle Frega v rámci premis (či závěru) libovolného úsudku zaměnitelné při zachování jeho správnosti, přestože se jejich subjekty, resp. predikáty, liší. Ze stejných důvodů ale mají tytéž pojmové obsahy, jinými slovy: takto popsaná substituovatelnost vět (při zachování správnosti úsudku) je kritériem identity pojmových obsahů, které vyjadřují. Každý, kdo četl *Begriffsschrift* jen trochu pozorně, ovšem ví, že Frege myšlenku inferenční artikulovatelnosti významu v takto radikální podobě nesledoval ani o krok za uvedený citát, resp. že v jeho logice jsou věty (resp. výrazy) rozlišovány jen potud, liší-li se v pravdivostní hodnotě (resp. extenzi), a jemnější rozlišení (Fregův pozdější 'smysl') se uplatní nanejvýš v logicko-filosofické propedeutice. V úsudcích, pro něž je přenos pravdivosti nejen nutným, ale i postačujícím kritériem správnosti, jsou věty stejné pravdivostní hodnoty samozřejmě intersubstituovatelné, nutno však upozornit, že to pokaždé nejsou úsudky, o které by Fregovi šlo, totiž úsudky správné logicky. Ze tří přechodů

(1) $\dfrac{\text{Hannibal překročil Alpy}}{\text{Brutus zabil Caesara}},$

(2) $\dfrac{\text{Řekové zvítězili u Platají nad Peršany}}{\text{Peršané byli poraženi u Platají Řeky}},$

(3) jestliže Kroisos překročil řeku Halys, zničil velikou říši,
$\dfrac{\text{Kroisos překročil řeku Halys}}{\text{Kroisos zničil velikou říši}}$

je ve všech přenášena pravda, jen poslední dva si zaslouží název úsudku, a pouze ten poslední název úsudku logického. Zbývá vyjasnit na základě čeho, resp. jak a zda vůbec jeho platnost souvisí s pojmovým obsahem.

Tím se dostáváme k druhému způsobu chápání vztahu inference a pojmového obsahu.

Byl to Bernard Bolzano, kdo jako první poukázal na to, že prominentní případy čistě pojmových vět a úsudků, tedy vět a úsudků logických, jsou pravdivé, resp. platné na základě toho, že většinu pojmů ignorují. Klíčem mu zde byla rovněž substituce.[28] To, že jsou věty pravdivé či nepravdivé — uvažuje ve své *Wissenschaftslehre* [1837, § 147] —, je v logice předpokládáno, a z tohoto hlediska nezajímavé. Totéž se ovšem nedá říci o tom, co dělá s pravdivostí věty změna některých jejích částí. Necháme-li jejich výběr libovůli, zjistíme v mnoha případech, že je takováto věta *obecně platná* relativně k nahrazení částí i, j, …, rozuměj: stejně jako ona jsou pravdivé i všechny věty vzniklé nahrazením částí i, j, … libovolnými výrazy téhož gramatického typu. Podobně dospívá Bolzano [1837, § 154–155] k pojmům slučitelnosti (*Verträglichkeit*) a odvoditelnosti (*Ableitbarkeit*) vět relativně k částem i, j, … . Věta

A) Kroisos zničil velikou říši

je tedy odvoditelná z vět

B) jestliže Kroisos překročil řeku Halys, zničil velikou říši,

C) Kroisos překročil Halys

nejen proto, že byl ignorován pojmový obsah vět A), B) a C), ale že byly tyto věty ignorovány úplně, tj. včetně jejich skutečných pravdivostních hodnot. To ostatně odpovídá tomu, co je vtloukáno do hlavy všem adeptům studia logiky v základních kurzech, totiž že je to formální věda, která od obsahu zcela odhlíží. Jak je to tedy s Fregovým pojmovým písmem a jeho snahou o artikulaci obsahu — nejedná se o nějaký omyl? Nikoli, a důvody nahlédneme právě v tom, proč Bolzano přes svoji geniální anticipaci Tarského *nemůže* být považován za zakladatele moderní logiky.

K relativizaci pojmu obecné platnosti vůči určité fixní sadě výrazů vedl Bolzana postřeh, že by jinak něco jako obecná platnost věty vůbec nemohlo vzniknout, neboť variací různých částí bychom vždy mohli z libovolné věty pravdivé získat nepravdivou (a *vice versa*). To má ovšem také svou druhou stranu, totiž nutnost specifikace těch výrazů, jejichž gramatické typy být nahrazeny mají, resp. těch, které být nahrazeny nemají. Bolzano [1837, § 148] si byl vědom, že logické úsudky, jako je náš výše uvedený, jsou platné nejen proto, že jisté obsahy nechávají proměnnými, ale i proto, že jiné fixují — totiž obsahy pojmů logických, jako

[28] V následujících řádcích budeme velmi struční, takže čtenář, který se o principy Bolzanovy logiky a sémantiky zajímá hlouběji, může konzultovat třeba monografii Vlasáková [2005]. Tím nemá být řečeno, že se její závěry kryjí s našimi.

je např. výrokovělogická spojka "jestliže ..., pak ..." ve výše uvedeném úsudku. Vlastní vymezení logických pojmů ovšem nakonec vzdal, protože, jak tamtéž uvádí, rozdíl mezi nimi a pojmy jinými "není tak ostře ohraničen, aby se o tom již nedal vésti spor". Nová logika — zahrnující stanovení pevné sady logických konstant a kategorizaci syntaxe, tedy typů výrazů, které mohou být variovány, neboli k jejichž obsahu se nebude přihlížet — musela proto se svým zrodem počkat až na Fregovu *Begriffsschrift*.

Instruktivní mohou být v této souvislosti paralelní úvahy Brandomovy [1994, s. 104], podle nichž si na pozadí substituční techniky máme náš slovník představit rozdělen do dvou částí, kdy jednu z nich necháváme variovat, druhou pak chápeme jako pevnou. Limitní případ, který popisuje Bolzano, odpovídá stavu, v němž je pevná část prázdná, a žádný správný úsudek tak nelze považovat za správný z formálních důvodů. V inverzním extrému je pevné vše, a každý správný úsudek je tedy formálně platný. Důvod, proč nějakou část slovníku jako pevnou zvolit, je přitom přirozený a splývá s aristotelským motivem transparentního ovládnutí nějaké úsudkové praxe. To je možné jen tehdy, je-li úsudkových schémat nějaký přehledný počet. Důvody, proč tedy nějakou sadu označit jako logickou *per se*, nemohou mít zcela obecný, univerzální charakter, a pokud se o ně Brandom, stejně jako před ním Lorenzen, snaží, jsou oba, přes svůj nepochybně kritický a zdůvodněný základní přístup, nakonec odsouzeni k dogmatičnosti.

Bolzano [1837, § 148], jenž byl podobně jako Leibniz veden spíše vědoslovnými nežli reformními zájmy, navrhl ovšem obejít relativizující prvek obecné platnosti svojí verzí definice *analytické* věty jako takové věty, v níž

> existuje alespoň *jedna jediná* představa, kterou lze libovolně variovat, aniž by tím byla porušena pravdivost či nepravdivost věty.

To na jednu stranu vyhovuje jakémusi širšímu pojetí analytičnosti, takto obsáhnuvšímu i věty (a úsudky) jako

> jestliže Řekové zvítězili u Platají nad Peršany, pak byli Peršané u Platají poraženi Řeky, či

> je-li Praha západně od Pardubic, jsou Pardubice východně od Prahy,

pro variabilní "Řekové", "Peršané", resp. "Praha", "Pardubice", toto pojetí se ale na druhou stranu zdá být až příliš široké, neboť mu dostanou i 'kontingentně' (empiricky) pravdivé obecné výroky jako

> má-li Kvak žábry, neumí mluvit,

zůstane-li proměnlivý jen “Kvak”. Možná, že z jistého úhlu pohledu lze i takovéto věty považovat za nutné (ve vztahu k biologickým zákonitostem), sotva však za platné z pouhé znalosti pojmů “žábry” a “mluvit”. Svojí definicí se tedy v každém případě ‘český Leibniz’ nebezpečně přiblížil svému německému vzoru, implicitně stírajícímu rozdíl mezi pravdou pojmovou a pravdou prostou.

Stejně jako Bolzano využil i Frege k zavedení svých nejplodnějších rozlišení a pojmů techniku substituce, a to hned několika způsoby. (1) První z nich jsme již krátce nahlédli, totiž jakožto definující pojmový obsah výrazu skrze jeho substituovatelnost při zachování (salva) určité podmínky, jmenovitě podmínky správného úsudku. Tu, jak jsme zmínili, v této konkrétní podobě Frege nakonec nezužitkoval, její varianta *salva veritate* se však (v explicitní podobě tzv. Leibnizova principu) stala regulativem jeho obecně-holistického projektu předmětné konstituce, jak se k němu dostaneme v příští kapitole. (2) Druhý způsob odpovídá Bolzanově koncepci ‘obecné platnosti’ jako variovatelnosti některých částí věty. Frege si rovněž uvědomil, že tzv. formální vědy netěží ve zdůvodnění pravdivosti svých vět z pouhé abstrakce, zaměnitelnosti obsahu, ale i z toho, že určitý obsah ponechávají zachován, a v jistém smyslu je tedy jejich ‘formálnost’ relativní. Píše [1906, s. 428]:

> Stejně jako má geometrie pojem bodu, má i logika své vlastní pojmy a relace a ty také tvoří její obsah. Vůči těmto se nechová formálně. Žádná věda není zcela formální; ale do jisté míry je i gravitační mechanika formální, pokud jsou jí všechny optické a chemické vlastnosti lhostejné. Tělesa různé hmotnosti pro ni zaměnitelná nejsou; ale nic nestojí v cestě zaměnitelnosti těles odlišných vlastností chemických.

Vědomí této relativity mu však nezabránilo v tom, aby na rozdíl od Bolzana zužitkované logické pojmy popsal, a to radikálně novým způsobem, v němž substituce hrála také — tentokráte již třetí — stěžejní roli, totiž při (3) substituční analýze věty a s ní souvisejícím vynálezu kvantifikace.

3.8 Napříč diskurzy

Objev kvantifikace vzešel z konfrontace s větami, jako byla výše uvedená, tj. v rámci hypotetického soudu s konkrétním ohniskem, speciálně tedy:

(a) jestliže má *Kvak* žábry, pak *Kvak* neumí mluvit.

Frege [1879, § 9] se na výraz (“Kvak”) jisté kategorie (jméno) dívá jako na proměnlivý, implicitní obecnost věty pak vyjadřuje jeho nahrazením proměnnou x. Problémy s rozsahem obecnosti nakonec řeší předepsáním indexované cezury — kvantifikátoru — jako

(b) $(\forall x)(x$ má žábry $\rightarrow x$ neumí mluvit).

To mu dovoluje v první řadě rozlišit obecnost popření $(\forall x)\neg A(x)$ od popření obecnosti $\neg(\forall x)A(x)$. S ohledem na předpokládanou platnost substitučního a pravdivostního principu mohou u věty $A(N)$ nastávat pouze dva disjunktní případy: (1) pro každé M je $A(M)$ pravdivé a (2) existuje M takové, že je $A(M)$ nepravdivé. V souladu s nimi platí buď $(\forall x)A(x)$, nebo $(\exists x)\neg A(x)$, kteréžto formy (OBECNÉHO a EXISTENČNÍHO KVANTIFIKÁTORU) lze tedy uchopit jako vzájemné negace, což mj. umožňuje definici:

$$(\forall x)A(x) \rightleftharpoons \neg(\exists x)\neg A(x).$$

V každém případě je jasné, že se na větný systém rozšířený o komplexní větné formy $(\forall x)A(x)$, resp. $(\exists x)A(x)$ přenáší pravdivostní a substituční princip.

Kvantifikátorem vyjádřená obecná pravdivost věty ovšem není něčím, co by vyjadřovalo analytičnost věty, jak se domníval Bolzano, ale (z hlediska obsahu) interním rysem zmíněné věty, plynoucím z významu kvantifikátoru coby logické konstanty. Je proto velkou chybou dívat se na větu

(c) Kvak má žábry nebo Kvak nemá žábry

jako na logicky pravdivou díky tomu, že platí o *všech* předmětech bez rozdílu, tj. jako na instanci věty

(d) $(\forall x)(x$ má žábry $\vee\, x$ nemá žábry),

neboť pak by měla být logicky pravdivá i věta (b). Tohoto stírání zásadního rozdílu mezi interní, *objektovou* obecností a obecností externí, *metajazykovou* se ovšem stejně jako Bolzano dopouští i Frege, když totiž přes četné proklamace o odlišné, normativní povaze logiky[29] identifikuje nakonec rozdíl mezi ní a ostatními vědami pouze v odlišném stupni obecnosti, jenž má být u pravd logiky tím nejvyšším (jsou to "nejobecnější zákony pravdivosti"). Tento typ obecnosti, zdá se, ovšem u žádné z vět (a), (b), (c), (d) nenastává, a proto si označení logické pravdy zaslouží až finální 'zobecnění' posledních dvou:

(e) $(\forall x)(\forall X)(X(x) \vee \neg X(x))$

[29] Např. Frege [1983, s. 139] říká: "Tak jako etika může být i logika nazývána normativní vědou. Jak musím myslet, abych dosáhl cíle, to jest pravdy? Od logiky očekáváme odpověď na tuto otázku [...]."

či dokonce

(f) $(\forall p)(p \vee \neg p)$,

což se obráží ve snadno ověřitelném faktu, že jsou základní zákony pojmového písma v *Begriffsschrift* i *Grundgesetze* uváděny v této celokvantifikované formě (resp. v ekvivalentním tvaru s generalizovatelnými volnými proměnnými), přičemž ve větě (f) se proměnná p stejně jako proměnná x z věty (e) vztahuje na všechny předměty, mezi nimiž jsou i hodnoty 1, 0 (pravda a nepravda). Příslušná logika již z těchto 'ideových' důvodů musí pracovat s kvantifikací vyšších řádů a jediným, všeobjímajícím univerzem diskurzu.

Odklon, který moderní logika ve svém dalším vývoji učinila od obou, a zvláště pak druhého z těchto rysů Fregova pojmopisu, lze vysvětlit právě pochopením toho, že rozdíl mezi větami logiky a větami ostatních věd, včetně obecnosti, která je s nimi spojena, je mnohem zásadnější, kategoriální povahy, nežli se Leibniz, Bolzano, Frege a Russell domnívali. První, kdo na to se vší rozhodností upozornil, byl Ludwig Wittgenstein ve svém *Tractatu* [1922, § 6.1231], kde (mj.) říká:

> Znakem logické věty *není* obecnost. Vždyť obecný znamená pouze: platící náhodou o všech věcech. Nezobecněná věta může být přece zrovna tak tautologická jako věta zobecněná.

To jde samozřejmě zcela proti myšlence kvantifikace nad univerzálním diskurzem. Frege si byl ovšem vědom toho, že v přirozeném jazyce užíváme kvantifikaci restringovaně, tj. v implicitním omezení na nějakou kategorii předmětů nebo její část. Říkáme-li např., že "jsme všichni smrtelní", míníme všechny živé tvory nebo lidi; říkáme-li, že "rozdíl dvou čísel je opět číslo", míníme konkrétně čísla celá apod. Frege [1893/1903, díl II, § 65] si však současně všimnul, že lze tento implicitní předpoklad zpravidla explikovat do formy kondicionálu, tj. namísto

$$(\forall x)A(x),$$

kde x probíhá přes předměty nějakého výslovně nezmíněného oboru, napsat explicitně

$$(\forall x)(C(x) \rightarrow A(x)),$$

kde hodnoty x mohou být tentokráte z nějakého obsáhlejšího univerza. Z toho, že lze takovýto přechod (vzestup) učinit lokálně, např. když se potřebujeme výslovně ujistit, o jaké kategorii předmětů ("máme-li např. dělit čísla nebo koláč") či jejich částí ("máme-li dělit čísla přirozená či komplexní") hovoříme, Frege usoudil, že lze učinit i ono finální zobecnění, kdy máme jedno jediné univerzum, určené třeba predikátem "x je předmět" nebo "$x = x$", který již není třeba explicitně zmiňovat.

Problematičnost tohoto kroku se nemusí zdát nejprve zřejmá, tj. i když jsme si u něho vědomi jisté umělosti, můžeme ho zprvu považovat za opatření, které má určité technické výhody, stejně jako je měla řeč o pravdivostních hodnotách nebo užití materiálního kondicionálu ve významu implikace. Toto opatření s sebou ale záhy přináší právě problémy technického charakteru, např. jak definovat užité predikáty na celém univerzu. Jednoduchá konvence, podle níž predikát předmětům mimo svoje přirozené použití prostě nenáleží, tj. v aplikaci na ně dává nepravdivou větu, koliduje např. již s analogickým, i když obecnějším požadavkem totální definovatelnosti funkcí. Dosadíme-li za první dvě proměnné ve výrazu

$$x + y = z$$

jména "Měsíc" a "Slunce", získáme unární predikát

$$\text{Měsíc} + \text{Slunce} = z,$$

jenž musí libovolnému předmětu z (včetně čísel) přiřazovat hodnotu nepravda. Tím pádem není funkce sčítání definována pro předměty Měsíc a Slunce.[30] Další, mnohem vážnější důsledek budeme řešit později v souvislosti s Russellovým paradoxem v kapitole 6.

Přes tyto potíže ale zůstává nejzávažnější námitkou proti sloučení všech diskurzů do jednoho právě ono setření pravdy *logické* a *prosté*, tím pádem *nutného* a *kontingentního*, toho, co být *má či musí* být, a toho, co pouze *je*. Tato nedbalost je v jistém smyslu přirozená, neboť i řeč o všech diskurzech, eventuálně o všech možných světech, není vlastně ničím jiným nežli převedením původně modálního tvrzení do čistě deskriptivního indikativu a zdá se, že je takový přechod principem jakékoli explikace. Definice logické pravdivosti coby pravdivosti v každém diskurzu oproti pravdivosti v nějakém diskurzu univerzálním si ale ponechává přinejmenším tu interní výhodu, že ji nechápeme jakožto přirozený fenomén, ale důsledek jistých konvencí, jimiž jsme vymezili pojem možné interpretace naší logiky, tedy formální *design* diskurzu, na nějž může být daná logika aplikována. V tomto pozorování má také kořeny Wittgensteinovo [1922, § 4.461] vyloučení tautologií ze smysluplných, nějaký rozdíl artikulujících vět, identifikující je správně jakožto 'pouhé' odrazy jazykových norem. I to však stále zůstává — snad vlivem Russellova logického empirismu — jednou nohou v univerzalistické tradici, protože uznává jediný 'pravý', totiž empirický diskurz, v němž jsou pevné bázi 'jednoduchých předmětů' distribuovány vlastnosti a relace, a to jak v možnosti, tak aktuálně, se stavy věcí, resp. fakty jakožto výsledky. Zdá-li se znalcům Wittgensteina toto vysvětlení příliš zjednodušující, budiž, v této podobě

[30] Tento příklad uvádí van Heijenoort [1986].

je ovšem (mnohem, mnohem později) vstřebal a zužitkoval Carnap [1947] ve své L-sémantice.

Ať již je to ale s univerzálním diskurzem jakkoli, jádro reformy toho, jak nová logika Fregova a Russellova chápala logickou platnost, spočívá především v tom, že ji od jisté doby nechápeme jako platnost (věty, resp. formule) pro *všechny předměty*, ale pro *všechny diskurzy*, disponujíce vždy specifickou sadou jim vlastních objektů, na něž je omezena tzv. objektová proměnná příslušných vět, a tím i její (interní) kvantifikace. Kvantifikátor lze tedy chápat po vzoru zobecněného součtu:

$$\sum_{x \in I} f(x),$$

jehož použití jsme již viděli v souvislosti s nekonečnými řadami, kde x probíhá přes nějakou množinu I indexů, zpravidla přirozených čísel. Toto pojetí kvantifikátoru je v jistém smyslu původní, neboť ho takto nezávisle na Fregovi zavedl roku 1883 Peirce [1931–1958, § 3.351], totiž jakožto zobecnění tzv. logického součtu, resp. součinu, což není nic jiného nežli nám známé operace disjunkce a konjunkce nad čísly 0, 1, se speciální rovnicí $1 + 1 = 1$. Zmíněná indexová množina I se ovšem zpravidla nezmiňuje, a když, tak lokálně, např. v námi již dříve (viz s. 29) zavedeném zápisu, definovaném pomocí neomezené kvantifikace jako:

$$(\forall x > 0)A(x) \rightleftharpoons (\forall x)(x > 0 \to A(x)),$$
$$(\exists x > 0)A(x) \rightleftharpoons (\exists x)(x > 0 \land A(x)).$$

Ve všech případech se přitom proměnná x vztahuje k nějakému konkrétnímu diskurzu, v závislosti na němž jsou příslušné věty coby (v obecném případě) nekonečné součiny, resp. součty svých instancí, indexovaných předměty diskurzu, jednoznačně pravdivé či nepravdivé.

Takto se také vyhneme problému, co znamená věta "Kvak je prvočíslo", neboť Kvak již nebude v oboru úvahy proměnné x ve větách jako "$(\exists x)(x$ je prvočíslo$)$" apod. Zůstává ovšem otázka, co znamená, že je tato či věta jako

(g) $(\forall x)(x$ je prvočíslo $\vee$ x není prvočíslo$)$

platná či neplatná ve všech kontextech. Tento problém není ale o nic smysluplnější nežli zkoumání, zda vlastnost prvočíselnosti náleží jiným předmětům než číslům, neboť prvočíselnost se v diskurzech jiných než aritmetických prostě neaplikuje; tj. ne že se předmětům jiných diskurzů upírá, ona v nich vůbec není!

Nahrazení výrazu "je prvočíslo" à la Frege kvantifikovanou proměnnou (druhého řádu), např. do podoby věty (e), věc neřeší, neboť obě proměnné (x, X) se nutně vztahují k *nějakému*, když už ne k témuž diskurzu jako věta (g). Podstatné ovšem je, že věta jako (g) není obecně platná skrze svůj (veškerý) obsah, ale skrze svoji formu, což je jen jiný název pro obsah slov, která tuto formu určují. To znamená, že v jednotlivých diskurzech není pravdivá ona, ale různé věty *téže formy*. A ani to vlastně není přesné, protože řeč o totožnosti formy je víceznačná. Věta (g) např. sdílí svoji formu jak s tautologickou větou (d), tak s větou

(h) $(\forall x)(x$ umí mluvit$)$,

která ovšem tautologická není. Vytvoření prostředků k odstranění této víceznačnosti je také jedním z cílů formálního jazyka, jehož výrazy (formule) reprezentují všechny věty dané formy.

3.9 Tarského definice pravdy

Formálním jazykem, jejž chceme popsat, je predikátová logika, a to speciálně prvního řádu. Toto omezení je podstatně pozdějšího data, má ovšem jistý věcný i didaktický základ, k němuž se ještě dostaneme. Nyní bez dalších okolků zaveďme:

> Formální jazyk logiky predikátů 1. řádu, stručně PL, tvoří (i) jmenné konstanty c_1, c_2, …, (ii) predikátové konstanty P_1^n, P_2^n, … pro každou aritu $n \geq 1$, (iii) výrokové spojky $\neg$, $\rightarrow$, (iv) (obecný) kvantifikátor $\forall$, (v) proměnné x_1, x_2, … a (vi) pomocné symboly (,).

Výrazy typu (i–ii) se nazývají deskriptivní či mimologické symboly, výrazy (iii–v) naopak logické symboly. K mimologickým výrazům se obvykle počítají ještě tzv. funktorové konstanty, k logickým potom binární predikát rovnosti. Tato rozšíření budeme uvažovat až později, počínaje oddílem 4.3. Spojkám a kvantifikátorům se úhrnem říká logické operátory. Indexy konstant a proměnných obvykle vynecháváme, pročež také používáme spíše sady c, d, …, resp. P, Q, …, resp. x, y, ….

Před definicí formule je třeba zavést pojem termu, jenž se nám s ohledem na zjednodušení jazyka vynecháním funktorových konstant redukuje na jednoduchou konvenci, podle níž je term buďto proměnná, nebo jmenná konstanta. Při definici formule postupujeme induktivně:

> Formule PL je (i) elementární formule $P^n(s_1, \ldots, s_n)$, tedy výraz vzniklý zřetězením termů s_1, …, s_n a predikátové konstanty P^n, oddělených příslušným způsobem závorkami a čárkami, nebo (ii) složená formule, tedy výraz vzniknuvší zřetězením formulí φ, ψ se znaky výrokově logických spojek nebo kvantifikátoru a proměnné, tj. $\neg\varphi$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\forall x)\varphi$.

Tato definice je v jistém smyslu velmi liberální, neboť připouští složení kvantifikátoru $(\forall x)$ s formulí φ bez ohledu na to, zda se v ní x vůbec vyskytuje či zda tam náhodou není již vázaná. To vede k neelegantním zřetězením typu $(\forall x)P(c)$ či $(\forall x)(\forall x)P(x)$, která však věcně problematická nejsou. Získáváme tím naopak výhodu kompozicionální jednoduchosti.

Výskyt proměnné x ve formuli φ se obvykle značí $\varphi(x)$. Tímto zápisem, tj. formou $\varphi(x, y, z)$, se někdy také míní, že x, y, z jsou jediné volné proměnné ve φ. V rámci jednoho kontextu je zápisem $\varphi(t)$ vedle $\varphi(x)$ obvykle míněno nahrazení všech výskytů volné proměnné x ve formuli φ termem t. Jedná se o pohodlnější verzi obecnějšího zápisu φ^x_t, jenž není závislý na výskytu x ve φ a je definován snadnou indukcí, kterou vynecháváme. Často se — podle typografických okolností — používají i jiné typy závorek. Bloky kvantifikátorů stejného typu, např. $(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)\varphi$, se zkracují po vzoru $(\forall x_1, \ldots, x_n)\varphi$. V situacích, kdy není zapotřebí vyznačovat počet n proměnných, lze užít také zkratky vektoru $\vec{x}$ proměnných. Tento úzus lze vztáhnout na (konečné) posloupnosti libovolných prvků. Takto lze třeba dostat zápis $(\forall \vec{x})\varphi(\vec{x}, \vec{y})$.

Množinu všech proměnných značíme X_{PL}, množinu všech termů T_{PL}, množinu všech formulí F_{PL}. Ve formuli $(\forall x)\varphi$ se část φ nazývá ROZSAHEM kvantifikátoru $(\forall x)$. Všechny VÝSKYTY proměnné x v rozsahu nějakého kvantifikátoru $(\forall x)$ se nazývají VÁZANÉ. Ostatní výskyty proměnných se nazývají VOLNÉ. PROMĚNNÁ je ve formuli VÁZANÁ, jestliže tam má vázaný výskyt, a VOLNÁ, jestliže tam má výskyt volný. Naše liberální definice ovšem připouští i případy formulí jako $P(x) \vee (\forall x)Q(x, x)$, kde má proměnná volný i vázaný výskyt, a je tam tudíž volná i vázaná. Toho se lze zbavit eventuálním přejmenováním. Formule, v níž se vyskytuje nějaká volná proměnná, se nazývá OTEVŘENÁ. FORMULE, v níž tomu tak není, UZAVŘENÁ nebo také SENTENCE. Podobně lze rozlišovat mezi OTEVŘENÝMI a UZAVŘENÝMI TERMY, kdy otevřený term je jednoduše term obsahující nějakou proměnnou. Bez funktorových konstant je ale toto rozlišení opět zcela triviální.

Vrátíme-li se nyní k problému větné formy a logické pravdivosti věty, pak o větě (g) z minulého oddílu můžeme říci, že je případem (instancí) větné formy

(i) $(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$,

a jako taková je i tautologická. V tomto užití se lze na větné formy dívat jako na jisté třídy vět, kdy jedna věta může náležet více třídám, což znamená, že se nejedná o třídy ekvivalence. Třída určená formulí (i) zahrnuje např. všechny věty vzniklé dosazením elementárního predikátu F (např. právě predikátu “prvočíslo”) na místo predikátové konstanty P. Věta (g) je ovšem prvkem i mnohem obecnější třídy tautologií, totiž třídy určené libovolnou formulí

(j) $(\forall x)(\varphi \vee \neg\varphi)$,

jíž náleží každá věta získaná nahrazením všech konstant (tj. jmenných, predikátových, funktorových), skládajících příslušnou formuli φ, výrazy odpovídajícího typu. Reprezentantem formy tu takto již není formule, ale její schéma, jež lze ovšem chápat jako formuli plus jistá pravidla dosazování výrazů za výrazy.

Díváme-li se na formuli jako na výraz *per se*, tj. samostatný předmět studia, rýsuje se nám tu jádro procesu interpretace, naplnění bezobsažného symbolu obsahem. Ten se opírá o Tarského sémantiku pravdivostních hodnot a jeho tzv. definici pravdy, tedy o to, co se dnes všichni adepti studia formální logiky a teorie modelů učí hned v prvních lekcích úvodních kurzů. Tarského definice pravdy byla ovšem v Tarského slavné práci *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* [1933] prezentována poněkud jinak, než je obecně známo, i než možná indukuje náš dosavadní výklad. Tarski začal své pojednání konfrontací se sémantickými paradoxy, načež se pozastavil u věty

> věta "sníh je bílý" je pravdivá tehdy a jen tehdy, když je sníh bílý

coby případu tzv. KRITÉRIA ADEKVÁTNOSTI, jemuž by každá definice pravdy měla dostát. Nepoučený čtenář zde může být zmaten z toho, proč je takováto ekvivalence vůbec spojována se slovem "definice", když, zdá se, každá z jejích stran předpokládá ke svému porozumění tu druhou. Věc je ale složitější. Všimněme si nejprve, že u vět komplexní formy, jako "jestliže má Kvak žábry, pak neumí mluvit", lze na frázi

> věta "jestliže má Kvak žábry, pak neumí (Kvak) mluvit" je pravdivá tehdy a jen tehdy, když je věta "Kvak umí mluvit" nepravdivá nebo když je nepravdivá věta "Kvak má žábry"

pohlížet jako na skutečné vymezení (definici) jejích pravdivostních podmínek, v tomto případě tedy uchopení spojky "jestliže ..., pak ..." coby materiálního kondicionálu, nevyžadujícího např. žádnou věcnou souvislost spojovaných vět apod.

U elementárních vět je situace mírně odlišná, neboť reprezentují bázi potenciálně nekonečného počtu disciplín a oblastí lidské činnosti, což znamená, že stanovení globálních kritérií pravdy je prostě nemožné. Formulace jako

(1) věta "Kvak umí mluvit" je pravdivá, když Kvak umí mluvit,

(2) věta "Kvak umí mluvit" je pravdivá, když předmětu Kvak náleží vlastnost (pojem) 'umět mluvit'

tuto situaci samozřejmě neřeší. Něco netriviálního se tu však přece jen děje, např. druhá věta dává dosti zřetelně najevo, že se na zmíněnou elementární větu díváme jako na sémanticky členěnou a že prvky této formální sémantiky, tj. metajazyka, v němž chceme hovořit o její pravdivosti, jsou 'předmět' a 'pojem'. Předpokládáme-li pak třeba jako Frege, že pojem má ostré hranice, tj. rozdělujeme-li příslušný obor předmětů jednoznačně na ty, které pod daný pojem spadají, a ty, které nikoli, je definicí uvedeného typu zároveň zajištěno, že má každá elementární věta právě jednu ze dvou pravdivostních hodnot, tedy opět něco specifického pro uvažovanou logiku.

Paradoxně je to ale právě trivialita uvedených 'definicí', resp. to, že jsou vůbec formulovány, co — přes zdánlivou shodu — odlišuje Tarského koncepci od Fregova monolingvistického projektu, jenž považuje explicitní definici pravdy za nemožnou a kloní se k teorii redundanční, případně performativní. Podle Frega [1983, s. 139 n] totiž neříkáme obratem "A je pravda" nic víc, nežli tvrzením samotného A, v důsledku čehož je každá definice pravdy typu

A je pravdivá tehdy a jen tehdy, když B

vlastně redundantní, neboť předpokládá, že již víme, kdy platí

B je pravda.

Ve Fregově pojetí lze tedy kritérium adekvátnosti chápat nanejvýš jako opisné, vysvětlující vyjádření, které není a nemůže být součástí (teorémem) systému pojmového písma. V tomto Fregově základním stanovisku mají také bezesporu kořeny Wittgensteinovy [1922] pozdější teze na téma 'nevyjádřitelnosti sémantických pojmů'. Více k tomu řekneme v příští kapitole.

Oproti Fregovi zůstává Tarski k otázkám povahy pravdivosti na jednu stranu zcela neutrální, na stranu druhou dělá z kritéria adekvátnosti a vět výše uvedeného typu vlastní náplň logiky moderního střihu, totiž vědy explicitně zkoumající a stanovující obecné vztahy výrazu a jeho významu, roviny jazyka a metajazyka. Naši pozornost by ale mohlo hned upoutat Tarského upozornění, že svoji definici pravdy nechce podávat pro jazyky formální, ale jen *formalizované*, což znamená pro jazyky s explicitně vyjádřenou (rekurzivně definovanou) strukturou, v nichž nicméně, jako např. v uvažovaném kalkulu tříd, zůstávají extralogické (interpretované) výrazy. Těm je v metajazyku přiřazován nanejvýš jakýsi jejich překlad, podobně jako ve větě

věta "der Schnee ist weiß" je pravdivá, když je sníh bílý,

nebo jsou do něho převzaty přímo. V důsledku toho je pro Tarského model vždy modelem *věty*, resp. větné funkce, a má charakter posloupnosti objektů, které onu větu po nahrazení mimologických výrazů odpovídajícími typy proměnných učiní pravdivou. Na tomto základu staví Tarski [1936, s. 416 n] pojmy, jejichž formulací se proslavil, především tedy vyplývání (logického důsledku) jakožto platnosti pro libovolný model úsudkových premis. Samozřejmě že místo onoho *absolutního* pojmu pravdy je možné uvažovat také *relativní*, vztažený ke konkrétní předmětné doméně, což [1933, s. 199 n] skutečně naznačuje, aniž by dal ovšem dostatečně najevo, že je to při výše naznačených problémech se smyslem vět jako

> posloupnost Kvak, Žbluňk splňuje větu “Klaus a Putin jsou kamarádi”

spíše nutné, nikoli jen možné rozšíření předchozích úvah. Jedinou podstatnou odchylkou od Bolzana [1837] se tak vlastně zdá být pouze překonání závislosti na jazyce, obsažené v předpokladu [1936, s. 416], že “se označení všech možných předmětů vyskytují v uvažovaném jazyce”. Ve skutečnosti je ale i tento výkon fiktivní, neboť se zde pouze nahrazuje fráze “jméno N” frází “předmět N” v obratech jako

> předmět Kvak splňuje větnou funkci “x má žábry”

apod. Více k tomu obratu a souvisejícímu rozdílu objektové a substituční kvantifikace řekneme v kapitole 4. Evidentní potřeba částečně či úplně dematerializovaných vět (větných funkcí) jako “x má žábry” či “x je P” celou záležitost definitivně přesouvá směrem k teorii modelů coby nauce o různých interpretacích jistých posloupností znaků (formulí), nevyjadřujících obsah, ale formu věty.

Výsledkem dosavadních úvah by mělo být zjištění, že přechod k relativnímu pojmu pravdy a s ním spojené sémantice teorie modelů nelze přičíst Tarského slavným ‘sémantickým’ článkům, ale spíše jeho (meta)matematickým spisům, v nichž je implicitně, ale jasně rozlišováno mezi formálním (neinterpretovaným) jazykem a možnými způsoby jeho interpretace. S tím ale v praxi přišel již Gödel [1931] v důkazu vět o neúplnosti, přičemž jeho a Tarského paralelní polemiky s Carnapovou syntaktickou filosofií[31] jsou spíše menšího významu. Tak jako tak, Tarského výklad z jeho dvou filosoficky protežovaných spisů (o pravdě a vyplývání) trpí stejnými slabinami jako spisy Bolzanovy a Fregovy, tj. neschopností rozlišit dva druhy obecnosti, a tím i prostou a logickou pravdu, a z hlediska dnešního čtenáře (jemuž jsou Tarského práce standardně doporučovány již v rámci úvodních logicko-filosofických kurzů) vnáší do celé věci spíše zmatek nežli světlo.

Prakticky to vše znamená, že před adekvátním výkladem formální sémantiky predikátové logiky je třeba pečlivě rozlišit interpretaci *konstant* a valuaci *proměnných*. Rovina valuace přitom odpovídá Tarského

[31] Srov. Coffa [1991], případně také Procházka [2006].

posloupnostem a je na ní založen i pomocný pojem splňování, v němž je danou valuací splňována již interpretovaná formule, neboli formule při dané interpretaci. Pojem interpretace dále relativizujeme k nějaké podmnožině L mimologických symbolů jazyka, v níž je alespoň jedna predikátová konstanta.[32] Díky tomu je ke každému jazyku L dána množina formulí F_L tohoto jazyka a naopak ke každé množině formulí S její jazyk L_S.

> INTERPRETACÍ jazyka L PL nazýváme funkci $\mathcal{I}$, která mu přiřadí (i) univerzum diskurzu $\dot{\mathcal{I}}$, tj. nějakou neprázdnou množinu předmětů, (ii) každé jmenné konstantě $c \in L$ nějaký předmět z univerza, tj. $\mathcal{I}(c) \in \dot{\mathcal{I}}$ a (iii) každé n-árni predikátové konstantě $P^n \in L$ nějakou n-ární relaci na $\dot{\mathcal{I}}$, tj. $\mathcal{I}(P^n) \subseteq (\dot{\mathcal{I}})^n$. VALUACÍ při interpretaci $\mathcal{I}$ nazýváme funkci $\mathcal{V}$ přiřazující každé proměnné nějaký předmět z $\dot{\mathcal{I}}$, tj. funkci $\mathcal{V} : X_{\mathsf{PL}} \to \dot{\mathcal{I}}$.

Uvažujeme-li různé interpretace pro tentýž jazyk, daný např. nějakou (formální) axiomatickou teorií, jako je ta uspořádaných těles, bývá zvykem značit interpretace ve stylu uspořádaných entic, např.

$$\mathcal{I} = \left\langle \dot{\mathcal{I}}, +_{\mathcal{I}}, \times_{\mathcal{I}}, <_{\mathcal{I}} \right\rangle,$$

jak to ostatně koresponduje s naším dřívějším územ. Stejně jako tam se indexy podle okolností potlačují, případně se symbolicky nerozlišuje mezi interpretací a jejím nosičem. O interpretacích se v této souvislosti také malebně hovoří jako o STRUKTURÁCH pro daný jazyk. My se zatím přidržíme právě zavedeného značení, zmíněnou alternativu ale využijeme v příštích kapitolách.

Před dalším popisem interpretace formulí PL je třeba zdůraznit, že jejich rozlišení na otevřené a uzavřené podstatně souvisí s naší technicky jednoduchou, protože kompozicionální definicí formule, která nechává komplexní formule vzniknout z jednodušších prostým skládáním, nikoli Fregovou původní technikou střídavého rozkládání (vyjímání jména) a opětovného řetězení, ať již prostřednictvím výrokových spojek, nebo kvantifikátorů. To, stejně jako námi popisovaná formální sémantika, v níž jsou významy celků určeny významy svých částí, není v rozporu s ohlašovaným větným holismem coby určujícím principem Fregovy logiky, neboť ten objevení této možnosti zjevně předchází. V důsledku toho je otevřená formule, přes interně-syntaktickou rovnocennost s formulí uzavřenou, pouhým technickým momentem celého podniku, neboť na rozdíl od ní nereprezentuje větu, ale její nenasycenou část, a nemůže být tedy

[32] Uvažujeme-li, jako v další kapitole, logiku s rovností, je tento předpoklad zbytečný.

ani po interpretaci všech mimologických konstant pravdivá nebo nepravdivá. Chceme-li jí pravdivost či nepravdivost z jistých důvodů také připsat, musíme využít právě dodatečného pojmu valuace. Ten se ovšem hodí i k popisu pravdivostních podmínek formulí uzavřených, kde je však jeho role pouze pomocná, tj. lze se bez ní obejít při ztrátě jisté elegance. Začněme předběžnými definicemi.

> Symbolem T_L označujeme množinu všech termů jazyka L. DENOTACÍ termů jazyka L při dané interpretaci $\mathcal{I}$ a valuaci $\mathcal{V}$ je funkce $\mathcal{IV}$ taková, že $\mathcal{IV}(c) = \mathcal{I}(c)$ pro každou konstantu c a $\mathcal{IV}(x) = \mathcal{V}(x)$ pro každou proměnnou x.

Tím je rozšířena interpretace a valuace na celou množinu T_L, tj. každému termu je v závislosti na daném $\mathcal{I}$ a $\mathcal{V}$ přiřazen nějaký prvek univerza. Na základě toho definujeme nyní vztah mezi $\mathcal{I}$, $\mathcal{V}$ a formulí φ, totiž zmíněné SPLŇOVÁNÍ, a to nejprve pro elementární formule:

(1) $\mathcal{IV} \models P^n(s_1, \ldots, s_n) \rightleftharpoons \langle \mathcal{IV}(s_1), \ldots, \mathcal{IV}(s_n) \rangle \in \mathcal{I}(P^n)$.

Tato ekvivalence říká, že je elementární formule $P^n(s_1, \ldots, s_n)$ SPLNĚNA valuací $\mathcal{V}$ v interpretaci $\mathcal{I}$, jestliže uspořádaná n-tice $\langle \mathcal{IV}(s_1), \ldots, \mathcal{IV}(s_n) \rangle$ předmětů denotovaných termy s_1, ..., s_n náleží relaci $\mathcal{I}(P^n)$ přiřazené konstantě P^n. Dvojznačnost užití symbolu $\models$ ve významu splnění a vyplývání je obvyklá a v praxi nevadí, neboť je vždy rozlišena tím, co stojí vlevo, totiž znak interpretace nebo formule (množiny formulí). Dále postupujeme induktivně:

(2) $\mathcal{IV} \models \neg\varphi \rightleftharpoons \mathcal{IV} \not\models \varphi$,

(3) $\mathcal{IV} \models \varphi \rightarrow \psi \rightleftharpoons \mathcal{IV} \not\models \varphi$ nebo $\mathcal{IV} \models \psi$.

Tato část vlastně kopíruje dříve předvedené přiřazení pravdivostních hodnot komplexním formulím výrokové logiky za předpokladu, že elementární formule splňují pravdivostní princip. Ten platí proto, že množiny a relace přiřazené konstantám jazyka jsou na daném univerzu definované jednoznačně v tom smyslu, že jim každý předmět, resp. n-tice předmětů buďto náleží, nebo nenáleží. Celek podmínek (1–3) představuje výrokovou část TARSKÉHO DEFINICE PRAVDY.

Namísto $\mathcal{IV} \models \varphi$ můžeme psát také postaru $\mathcal{IV}(\varphi) = 1$, a říkat, že interpretace $\mathcal{I}$ při valuaci $\mathcal{V}$ přiřazuje formuli φ hodnotu pravda. Přechod od $\mathcal{IV} \not\models \varphi$ k $\mathcal{IV}(\varphi) = 0$ je podmíněn tím, že případy

$\mathcal{IV} \models \varphi$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{IV} \not\models \varphi$

tvoří vylučující se alternativy, o čemž se lze přesvědčit indukcí.[33] Přechod od $\mathcal{IV} \not\models \varphi$ k $\mathcal{IV} \models \neg\varphi$, tedy i k $\mathcal{IV}(\neg\varphi) = 1$, je zajištěn Tarského

[33] Vztah $\mathcal{IV} \not\models \varphi$ je přirozeně definován tak, že neplatí $\mathcal{IV} \models \varphi$, nicméně to, že v důsledku našich definic nastává alespoň jeden a nikdy oba, je třeba ověřit.

definicí. Úhrnem tak platí jak jednoznačnost přiřazení pravdivostních hodnot elementárním formulím a formulím složeným pomocí výrokových spojek, tak alternativa vylučujících se možností

$$\mathcal{IV} \vDash \varphi \qquad\qquad \mathcal{IV} \vDash \neg\varphi,$$

tj. fakt, že je negovaným formulím přiřazena hodnota opačná. Nyní zbývá ještě formulovat ohodnocení formulí kvantifikovaných. K tomu využijeme pomocného pojmu x-ALTERNATIVNÍ VALUACE k valuaci $\mathcal{V}$ coby valuace

$$\mathcal{V}_b^x(y) = \begin{cases} \mathcal{V}(y) & \text{jestliže } y \neq x, \\ b & \text{jestliže } y = x, \end{cases}$$

která se od $\mathcal{V}$ liší nanejvýš v hodnotě b přiřazené proměnné x. Tarského podmínka pak vypadá následovně:

(4) $\mathcal{IV} \vDash (\forall x)\varphi \rightleftharpoons$ pro každé $b \in \dot{\mathcal{I}}$ platí $\mathcal{IV}_b^x \vDash \varphi$.

Tím, tj. v podmínkách (1–4), máme dánu Tarského definici pravdy pro PL. Jedna z úloh alternativní valuace spočívá v tom, že přesouvá Fregovu substituční analýzu věty z roviny výrazů na rovinu objektu, když totiž nahrazuje podmínku:

> $(\forall x)A(x)$ je pravdivá, je-li pravdivá $A(M)$ pro libovolné substituovatelné jméno M

podmínkou:

> $(\forall x)A(x)$ je pravdivá, je-li pravdivá $A(x)$ pro každý předmět b.

Samotné důvody tohoto přechodu jsou velmi diskutabilní. Umožněn je samozřejmě již samotným základním rozlišením mezi jménem (konstantou) jazyka a předmětem (tím, co označuje), vlastním důvodem je zde ale až následné rozhodnutí, že každému předmětu interpretace v interpretovaném jazyce nemusí odpovídat jméno. Adekvátní formulace podmínek pak jistě vyžaduje kvantifikaci přes objekty, kterou ale zároveň nelze formulovat přímočaře, neboť za proměnnou je možné substituovat pouze výraz, nikoli to, co značí.

Do jaké míry je zmíněné rozhodnutí přijmout do univerza nepojmenované předměty přirozené, je otázkou další diskuze, stejně jako opačný předpoklad, podle něhož každému jménu jazyka odpovídá nutně nějaký předmět interpretace. Pak lze totiž např. z pravdivosti věty zmiňující nějaké individuum (Paegas je okřídlený kůň) usoudit na jeho existenci (existuje okřídlený kůň). Fregovi můžeme přitom v této kauze připsat kromě přímých návrhů, jak problémům nedenotujících jmen a nepojmenovaných předmětů rozumět, také základní zásluhu na tom, že svojí redundanční teorií pravdy podtrhl expresivní charakter obratů jako jsou výše zmíněné, tj. jejich artikulační, nikoli (primárně) explanační roli, čímž je zařadil mezi interní principy své logiky, automaticky odlišné od principů a otázek externího typu ("mají všechny předměty empirického nebo matematického světa jméno", "co znamená, že něco existuje" apod.), které je třeba řešit zvlášť. Více k tomu řekneme v kapitole 4. Nyní ale upozorněme ještě jednou, že onen přechod od výrazů k objektům je do značné míry fiktivní, neboť v důsledku pracujeme zase jen s výrazy jako "předmět b" nebo "$\mathcal{IV}(s)$", tj. s pojmenováním téhož jiným způsobem.

3.10 Dvě vyplývání a jejich kalkulizace

Logika, jejíž formální syntax a sémantiku jsme popsali v minulém oddíle, je zjevným rozšířením, nikoli alternativou logiky výroků. Původnímu Fregovu návrhu neodpovídá v tom, že sice zavádí konstanty pro dva druhy větných výrazů, jména a predikáty, dovoluje však kvantifikovat jen přes první z nich, tj. uvažuje pouze sadu x_1, x_2, ... objektových proměnných. To jí vyneslo název predikátové logiky *prvního řádu*. My jsme ovšem v oddílech uvozujících problematiku, např. při zmínce o Fregově zvyku pracovat s větami zcela zbavenými jakýchkoli mimologických výrazů, uvažovali i výrazy typu $(\forall x)(\forall X)(X(x) \vee \neg X(x))$, v nichž je kvantifikováno přes predikáty, resp. predikátové konstanty, pomocí sady proměnných X_1, X_2, ... Skutečnost, že celokvantifikovaná věta splývá s formulí, byla vlastně důvodem, proč se Frege domníval, že lze uvažovat jedno jediné univerzum diskurzu.

Sama idea rozšíření stávající logiky směrem k vyšším řádům se zdá být prostá. Na sémantické úrovni jednoduše necháme kvantifikátor probíhat přes všechny možné významy predikátových konstant, tj. přes všechny podmnožiny (kartézských součinů) univerza. Tím se nám ale vrací zpět naše staré téma, totiž: co je to libovolná podmnožina, případně libovolná funkce. Problematika logiky vyšších řádů se tak přibližuje problematice teorie množin do té míry, že je někteří autoři prakticky ztotožňují. Podle Quina [1986, s. 66 n] je logika vyššího řádu vlastně jen 'teorie množin v beránčím rouše'. — Tvrzení tohoto druhu jsou samozřejmě (a nejspíš i úmyslně) přehnaná, představují však přinejmenším provizorní důvod, proč logiky prvního a druhého řádu studovat odděleně. Toto základní dělení je přitom v jistém smyslu postačující, tj. lze ukázat, že mezi druhým a vyššími řády žádný drastický předěl není, jak naznačíme v oddíle 4.5. Co se týče zavedené logiky řádu prvního, zbývá definovat standardní pojmy modelu, logické pravdivosti a vyplývání. Rozdělení interpretace a valuace s sebou ovšem již zde přináší další diverzifikaci.

Řekli jsme, že pravdivost formule závisí v obecném případě nejen na interpretaci mimologických symbolů, ale i na valuaci proměnných. V definici modelu můžeme chtít ovšem využít pouze první z nich a stanovit následující:

> MODELEM formule φ nazýváme takovou její interpretaci $\mathcal{I}$, v níž je φ splněna každou valuací, tj. pro každé $\mathcal{V}$ platí $\mathcal{IV} \vDash \varphi$.

V interpretaci, která je modelem formule, tedy na valuaci v tomto smyslu nezáleží a my můžeme psát jednoduše

$$\mathcal{I} \vDash \varphi.$$

Říkáme také, že je φ V INTERPRETACI $\mathcal{I}$ PRAVDIVÁ. Ovšem pozor: Ačkoli nás tento zápis opravňuje k analogickému zavedení notace $\mathcal{I}(\varphi) = 1$, bylo by nemoudré zavést rovnou značení $\mathcal{I}(\varphi) = 0$ pro případ $\mathcal{I} \nvDash \varphi$, a sice z toho prostého důvodu, že se alternativy

$$\mathcal{I} \nvDash \varphi \qquad\qquad \mathcal{I} \nvDash \neg\varphi$$

obecně nevylučují. Stačí uvážit třeba formuli $P(x)$ a interpretaci $\mathcal{I}$, v níž má $\dot{\mathcal{I}}$ alespoň dva prvky a $\mathcal{I}(P)$ obsahuje některé, ale ne všechny z nich. Píšeme-li $\mathcal{I}(\varphi) = 0$ pouze pro $\mathcal{I} \vDash \neg\varphi$, musíme si být tedy vědomi toho, že z $\mathcal{I}(\varphi) \neq 1$ obecně $\mathcal{I}(\varphi) = 0$ neplyne. Tento úsudek je ovšem oprávněný u uzavřených formulí, pro něž tak platí právě jedna z možností

$$\mathcal{I} \vDash \varphi \qquad\qquad \mathcal{I} \vDash \neg\varphi.$$

To souvisí s faktem, že sentence jsou jednoznačně ohodnoceny již na bázi samotné interpretace, valuace na tom tedy nemůže nic změnit, čili: uzavřená formule φ je v dané interpretaci splněna buďto každou valuací, nebo žádnou valuací, v kterémžto případě je každou valuací splněna její negace. Samotný důkaz této věty se opírá o jednoduché lemma:

> Platí-li $\mathcal{IV} \vDash \psi$, pak i $\mathcal{IW} \vDash \psi$ pro libovolnou valuaci $\mathcal{W}$, která se od $\mathcal{V}$ liší pouze v ohodnocení proměnných, které nejsou volné v ψ.

Jelikož sentence nemá žádné volné proměnné, je zřejmé, že z existence jediného $\mathcal{V}$ takového, že $\mathcal{IV} \vDash \varphi$, plyne platnost $\mathcal{IW} \vDash \varphi$ pro každé $\mathcal{W}$, čili $\mathcal{I} \vDash \varphi$. Jelikož při neprázdném univerzu existuje vždy nějaká valuace $\mathcal{V}$ proměnných, nastává právě jeden z případů $\mathcal{IV} \vDash \varphi$ nebo $\mathcal{IV} \vDash \neg\varphi$. V prvním případě máme tedy podle lemmatu $\mathcal{I} \vDash \varphi$, v druhém $\mathcal{I} \vDash \neg\varphi$.

O formuli řekneme, že je LOGICKY PRAVDIVÁ,[34] je-li splněna každou valuací v každé interpretaci, nebo alternativně: je-li jí každá interpretace modelem. Vedle logické pravdivosti se obvykle jako jedna ze sémantických vlastností formulí definuje také splnitelnost, a to jak pro jednu, tak

[34] Termín “tautologie” se často rezervuje pouze pro logické pravdy výrokové logiky. My se v dalším textu tohoto úzu nebudeme držet.

celou množinu formulí. Ve výrokové logice koinciduje tento pojem s existencí modelu, nyní ale musíme rozlišovat mezi SPLNITELNOU množinou S formulí, pro niž existuje $\mathcal{I}$ a $\mathcal{V}$ takové, že $\mathcal{IV} \vDash \varphi$ pro každé φ z S, a mezi tím, že má množina S formulí model, což obnáší existenci $\mathcal{I}$ takového, že $\mathcal{IV} \vDash \varphi$ platí pro každé $\mathcal{V}$ a φ z S. To značíme stručně jako $\mathcal{IV} \vDash S$, resp. $\mathcal{I} \vDash S$.

Díky inferenčním vztahům mezi kvantifikátory platí, že formule, které mají model, jsou i splnitelné. Opačné tvrzení ale obecně nenastává, jak se lze přesvědčit třeba na otevřené formuli $P(x) \wedge \neg P(y)$. U sentencí, jak lze čekat, obojí splývá. Analogické dělení nastává u pojmu vyplývání $S \vDash \varphi$, který někteří autoři definují přes splňování a někteří přes modely, totiž (i) jakožto splnění φ každou interpretací a valuací, které splní formule z S, a (ii) jako pravdivost φ v každé interpretaci, v níž jsou pravdivé formule z S. Rozepsáno formálně máme před sebou tedy definice:

$$S \models_l \varphi \rightleftharpoons (\forall \mathcal{I}, \mathcal{V})[\mathcal{IV} \vDash S \rightarrow \mathcal{IV} \vDash \varphi],$$

$$S \models_g \varphi \rightleftharpoons (\forall \mathcal{I})[(\forall \mathcal{V})\mathcal{IV} \vDash S \rightarrow (\forall \mathcal{V})\mathcal{IV} \vDash \varphi],$$

lišící se postavením kvantifikátoru $(\forall \mathcal{V})$. Jejich indexy odpovídají pomocným názvům VYPLÝVÁNÍ LOKÁLNÍHO a GLOBÁLNÍHO. Z významu kvantifikátorů přitom plyne, že ze vztahu $\models_l$ lze usoudit na $\models_g$, ovšem nikoli naopak, jak to třeba ukazuje případ $P(x) \models_g (\forall x)P(x)$. Jelikož podle definice logické pravdivosti neplatí $\vDash P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)$, nemůže pro druhou relaci vyplývání platit věta o dedukci. Platí ovšem její omezená verze:

Je-li φ sentence, pak $S, \varphi \models_g \psi$ tehdy a jen tehdy, když $S \models_g \varphi \rightarrow \psi$.

V jejím důkazu využijeme výše zmíněného faktu, že pro uzavřenou formuli φ je existence $\mathcal{V}$ takového, že $\mathcal{IV} \vDash \varphi$, ekvivalentní $\mathcal{I} \vDash \varphi$. Tato okolnost nám také zajistí, že pro množiny uzavřených formulí obě definice vyplývání $\models_l$ a $\models_g$ koincidují. Zavedeme-li tedy k formuli φ pojem jejího OBECNÉHO a EXISTENČNÍHO UZÁVĚRU jako formule

$$\forall \varphi \overset{\text{def}}{=} (\forall x_1, \ldots, x_n)\varphi,$$

$$\exists \varphi \overset{\text{def}}{=} (\exists x_1, \ldots, x_n)\varphi,$$

kde $x_1, \ldots, x_n$ jsou všechny proměnné volné ve φ, a značíme-li jako $\forall S$, resp. $\exists S$ množinu všech obecných, resp. existenčních uzávěrů formulí z S, pak platí

$$S \models_g \psi \text{ tehdy a jen tehdy, když } \forall S \models_l \psi.$$

Množina formulí T je přitom splnitelná tehdy a jen tehdy, má-li $\exists T$ model, a má model tehdy a jen tehdy, má-li jej $\forall T$. Tento metateorém nám umožňuje např. snáze nahlédnout, proč je formule $P(x) \wedge \neg P(y)$ splnitelná, ale nemá model.

Volba vyplývání, nebo jak se někdy říká SÉMANTICKÉHO DŮSLEDKU, musí mít samozřejmě vliv i na následující definici důsledku deduktivního, a tedy i formulaci příslušné věty o úplnosti. Kalkulizace globálního vyplývání dosáhneme jednoduchým rozšířením výrokového systému $\mathfrak{B}$ o schémata

D1 $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi^x_t$,

D2 $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$,

po řadě nazývaná SCHÉMA SPECIFIKACE a SCHÉMA DISTRIBUCE, kde v případě (D1) předpokládáme, že žádná proměnná termu t se nestane po dosazení ve φ za x vázaná, a formule φ v (D2) neobsahuje volný výskyt proměnné x. K MP potom přibude PRAVIDLO GENERALIZACE

G $\varphi \,/\, (\forall x)\varphi$.

Ve Fregově původním systému se vyskytuje pouze axiom (D1), přičemž axiom (D2) a generalizaci nahrazuje implicitně užívané pravidlo

G' $\varphi \rightarrow \psi \,/\, \varphi \rightarrow (\forall x)\psi$,

s restriktivní podmínkou na volný výskyt x ve φ. Vedle pravidel generalizace je samozřejmě možné pracovat také s pravidlem substituce, které je ale obtížně formulovatelné, pročež se v případě logiky predikátů pracuje prakticky vždy se schématy.

Jelikož ani jedno z pravidel G, resp. G' generalizace není korektní vůči relaci $\models_l$, musí kalkulizace tohoto vztahu spočívat buďto v dodatečné restrikci na jejich aplikaci, zakazující volný výskyt proměnné x v množině S předpokladů,[35] nebo v úplné eliminaci těchto pravidel. Té lze dosáhnout tím, že za základ systému vezmeme generalizace všech výrokových tautologií, tj. takových formulí PL, které vzniknou z tautologií VL uniformním nahrazením výrokových konstant formulemi PL. K nim pak přidáme schéma (D1) a schémata

D3 $\varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$,

D4 $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$,

kdy v případě (D3) se x nevyskytuje volná ve φ. Formuli ψ přitom nazýváme GENERALIZACÍ φ, jestliže pro nějaké proměnné $x_1, \ldots, x_n$ platí $\psi = (\forall x_1, \ldots, x_n)\varphi$. Jediným úsudkovým pravidlem tohoto systému je pak MP. Vlastní role generalizovaných schémat (D3) a (D4) se ovšem vyčerpá v důkazu teorému:

[35] Tím pádem není z $P(x)$ odvoditelné $(\forall x)P(x)$.

jestliže platí $S \vdash \varphi$ a x není volná v S, pak $S \vdash (\forall x)\varphi$,

jímž se *de facto* argumentuje v dalších dedukcích. Hlavní výhodou tohoto deduktivního systému je platnost neomezené věty o dedukci. My budeme s ohledem na jednodušší pojem odvození přesto preferovat kalkulizaci globálního vyplývání, což znamená, že znakem “$\models$” míníme dále relaci $\models_g$, znakem “$\vdash$” odvoditelnost v kalkulu $\mathfrak{B}$ rozšířeném o schémata (D1), (D2) a pravidlo G. Tento kalkul budeme úhrnně značit jako $\mathfrak{B}_\forall$.

Otázku úplnosti a (ne)rozhodnutelnosti $\mathfrak{B}_\forall$, případně dalších jeho vlastností, nebudeme ale řešit přímo, nýbrž oklikou přes pozdější metodu sémantických stromů. Její výhodou je jednak značná názornost, díky níž je možné platnost zmíněných a některých dalších vlastností predikátové logiky prvního řádu nahlédnout takřka okamžitě, jednak skutečnost, že na ní lze vystavět alternativní kalkulizace predikátové logiky, vhodnější pro použití v běžné důkazové praxi. Podle Gentzenova návrhu je tato metoda (ne příliš šťastně) nazývána PŘIROZENOU DEDUKCÍ. Obecně lze říci, že je to metoda tzv. GENTZENOVSKÝCH KALKULŮ, které se od tzv. KALKULŮ HILBERTOVSKÝCH, s nimiž jsme pracovali dosud, liší v poměru pravidel vůči axiomům. Kalkuly Hilbertova typu, někdy také nazývané KALKULY FREGOVSKÝMI, jsou založeny především na axiomech a minimálním počtu pravidel. Kalkuly gentzenovské rozšiřují podstatně třídu pravidel, a to standardně po dvou (skupinách) pro každý logický operátor (včetně obvyklých definovaných), totiž pro jejich zavedení (introdukci) a vyloučení (eliminaci), např.:

$$\varphi, \psi \;/\; \varphi \wedge \psi,$$

$$\varphi \wedge \psi \;/\; \varphi \qquad\qquad \varphi \wedge \psi \;/\; \psi.$$

Jelikož se axiomy považují jednoduše za pravidla typu

$$/\; \varphi,$$

je celý systém vlastně založen pouze na pravidlech. Některá ovšem nelze formulovat tak přímočaře jako pravidla pro konjunkci. Vezmeme-li implikaci, lze její eliminaci vyjádřit jednoduše jako známý *modus ponens*, k jejímu zavedení je ale třeba užít tzv. ODVOZOVÁNÍ Z PŘEDPOKLADŮ

$$[\varphi] \cdots \psi \;/\; \varphi \rightarrow \psi,$$

kde zápisem $[\varphi] \cdots \psi$ míníme, že byla formule ψ odvozena z předpokladu φ, který je po aplikaci pravidla možné škrtnout, tj. vyloučit z dalších dedukcí. Totéž platí třeba o eliminaci disjunkce

$$\varphi \vee \psi;\; [\varphi] \cdots \chi;\; [\psi] \cdots \chi \;/\; \chi.$$

Tím se samozřejmě stávají příslušná odvození teoreticky i prakticky nepřehledná. Gentzen právě z tohoto důvodu navrhl učinit jistý syntaktický zdvih a pracovat s pravidly pro spojky jako se samostatnými axiomy v rámci tzv. SEKVENTOVÝCH KALKULŮ.[36] V nich jsou systematicky využita metapravidla typu

$$S \,/\, \varphi \Rightarrow S \,/\, \varphi \vee \psi \qquad\qquad S \,/\, \psi \Rightarrow S \,/\, \varphi \vee \psi,$$

$$S, \varphi \,/\, \chi;\; S, \psi \,/\, \chi \Rightarrow S, \varphi \vee \psi \,/\, \chi,$$

pro tzv. SEKVENTY tvaru T/U, kde T, U jsou konečné, případně prázdné množiny formulí a U je nejprve (nejvýše) jednoprvková. Připustíme-li víceprvkové množiny v konsekventu, dospějeme k elegantní symetrické verzi kalkulu, jak se to odráží na variantě naposledy uvedených pravidel

$$S \,/\, T, \varphi, \psi \Rightarrow S \,/\, T, \varphi \vee \psi,$$

$$S, \varphi \,/\, T;\; S, \psi \,/\, T \Rightarrow S, \varphi \vee \psi \,/\, T.$$

Je zřejmé, že v sekvenčním kalkulu musíme vždy rozlišovat zavedení spojky vlevo a vpravo, díky čemuž se ale zase zbavujeme pravidel eliminace, což má za následek velmi příjemnou formální vlastnost systému, totiž že aplikací *pravidel pro spojky* žádné formule nemizí, ale jen přibývají. To je porušeno tzv. PRAVIDLEM ŘEZU

$$S, \psi \,/\, T;\; S \,/\, \psi, T \Rightarrow S \,/\, T,$$

pročež má také důkaz jeho eliminovatelnosti obvykle významné metateoretické konsekvence, např. syntaktickou bezespornost příslušného axiomatického systému. Pro původní gentzenovskou kalkulizaci predikátové logiky byla eliminace provedena samotným Gentzenem v jeho HAUPTSATZ.

Hlavní výhoda řezu spočívá v tom, že podstatně zkracuje důkazy, a reprezentuje tak (na pozadí zbylých pravidel systému) vlastně tradiční způsob odvozování sporem:

$$S, \neg\varphi \,/\, \psi;\; S, \neg\varphi \,/\, \neg\psi \Rightarrow S \,/\, \varphi.$$

S ohledem na tvar sekventu je třeba také podat jeho sémantickou interpretaci, což je značně přímočaré: T/U čteme ve smyslu “jsou-li všechny formule z T splněny nějakou interpretací a valuací, pak je jimi splněna alespoň jedna formule z U”. Z toho jednak plyne, že lze antecedent nahradit konjunkcí formulí z T a konsekvent disjunkcí formulí z U, jednak že prázdnému T odpovídá tautologie, prázdnému U kontradikce. Tím je

[36] Gentzen [1935] zahájil novou éru formálních metod právě návrhem alternativních důkazových systémů a jejich vzájemných ekvivalencí. Metodu kalkulů přirozené dedukce později rozpracoval Prawitz [1965], metodu sekvenčních kalkulů Kleene [1952]. Stručný, ale dostatečně fundovaný přehled o rozličných typech kalkulizací klasické predikátové logiky podává Sundholm [2001].

dáno, v jakém smyslu vede obecná verze sekvenčního kalkulu k axiomatizaci lokálního vyplývání klasické logiky. Významné je, že omezením na nejvýše jednoprvkové množiny v konsekventu některých pravidel symetrické verze sekvenčního kalkulu dospějeme k axiomatizaci logiky intuicionistické.[37] Jelikož nás ale samy o sobě gentzenovské kalkuly nezajímají, přikročme již ke slíbené metodě sémantických stromů.

3.11 Stromy a rozhodnutelnost

Sémantické stromy, navržené Smullyanem [1968], představují zjednodušení Bethových [1959] sémantických *tableaux* coby zobecněné metody ověřování tautologičnosti protipříkladem. S ohledem na zamýšlené použití těchto metod v reálných dedukcích a argumentech je zpravidla uvažována plná sada spojek $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ a kvantifikátorů $\forall$, $\exists$, tj. nejen nějaká jejich funkcionálně úplná podmnožina.

Základní idea je přitom následující. Chceme-li ve výrokové logice zjistit, zda je daná formule φ tautologií, stačí projít všechna možná ohodnocení výrokových konstant formule φ. Těch je ovšem pro n konstant 2^n, což znamená exponenciální nárůst vůči délce formule, tj. neobyčejně dlouhou dobu ověřování pro relativně krátké zadání. Tuto dobu lze přitom mnohdy zkrátit nepřímou úvahou, kdy z předpokladu, že je formuli φ nějakou interpretací přiřazena hodnota 0 (a není to tedy tautologie), vyvodíme spor s předpokladem jednoznačného ohodnocení konstant. — Tak např. předpokládáme-li, že $\mathcal{I}(p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2)) = 0$ pro nějaké $\mathcal{I}$, musí platit i $\mathcal{I}(p_1) = 1$ a $\mathcal{I}(p_1 \vee p_2) = 0$, přičemž z podmínek ohodnocení druhé podformule plyne $\mathcal{I}(p_1) = 0$, tedy spor. Pokoušíme-li se celý postup systematizovat, musíme ještě rozlišit eventuální větvení, k němuž dojde u případů typu $\mathcal{I}(\varphi \rightarrow \psi) = 1$, $\mathcal{I}(\varphi \wedge \psi) = 0$ apod. Zapisujeme-li potom kroky dané úvahy pod sebe, dospějeme tak k jakémusi obrácenému stromu, jak je to znázorněno na obrázku 3.5 pro formuli $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \neg p_1$. K vyvrácení předpokladu sepsaného u kořene musíme zjevně dospět ke sporu ve všech větvích, což se nám zde v pravé větvi nepovedlo. Podíváme-li se nyní na ohodnocení konstant, které na této větvi leží, je zjevné, že určuje ohodnocení všech formulí dané větve příslušnou pravdivostní hodnotou, tím pádem i protipříklad vůči tvrzení, že se v případě rozvíjené formule jedná o tautologii.

Tato pozorování mohou být dále zobecněna do několika metatvrzení o celé metodě, kterou je ale vhodné nejprve kosmeticky upravit. Předstupeň této úpravy spočívá v převedení zapisovaných ohodnocení pouze

[37] Jedním z těchto pravidel je $S, \varphi / T \Rightarrow S / \neg\varphi, T$. V klasickém případě můžeme totiž s jeho pomocí a s pomocí pravidla pro disjunkci odvodit z axiomu (počátečního pravidla) φ / φ přes $/\neg\varphi, \varphi$ tzv. vyloučený třetí $/\neg\varphi \vee \varphi$, který intuicionistická logika odmítá.

na formu $\mathcal{I}(\varphi) = 1$, čehož lze snadno dosáhnout nahrazením případu $\mathcal{I}(\varphi) = 0$ případem $\mathcal{I}(\neg\varphi) = 1$. Tím pádem ale není třeba ohodnocení vů-

$$
\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{I}((p_1 \to p_2) \to \neg p_1) = 0 & \\
 & | & \\
 & \mathcal{I}(p_1 \to p_2) = 1 & \\
 & | & \\
 & \mathcal{I}(\neg p_1) = 0 & \\
 \swarrow & & \searrow \\
\mathcal{I}(p_1) = 0 & & \mathcal{I}(p_2) = 1 \\
| & & | \\
\mathcal{I}(p_1) = 1 & & \mathcal{I}(p_1) = 1
\end{array}
$$

Obrázek 3.5: Příklad rozvoje

bec zmiňovat a stačí psát samotné formule, jak je tomu pro tentýž příklad na obrázku 3.6. Pravidla rozvoje se tak rozdělí nejen podle počtu větvení, ale i podle toho, zda formule, na níž jsou aplikována, začíná negací nebo nikoli, viz obrázek 3.7. Podle toho se k nim také budeme odvolávat, tj. užívat zkratky jako $(\wedge)$ a $(\neg\wedge)$ apod. Zobecnění samotné metody spočívá

$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg((p_1 \to p_2) \to \neg p_1) & \\
 & | & \\
 & p_1 \to p_2 & \\
 & | & \\
 & \neg(\neg p_1) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
\neg p_1 & & p_2 \\
| & & | \\
p_1 & & p_1
\end{array}
$$

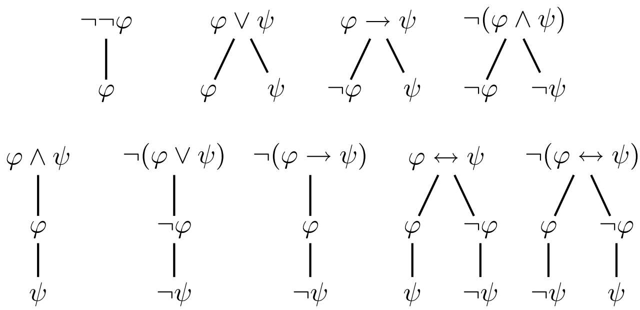
Obrázek 3.6: Redukovaný rozvoj

v tom, že nezkoumáme danou formuli co do tautologičnosti, ale danou třídu formulí co do splnitelnosti, neboť formule je tautologická tehdy a jen tehdy, je-li její negace nesplnitelná. Tím pádem dáváme najevo, že se jedná o problém niterně spjatý přímo s konstrukcí splňující interpretace, případně s poukazem, že takováto konstrukce není možná. Nejprve ale několik poloformálních definicí:

> Sémantickým stromem pro množinu formulí S nazýváme strom rozvíjený výhradně podle uvedených pravidel, na každé z jehož větví se nacházejí všechny formule z S, s možnou výjimkou větví uzavřených. Větev se nazývá uzavřená, vyskytuje-li se na ní současně atomická formule a její negace. V opačném

> případě se nazývá OTEVŘENÁ. Formule stromu se nazývá VYČERPANÁ, jestliže na ni bylo aplikováno některé pravidlo. Literály jsou vyčerpané automaticky.

Sémantický strom se nazývá ÚPLNĚ ROZVINUTÝ, jestliže jej již nelze dále rozvíjet podle daných pravidel, k nimž ovšem nepatří pouze zmíněná SYNTAKTICKÁ PRAVIDLA připojování dalších formulí (pravidla toho, *jak* rozvíjet), ale i jistá metapravidla způsobu a pořadí jejich aplikace (pravidla



Obrázek 3.7: Pravidla rozvoje

toho, *kdy* rozvíjet). Říkejme jim PRAVIDLA SYSTEMATICKÁ. K nim patří např. omezení, podle něhož není třeba dále rozvíjet uzavřenou větev. Ta je tím pádem z definice vždy konečná. Jinak spočívá rozvoj stromu pro formule VL jednoduše ve vyčerpávání všech nevyčerpaných formulí tak dlouho, dokud nejsou všechny větve uzavřené nebo všechny formule vyčerpané.

Definice stromu pro S je tak obecná, aby pokryla i množiny S (spočetně) nekonečné. Právě s ohledem na ně byla do definice sémantického stromu doplněna klauzule “s možnou výjimkou větví uzavřených”. V každém případě platí, že úplně rozvinutý strom má buďto všechny větve uzavřené (a je tedy konečný), nebo v něm existuje větev otevřená (a může, ale nemusí být nekonečný). V nekonečném případě na existenci otevřené větve usoudíme s pomocí Königova lemmatu. Centrálním metateorémem metody sémantických stromů je přitom následující tvrzení:

> Množina formulí S je splnitelná tehdy a jen tehdy, jestliže má její úplně rozvinutý strom otevřenou větev.

Podíváme-li se nyní na existenci otevřené větve jako na variantu deduktivní bezespornosti, máme před sebou bázi kdysi předvedeného důkazu věty o úplnosti, totiž tvrzení, že je každá množina splnitelná tehdy a jen tehdy, když je bezesporná. Jelikož se odkaz k úplnosti týká vždy nějakého pevně stanoveného cíle, zde tedy ověření, zda něco je či není tautologií, či obecněji, zda něco vyplývá z dané množiny premis nebo nikoli, je ovšem lépe pracovat s finální kontrapozicí uvedené báze, totiž s tvrzením:

> $T \vDash \varphi$ platí tehdy a jen tehdy, jestliže má úplně rozvinutý strom pro množinu $T, \neg\varphi$ všechny větve uzavřené.

Rozvoj sémantických stromů se tím ocitne přímo ve službách původního cíle axiomatizace logiky coby analytické, resp. mechanické metody ověřující tautologičnost, resp. případy vyplývání $T \vDash \varphi$. Její podstata spočívá v konstrukci stromu pro formule $T, \neg\varphi$ a odpovědi ANO v případě, že jsou všechny jeho větve uzavřené. KOREKTNOST metody spočívá v tom, že neřekne ANO, aniž by neplatilo $T \vDash \varphi$, tj. je-li odpověď ANO, pak φ z T vyplývá. ÚPLNOST spočívá v tom, že metoda odpoví ANO na každý skutečný případ $T \vDash \varphi$ vyplývání. Jelikož je odpověď NE spjata s nalezením otevřené větve úplně rozvinutého stromu, nelze na ni obecně usoudit z toho, že nám metoda *ne*řekne ANO, neboť v případě nekonečné otevřené větve nám neřekne vůbec nic, rozuměj: v konečně mnoha krocích. Pro konečné množiny formulí VL jsou ovšem i otevřené větve úplně rozvinutých stromů nutně konečné. Definujeme-li tedy nejprve pojem rozhodnutelnosti, kdy

> podmnožina U nějaké množiny M se nazývá ROZHODNUTELNÁ, jestliže existuje algoritmus, který pro libovolný prvek $a \in M$ řekne v konečně mnoha krocích ANO, jestliže $a \in U$, a NE, jestliže $a \notin U$,

můžeme pak snadno dokázat VĚTU O ROZHODNUTELNOSTI VL:

> množina $\mathsf{Taut} \subset F_{\mathsf{VL}}$ všech tautologií je rozhodnutelná

s odkazem na algoritmus daný konstrukcí úplně rozvinutého stromu. Otázka platnosti $T \vDash \varphi$ pro konečná T je samozřejmě na problém tautologičnosti triviálně převeditelná pomocí věty o dedukci.

Rozhodnutelnost tautologičnosti a vyplývání z konečné množiny premis není samozřejmě žádné velké překvapení, zvláště s ohledem na standardní Wittgensteinovu-Peircovu metodu pravdivostních tabulek, tedy skutečnost, že relevantních interpretací dané formule je pouze konečně mnoho. Tento výsledek bylo však vhodné oficiálně formulovat, neboť predikátová logika vlastnost rozhodnutelnosti ztrácí, aniž by přestala být úplná. Důvody tohoto selhání lze nicméně nahlédnout již na výrokové logice u stromů pro nekonečné množiny formulí. Platí-li (silná) věta o úplnosti, musí mít úplně rozvinutý strom pro splnitelnou nekonečnou množinu S zjevně nekonečnou otevřenou větev (jednoduše proto, že se na ní musí objevit všechny formule z S), a my se tedy to, že množina S splnitelná je, pouhým následováním algoritmu nedozvíme. V případě ovšem, že S splnitelná není, musí mít příslušný strom všechny větve uzavřené, a tím pádem dostaneme odpověď ANO (= vyplývá) i tehdy, zkonstruujeme-li strom pro množinu $T, \neg\varphi$, kde je T nekonečné a platí $T \vDash \varphi$.

Skutečnosti, že máme algoritmus pouze pro dílčí řešení nějakého problému, se říká polorozhodnutelnost. Přesněji definováno:

> Podmnožina U množiny M se nazývá POLOROZHODNUTELNÁ, jestliže existuje algoritmus, který pro libovolný prvek $a \in M$ řekne v konečně mnoha krocích ANO.

Je triviálně zřejmé, že každá rozhodnutelná množina musí být polorozhodnutelná. Opačný směr ale neplatí, čehož náznakem je výše zmíněný problém rozhodnutelnosti vyplývání ve výrokové logice pro nekonečně mnoho premis. Ten je ovšem v jistém smyslu triviální. Tentýž problém v logice predikátů ale už triviální není, neboť k němu dochází také pro případ logické pravdivosti a vyplývání z *konečných* množin formulí. Důvodem je přitom fakt, že konečné množiny formulí z F_{PL} na rozdíl od konečných množin formulí z F_{VL} mají jednak (1) nekonečně mnoho modelů, jednak (2) modely nekonečné.

Případ (1) je také vlastním důvodem aplikace metody typu sémantických stromů, neboť tautologičnost formulí PL nelze ověřovat přímo, ve stylu pravdivostních tabulek, protože ty spočívají na prověření *všech* interpretací. Metoda protipříkladu je způsobem, jak tuto potíž obejít, a to způsobem částečně úspěšným: Je-li formule tautologií, pak se v konečně mnoha krocích strom uzavře, tj. dostaneme odpověď ANO. Případ (2) ovšem naznačuje, proč se jedná o metodu úspěšnou jenom z poloviny: Jelikož splnitelná formule může mít i nekonečný model, nemusíme se k odpovědi NE v konečně mnoha krocích vůbec dostat. Otevřená větev v každém případě představuje základ konstrukce kanonického modelu výchozí sady formulí, resp. všech formulí, které se na ní nacházejí. V tom také spočívá vlastní jádro věty o úplnosti metody stromů.

Skutečnost, že onen částečný úspěch metody stromů nelze vylepšit, tedy že se v případě ověřování tautologičnosti formulí PL jedná o skutečně nerozhodnutelný problém, je ovšem tvrzení jiného, a podstatně náročnějšího typu nežli prokázaná nerozhodnutelnost problému jednou konkrétní metodou. Jeho vlastní důkaz podal Alonzo Church [1936a] ve větě o nerozhodnutelnosti predikátového počtu. K tomu se ale dostaneme ještě v kapitole 8. Nyní přistoupíme konečně k nárysu důkazu úplnosti metody sémantických stromů pro predikátovou logiku prvního řádu. Tím pokryjeme i podpřípad logiky výroků.

3.12 Věta o úplnosti

V konstrukci stromů pro PL se omezíme pouze na množiny uzavřených formulí. Na obecnost dosaženého výsledku to, jak uvidíme, nebude mít žádný vliv. V prvním kroku ovšem rozšíříme třídu syntaktických pravidel o dvě triviální a dvě komplikovanější, jak to ukazuje obrázek 3.8. Komplikovanost posledních dvou spočívá v tom, že pravidlo $(\forall)$ je třeba

$$\begin{array}{cccc}
\neg(\forall x)\varphi & \neg(\exists x)\varphi & (\forall x)\varphi & (\exists x)\varphi \\
| & | & | & | \\
(\exists x)\neg\varphi & (\forall x)\neg\varphi & \varphi^x_c & \varphi^x_c \\
 & & & \\
 & & c \text{ libovolné} & c \text{ nové}
\end{array}$$

Obrázek 3.8: Pravidla rozvoje pro PL

aplikovat na libovolnou jmennou konstantu c, která se vyskytla na větvi dříve, pravidlo $(\exists)$ oproti tomu vyžaduje přidat konstantu zcela novou, na dané větvi ještě nepoužitou. Rovněž systematická pravidla rozvoje jsou o něco složitější.

Tak především aplikací pravidla $(\forall)$ nelze vyčerpat danou formuli, neboť se v průběhu rozvoje může na dané větvi objevit jméno, které je zapotřebí k jejímu uzavření, a formule tedy musí zůstat k dispozici. To má ovšem za následek, že neopatrnou aplikací pravidel lze dojít k otevřené větvi, kterou by šlo aplikací jinou uzavřít. Tomu lze zabránit opakovaným procházením dosud zkonstruovaného úseku stromu a aplikací pravidla $(\forall)$ na všechna jména, která se na té které větvi v tom kterém stádiu vyskytnou. Další nepříjemnost může nastat, když se na nějaké dosud neuzavřené větvi nacházejí nevyčerpané pouze obecné formule $(\forall x)\varphi$ a žádné jméno. To se nám např. stane hned při rozvoji stromu pro tautologii $(\forall x)\varphi \to (\exists x)\varphi$. V takovém a pouze v takovém případě dovolujeme pravidlu $(\forall)$ zavést nejprve nějaké jméno c a poté přidat formule φ^x_c. Formuli, na niž lze v souladu s výše uvedenými syntaktickými i systematickými pravidly v průběhu rozvoje aplikovat nějaké pravidlo, budeme nazývat ROZVINUTELNOU. Ostatní definice zůstávají v platnosti.

Samotný důkaz věty o úplnosti je založen na dvou lemmatech a jedné definici. První z lemmat, nazývejme ho lemma A, zní takto:

> Každý splnitelný nerozvinutý úsek sémantického stromu, tj. posloupnost bezprostředně následujících uzlů počínající kořenem, lze rozšířit na splnitelný úsek větší délky.

Důkaz: Mějme takový úsek a formuli φ, která je rozvinutelná. (1) Nechť $\varphi = \psi \wedge \chi$. Aplikací pravidla $(\wedge)$ rozšíříme tento úsek o formule ψ a χ.

Z předpokládané splnitelnosti plyne existence interpretace $\mathcal{I}$ takové, že $\mathcal{I} \vDash \psi \wedge \chi$. Ta musí splňovat i ψ a χ, tím pádem je splnitelné i předvedené rozšíření. (2) Nechť $\varphi = \psi \vee \chi$. Úsek lze nyní rozšířit o ψ nebo χ. Z existence $\mathcal{I} \vDash \psi \vee \chi$ plyne, že jedno z rozšíření musí být také splnitelné. (3) Pro ostatní výroková pravidla je postup analogický, rovněž případy $(\neg\forall)$ a $(\neg\exists)$ jsou triviální. (4) V případě $\varphi = (\exists x)\psi$ přidáváme formuli ψ^x_c pro nějaké nové c. Z předpokladu $\mathcal{I} \vDash (\exists x)\psi$ plyne existence předmětu b takového, že $\mathcal{I}\mathcal{V}^x_b \vDash \psi$ pro nějaké $\mathcal{V}$. Jelikož je c z definice zcela nové, můžeme definovat $\mathcal{J}$ zcela shodně s $\mathcal{I}$ a dodefinovat $\mathcal{J}(c) = b$. Tím pádem platí jednak $\mathcal{J} \vDash \psi^x_c$, jednak je $\mathcal{J}$ i modelem všech formulí předchozích a dané rozšíření je splnitelné. (5) Nejkomplikovanější případ nastává, je-li jedinou dále rozvinutelnou formulí formule tvaru $\varphi = (\forall x)\psi$ a větev je rozšířena podle pravidla $(\forall)$ o formuli ψ^x_c. Vezměme nejprve podpřípad (5a), kdy se na větvi nenachází žádné jméno c, a zvolená konstanta je tedy nová. Jelikož předpokládaná interpretace $\mathcal{I} \vDash (\forall x)\psi$ nemůže být z definice prázdná, v $\dot{\mathcal{I}}$ musí být tedy nějaký předmět b a my můžeme vše převést na případ (4). V podpřípadu (5b) se c vyskytuje na větvi dříve. Interpretace $\mathcal{I}$, která splňuje všechny její formule, mu tedy přiřazuje nějaký předmět b univerza. Jelikož platí $\mathcal{I} \vDash (\forall x)\psi$, musí platit i $\mathcal{I} \vDash \psi^x_c$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Druhé lemma, lemma B, předpokládá definici množiny (uzavřených) formulí, které se někdy říká saturovaná, někdy Hintikkova:

> Množina $S \subseteq F_{\mathsf{PL}}$ uzavřených formulí se nazývá HINTIKKOVA, platí-li následující podmínky: (i) jestliže $\neg\neg\varphi \in S$, pak i $\varphi \in S$, (ii) jestliže $\varphi \wedge \psi \in S$, pak i $\varphi \in S$ a $\psi \in S$, (iii) jestliže $\neg(\varphi \wedge \psi) \in S$, pak $\neg\varphi \in S$ nebo $\neg\psi \in S$, (iv) jestliže $\varphi \vee \psi \in S$, pak $\varphi \in S$ nebo $\psi \in S$, (v) jestliže $\neg(\varphi \vee \psi) \in S$, pak i $\neg\varphi \in S$ a $\neg\psi \in S$, (vi) jestliže $\varphi \rightarrow \psi \in S$, pak $\neg\varphi \in S$ nebo $\psi \in S$, (vii) jestliže $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \in S$, pak i $\varphi \in S$ a $\neg\psi \in S$, (viii) jestliže $\varphi \leftrightarrow \psi \in S$, pak $\varphi, \psi \in S$ nebo $\neg\varphi, \neg\psi \in S$, (ix) jestliže $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \in S$, pak $\neg\varphi, \psi \in S$ nebo $\varphi, \neg\psi \in S$, (x) jestliže $\neg(\forall x)\varphi \in S$, pak i $(\exists x)\neg\varphi \in S$, (xi) jestliže $\neg(\exists x)\varphi \in S$, pak i $(\forall x)\neg\varphi \in S$, (xii) množina C všech jmenných konstant vyskytujících se ve formulích z S je neprázdná, (xiii) jestliže $(\exists x)\varphi \in S$, pak i $\varphi^x_c \in S$ pro nějaké $c \in C$, (xiv) jestliže $(\forall x)\varphi \in S$, pak i $\varphi^x_c \in S$ pro všechna $c \in C$.

Lemma B potom tvrdí:

> Hintikkova množina, která neobsahuje elementární formuli spolu se svojí negací, je splnitelná.

Důkaz: Skutečnost, že se v množině nevyskytuje elementární formule a její negace, nám dává prostředek pro definování báze hledané interpretace

$\mathcal{I}$. Za univerzum $\dot{\mathcal{I}}$ vezmeme jednoduše množinu všech jmenných konstant C ve formulích z S. Jazyk L_S pak interpretujeme následovně:

(i) $\mathcal{I}(c) = c$,

(ii) $\mathcal{I}(P^n) = \{\langle c_1, \ldots, c_n \rangle \mid P^n(c_1, \ldots, c_n) \in S\}$,

tj. každé jmenné konstantě přiřadíme ji samotnou a každé n-ární predikátové konstantě je přiřazena množina n-tic jmenných konstant takových, že se formule $P^n(c_1, \ldots, c_n)$ vyskytuje v S. Zbývá dokázat:

> Jestliže $\varphi \in S$, pak $\mathcal{I} \vDash \varphi$.

Důkaz probíhá indukcí, jejíž báze (1) sestává ze dvou kroků. (1a) Je-li φ elementární formule, tj. má-li formu $P^n(c_1, \ldots, c_n)$, pak z definice nastává $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle \in \mathcal{I}(P^n)$, což znamená, že $\mathcal{I} \vDash P^n(c_1, \ldots, c_n)$. (1b) Jedná-li se o negaci elementární formule $P^n(c_1, \ldots, c_n)$, pak z předpokladu lemmatu nemůže platit $P^n(c_1, \ldots, c_n) \in S$, tudíž podle definice $\mathcal{I}$ nastává $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle \notin \mathcal{I}(P^n)$ a $\mathcal{I} \nvDash P^n(c_1, \ldots, c_n)$. Z uzavřenosti formule dostáváme $\mathcal{I} \vDash \neg P^n(c_1, \ldots, c_n)$. (2) Nyní předpokládáme, že tvrzení platí pro všechny formule s nějakým počtem výskytů operátorů. Dokazujeme pro formule s počtem o jeden výskyt vyšším, přičemž opět rozlišujeme kombinace spojek a negace. (2a) Nechť $\varphi = \psi \wedge \chi$. Z vlastností Hintikkovy množiny platí $\psi, \chi \in S$ a my můžeme aplikovat induktivní předpoklad, tj. $\mathcal{I} \vDash \psi$ a $\mathcal{I} \vDash \chi$. Z toho již plyne $\mathcal{I} \vDash \varphi$. (2b) Ostatní případy výrokových spojek se ověřují podobně, negace kvantifikátorů se převádějí na následující body. (2c) Nechť $\varphi = (\exists x)\psi$. Z definice Hintikkovy množiny existuje $c \in C$ takové, že $\psi^x_c \in S$. Podle induktivního předpokladu tudíž $\mathcal{I} \vDash \psi^x_c$, z čehož plyne, že existuje $\mathcal{V}$ takové, že $\mathcal{I}\mathcal{V}^x_c \vDash \psi$. Podle Tarského definice tedy $\mathcal{I} \vDash (\exists x)\psi$. (2d) Nechť $\varphi = (\forall x)\psi$. Pak pro každé $c \in C$ platí $\psi^x_c \in S$, tedy i $\mathcal{I} \vDash \psi^x_c$. Jelikož $\dot{\mathcal{I}} = C$, musí platit i $\mathcal{I} \vDash (\forall x)\psi$. □

Tím jsou vyřízeny nutné prerekvizity a my můžeme sklízet důsledky. Jako první z nich vezměme VĚTU O ÚPLNOSTI A KOREKTNOSTI METODY SÉMANTICKÝCH STROMŮ pro predikátovou logiku prvního řádu:

> Pro *libovolnou* množinu formulí T a formuli φ řekne metoda sémantických stromů ANO tehdy a jen tehdy, když platí $T \vDash \varphi$.

Důkaz: Uvažujme úplně rozvinutý strom pro formule $\forall T, \neg\forall\varphi$. Nejprve předpokládejme, že se uzavřel, ale že neplatí $T \vDash \varphi$. S ohledem na vztah

> $T \vDash \varphi$ tehdy a jen tehdy, když $\forall T \vDash \forall\varphi$, a to tehdy a jen tehdy, když je $\{\forall T, \neg\forall\varphi\}$ nesplnitelná

nemůže platit ani $\forall T \vDash \forall\varphi$. Tím pádem je množina $\{\forall T, \neg\forall\varphi\}$ splnitelná a uvažovaný strom se podle lemmatu A nemůže uzavřít. To je v rozporu s předpokladem a metoda je korektní.

Předpokládejme nyní, že platí $T \vDash \varphi$ a uvažovaný strom má otevřenou větev. Množina formulí otevřené větve jakéhokoli úplně rozvinutého stromu je zjevně množinou Hintikkovou, která navíc neobsahuje elementární formuli a její negaci. Tím pádem má podle lemmatu B model, jenž musí splňovat i formule $\forall T, \neg\forall\varphi$. Tím pádem neplatí $\forall T \vDash \forall\varphi$ a v rozporu s předpokladem ani $T \vDash \varphi$. Metoda je tedy úplná. □

Predikátová logika prvního řádu je tudíž polorozhodnutelná, přičemž plná rozhodnutelnost neplatí proto, že pro neplatné $T \vDash \varphi$ může mít konstruovaný strom nekonečnou větev, tj. množina formulí $\forall T, \neg\forall\varphi$ může mít nekonečný model. Námi dokázaná částečná rozhodnutelnost ukazuje vlastně tolik:

> V případě platného $T \vDash \varphi$ musí již existovat nějaké konečné $U \subseteq T$ takové, že $U \vDash \varphi$.

Jinak by se totiž strom neuzavřel v konečně mnoha krocích, což podle definice znamená, že by se neuzavřel vůbec. Toto tvrzení není ovšem nic jiného nežli dříve zmíněná VĚTA O KOMPAKTNOSTI, tentokráte předvedená jako snadný důsledek věty o úplnosti.

Dalším z významných korolárů našeho *důkazu* je skutečnost vyjádřená tzv. LÖWENHEIMOVOU-SKOLEMOVOU VĚTOU, totiž že má libovolná splnitelná množina S formulí predikátové logiky prvního řádu spočetný model, či Skolemovou dikcí: model sestávající z přirozených čísel. To je dáno konstrukcí příslušné otevřené větve, v níž se v každém kroku vyskytuje pouze konečně mnoho nových jmenných konstant. Jejich úhrn C, z něhož sestává univerzum příslušné interpretace, nemůže mít tedy více než spočetně mnoho prvků. Tato věta je z obecnějšího pohledu zajímavá zejména v souvislosti s prvořádovou axiomatizací teorie množin, která se zdá vyžadovat nejen existenci nekonečných množin, ale i jejich potencí, což vede k tzv. Löwenheimovu-Skolemovu paradoxu. O něm se zmíníme později, konkrétně v kapitole 6.

Nyní máme v každém případě po ruce dostatečné množství materiálu na to, abychom mohli přejít k vlastní analýze Fregových pokusů o definitivní konceptualizaci aritmetiky a příčiny jejich neúspěchu, a nemuseli se přitom starat, zda čtenář zná relevantní technické detaily v relevantním nasvícení. Z technických otázek nás přitom ještě čekají některá rozšíření dosud předvedeného formalismu, v první řadě o funktory, dále o predikát rovnosti a nakonec o kvantifikaci vyšších řádů. K nim všem se tentokráte dostaneme vždy v nějakém širším kontextu filosofie logiky a aritmetiky, a to speciálně prvního řádu.

4 Číslo a obrat k jazyku

Jestliže bychom při studiu a aplikacích moderní logiky, jejíž možnosti byly předmětem předchozí kapitoly, neměli nikdy pouštět ze zřetele slova jejího tvůrce, podle nichž se jedná pouze o "nástroj určený k jistým vědeckým cílům",[1] totiž kanonizaci úsudkových principů v matematice, neměli bychom zapomínat ani na to, že tento nástroj vznikl v rámci širšího projektu, tzv. logicismu. Ten nebyl, alespoň ve Fregově případě, jen jakýmsi intelektuálním cvičením spekulativní mysli, ale společným produktem (1) dobového (lokálního) trendu co možná největší verbalizace subjektu, tedy dalším krokem dříve popsané aritmetizace analýzy, a (2) tradiční (globální) metody kladení a přezkušování hypotéz, jak ji lze — např. v zrcadle Lakatosovy [1976] 'logiky matematického objevu' — rozeznat ve vědách empirických i apriorních. Oba tyto aspekty musí být vzaty v úvahu při posuzování úspěšnosti Fregova programu, tj. jeho snah o aritmetiku založenou čistě na logice.

Vedle těchto dvou 'scientistických' momentů se ve Fregově díle projevuje podstatnou měrou ještě moment třetí, jenž ho odlišuje od projektů Cantora, Dedekinda a Peana a naopak spojuje s pracemi Russella a Wittgensteina. Tento moment chci nazývat 'transcendentálním' a identifikovat se zrodem analytické tradice novověké filosofie, konkrétně pak (3) s tzv. 'obratem k jazyku', jak se poprvé objevil ve Fregových *Grundlagen* v souvislosti s otázkou "co je číslo?". Transcendentální rozměr Fregova díla má samozřejmě radikálně jiný charakter než jeho aspekty scientistické, neboť není spjat s žádnou konkrétní oblastí lidského zkoumání, jako je třeba matematika, ale představuje univerzální postoj ve věci poznání světa, chápaného v tom nejširším slova smyslu. Právě to ho také činí aspektem filosofickým (*ne*scientistickým), a právě proto nemůže selhat způsobem, jakým (přinejmenším v některých ze svých fází) selhaly logicistický či konstruktivistický projekt v kontextu matematiky či jakým selhávají naše prognózy v kontextu poznání empirického světa. Z těchto důvodů epistemické nadřazenosti transcendentálních otázek otázkám vě-

[1] Frege [1879, s. V].

deckým se proto bude podstatná část této kapitoly točit kolem Fregových *Grundlagen* a fragmentu jeho filosofie aritmetiky, který přímo nesouvisí s logicistickou hypotézou, a zůstává tedy platný i po jejím eventuálním zamítnutí. Uvidíme, že se překvapivě jedná o fragment pragmaticky fundovaný, což jej (nejen v obecně ideových, ale i technických detailech) spojuje s ranou i pozdní filosofií Ludwiga Wittgensteina, přestože si to Wittgenstein obvykle odmítá přiznat. Detaily Fregova logicistického plánu, tedy momenty (1) a (2), včetně analýzy příčin jeho selhání a rozboru vyvozených důsledků pro projekt základů matematiky v této kapitole pouze načneme, abychom se jim v úplnosti mohli věnovat v kapitolách dalších.

4.1 Co je předmět?

Spojení otázky "co je číslo?" právě s osobou Gottloba Frega může vypadat podezřele již proto, že je to otázka stará (skoro) jako filosofie sama a pro filosofii matematiky navíc určující. U Frega ji ovšem nacházíme jednak zaměřenu čistě na bazální problém čísla přirozeného, jenž byl vždy právě pro zdánlivou jednoduchost víceméně opomíjen nebo zodpovídán značně vágně (viz třeba Eukleidova definice čísla jako množiny jednotek a všeobecné úvody rozličných matematických textů), jednak je u něho opakovaně formulována způsobem, jenž nemá pro svůj explicitní charakter v dějinách filosofie obdoby. — Obecně epistemologický rámec, vyjádřený v závěrečné pasáži *Grundgesetze* [1893/1903, díl II, s. 265], podle níž je základním problémem aritmetiky otázka:

> jak uchopujeme logické předměty, speciálně čísla?,

je totiž v rozhodujících místech *Grundlagen* [1884, § 45] vyostřen do pragmaticko-lingvistické zkratky:

> o čem je vypovídáno udání čísla?

Novost Fregova přístupu k aritmetice, jak správně podotkl Michael Dummett [1991, s. 112], ale nespočívá ani tak v otázce samé, nýbrž v tom, jak na ni Frege odpovídá, totiž lingvisticky, když obrací perspektivu ontologického tázání (co jsou nějaké objekty zač?) k tázání lingvistickému (jaké jsou jejich jazykové reprezentace?). Tím jenom upevňuje pozici Kantova transcendentálního obratu (jaké jsou podmínky poznání daných objektů?), když jej ze subjektivní sféry vrozených struktur individuální mysli a mentálních reprezentací přenáší a zakotvuje v intersubjektivitě jazyka. Motorem tohoto obratu je jedna z úvodních zásad *Grundlagen* [1884, s. XI], podle níž

> po významu slov je třeba se ptát v kontextu věty, nikoli izolovaně.

Později Frege [1884, § 106] dokonce píše: "Stanovili jsme axiom, že význam slov není možné vysvětlit izolovaně, ale vždy v kontextu věty. Následováním tohoto axiomu se, jak věřím, lze vyhnout fyzikálnímu pojetí čísla, aniž bychom upadli v pojetí psychologické." Díky této zásadě se celý projekt rozšiřuje z aritmetiky na libovolnou oblast našeho poznání, neboť 'ptát se' znamená vždy 'ptát se v jazyce', jenž takto z definice předchází každou možnou zkušenost, jinými slovy: je vůči ní transcendentální. 'Ptát se po nějakých objektech, po jejich poznání, existenci' tedy znamená 'ptát se, jakých slov, resp. jakého typu slov jsou to významy'. A odpověď na tuto otázku musí být vždy intrajazyková, tj. nemůžeme na ni pod hrozbou bludného kruhu odpovědět ontologicky, např. že jména jsou výrazy označující entity jistého typu (předměty).

Jestliže tedy Frege na mnoha místech říká, že jsou čísla předměty a předměty jsou významy vlastních jmen, míní to zpravidla opisně, jakožto upozornění, že jsou příslušné reprezentace, číslovky, užívány po způsobu vlastních jmen. Analýza toho, jak jsou užívána vlastní jména, resp. jak je tímto použitím intrajazykově charakterizován určitý výraz jako výraz kategorie vlastní jméno, je podána separátně, ne vždy explicitně, avšak dostatečně srozumitelně pro toho, kdo daná kritéria hledá. To dokumentují velmi jasně Fregova [1884, § 62] následující slova:

> Jak je nám tedy dáno číslo, nemůžeme-li o něm mít žádnou představu ani názor? Slova něco znamenají pouze v kontextu věty. Jde tedy o to, vysvětlit smysl věty, v níž se vyskytuje číslovka. Tím je zprvu ponecháno ještě mnoho místa libovůli, ale již jsme konstatovali, že s číslovkami je nutné spojovat samostatné předměty. Tím je nám dán druh vět, které musí mít smysl, vět vyjadřujících znovurozpoznání.

V tomto citátu je naznačeno, kudy se musí ubírat odpověď na otázku:

> co dělá výraz vlastním jménem?,

ale i na související problém:

> co dělá výraz vlastním jménem nějakého předmětu?,

tj. otázku po vztahu reprezentace a reprezentovaného. V obou případech jsou klíčem k řešení KRITÉRIA IDENTITY. — Význam specifikace identity pro ustanovení toho, o čem v nějakém diskurzu (proporcí, racionálních či reálných čísel) hovoříme, co je jeho 'předmět řeči', co je významem užitých jmen, jsme již několikráte zmínili a praktickým způsobem i zdůvodnili. Nyní jde o to předvést zdůvodnění teoretické. Problematické se může zdát nejprve přenesení kritéria na jiné nežli jen abstraktní diskurzy, především tedy na entity empirické. Tato problematičnost je ale značně efemérní, uvědomíme-li si, že ze sémantického hlediska, tj. právě z hlediska vztahu výrazu a jeho významu, nás zajímají spíše podobnosti nežli odlišnosti jednotlivých diskurzů, pročež je také lépe vyjít z oborů abstraktních, jako je aritmetika, u nichž je větší šance, že nebudeme ovlivněni důvěrně známými, a proto irelevantními empirickými příměry 'křtění dítěte' či 'pojmenovávání objevené hory'. Ty totiž u objektů jako jsou čísla vůbec nedávají smysl (tento předmět budiž od nynějška znám jako "−5"), u objektů fyzikálních pak přinejmenším nejsou kritériem postačujícím, jak nás to v historické perspektivě naučil W. V. O. Quine. — Nepochybuji o tom, že právě tuto heuristickou kvalitu matematického poznání měl na mysli Platón, když zakázal vstup do Akademie těm, co neovládají geometrii. Zcela podobného a pro naši věc snad ještě výmluvnějšího původu je i Fregovo [1983, s. 293] prohlášení, že bez znalosti matematiky je filosof jen polovičním filosofem a *vice versa*. Vraťme se ale k problematice reference.

Quine [1960] ve svých úvahách k neurčitosti *deixe* (přesněji: nevymezitelnosti reference a neurčitosti překladu) argumentuje v tom smyslu, že vyslovení jména ("Karel") či věty ("toto je Karel"), doprovozené mávnutím ruky (*deiktickým* gestem), není s to samo o sobě zajistit význam danému výrazu, není-li dopředu jasné, *co* takto chceme označit, totiž zda dítě, jeho část, či pohyb, který provádí, okolo letící mouchu, její pozici v prostoru, barvu na čepci atd. To, co většina 'analytických filosofů' či 'filosofických logiků', prototypicky a (bohužel) velmi vlivně např. Kripke [1972], nazývá pojmenováním předmětu, je tedy z hlediska vztahu výrazu a jeho významu irelevantní, neboť to již předpokládá identitu pojmenovávaného jakožto významu výrazů "toto dítě", "dítě, které zde běželo včera", "její dítě" atd., tj. kritéria identity jevových reprezentací v širším slova smyslu. K nim patří i pojmově zpracované představy, tj. představy spojené s elementárním jevovým soudem (*Anschauungsurteil*) jako "toto je dítě", "toto je moucha" atd., jenž, jak nás naučil Kant, teprve dělá z názoru názor *něčeho*, z počitkového *clusteru* objektivní představu, a může tak vůbec vést k *objektivnímu* poznání.

Pro náš pokus o lokalizaci obratu k jazyku je přitom zvláště významné, že Frege ve svých úvahách z *Grundlagen* [1884, § 22, 46, 54] Quina předjímá, když totiž v souvislosti s praktickou charakterizací kardinálního čísla jakožto odpovědí na otázku "kolik?" usuzuje, že prosté gesto, např. směrem ke knihovně, neumožňuje dát jednoznačnou odpověď, neboť je stále otevřeno, myslíme-li počet polic, knih jako exemplářů či titulů apod. Úplný tvar otázky je tedy:

kolik čeho?,

což vede na její doplnění pojmovým slovem, jehož extenze má diskrétní charakter, tj. je tvořena skupinou ve své identitě dobře určených předmětů. Pojmům tohoto typu (police, exemplář, titul) se říká SORTÁLNÍ. Liší se od pojmů LÁTKOVÝCH (červený, voda) právě tím, že těm druhým chybí doprovodná kritéria identity (x je tentýž titul jako y, x je tentýž exemplář jako y). Díky nim je také gesto doprovozené větou "toto dítě je Karel", tj. explicitním, případně implicitním předpokladem, že ukazujeme na instanci sortálního pojmu "dítě", určeno jednoznačně, stejně jako je jednoznačná otázka, kolik knih ve smyslu titulů má daná knihovna.

Mohlo by se zdát, že Quine [1953] ve svých úvahách tyto elementárně transcendentální postřehy Fregovy ještě radikalizuje, např. když prohlašuje, že otázku, co označuje nějaké jméno M, nelze vlastně zodpovědět jinak, než odkazem na nějaké jméno N téhož významu, tedy obratem

M označuje totéž co N.

Tento argument je ale v podstatě analogický známé Neurathově [1932*b*, s. 403] kritice KORESPONDENČNÍ TEORIE PRAVDY, definující pravdivost věty jakožto její korespondenci s realitou. Tato kritika spočívá v pozorování, že větu lze porovnávat zase jen s větou, nikdy ne se skutečností, neboť ta — nepředpokládáme-li nějaký typ předzjednané harmonie — by již musela být jazykově preformována. Prakticky tutéž úvahu ovšem nalézáme u Frega [1918*a*, s. 59 n], jenž se na jejím základě kloní k čemusi, co vypadá jako REDUNDANČNÍ TEORIE PRAVDY, podle níž pravdu nelze definovat, neboť v takové definici musí být *definiens* předpokládán již jako pravdivý.[2] Ve skutečnosti se ale jedná o TEORII PRAVDY PERFORMATIVNÍ, podle níž nelze podstatu pravdivosti vystihnout vyslovením a dalším vysvětlováním obratu "je pravdivý", protože je bytostně spjata s TVRDÍCÍM AKTEM, obecněji tedy s tím, že věty nepíšeme či nevyslovujeme jen tak, ale vždy vůči *někomu.* Frege [1983, s. 272] k tomu říká:

> [Slovo] "pravdivý" ve skutečnosti představuje jen neúspěšný pokus o vystižení [podstaty] logiky, přičemž to, o co zde skutečně jde, vůbec neleží ve slově "pravdivý", nýbrž v tvrdící síle, s níž je vyslovována věta. [...] To, v čem je odkaz na podstatu logiky obsažen nejzřetelněji, je tvrdící síla, s níž je vyslovena myšlenka.

Pravdivostní nárok, který se za vyslovením věty v příslušném performativním modu skrývá, je ovšem nutně identický se závazky, které tím přijímáme vůči ostatním účastníkům té které jazykové hry. V případě tvrzení se jedná zjevně o závazky inferenční ("jestliže jste řekl toto, pak musíte souhlasit i s tímto", "jaké důvody jste měl k tomuto tvrzení?"), což nám dává další důvod, proč spolu s Brandomem [1994] považovat Frega, když už ne za otce, pak alespoň za významnou inspiraci inferenčního holismu. V obecné rovině je ovšem Frege stejně jako Quine nesporným holistou větným.

[2] Fregovu teorii pravdy jsme již zmínili v oddílu 3.9.

Vidíme tedy, že nejen Fregova teorie pravdy, ale především fakt, že se Frege na cestě k odhalení toho, co jsou nějaké předměty, významy našich slov, rozhodl zkoumat jazykové reprezentace co do jejich *použití* ve větách, případně inferencích, ukazuje, že je iniciátorem nejen jazykového, ale i pragmatického obratu v dějinách filosofie. Ten je obvykle spojován teprve se jménem Wittgensteinovým, to je ale neadekvátní nejen z výše uvedených důvodů, ale především proto, že správně uchopený obrat k jazyku již obrat pragmatický nějakým způsobem indukuje.

Průběžný výsledek našeho pokusu jak odpovědět na otázku "co je jméno?" v duchu Fregovy filosofie jazyka je tedy dán lingvisticko-pragmatickým obratem jako "to, co je používáno v souvislosti s identitou". Vztah jména a předmětu, jenž je jeho významem, tím ale zůstává stále neobjasněný, neboť v sobě evidentně nese rozlišení dvou entit, po nichž není v našem intrajazykovém vysvětlení ani stopy. Tato 'záhada' je ale opět triviálně poplatná konvenčnímu, 'empirickému' smýšlení, jak to výmluvně vyjadřuje následující citát:

> Ti, kdo jsou nakaženi primitivní pověrou, že každému jménu musí odpovídat jednoduchá skutečná entita, v důsledku předpokládají, že je nutné logicky rozlišovat mezi věcí samotnou a některými nebo všemi z jejích smyslových vlastností. A tak vytvářejí termín "substance", kterým referují k věci samotné. Avšak z faktu, že náhodou užíváme jednoduché slovo pro referování k věci, čímž z něho děláme gramatický subjekt věty, v níž referujeme k smyslové reprezentaci věci, v žádném případě nevyplývá, že věc sama je "jednoduchou entitou" nebo že nemůže být definována totalitou svých reprezentací. Je pravda, že mluvíme-li o "jejích" reprezentacích, zdá se, že rozlišujeme věc od reprezentací, ale to je jednoduše náhodný rys jazykového úzu. Logická analýza ukazuje, že to, co činí tyto "reprezentace" "reprezentacemi něčeho", tj. téže věci, není jejich vztah k entitě od nich odlišné, nýbrž jejich vztah navzájem.

Tato Ayerova [1936, s. 24 n] úvaha instruktivně shrnuje jádro Fregova a Quinova pohledu na věc, kdy předmět není v jistém smyslu *nic jiného* nežli totalita reprezentací (jak poněkud svévolně, ale v souladu s vysvětlením podaným v dalším oddílu, překládám Ayerovo "appearance"), určená příslušnou relací rovnosti. Stejně tak nemá genitiv

reprezentace *něčeho*

jiný úkol, nežli odkaz k výrazům, které označují 'tentýž předmět', tj. fungují jako jeho alternativní pojmenování. Tento radikálně transcendentální tah je věrohodný samozřejmě jen potud, vysvětlíme-li v dalším textu roli identity v celém procesu, tj. především na základě čeho byla mezi nějakými výrazy stanovena a co toto stanovení znamená.

4.2 Co je identita?

Tvrzení identity $M = N$ se Frege věnoval již ve své *Begriffsschrift* [1879, § 8], kdy dospěl k závěru, že se v něm zjevně nemůže jednat o záležitost objektovou, tj. vyjádření toho, že ‘dva předměty M a N jsou stejné, tedy jeden’, ale tvrzení metajazykové, vyjadřující skutečnost, že

> dvě jména M a N označují jeden a tentýž předmět.

Podle Frega tak v kontextu identity jméno neodkazuje mimo jazyk, směrem k označovanému předmětu, jako ve větě $P(N)$, vyjadřující, že “předmět N má vlastnost P”, ale samo k sobě, a jazyk s rovností je tedy denotačně víceznačný. To představuje pro transparentnost projektu umělého písma velkou nepříjemnost.

Tváří v tvář tomu, že se v případě identity jedná o relaci nehomogenní se zbylým diskurzem, vyvstává však otázka, zda je její přítomnost v uměle (re)konstruovaném jazyce vůbec nutná. V tomto duchu se nese i alternativní návrh Wittgensteinův, jenž v *Tractatu* [1922, § 5.53] požaduje zachytit odlišnost významu odlišnými jmény a stejnost stejnými, v důsledku čehož jsou obraty typu $M = N$ vyloučeny jako nesmyslné, neboť [1922, § 5.5303]

> říci o *dvou* předmětech, že jsou identické, je nesmysl, a říci to o *jednom* neříká vůbec nic.

Tím se ovšem, alespoň podle Fregových standardů, zdá být s vaničkou vylito i dítě, protože právě identita představuje způsob, jak dát korespondenční teorii *Tractatu*, tj. vztahu jazyka a světa, jiný než metafyzický význam. Adekvátní řešení základního problému přitom vypadá takto:

V ‘přirozeném jazyce’ nejprve skutečně výrazem pro rovnost nedisponujeme a vztah výrazu M a jeho významu je dán nejprve tím, že užíváme jistou třídu výrazů stejně jako M, tj. *v nějakém ohledu* mezi nimi navzájem a výrazem M nerozlišujeme. Rozdíl jména a předmětu je tedy primárně artikulován jako rozdíl výrazu a jeho použití, jak to také odpovídá nauce pozdního Wittgensteina. Jednotlivé výrazy, reprezentace, jsou přitom *odlišné* z definice. Reprezentacemi *téhož* je dělá *stejné* použití, tedy implicitně-pragmatické důvody. V krajním případě stojí každý výraz sám za sebe, tj. má své zcela vlastní, jedinečné použití, např. ve větách jako

> Petr měl na mysli (napsal na tabuli, vyslovil) výraz M.

To je zjevně, již pro indefinitní množství potenciálních reprezentací, značně nepraktické. Skutečný svět, resp. světy předmětů a vět, které o nich vypovídají, vzniká, resp. vznikají právě zužitkováním *ohledů*, na jejichž pozadí není důvodu mezi nějakými reprezentacemi rozlišovat, čehož východiskem, resp. výsledkem je nějaký užší problémový a jazykový kontext. — Na základní škole takto třeba rozlišujeme různé výskyty (*token*) číslovky na stránce učebnice a číslovku samotnou (typ), číslovky různých notací (římské a arabské) a přirozené číslo, jež vyjadřují, dvojice přirozených čísel a jim společné číslo racionální atd. To, co se případ od případu mění, přitom evidentně nejsou konvenčně zvolené znaky, ale jejich použití a kontext, v němž bylo možné, výhodné, resp. potřebné mezi těmito rozlišovat nebo nerozlišovat. K tomu se záhy vrátíme v problematice abstrakce.

Použití výrazu v rámci nějakého kontextu je přitom něco, co lze z definice vyjádřit pouze reflexí na tento diskurz, tj. prostředky metajazyka. Jedním z nich je právě identita $M = N$, vycházející z faktické ekvivalence dvou výrazů $M \sim N$ v nějakém širším (původním) kontextu a z jeho restrikce na ty věty F, pro něž platí

jestliže $F(M)$ a $M \sim N$, pak $F(N)$.

Tyto věty (případně predikáty či větné formy) se nazývají INVARIANTNÍ vůči ekvivalenci $\sim$, přičemž invariancí je zde míněna substituovatelnost *salva veritate*. Pravdivost věty, resp. její zachovávání je tak zjevným kritériem stejného použití výrazů jazyka.

Z tohoto pohledu, proslaveného zejména Tugendhatovým [1970] čtením Fregovy základní sémantické distinkce, se pak význam výrazu jeví jako jeho PRAVDIVOSTNÍ POTENCIÁL, což je výsledek pročísnutí daného diskurzu hřebenem zvolené ekvivalence. Tak totiž dospějeme k diskurzu vůči této ekvivalenci invariantních forem, v němž nejenže z ekvivalence výrazů plyne jejich substituovatelnost *salva veritate*, což je triviální, ale i naopak, ze substituovatelnosti plyne ekvivalence, což je důsledkem faktu, že forma $x \sim y$ je vůči ekvivalenci $\sim$ sama invariantní. Díky tomu lze také přejít od ekvivalence k rovnosti ve smyslu její tradiční definice LEIBNIZOVÝM PRINCIPEM

LP $\quad M = N \rightleftharpoons F(M) \leftrightarrow F(N)$ pro každé F.

Pointa našeho, resp. Tugendhatova čtení identity nyní spočívá v tom, že LP nechápeme ontologicky jako tzv. princip nerozlišitelnosti stejného, tj. tvrzení rovnosti předmětů týchž vlastností, neboť to právě evokuje nesmyslné porovnávání dvou (různých) identických (stejných) předmětů, ale metajazykovou artikulaci toho, že v jistém kontextu není nutné z hlediska pravdivosti uvažovaných vět rozlišovat mezi výrazem M a výrazem N. Tomu odpovídá zvláště sugestivně Hegelova charakterizace rovnosti jako ‘popření nerovnosti’, totiž rozhodnutí zanedbat jistá možná rozlišení jako irelevantní.[3] Leibnizův princip se v tomto čtení ukazuje být

[3] Srov. Stekelerův komentář [1992a, s. 140 nn, 245 nn].

v pravém slova smyslu sémanticky konstitutivní, totiž určující, kdy mají dvě jména tentýž význam a jaký význam (třída ekvivalentních jmen) to vlastně je. Konkrétní případy konstitucí předmětných oborů se liší právě výchozí ekvivalencí.

Stejně jako Kant [1781/1787, B 1] tvrdíme i my v lingvistické verzi jeho transcendentalismu, že

> všechno naše poznání začíná [smyslovou] zkušeností,

neboť jazyk sám (ve formě psané i mluvené) je záležitostí fenomenální. Počátkem poznání je proto sféra všech možných jevových reprezentací, potenciálních rozlišení, u Quina [1960, § 17] nazývaná prelingvistickým prostorem kvalit (*prelinguistic quality space*). K světu a světům ve vlastním slova smyslu se dostáváme potlačením jistých rozlišení, tj. uskupováním smyslových kvalit do ekvivalentních celků, k němuž dochází vždy na bázi nějaké intersubjektivní reflexe, tudíž v jazyce.

Svět tedy přesto, že začíná ve sféře smyslových počitků, je vlastně vždy již z definice světem abstraktním, výsledkem jistých nerozlišení, odhlédnutí od možných rozdílů. Tuto abstrakci či non-distinkci, označování různého stejným či, Platónovou [Phil., 15b] dikcí, odkrývání ‘jednoho v mnohém’ lze také považovat za základní funkci jazyka, jinými slovy: skutečnost je definována jazykem a jako taková vždy abstraktní. — Z hlediska dějin filosofie je přitom významné, že Platónovu známou kritiku lpění na smyslech jakožto znaku průměrného (nefilosofického) člověka a jeho výzvu, abychom obraceli zrak k pravé skutečnosti věcí abstraktních (idejí), nečteme jakožto (laciné) životní moudro (v duchu neúspěšné, leč stále probíhající výchovy gymnaziální mládeže kvalitní českou prózou), ale především jako kritiku filosofických trendů, které konstituci světa trivializují (jako empirismus a ‘vulgární’ platonismus) nebo interpretují neudržitelným subjektivisticko-mentalistickým způsobem (jako solipsismus a fenomenologie.) Tento příklad je o to důležitější, že si byl Platón dobře vědom toho, jakou roli při poznání (dokonalých) idejí hrají jejich (nedokonalé) reprezentace, a může být proto právem považován za prvního teoretika významu.

Naší tezi o abstraktnosti světa, tj. jeho závislosti na prostředcích našeho jazyka, vyjadřuje ve stručnosti Quine [1981, s. 102] svým často citovaným, avšak ne vždy pochopeným mottem

> není entity bez identity.

Identita pojatá jakožto prostředník vztahu reprezentace k reprezentovanému transcenduje stejně jako tento vztah sám expresivní možnosti vztažného diskurzu. Výraz denotuje, odkazuje mimo sebe či vyjadřuje nějaký obsah primárně svým (intersubjektivním) použitím, nikoli tím, že si to sám nebo s něčí pomocí (subjektu) zajistí, např. stipulací nechť má výraz M význam g.

Takovéto přiřazení je samozřejmě možné, předpokládá ale, že je již k dispozici diskurz, kde má každý z výrazů uvedené věty, s možnou výjimkou výrazu M, význam. Z hlediska problému 'osmyslení' slov je tedy uvedená stipulace druhotná, tj. nemůže hrát fundamentální roli, jak to ukazují právě sofistikované úvahy Quinovy.

Na druhou stranu je to právě *možnost* takovýchto stipulací nad nějakou stávající jazykovou praxí s (relativně) stabilními rysy, co ospravedlňuje rozšíření prostředků jazyka o predikáty jako "x je pravdivý", "x je význam y" či právě "$x = y$". To, že může mít jejich zařazení po bok 'obvyklých' predikátů dalekosáhlé následky, lze v jistém smyslu čekat. Nás ovšem nejprve zajímají důsledky pozitivní, které vysvětlují, proč je rovnost jedním z nejtypičtějších, ba ustanovujících aritmetických symbolů, a proč ji tak Frege, při vědomí všech problémů, které to obnáší, přesto zařazuje do systému své 'aritmetické logiky' jako elementární znak. — Frege přitom ve svém článku *Über Sinn und Bedeutung* [1892*b*] vyřešil problém denotační víceznačnosti spojený s rovností tak, že sice všechny výrazy pojmového písma nechal denotovat či ZNAMENAT jeden specifický VÝZNAM, ať již se vyskytují po stranách identity nebo jinde, připustil ale, že se výrazy mohou lišit svým SMYSLEM neboli ZPŮSOBEM DANOSTI, který VYJADŘUJÍ. Abych uvedl příklad, pak tatáž budova bývalého Federálního shromáždění je nám dána různými způsoby, totiž jako "stavba napravo od Státní opery" nebo jako "stavba nalevo od Národního muzea" a příslušná rovnost, ač se od rovnosti "budova Federálního shromáždění = budova Federálního shromáždění" významem svým ani svých konstituent neliší, má přece jen odlišný smysl.

Z dosud řečeného by také mělo být jasné, že oproti běžnému čtení nejde Fregovi při řeči o smyslu a významu o (absolutní) klasifikaci dvou druhů entit, ale právě o (relativní) rozdíl obvyklého užití výrazu a reflexe na ně, jak jej v tom nejtriviálnějším případě známe z distinkce USE vs. MENTION ve větách

potkan má blechy vs. potkan má šest písmen.

Aplikací citačních uvozovek v druhém případě po vzoru

"potkan" má šest písmen

se jenom snažíme *lokálně* upozornit na atypické užití daného slova ve větě, která reflektuje jeho užití obvyklé, v tomto případě co do jeho typografické stránky.

Absolutní čtení Fregových distinkcí, za něž je historicky zodpovědný Carnap [1947], vedlo ke vzniku 'jemnějších', tzv. intenzionálních logik, živících iluzi, že lze Fregovu původní logiku vylepšit do podoby, v níž se stane skutečnou logikou přirozeného jazyka. Carnap přitom pouze 'upřesnil' Fregův pojem smyslu tak, že jej uchopil jako význam distribuovaný mezi možné světy, tedy funkci z množiny možných světů do množiny významů, Carnapem nazývaných EXTENZEMI. Tato funkce neboli INTENZE nemá nicméně pro svůj absolutní, ontologický charakter s Fregovým smyslem nic společného, vlastně se jedná o speciální případ Fregova významu coby pravdivostního potenciálu výrazů v nepřímých (intenzionálních) kontextech, v nichž vede zaměnitelnost *salva veritate* k jemnějším ekvivalencím (a tedy i jiným předmětům) nežli v kontextech, k nimž se tyto vztahují jakožto k přímým, což je opět vztah relativní ("Petr nevěří, že je Jitřenka Večernice", "Karel zapomněl, že Petr nevěří, že je Jitřenka Večernice" atd.).

Prezentace relativního, pomocného charakteru výsledků filosofické analýzy v absolutních, ontologických termínech je tím, co dělá filosofii špatnou filosofií, tj. metafyzikou, hrající si na vědu o zcela speciálním, ba čistším typu jsoucen. Touto chorobou jsou zcela přirozeně, i když ironicky, nejvíce postiženi bojovníci za exaktnost, přísnost a vědeckost filosofické metody, jednoduše proto, že nepochopili rozdíly žánrů. Ponoření do svých rituálů si také dávno nevšimli, že se stali do značné míry nesrozumitelní, tedy nepřesní a nevědečtí, chápeme-li vědeckost v jejím instrumentálním, služebném smyslu, nikoli jako cestu k abstraktní, a proto zbytečné pravdě. Přínos Jamesova pragmatismu lze měřit právě tím, jak jasně dokázal tento rozdíl opsat, např. když na podporu svých tezí cituje [1907, přednáška 2] W. S. Franklina, jenž říká:

> Domnívám se, že nejchuravějším pojetím fyziky, i když ji student celou ovládá, je představa, že se jedná o 'vědu o hmotě, molekulách a éteru'. A domnívám se, že tím nejzdravějším pojetím, i když je student nepochopí zcela, je fyzika jako věda o způsobech, jakým tělesa bereme a strkáme do nich.

Základní teze Wittgensteinova *Tractatu*, totiž že větou lze mnohé říci (její obsah), mnohé však, co je pro ono řečené určující, zůstává nevysloveno a v principu nevyslovitelné (její forma), je hluboká a v podstatě kopíruje východisko Kantovy kritické filosofie, podle níž se naše poznání zakládá na konstitutivních presupozicích, které je teprve dělají možným, a jsou tedy vůči němu nutné, neboli *a priori*. Oběma filosofům je bohužel společný také jakýsi absolutní nárok zmíněného rozlišení, který jim mimo jiné neumožňuje adekvátně klasifikovat ani teze jejich filosofie samotné. Podle raného Wittgensteina tak musí být stejně jako všechny výroky o jazyce a jeho vztahu ke světu nesmyslná i tvrzení identity. To je ale zjevně přehnané již proto, že o jazyce a jeho použití se smysluplně bavit lze, jenom si je třeba být vědom toho, že se pak mění jak použití, tak forma výrazů jazyka, v němž tak činíme. Právě neopatrným sloučením vět původního diskurzu a meta-diskurzu můžeme totiž dospět k objevu speciálních jsoucen a čistých pravd, které — na rozdíl od podniku filosofické reflexe — nemají žádné pragmatické zakotvení, a v tomto smyslu neexistují, resp. neartikulují *žádné* poznání.

Jelikož v rámci jazykové praxe lze v určité fázi jejího osvojení a dalšího rozvoje těžko ostře odlišit, která část je původní, která odvozená, případně kde se překrývají dva zprvu zcela nezávislé fragmenty, patří identita spolu s dalšími metajazykovými výrazy k výbavě emancipovaného uživatele jazyka, stejně jako patří lékárnička k povinné výbavě osobního automobilu, ačkoli nemá s jeho původní funkcí nic společného. Tento příměr je užitečný již proto, že připomíná Wittgensteinem [1953, § 133, 255] raženou tezi o zvláštní, terapeutické roli filosofie, která nemá tak jako další vědy primárně vlastní objekt, a nemůže být již proto stejným způsobem smysluplná, stará se však o ošetřování konfliktů, k nimž došlo při jejich původně bezproblémovém chodu, je tedy smysluplná až v tomto nepřímém smyslu. Jelikož o logice v širším významu slova lze v jádru říci to samé, je tím snad alespoň zčásti ospravedlněno zařazení symbolu rovnosti mezi její základní výrazivo.

V pokusu o zdůvodnění užití rovnosti v matematice se nejprve můžeme opřít o dříve cíleně potlačovanou odlišnost mezi matematikou a jinými diskurzy, totiž pevnější vazbu k čistě symbolickému, konvenčnímu neboli o všechno to, co jí vynáší název disciplíny formální, případně abstraktní. Poskytují-li v empirickém diskurzu smysly zkušenému uživateli jazyka přece jen dostatečný prostor pro to, aby mohl zařadit výrazy mluvčího do kontextu situace jeho promluvy, a odhadnout tak jejich zamýšlený význam, je matematice tento druh opory v takovém rozsahu odepřen. Proto je také třeba být od počátku v jejích větách a definicích co neexplicitnější, což jí pak odvozeně vynáší titul disciplíny exaktní, v níž není prostor pro dvojznačnost, závislost na mluvčím a okolnostech jeho projevu, disciplíny, která je proto navýsost objektivní a věcná. — Že se tak zpravidla zapřahá vůz před koně, je jedna věc, podstatné je, že se věda, jíž chybí většina obvyklých pomocných bodů určení významu (Davidson [1991] zde hovoří o jeho triangulaci), jmenovitě *deixe*, neobejde bez zabudované možnosti explicitně vyjádřit, co bylo či má být předmětem řeči.

Ponechme zatím stranou, že aritmetika v jistém smyslu žije právě z řešení rovnic a převádění komplexních výrazů do standardního (identického) tvaru kanonických reprezentací, eliminace rovnosti by se tedy rovnala eliminaci aritmetiky samé. Wittgenstein ve svém původním monolingvistickém projektu navrhuje vytěsnit rovnost z jazyka (o světě) právě proto, že aritmetiku spolu s logikou považuje za vědu beze smyslu, což civilně řečeno znamená, že mají k (empirickému) světu jiný, ne tak přímý vztah jako vědy ostatní, tj. netvoří jeho obsah, ale formu. To je opět ve shodě s Kantovou představou matematiky jako *apriori* fyziky, tj. kánonem jejích početních a měřicích metod.

Vedle Fregova významu, jejž výrazy *znamenají*, a smyslu, jejž *vyjadřují*, přepracovaného Wittgensteinem do rozdílu mezi tím, co věta *říká* a co *ukazuje*, máme tedy nyní před sebou také Brandomův rozdíl *explicitního* a *implicitního*. Implicitní lze podle Brandoma explikovat ("make it explicit") právě pomocí logických výrazů, typicky *implikace* v případě implicitních úsudků a *identity* pro případ použití výrazů v souladu s Leibnizovým principem, tj. při jejich zaměnitelnosti *salva veritate*. Jaký vliv má tato explikace na expresivní možnosti Fregova systému, budeme sledovat v následujícím oddíle, v jistém smyslu ale i ve zbytku celé kapitoly a v kapitole následující, neboť bez identity by se neuskutečnil vzestup logicismu ani jeho následný pád. Stále se přitom budeme pohybovat mezi výhodami a úskalím možností explicitně říci něco, co je jinde jenom implicitně předpokládáno, a *vice versa*.

4.3 Logika s rovností

Výklad tradičních rozšíření predikátové logiky, tj. v jádru technické zkoumání jejich interních vlastností, nám brzy dá poznat, že identita není v žádném případě relací běžnou, ale že se — vzhledem k podstatnému výrazovému obohacení — jedná o jakousi 'zbraň z jiné dimenze'. Začneme zdánlivě nesouvisející, leč standardní extenzí jazyka PL o další typ mimologických symbolů, totiž o tzv. FUNKTOROVÉ KONSTANTY $f_1^n, f_2^n, \ldots$ pro každou aritu $n > 0$. Někdy bývá zvykem uvažovat i aritu $n = 0$, která pak odpovídá konstantám jmenným coby nulárním funktorům, tj. funktorům bez argumentů. Obvykle se opět namísto indexovaných výrazů užívá sada $f, g, \ldots$. K systému predikátové logiky 1. řádu s funktory budeme referovat jako k PL_f. Podstatně se přitom změní definice termu, která nabude podobně jako definice formule následujícího induktivního tvaru:

> TERMEM PL_f je buďto (i) jmenná konstanta nebo proměnná, jež nazýváme TERMY ELEMENTÁRNÍMI, nebo (ii) TERM SLOŽENÝ, což je výraz vzniklý ze zřetězení termů $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a funktorové konstanty f^n do tvaru $f^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Definici formule, rozlišení otevřeného a uzavřeného termu včetně podmínky na jejich substituovatelnost jsme již dříve zavedli tak, aby zůstaly v principu nezměněny. Můžeme tedy přikročit k sémantice PL_f.

Podle očekávání jsou funktorům přiřazovány funkce na dané doméně, k definici interpretace jazyka L tedy pouze přiřadíme klauzuli, podle níž

> $\mathcal{I}$ přiřazuje každé n-ární funktorové konstantě z L n-argumentovou (totální) funkci, tj. $\mathcal{I}(f^n) : (\dot{\mathcal{I}})^n \to \dot{\mathcal{I}}$.

Na základě toho lze snadno v souladu s definicí množiny termů T_L jazyka L rozšířit i pojem jejich denotace:

> Denotací termů jazyka L při dané interpretaci $\mathcal{I}$ a valuaci $\mathcal{V}$ je funkce $\mathcal{IV}$ taková, že (i) $\mathcal{IV}(c) = \mathcal{I}(c)$ pro každou jmennou konstantu c z T_L a $\mathcal{IV}(x) = \mathcal{V}(x)$ pro každou proměnnou x, (ii) jsou-li $s_1, \ldots, s_n$ termy z T_L, pro něž je již denotace definována, a f^n funktorová konstanta z L, pak $\mathcal{IV}(f^n(s_1, \ldots, s_n)) = \mathcal{I}(f^n)(\mathcal{IV}(s_1), \ldots, \mathcal{IV}(s_n))$.

Tarského definice pravdy zůstává nezměněna a rovněž metodu stromů není obtížné upravit tak, abychom místo množiny jmen, z nichž je později konstruován příslušný model, uvažovali množinu všech uzavřených termů slovníku daných formulí. Věta o úplnosti zůstává také v platnosti.

Samotné rozšíření predikátové logiky o funktory nemusí zprvu vypadat příliš užitečně, jeho teoretický význam je ale nesporný. Je např. bází tzv. skolemizace neboli eliminace existenčních kvantifikátorů z formulí PL. Tato eliminace spočívá v zachycení závislosti proměnných, jak byla nejprve vyjádřena kvantifikátory (vzpomeňme opět případ ϵ-δ-definice spojitosti), pomocí funktorů, kdy např. z formule

$$(\forall x)(\exists y)\varphi(x, y),$$

činící hledané y závislé na x, utvoříme formuli

$$(\forall x)\varphi(x, f(x)),$$

kde je totéž vyjádřeno funktorem, a obě formule jsou tedy (v jistém smyslu) ekvivalentní, za předpokladu, že je f zcela nový symbol. Uvědomíme-li si, že se prvního existenčního kvantifikátoru $(\exists x)\psi(x)$ snadno zbavíme jeho nahrazením novou konstantou c do podoby $\psi(c)$, máme zde hrubý nárys toho, jak lze každou formuli transformovat do tzv. Skolemovy (prenexní) normální formy, vysvětlíme-li ovšem předem pojem prenexní normální formy a dokážeme-li, že ke každé formuli existuje ekvivalentní formule v tomto tvaru, což znamená formule tvořená nejprve blokem (obecných a existenčních) kvantifikátorů, po němž následuje tělo formule, v němž se žádné kvantifikátory nevyskytují. Důkaz je snadným důsledkem několika základních metatvrzení, popisujících distribuci kvantifikátorů vzhledem k logickým spojkám.[4] Kouzlo formule ve Skolemově normální formě spočívá mj. v tom, že je díky vlastnostem uzávěru ekvivalentní formuli bez kvantifikátorů, neboť z definice sestává pouze z bloku obecných kvantifikátorů následovaných bází, v níž žádné kvantifikátory nejsou.

[4] Věty o normálních formách je třeba formulovat velmi opatrně, nepoučený čtenář by měl tedy detaily konzultovat se standardní literaturou, např. Monk [1976, s. 212 nn].

Nyní konečně zaveďme predikátovou logiku prvního řádu s rovností, značenou jako $\mathsf{PL}_=$, a to (i) rozšířením jazyka PL o logický symbol $=$, (ii) rozšířením definice formule o klauzuli:

jsou-li s, t termy, pak je $s = t$ formule

a (iii) doplněním Tarského definice o podmínku:

$$\mathcal{IV} \vDash s = t \rightleftharpoons \mathcal{IV}(s) = \mathcal{IV}(t).$$

Z kontextu by mělo být vždy zřejmé, kdy používáme symbol $=$ jako výraz jazyka objektového (formálního) a kdy jako výraz metajazyka. Porovnání expresivní síly jednotlivých systémů odviňme nyní od následujícího pozorování. Kvantifikátory v jejich aplikaci na predikát se nějakým způsobem vyjadřují k počtu (kvantu) předmětů, které pod něj spadají. Tak $(\exists x)P(x)$ např. říká, že pod P spadá *alespoň jeden* předmět, $\neg(\exists x)Q(x)$ zase, že pod Q nespadá *žádný*. Vhodnou kombinací těchto výrazových prostředků lze v rámci PL zajistit, aby měl model určitých formulí nejméně nějaký počet n předmětů, tj. omezit jeho velikost zdola. Pro $n = 3$ toho např. dosáhneme jednoduchou permutací dvou predikátových konstant jako

$$P(c) \wedge Q(c) \wedge P(d) \wedge \neg Q(d) \wedge \neg P(e) \wedge \neg Q(e).$$

Počet mimologických výrazů tu lze samozřejmě dále snížit existenční kvantifikací, případně užitím predikátových konstant vyšší arity, podstatné ale je, že podobná formule existuje pro libovolné n konečné. Pro n nekonečné lze vzít buďto nekonečnou množinu takovýchto formulí, ale i formuli jedinou, např. vyjadřující, že je nějaká binární relace R totálně definovaná, tj. platí $(\forall x)(\exists y)R(x, y)$, a k tomu antireflexivní a tranzitivní. Tatáž expresivní možnost se samozřejmě přenáší i na PL_f, v obou systémech nicméně platí, že není možné omezit univerzum shora, neboli:

Jestliže má množina S formulí PL_f nějaký model, pak má i model libovolné větší mohutnosti.

Tomuto tvrzení se říká (ZOBECNĚNÝ) LÖWENHEIMŮV-SKOLEMŮV TEORÉM SMĚREM NAHORU, což naznačuje, že existuje také podobné tvrzení směrem dolů, které se ovšem týká až mohutností nekonečných. Důvod, proč teorém směrem nahoru platí, není obtížné nahlédnout: Sémantický strom, na jehož základě byl z konstant otevřené větve konstruován model formulí, které se na ní vyskytují, byl navržen tak, aby byl tento model (při zachování schematičnosti dané metody) pokud možno minimální, tj. zpravidla již nejsme s to najít model menší. Žádné pravidlo nám ale *v principu*, tj. s ohledem na svoji sémantickou korektnost, nezabraňovalo, abychom místo jedné konstanty, na niž bylo aplikováno, vzali konstanty dvě nebo více, jen když se v určitých případech jednalo o konstanty zcela nové a když jsme nějak zajistili řádný chod celého procesu, tedy zabránili tomu, aby se zacyklil v případě, kdy to nebylo nutné.

Není bez zajímavosti, že obvyklý důkaz úplnosti přes maximálně bezesporné množiny formulí konstruuje automaticky modely (spočetně) nekonečné, a má tedy rovnou vyřešeno rozšíření konečných případů. Rozšíření na vyšší nekonečné mohutnosti lze dosáhnout pomocí věty o kompaktnosti. Tělo důkazu Löwenheimova-Skolemova teorému směrem nahoru pak vypadá takto:

Důkaz: Máme třídu formulí S splnitelnou nekonečným modelem. Vezmeme třídu C zcela nových konstant, která má požadovanou vyšší mohutnost, a uvažujeme nějakou třídu T formulí v jazyce disjunktním s jazykem formulí S, která konstanty z C odlišuje jakožto jména různých předmětů. To lze snadno zařídit výše předvedenou permutací nad dostatečným množstvím predikátových konstant. Není obtížné ukázat, že každá konečná podmnožina teorie $S \cup T$ má model, totiž onen předpokládaný nekonečný model teorie S s vhodnou interpretací konečně mnoha formulí z T, resp. konstant z C. Podle věty o kompaktnosti musí mít tedy model i $S \cup T$, a tím pádem i S. Tento model je s ohledem na konstrukci T požadované vyšší mohutnosti. $\square$

Disponujeme-li v jazyce rovností, můžeme konečnou velikost shora omezit, a v důsledku tedy fixovat modely jediné konečné kardinality n. Snadno zobecnitelné schéma pro $n = 3$ vypadá takto:

$$(\exists x_1, x_2, x_3)[x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \\ (\forall y)(y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3)].$$

Uvedená formule je sestavena v čistě logickém slovníku a my ji, resp. jakoukoli formuli (v daném jazyce) splňující daný účel, budeme značit jako $\varphi_{=3}$. Obecně takto dospějeme k formulím $\varphi_{=n}$, $\varphi_{<n}$, $\varphi_{\leq n}$, $\varphi_{>n}$ a $\varphi_{\geq n}$, přičemž příklad formule typu $\varphi_{\geq 3}$ jsme již uvedli výše. Löwenheimův-Skolemův teorém v $\mathsf{PL}_=$ platí s následujícím omezením:

> Má-li množina S formulí $\mathsf{PL}_=$ nějaký nekonečný model, pak má i model libovolné větší mohutnosti.

V logice s rovností jsme tedy schopni zachytit přesně jenom kardinality konečné, vyšší nám unikají.[5] Z daného omezení nicméně plyne, že v PL nelze rovnost definovat, druhý systém proto musí být vlastním rozšířením prvního. Vztah obou systémů k PL_f pouze osvětlíme prostřednictvím krátké úvahy.

[5] V důkazu pomocí kompaktnosti se nyní přidávaná množina značně zjednodušuje na $T = \{c \neq d \mid c, d \in C\}$.

PL_f vzniklo z PL obohacením o výrazy označující (totální) funkce, a funkce, jak víme, jsou relace s dodatečným požadavkem jednoznačnosti. Skutečnost, že se např. nějaká vlastnost F dědí z otce na dítě, lze vyjádřit jako

$$(\forall x)[F(o(x)) \to F(x)]$$

díky tomu, že se výraz "otec" chová za obvyklých okolností funkcionálně, tj. přiřazuje každému relevantnímu argumentu právě jeden předmět (biologického otce), a lze ho proto adekvátně formalizovat funktorovou konstantou o. Z téhož důvodu nelze stejným způsobem formalizovat výraz "syn", neboť doplněním jména za eventuální proměnnou ve výrazu "syn (osoby) x" nedostaneme v obecném případě opět jméno, ale výraz, jemuž nemusí odpovídat nic (v případě, že je daná osoba bezdětná, nebo má jenom dcery) nebo více předmětů (v případě, že má více synů). V analýze vět, kde se hovoří o dědění vlastnosti F z rodiče na syna, musíme psát cosi jako

$$(\forall x, y)[F(y) \wedge S(x, y) \to F(x)],$$

tj. operovat s relací "x je syn y". Totéž jsme mohli samozřejmě učinit i výše, tj. formalizovat výraz "otec" obecněji pomocí predikátové, nikoli funktorové konstanty (jak to Fregova flexibilní syntax od počátku vědomě umožňuje) a psát $(\forall x, y)[F(x) \wedge O(x, y) \to F(y)]$, ovšem při vědomí toho, že jsme tím ztratili jistou část dříve zachycené informace, totiž jednoznačného vztahu proměnné y k proměnné x.

Obohatíme-li nejprve jazyk o možnost vyjádření jedinečnosti zobecněným kvantifikátorem $(\exists! x)$, jenž ve formulích

$$(\exists! x)P(x) \qquad\qquad (\forall x)(\exists! y)R(x, y)$$

vyjadřuje spadání *právě* jednoho předmětu pod predikát P, resp. funkcionalitu relace R, jsme zjevně s to omezit univerzum shora, např. formulí

$$(\exists! x)P(x) \wedge (\exists! x)\neg P(x)$$

coby příkladem formule typu $\varphi_{=2}$. V $\mathsf{PL}_=$ je ovšem takovýto kvantifikátor snadno definovatelný, totiž jako

$$(\exists! x)P(x) \rightleftharpoons (\exists x)[P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \to x = y)],$$

kde si na místě P můžeme představit schéma. Z toho lze okamžitě vyvodit dva závěry: (1) Logika PL_f je vlastním rozšířením PL, neboť v té jedinečnost vyjádřit nelze, což znamená, že funktory nejsou eliminovatelné ve prospěch predikátů. (2) Jelikož v $\mathsf{PL}_=$ naopak jedinečnost vyjádřit lze, a funktory tudíž z jazyka eliminovatelné jsou, představuje $\mathsf{PL}_=$ rozšíření PL_f a důvod, proč v jazyce s rovností není třeba uvažovat funktorové, ba dokonce ani jmenné konstanty.[6] Do jazyka jsou ale obvykle tak jako tak přidávány pro větší pohodlí. Že se u $\mathsf{PL}_=$ jedná o rozšíření vlastní, plyne opět z toho, že PL_f neumožňuje omezit modely shora. S ohledem na expresivní sílu tedy máme vztahy

$$\mathsf{PL} \subset \mathsf{PL}_f \subset \mathsf{PL}_=.$$

Co se týče ostatních probraných metalogických výsledků, zůstávají — s výjimkou zmíněné reformulace věty Löwenheimovy-Skolemovy — zachovány. Především je úplně kalkulizovatelná $\mathsf{PL}_=$, rozšíříme-li kalkul $\mathfrak{B}_\forall$ o tzv. AXIOMY ROVNOSTI:

R1 $(\forall x)(x = x)$,

R2 $(\forall x_1, \ldots, x_n)(\forall y_1, \ldots, y_n)[x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow f^n(x_1, \ldots, x_n) = f^n(y_1, \ldots, y_n)]$,

R3 $(\forall x_1, \ldots, x_n)(\forall y_1, \ldots, y_n)[x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (P^n(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow P^n(y_1, \ldots, y_n))]$.

V případě (R2), (R3) se jedná opět o schémata, reprezentující příslušný axiom pro každou n-ární funktorovou, resp. predikátovou konstantu f^n, resp. P^n. Tento axiomatický systém značme $\mathfrak{B}_\forall^=$.

Ve Fregově původní axiomatizaci z *Begriffsschrift* se vyskytují pouze axiomy (R1) a (R2), neboť Fregův pojem funkce je nadřazený pojmu vlastnosti, resp. relace, jež jsou jednoduše funkcemi do pravdivostních hodnot. Ty mají jakožto předměty univerza (každé interpretace) buďto svá vlastní pojmenování (pravda, nepravda), nebo k nim lze referovat pomocí vět, což znamená, že spadání předmětu c pod pojem P lze explicitně vyjádřit jako

$$P(c) = \varphi \vee \neg\varphi.$$

Rovnost tedy přejímá také úlohu ekvivalence (bikondicionálu), což vysvětluje zbytnost axiomu (R3). Ve skutečnosti jsou ale všechny axiomy rovnosti zbytečné, neboť Fregův systém je tak silný, že dovoluje zavést identitu jako odvozený symbol. Důvodem je zužitkování kvantifikace vyšších řádů, tj. přes predikátové symboly. S 'exponenciálním' nárůstem vyjadřovacích možností, které s sebou tento krok nese, ovšem roste stejnou měrou i množství filosofických a technických problémů, jejichž řešení se při něm předpokládá.

[6] Eliminace funktorových konstant z formulí $\mathsf{PL}_=$ při zachování výrazových možností je standardní kapitolou logických kurzů. Detaily podává např. Monk [1976, s. 206 nn]. Tamtéž je pod hlavičkou 'neobvyklé logiky' krátce studována PL, tj. logika bez rovnosti.

4.4 Co je existence?

Výrazy jazyka jsou zprvu neživé artefakty, stejně jako dlažební kostky, mlýnky na kávu a umělecká díla. Význam jim dává až jejich použití, teprve skrze něj se stávají výrazy specifických kategorií, např. jmény, predikáty či spojkami.

Řekli jsme, že jméno v nejobecnějším, totiž logickém slova smyslu dělají z výrazu kritéria rovnosti: není entity bez identity, není jména bez předmětu, jenž pojmenovává. Náš výklad ukazuje, že je tento vztah nutný oběma směry, tj. není ani předmětu beze jména (reprezentace), neboť předmět, jak jsme zmínili, je vlastně jenom jméno plus odkaz ke jménům substitučně ekvivalentním. Mohlo by nás proto udivit, že ve standardním výkladu syntaxe a sémantiky PL, jako byl i ten náš z předchozí kapitoly, je právě onen druhý směr rozvolněn, když uvažujeme interpretace, v nichž některým předmětům neodpovídají výrazy (objektového) jazyka. To je z velké části poplatné výše zmíněným empirickým představám o roli jazyka v poznání světa, jež přehlížejí jeho konstitutivní, tedy nearbitrární charakter. Podíváme-li se ale na celou věc interpretace formálního jazyka liberálně, vidíme, že se z našeho transcendentálně-analytického pohledu zase nic moc nepřijatelného neděje, pouze se mírně komplikuje původní hra, když vedle jmen jako "c_1" či "Petr" pracujeme také s metajmény jako "$\mathcal{I}(c_1)$", "člověk Petr" či "$\mathcal{IV}(x)$".

Kvantifikace, kterou při této nyní již 'standardní' hře užíváme, je přitom tzv. KVANTIFIKACE OBJEKTOVÁ, vztahující se k dané množině objektů (metajmen), nikoli k vybrané množině jmen v užším slova smyslu (prvkům formálního jazyka). Bylo by proto chybou usoudit např. z platnosti formule $P(c)$ pro každé jméno c formálního jazyka na formuli $(\forall x)P(x)$ ve smyslu její platnosti pro všechny *objekty*, neboť tvrzení platí pouze pro všechny objekty v dané interpretaci *pojmenované*. Našemu základnímu náhledu, otevírajícímu cestu k pochopení principů předmětné konstituce, a proto přesahujícímu meze konkrétní jazykové hry, ovšem odpovídá KVANTIFIKACE SUBSTITUČNÍ, probíhající přes předem popsaná jména toho, z čeho se prostřednictvím příslušných kritérií identity teprve stanou předměty daného diskurzu.

Uvedli jsme přitom, že nejobecnější kritéria identity artikuluje Leibnizův princip, spojující ohodnocení vět daného diskurzu s jeho identitami aparátem substituce. Substituovatelnost výrazu je tím pádem zjevným předpokladem toho, aby mohl stát po straně rovnosti, a tedy reprezentovat předmět. Tento moment vnitrojazykové charakterizace vlastního jména vhodně ilustrují následující Stekelerova [2005, s. 147] slova:

> Věci jako takové [...] existují pouze v nějakém komplexním systému předmětné řeči a v souvislostech touto řečí organizovaných zkušeností a vysvětlení. Každá řeč o nějaké 'věci o sobě'

> [...] odkazuje přitom v podstatě pouze na formu předmětné řeči nebo, chcete-li, na abstraktní ohodnocení ‘předmětné proměnné’.

Substituovatelnost je takto spolu s identitou možné chápat jako dvě doplňující se interní určení vlastního jména, resp. vztahu mezi ním a označovaným předmětem. To zachycuje další slavné Quinovo [1953, s. 15] heslo:

> být znamená být hodnotou proměnné,

zvláště doplníme-li je do tvaru “být předmětem znamená být hodnotou předmětné proměnné”. Jeho původní obecná formulace má ovšem také svůj specifický význam, neboť směřuje ke klasickým problémům filosofie (jazyka), kdy se zdá, že (1) výrazy jako “současný francouzský král”, “Paegas”, “kulatý čtverec” nebo “nic”, které gramaticky odpovídají kategorii fregovských jmen, v jistém smyslu význam nemají, ale v nějakém jiném jej mít musí, jinak bychom je nemohli smysluplně používat, což lze zobecnit do tvrzení, že (2) všechny výrazy jazyka, jsou-li smysluplně používány, musí mít nějaký význam, a musí být tedy v nějakém smyslu jmény: “Napoleon” jménem historické osoby, “zelený” jménem barvy, “chytřejší” jménem binární relace apod.

Proti těmto postřehům nelze z deskriptivně-fenomenologického hlediska namítnout nic, tj. lze souhlasit s jejich tezí i antitezí, dokud ovšem nezačneme celý problém měřit otázkou vhodného inferenčního zpracování nějakého (výseku) přirozeného jazyka. V něm zákonitě musíme nějaké výrazy vyhodnotit jako sémanticky podobné, nějaké jako různé, totiž tak, abychom připustili vůbec nějaká inferenční schémata, a naopak, abychom jich nepřipustili příliš mnoho, a neztratili se tak v nekonečných vodách (možného) jazykového úzu. Jelikož je nyní v našem pojetí pokus o vysvětlení (výseku) jazyka jedinou možnou cestou k vysvětlení možnosti poznání (výseku) světa, lze se dále opřít o fakt, že se z gramatiky slova jedná vždy o ‘poznání něčeho’. Za základní rozlišení jakékoli smysluplné řeči lze proto považovat na jedné straně to, o čem tato řeč je, její předmět (*théma*), a na straně druhé to, co se o něm vypovídá (*rhéma*). Tomu také odpovídá původní subjekt-predikátové členění věty.

Přitom je celkem jasné, že předmět řeči musí nějakým triviálním způsobem existovat, má-li mít tato řeč vůbec nějaký smysl, a že u predikátu tento požadavek vznášet nemusíme právě proto, že patří straně *rhématu*, toho, co o světě říkáme, nikoli toho, co svět je. Tím není nijak zpochybněno transcendentálně-idealistické východisko, pouze artikulujeme fakt, že nějaké výrazy musí označovat nutně, aby jiné mohly ve své označovací roli selhat, což umožňuje omyl a nepravdivá tvrzení. Aby nedošlo k nedorozumění, uvažme následující příklad: Ukáži-li např. nějakým směrem a řeknu “tento kámen je červený”, pak užití slova “červený” může selhat v tom smyslu, že kámen červený není, a tím pádem klasifikujeme uvedené tvrzení jako nepravdivé. Jestliže se ale ve směru mého gesta nevyskytuje žádný kámen, tvrzení není nepravdivé, ale jednoduše nemá smysl, neboť není zřejmé, jaký rozdíl jsem s jeho pomocí chtěl vůbec artikulovat.

Právě proto a v tomto elementárně-klasifikujícím smyslu nazýváme výraz "tento kámen" vlastním jménem a výraz "červený" predikátem. Transcendentálně-analytický rozměr naší distinkce, tj. sémantický, nikoli empirický původ její motivace, zvláště vynikne, uvážíme-li klasické případy problematických vět jako "Sókratés je mrtev" či "tento kámen je rozbitý na kousky". Jejich předmětem totiž jednoduše nemůže být empirická, a proto pomíjivá entita, neboť o té — v okamžiku jejího zničení — nemůžeme smysluplně tvrdit, že *je* mrtvá či rozbitá.

Na pozadí těchto úvah je nyní již zřejmé, že existenci v sémantickém smyslu máme určujícím způsobem spjatu s inferenční licencí, jež nás od věty formy $P(c)$ vede k větě formy $(\exists x)P(x)$, protože bylo c rozpoznáno jako výraz substituovatelný, tj. patřící k předem popsané třídě výrazů, přes něž může být kvantifikováno, a které tak tvoří příslušný předmětný obor, resp. obor toho, co s ohledem na diskurz uvažovaných vět 'existuje'. Quine zde v intencích svého ontologického relativismu, jehož vyjádřením je i jeho výše uvedené heslo, hovoří o objektech, k jejichž existenci nás příslušný diskurz *zavazuje*. V rámci převyprávění antické mytologie k nim mohou patřit i jména bohů a bytostí, jako je Paegas, v oblasti empirické se ale takové výrazy stanou prázdnými, stejně jako se v diskurzu matematickém stávají prázdnými výrazy jako "největší prvočíslo" či "kulatý čtverec", zatímco empiricky prázdné výrazy jako "tento pravidelný pětiúhelník" nebo "číslo 2^{1987}" denotují.

Vlastně zde ale stále opakujeme tentýž postřeh: Není to výraz sám, resp. jeho vyslovení ve větě, ale jeho použití, co mu teprve dává smysl, a je to specifický *způsob* tohoto použití, co jej dělá jménem něčeho a opravňuje nás poté k úsudkům jistého typu. Ve větě $P(c)$ jsme užili kromě jména c také predikát P, závazek k existenci vlastnosti P jsme tím ale nepřijali, tj. *nejsme* automaticky povinni specifikovat všechny možné vlastnosti předmětů daného diskurzu, stanovit jejich kritéria identity a upravit naši formální sémantiku příslušným způsobem, tj. specifikovat pokaždé vedle domény (předmětné) proměnné x také obor proměnné X odpovídajícího typu. To samozřejmě neznamená, že tak učinit *nemůžeme*. V našem extenzionálním chápání predikátů by to přirozeně vedlo k uvažování všech podmnožin původní domény, tedy opět k otázce, co rozumíme pod podmnožinou libovolnou. To je také způsob, jak lze od logik řádu prvního přejít k logikám řádů vyšších.

Nežli naznačíme některé technické detaily tohoto expresivně velmi silného rozšíření PL, vraťme se ve zbytku tohoto oddílu ještě k prvnímu problémovému okruhu výrazů jako "Paegas", "současný francouzský král" či "největší prvočíslo", které na rozdíl od výrazů jako "jednorožec" či "menší" gramaticky vypadají jako vlastní jména, tj. zdají se svojí formou označovat právě jeden jediný předmět, obvykle tak ale nečiní, pročež by se nemělo jednat o jména v logickém slova smyslu. Takto postaven může celý problém vypadat dosti podezřele, neboť 'jméno' je pro nás kategorií především 'v logickém slova smyslu', v němž označovat předmět jednoduše musí. Na druhou stranu, logické systémy nejsou navrhovány pro sebe sama, ale s úmyslem následného pořádání (výseku) přirozeného jazyka, včetně jazyka matematiky, kde se výrazy jako "největší prvočíslo", "nejmenší prvočíslo" či "druhá odmocnina ze 4" prostě vyskytují a jsou o nich, resp. existenci a neexistenci jejich významu, vynášeny určité soudy. V běžném jazyce k nim patří také obraty typu "otec Karla IV." a "syn Karla IV.", které jsme formalizovali v předchozím oddíle s tím, že první z nich má díky jednoznačnosti termínu "otec x" charakter vlastního jména, a lze jej tedy zachytit spojením funktoru a jména, druhý nikoli.

Přijmeme-li nyní do jazyka možnost vytvářet výrazy tohoto typu, bez ohledu na jejich sémantickou korektnost, tj. rozlišíme-li vedle jmen v rámci šíře pojaté skupiny singulárních výrazů také kategorii tzv. URČITÝCH DESKRIPCÍ, dostáváme se okamžitě do problémů s pravdivostními podmínkami vět jako "největší prvočíslo je liché" či "syn Karla IV. byl bezdětný", které již nemohou artikulovat připisování vlastnosti předmětu či jeho jednoznačné spadání do jisté množiny, protože dotyčný předmět buďto není k dispozici, nebo jich je naopak k dispozici až příliš mnoho. V důsledku nám tak hrozí porušení pravdivostního principu, neboť se zdá, že nejvyšší prvočíslo je jasně liché skrze svoji prvočíselnost (a odlišnost od 2) a zároveň není liché skrze svoji neexistenci, syn Karla IV. není bezdětný skrze Zikmunda Lucemburského (jenž měl dceru Alžbětu Lucemburskou) a zároveň je bezdětný skrze Václava IV. apod. Možnost tohoto selhání lze chápat jako vnitrojazykový znak nekorektní deskripce, tj. znak, který se primárně neodvolává na aktuální existenci nějakého objektu.

Původní definice určité deskripce coby výrazu, jenž přijímá syntaktickou formu vlastního jména, avšak na rozdíl od něho *může* selhat v označení právě jednoho předmětu, přitom podtrhává jiným způsobem již jednou nabyté poznání, že jméno označuje svůj význam *nutně*. V některých moderních filosofických teoriích vedl tento postřeh k ontologickému závěru, že se jedná o singulární výraz, jenž má ve všech možných světech tentýž význam, neboli tzv. RIGIDNÍ DESIGNÁTOR.[7] To nám budiž jednak vzorovým příkladem, že i některá zdánlivě jalová metafyzická tvrzení mohou mít hluboký, nemetafyzický smysl, jednak klíčem k posouzení staršího a vlivného postoje Russellova, jenž začal totéž základní

[7] Viz Kripke [1972].

východisko rozvíjet pod zorným úhlem metafyziky empirického světa. Jelikož v ní hraje v důsledku jazyk vždy jenom druhotnou, nepodstatnou roli, dospěl Russell [1918/1919, s. 201] snadno k závěru, že se v přirozeném jazyce jména v logicky přísném smyslu, tj. s garantovaným (empirickým) denotátem, prakticky nevyskytují, s možnou výjimkou výrazů jako "toto", "tento", případně označení elementárních počitkových dat. V Russellově logicko-empirické koncepci má tedy většina singulárních výrazů charakter určitých deskripcí, tj. na jména si jenom hraje, a jejich výskyt ve větách nás nejenže k ničemu ontologicky nezavazuje, ale musí být dokonce eliminovatelný, jinak by nešlo vysvětlit, jak se význam věty může skládat z významů jejích částí, když některé části význam nemají. To je atomistické využití principu kompozicionality.

Z tohoto důvodu hovoří Russell [1910–1913, díl I, úvod, kap. 3] o deskripcích jako o tzv. NEÚPLNÉM SYMBOLU (*incomplete symbol*) a počínaje slavným *On denoting* [1905] převádí věty, v nichž se deskripce vyskytují, jako např. "francouzský král je holohlavý", do podoby

$$(\exists x)[FK(x) \wedge (\forall y)(FK(y) \rightarrow x = y) \wedge H(x)],$$

kde je singulární výraz "francouzský král" transformován na jednomístný predikát, od jehož extenze pak explicitně očekáváme nejen, že je holohlavá, ale především, že je neprázdná a jedinečná. S ohledem na faktické nesplnění prostřední podmínky je věta označena za nepravdivou.

Je přitom poměrně matoucí, že Quine ve svém článku *On what there is* [1953, kap. 1] navrhuje zcela v Russellově duchu eliminaci všech jmen z jazyka jejich transformací do formy predikátu (tj. místo "Napoleon" "být Napoleonem") s doprovodným vyjádřením existenčních podmínek ("existuje právě jeden Napoleon"), domnívaje se, že tak jenom vynikne podstata jeho ontologické devízy, podle níž nás k existenci entity nezavazuje samotný výskyt jména, ale jeho substituovatelnost za příslušnou proměnnou. Zastírá tím totiž okolnost, že úkolem proměnné není od počátku nic jiného nežli odkaz k předmětům konstituovaným skrze příslušná jména, a převedení ontologické zátěže ze jména na proměnnou je tedy kruhové. Je dosti pravděpodobné, že tak Quine činí pod vlivem starého empirického bludu, jenž se, jak jsme již zmínili, zvláště typicky projevuje v preferování objektové před substituční kvantifikací. Jsou to ostatně právě Quinovy empiricko-nominalistické postoje, co ho pravidelně vede k porušování zásad jinde proklamované ontologické relativity, když zcela dogmaticky napadá samotnou myšlenku logiky vyšších řádů, tj. smysluplnou existenci množin či vlastností, nebo myšlenku logik modálních a roli modálních termínů v jazyce vědy. Nutno říci, že jeho učitel Carnap zacházel velmi podobně se svým 'principem vstřícnosti', případně 'tolerance' (*Toleranzprincip*, *principle of charity*) [1934, s. 44 n], když jej v praxi proměnil v užitečný bič na oponenty.

Je to přitom opět Fregův střízlivý a ontologicky neutrální přístup, jenž nám v souboji názorů umožňuje zjednat pevnou půdu pod nohama, a vede tak k minimalistickému, leč působivému řešení celého problému. Určité deskripce jsou totiž pro Frega [1884, § 74] především způsoby, jak obohatit obor stávajících jmen o jména nová, skrze disponibilní predikáty. K predikátu P lze totiž vždy vytvořit výraz "to jediné x takové, že P", symbolicky

$$\iota x P(x),$$

s potenciálním úkolem odkazovat k jedinému předmětu splňujícímu P, pokud takový existuje. Tento předpoklad, tj. pravdivost vět

(1) $(\exists x)P(x)$,

(2) $(\forall x, y)[P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y]$,

je podstatný pro zařazení výrazu $\iota x P(x)$ do sféry výrazů substituovatelných, a tvoří tedy podmínku *sine qua non* jeho smysluplného použití. Není-li podmínka dodržena, dostáváme se totiž ke zmíněným problémům s pravdivostním principem. Z tohoto titulu se věty (1), (2) nazývají PRESUPOZICEMI jakékoli věty A, v níž se vyskytuje výraz $\iota x P(x)$, neboli větami, které musí být pravdivé, aby věta A mohla být pravdivá nebo nepravdivá, tj. aby měla vůbec nějaké pravdivostní podmínky čili fregovský smysl.

Implicitním využitím presupozic namísto jejich explicitního zakomponování do obsahu věty se Fregova analýza liší od analýzy Russellovy, kde má věta typu $F(\iota x P(x))$ smysl v každém případě, ovšem za cenu rozpuštění výrazu $\iota x P(x)$ v jejím logicky transparentním překladu, a to i tehdy, když jsou Fregovy presupozice splněny! Rozdíl implicitního předpokladu Fregova a explicitní formulace Russellovy není tedy co do svých důsledků v žádném případě nevinný. Fregův systém má na jedné straně jisté sémanticky přirozené rysy, tj. v případě, že je deskripce korektní, chová se k ní jako k substituovatelnému jménu, z formálního hlediska je ovšem značně komplikovaný a v mnoha případech nám právě pro sémantickou charakterizaci přípustné deskripce nedovoluje rozhodnout, které výrazy jsou substituovatelné a které nikoli. Tomu se snaží někdy odpomoci dodatečná konvence, podle níž $\iota x P(x)$ denotuje i v případech prázdnosti a nejednoznačnosti, a to buďto prázdnou, nebo víceprvkovou množinu. Toto opatření má ovšem zase jiná technická úskalí.

Především pro převahu technických negativ a nedostatek ideových pozitiv zmizela deskripce postupně ze standardní výstroje logických systémů a zůstává takřka výhradně předmětem filosofického zájmu.[8] Pro nás bude nicméně představovat jedno z klíčových východisek pro bližší

[8] Jakožto příklad neobvyklé logiky lze logiku s deskripcí najít opět in Monk [1976].

porozumění Fregovu logicismu. V naší interpretaci bude hrát roli i fakt, že Fregova koncepce opisuje rozdíl jména a deskripce transcendentálně-analytickým způsobem: Jméno je s ohledem na daný obor konstitutivní, je tím, co ho vytváří a dláždí cestu k pozdějším alternativním pojmenováním jeho předmětů prostřednictvím disponibilních predikátů. Beze jmen nemůže být deskripcí. Zavedení deskripcí do jazyka může být mnohdy užitečné, nehraje však v rámci ustanovování jeho významu žádnou roli.

Jelikož z formálně-logického hlediska lze predikátové konstanty interpretovat libovolně, tj. jak prázdnými, tak jedno- či víceprvkovými množinami, je denotování deskripcí ve srovnání se jmennými konstantami skutečně arbitrární. Rozdíl nutného a možného není ale správné interpretovat deskriptivně či psychologicky, na základě povrchních znaků jazykového úzu, jak se to odráží v distinkci (čistě) denotujícího jména a konotující deskripce. Fakt, že si s výrazem "Čumulangma" kromě jeho nositele nic nespojujeme, zatímco u výrazu "nejvyšší hora světa" máme k dispozici proceduru, jak ho vyhledat (Fregův smysl), může, ale nemusí být znakem jména, resp. určité deskripce, jak to výmluvně ukazuje případ jmen koncentrovaných posloupností a jejich použití k pojmenování reálných čísel.

Z hlediska rozlišení explicitního a implicitního se tvrzení existence předmětu, podobně jako tvrzení jeho identity se sebou samým, stává na objektové (explicitní) úrovni trivialitou, jinými slovy: existence buďto není vlastností předmětů, nebo je jejich vlastností triviální, tj. přísluší každému prvku univerza. To je také závěr Fregova [1983, s. 71] dialogu s Pünjerem. Netriviální přípis existence má podle Frega vždy charakter predikace druhořádové vlastnosti prvořádovému pojmu, jak to ještě zmíníme v oddíle 4.6 v souvislosti s Fregovou analýzou pojmu čísla. V širším filosofickém kontextu lze tento tah považovat za pozoruhodnou manifestaci obratu k jazyku, jenž takto řeší klasické filosofické problémy, jako je např. Anselmův [Pros., kap. 2] důkaz Boha, jazykovou analýzou, totiž poukazem na to, že existence není obvyklý predikát, a proto nelze na existenci Boha usoudit z jeho definice jakožto bytosti, nad níž nelze myslet nic většího (rozuměj: která má všechny 'pěkné' vlastnosti), a u níž by tedy nepřítomnost ('pěkného') predikátu existence vedla ke sporu. — Toto Fregovo [1884, § 53] řešení odpovídá ovšem již Kantově [1781/1787, A 592 nn/B 620 nn] analýze ontologického důkazu, což nám může být ukázkou toho, že analytická filosofie není hnutí vázané na jedno dějinné období či okruh problémů, ale filosofie definovaná specifickým přístupem k věci. Jádro Kantova argumentu můžeme reprodukovat následovně: Ověření tvrzení, že má věc nějakou vlastnost, spočívá v nalezení daného předmětu (jeho prezentaci v názoru) a ověření, že tuto vlastnost má. V případě existence je ale druhý krok nesmyslný, stejně jako je nesmyslné zjišťovat, zda jsou dvě věci vzájemně identické, případně zda je věc identická sama se sebou.

4.5 Logika vyšších řádů

V tomto oddíle popíšeme finální rozšíření systému PL, jež je dnes coby logika druhého či vyšších řádů považováno za nestandardní (neobvyklou logiku),[9] ve skutečnosti ale odpovídá Fregovu původnímu systému, resp. systémům prvních dekád rozvoje moderní logiky. Záhy také uvidíme, že to nebylo náhodou, tj. že z těchto systémů nelze eliminovat kvantifikaci přes vlastnosti, aniž bychom tím vzdali či deformovali cíle, s nimiž byly ony systémy vytvořeny. Zvláště významná je přitom dříve zmíněná souvislost logiky vyšších řádů s teorií množin, pramenící již z otázky po valuaci druhořádové proměnné, tedy problému "co je množina?". Na něm také stojí Fregova filosofie matematiky, tj. především plánované (a jen z části realizované) vysvětlení pojmu reálného čísla na pozadí jeho již etablované redukce na čísla přirozená a jejich množiny, ale i samotný pojem čísla přirozeného, jenž, jak se ukazuje v *Grundlagen*, s analýzou pojmu množiny také souvisí skrze klíčovou otázku "kolik prvků má daný soubor?". To vše ale nyní odsuňme stranou a věnujme se nejprve opět formálním záležitostem v jejich 'standardní', dále netematizované podobě, jak je již tradičně zaručena naivní teorií množin.

V popisovaném rozšíření PL směrem k vyšším řádům se přitom omezíme pouze na jejich druhořádový fragment, značený jako PL_2, což je věcně ospravedlnitelné, neboť vyšší kvantifikace je kupodivu na druhořádovou redukovatelná. Záhy naznačíme, proč. Formální syntax PL_2 získáme rozšířením jazyka PL o sadu X_1^n, X_2^n, ... predikátových proměnných pro každou aritu n, jež opět v praxi nahrazujeme jednoduchými X, Y, ... Pojem prvořádového termu se nemění, odkazujeme k němu schematickými proměnnými typu s, t, ... K druhořádovým termům, značeným S, T, ..., počítáme pouze příslušné proměnné a predikátové konstanty. K definici formule (viz s. 207) přidáváme následující klauzule:

(iii) pro X^n a termy $t_1, \ldots, t_n$ je $X^n(t_1, \ldots, t_n)$ (elementární) formule,

(iv) je-li φ formule, pak i $(\forall X)\varphi$.

Co se týče sémantiky, zůstává pojem interpretace, podaný pro PL, z velké části nezměněn, s tou významnou výjimkou, že danému jazyku přiřazujeme kromě základního univerza $\dot{\mathcal{I}}$ také univerzum $\ddot{\mathcal{I}}_n$ pro každou aritu n přidaných proměnných. Ve standardním případě identifikujeme univerzum $\ddot{\mathcal{I}} = \ddot{\mathcal{I}}_1$ s množinou $\mathcal{P}(\dot{\mathcal{I}})$ všech podmnožin základního univerza, univerzum $\ddot{\mathcal{I}}_n$ pro $n > 1$ s množinou $\mathcal{P}(\dot{\mathcal{I}}^n)$ všech podmnožin příslušného kartézského součinu základního univerza. Ostatní rozlišení získáme snadnými modifikacemi.

[9] Viz Monk [1976].

Valuace $\mathcal{V}$ proměnných ohodnocuje nejen prvořádové proměnné x_1, x_2, … prvky univerza $\dot{\mathcal{I}}$, ale i proměnné druhořádové X_1^n, X_2^n, … prvky univerza $\ddot{\mathcal{I}}_n$. Pojmy X-alternativní valuace a denotace jsou triviální, zvláště když v jazyce neuvažujeme funktory. Jako důsledek se pak v Tarského definici (viz. s. 213 n) objeví následující dvě podmínky:

(5) $\mathcal{IV} \models X^n(t_1, \ldots, t_n) \rightleftharpoons \langle \mathcal{IV}(t_1), \ldots, \mathcal{IV}(t_n) \rangle \in \mathcal{V}(X^n)$,

(6) $\mathcal{IV} \models (\forall X^n)\varphi \rightleftharpoons$ pro každé $A \in \ddot{\mathcal{I}}_n$ platí $\mathcal{IV}_A^{X^n} \models \varphi$,

které vlastně kopírují příslušné podmínky prvořádové. Jelikož i definice modelu, splnitelnosti, logické pravdivosti a vyplývání zůstávají co do formulace nezměněny, mohlo by se snadno zdát, že celé rozšíření musí být docela bezzubé, protože přirozeně plynoucí již ze samotné myšlenky substituce, na níž byl postaven i dříve popsaný prvořádový fragment. Skutečnost je ale mnohem komplikovanější, jak nám to ukáže opět případ identity.

Víme, že v rámci PL nelze rovnost definovat. Zavedeme-li "=" jako mimologický symbol, jehož význam je v jednotlivých interpretacích spoluurčen axiomy (R1–3) z oddílu 4.3, zjistíme snadno, že $\mathcal{I}(=)$ nemusí být relace, v níž je každý předmět sám se sebou a s ničím jiným (id), ale i tzv. relace kongruence:

> Kongruence $\sim_L$ je relace ekvivalence $\sim$ relativizovaná k výrazům nějakého jazyka L, a to tak, že se k jejich extenzím chová uniformním způsobem vymezeným axiomy (R2–3).

Platí-li např. nějaká vlastnost P o nějakém a, pak platí o všech předmětech s a ekvivalentních. To obrazně znamená, že příslušné dělení oboru na dvě části, totiž těch předmětů, které P splňují, a těch, které ne, sleduje hranice jednotlivých tříd ekvivalence $[a]_\sim$.[10] Sestává-li např. naše univerzum z různobarevných kuliček a naší ekvivalencí je 'stejnost barvy', je tato relace kongruencí tehdy, jestliže každý predikát uvažovaného jazyka, který lze připsat jedné kuličce, lze připsat všem kuličkám téže barvy. Podobně je to s funktory, kdy přiřazení předmětu b předmětu a funkcí f musí vést k tomu, že funkce přiřazuje předmětům ekvivalentním s a opět předměty ekvivalentní s b, tj. jednotlivá přiřazení se *de facto* dějí na úrovni tříd $[a]_\sim$, $[b]_\sim$.

Výhodou kongruence oproti prosté ekvivalenci je tedy zjevně fakt, že lze od ní nad nějakým oborem předmětů M s nějak interpretovaným jazykem L velmi snadno přejít k relaci rovnosti. Stačí na místě M uvažovat obor $M/{\sim_L}$ ekvivalenčních tříd, přičemž příslušné vlastnosti, funkce a relace definované na těchto třídách zůstávají 'stejné' jako na jejich prvcích. Výsledkem je pak následující tvrzení:

[10] Definice tříd abstrakce byla podána v oddíle 2.4.

K interpretaci $\mathcal{I}$ jazyka L, jenž obsahuje mimologický predikát "=" a platí $\mathcal{I} \models$ (R1–3) pro každou konstantu z L, existuje interpretace $\mathcal{I}'$ taková, že (i) $\mathcal{I}'(=)$ je id a (ii) $\mathcal{I} \models \varphi$ tehdy a jen tehdy, když $\mathcal{I}' \models \varphi$, pro každou formuli z F_L.

Důkaz: Bází důkazu je konstrukce, v níž vezmeme $\dot{\mathcal{I}}' \overset{\text{def}}{=} \dot{\mathcal{I}}/\mathcal{I}(=)$ a položíme

$$[a]_{\mathcal{I}(=)} \in \mathcal{I}'(P) \text{ tehdy a jen tehdy, když } a \in \mathcal{I}(P)$$

pro modelový případ unárního predikátového symbolu P. Interpretace ostatních symbolů jazyka L je analogická a samotný důkaz tvrzení snadno následuje. Jediné, co vlastně zbývá zdůvodnit, je předpokládaný fakt, že se $\mathcal{I}(=)$ chová skutečně jako kongruence, tj. především, že se jedná o relaci ekvivalence. Její reflexivita je přitom zajištěna přímo axiomem (R1). Symetrii a tranzitivitu dostaneme z axiomů zbylých, uvědomíme-li si, že "=" je podle předpokladu prvkem jazyka L, a figuruje tedy v některých z instancí axiomu (R2) na místě predikátové konstanty P^2. □

Význam tohoto exkurzu doceníme záhy v souvislosti s procesem tzv. logické abstrakce, jež je coby technika konstituce předmětných oborů s problematikou identity bytostně spjata. Momentálně se soustředíme na fakt, že v rámci PL_2 není třeba zachycovat rovnost oklikou, ale přímo formulí:

$$(=_2)\ \ x = y \rightleftharpoons (\forall X)[X(x) \leftrightarrow X(y)].$$

Ta představuje formální vyjádření Leibnizova principu, jež bylo na bázi pouhého prvního řádu nemožné. Zde je ovšem třeba být navýsost pozorný a opatrný: LP v našem čtení není ani formule (bezobsažný sled symbolů), ani tvrzení platící (kontingentně) v každém univerzu, ale konstitutivní princip, bez něhož by o žádném univerzu ani nemohla být řeč. Stejně tak není pravdivostní princip ekvivalentní tautologické formuli $\varphi \vee \neg\varphi$, která je tautologická *a posteriori*, tj. proto a pouze proto, že pravdivostní princip určuje, jak má vypadat interpretace našeho systému a jak budou ohodnocovány formule komplexní. Definice $(=_2)$ tedy nezachycuje identitu v tom smyslu, že by nám říkala, které dva předměty univerza interpretace $\mathcal{I}$ jsou identické a které ne, což samozřejmě již musíme vědět, ale právě a pouze tom smyslu, že ze všech možných binárních relací definovatelných nad $\dot{\mathcal{I}}$ vybírá relaci

$$\mathsf{id} = \{\langle a, a\rangle \mid a \in \mathcal{I}\},$$

což znamená, že dvojice $\langle a, b\rangle$ náleží množině dvojic $\mathcal{I}(=)$ tehdy a jen tehdy, když se jedná o dvojici stejných předmětů $a = b$. Uvedené rozdíly jsou již ve své formulaci samozřejmě velmi subtilní, jejich věcnou opodstatněnost ale demonstruje již následující standardní zdůvodnění toho, proč je výše uvedená definice rovnosti v rámci PL_2 skutečně úspěšná, čili:

Vztah ($=_2$) zachycuje relaci id.

Důkaz: Vezměme nějaké prvky a, b univerza a předpokládejme, že platí $\langle a, b\rangle \in \mathcal{I}(=)$, neboli

$$\mathcal{I}\mathcal{V}^{xy}_{ab} \models (\forall X)[X(x) \leftrightarrow X(y)] \text{ pro libovolné } \mathcal{V},$$

nicméně $a \neq b$. Podle definice tak pro každou podmnožinu A univerza $\dot{\mathcal{I}}$, tj. prvek $\ddot{\mathcal{I}}$, platí, že $a \in A$ tehdy a jen tehdy, když $b \in A$. Jednou z těchto podmnožin je ale i jednoprvková $\{a\}$, a jelikož platí $a \in \{a\}$, mělo by platit i $b \in \{a\}$, tedy $a = b$. To je ve sporu s předpokladem. □

K pochopení této úvahy je třeba zřetelně rozlišovat to, co lze vyjádřit explicitně, na úrovni zkoumaného jazyka, a co se pouze implicitně předpokládá o jeho interpretaci, artikulovatelné teprve na úrovni metajazyka. Kritika logicismu, jenž druhořádové formule a zdůvodnění, jako bylo toto, systematicky používá, může být pak založena právě na zpochybnění jejich smysluplnosti: Ke zdůvodnění korektnosti druhořádové definice identity ($=_2$) jsme užili odkaz na množinu $\{a\}$, definovanou jako systém $\{x \mid x = a\}$ všech prvků identických s a, tj. pomocí identity, a tudíž kruhem. Tomu se budeme podrobně věnovat v kontextu Fregovy teorie čísla, konkrétně v kapitole 5. Nyní sledujme stručně důsledky, které má prokázaná expresivní bohatost PL_2 na souhrn jejích metalogických vlastností.

V první řadě je zřejmé, že je PL_2 přinejmenším stejně silná jako $\mathsf{PL}_=$, což vysvětluje, proč jsme do jejího jazyka nemuseli rovnou přidat funktorové konstanty. Dále s nimi ovšem budeme pracovat, a uvažovat proto navíc i speciální typ proměnných k^n_1, k^n_2, … pro každé n, obvykle zapisovaných jako k, l, …, s definicí termu, valuace, denotace a interpretace rozšířenými snadno předvídatelným způsobem.

Rekapitulujeme-li nyní naše výsledky ohledně fixování velikosti univerza, víme, že PL a PL_f ji umožňují omezit zdola a že v $\mathsf{PL}_=$ jsme schopni vymezit mohutnost interpretace pro každé konečné n nějakou formulí $\varphi_{=n}$. Významné je, že nejsme s to fixovat samotnou konečnost, tj. najít formuli, resp. třídu formulí, která by byla splnitelná právě konečnými interpretacemi. To tvrdí následující teorém, který můžeme nazývat VĚTOU O KONEČNÝCH MODELECH:

> Množina S formulí $\mathsf{PL}_=$, která má neomezeně velké konečné modely, má i nekonečný model.

Důkaz: Jádro důkazu tvoří stejně jako v oddíle 4.3 použití věty o kompaktnosti. K teorii S přidáme třídu C formulí definovanou jako

$$C = \{\varphi_{\geq n} \mid n \in \mathsf{N}\}.$$

Jelikož má S neomezeně velké konečné modely, lze snadno nahlédnout, že každou konečnou podmnožinu $T \subseteq S \cup C$ lze splnit některým z nich, totiž tím, jenž má alespoň velikost nejvyššího indexu n, pro nějž se formule $\varphi_{\geq n}$ vyskytuje v T. Podle věty o kompaktnosti má tedy každá konečná podmnožina $S \cup C$ model, tím pádem ho má i $S \cup C$. Tento model, jenž je zároveň modelem S, ovšem musí být z konstrukce C nekonečný. □

Pointou našeho výkladu je skutečnost, že v PL_2 konečnost vyjádřit dokážeme. Stačí vzpomenout klasický paradox nekonečna, podle něhož je pro nekonečné množiny, na rozdíl od konečných, možná jejich prostá zobrazitelnost na vlastní část, a napsat formuli:

$$(\exists k)[(\forall x, y)(k(x) = k(y) \rightarrow x = y) \wedge (\exists x)(\forall y)(k(y) \neq x)],$$

dále značenou jako φ_{inf}. Je snadno ověřitelné, že může být splněna pouze v interpretacích nekonečných a (za jistých, dále diskutovaných okolností) právě v nich. Více k tomu viz oddíl 5.4. Pomocí formule $\neg\varphi_{inf}$ jsme tedy s to vyjádřit konečnost, a budeme k ní proto referovat jako k φ_{fin}.

To vše sice ukazuje, že je PL_2 silnější než jakékoli z uvažovaných rozšíření PL, ostatní důsledky ale již pro PL_2 tak příjemné nejsou. S ohledem na formuli φ_{fin} totiž nemůže platit věta o konečných modelech, a tím pádem padá i věta o kompaktnosti. V minulé kapitole jsme ale viděli, že kompaktnost logiky je přímý důsledek silné věty o úplnosti, což znamená, že žádná korektní kalkulizace PL_2 nemůže být silně úplná, neboli můžeme dosáhnout nanejvýš vztahu:

Jestliže $S \vdash \varphi$, pak $S \models \varphi$.

Pro slabou větu o úplnosti dosáhneme téhož až v souvislosti s Gödelovou větou o neúplnosti aritmetiky, *de facto* ale již v oddíle 5.10.

Vzpomeneme-li si na důkaz věty o úplnosti, jak jsme jej předvedli pro PL, vidíme snadno, že v PL_2 musí pro libovolný korektní kalkul existovat množiny formulí, které jsou sice deduktivně bezesporné, tj. nelze v nich daným kalkulem spor odvodit, ale přesto nemají (standardní) model, tj. jsou sporné v nějakém obecnějším slova smyslu. Podobně jako kvantifikuje věta o nerozhodnutelnosti predikátové logiky prvního řádu přes libovolný algoritmus, kvantifikují věty o neúplnosti PL_2 přes *libovolný* kalkul, a předpokládají tedy jeho pojem, resp. pojem efektivního důkazu jako předem daný. Tím se liší např. od věty o úplnosti (*daného* kalkulu). Přesné vymezení, schematizace pojmu efektivnosti metody je také klíčovým bodem v důkazu dalších významných teorémů moderní logiky, proto se k němu ještě vrátíme, zejména v kapitole 7.

Co se týče dalších vlastností PL_2, záhy uvidíme, že v ní lze fixovat formulemi také nekonečné mohutnosti. Formule, kterou sestavíme v rámci druhořádové axiomatizace aritmetiky (přirozených čísel), bude splnitelná pouze modely, které jsou nekonečné a spočetné (ba dokonce izomorfní se strukturou přirozených čísel), v důsledku čehož selže Löwenheimův-Skolemův teorém směrem nahoru. Směrem dolů je věc trochu komplikovanější, což lze pozorovat již na formulaci teorému pro PL, kde musí být dodáno omezení na mohutnosti nekonečné a brána v úvahu velikost slovníku. LÖWENHEIMŮV-SKOLEMŮV TEORÉM SMĚREM DOLŮ potom zní:

> Má-li množina S formulí PL jazyka L model nekonečné mohutnosti, pak má i model libovolné nekonečné mohutnosti menší, omezené zdola velikostí slovníku L.

Toto tvrzení lze v PL_2 vyvrátit formulí, kterou splňují interpretace pouze nějaké vyšší mohutnosti, než je nekonečná mohutnost spočetná. Takovou nám poskytne druhořádová axiomatizace analýzy (aritmetiky reálných čísel), která bude splnitelná pouze modely mohutnosti (ba dokonce struktury) kontinua. To vše bude předmětem kapitoly 5.

Fregova vlastní axiomatizace logiky z *Begriffsschrift*, jíž značme jako $\mathfrak{B}_2$, zahrnovala příslušnou variantu schématu specifikace a pravidlo generalizace proměnné vyšších řádů:

E1 $(\forall X)\varphi \rightarrow \varphi^X_T$,

E2 $\varphi \,/\, (\forall X)\varphi$,

s obvyklými restriktivními podmínkami na X a T. Drobný rozdíl spočíval v tom, že Frege umožňoval ve schématu specifikace za T doplnit nejen libovolný substituovatelný term (tj. proměnnou či konstantu), ale libovolný komplexní predikát, který lze vytvořit z výrazů daného slovníku, při zachování gramatických požadavků na typ a aritu. My téhož dosáhneme standardní cestou přidání tzv. SCHÉMATU KOMPREHENZE:

$$(\exists X)(\forall \vec{x})[X(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x})],$$

kde se X nevyskytuje volně ve φ. Vyhneme se tak jednak nepříjemné povinnosti popsat podmínky substituovatelnosti (komplexních) predikátů, jednak budeme mít možnost explicitně modifikovat ontologické závazky ohledně existence množin, rozhodneme-li se z nějakých důvodů omezit jejich tvorbu třeba jen na nějakou část jazyka PL_2, typicky na fragment prvořádový.

Pod $\mathfrak{B}_2$ můžeme dále vidět axiomatický systém popsaného tvaru, tj. s axiomy (E1–2) a schématem komprehenze, aniž bychom tím jakkoli tratili či získali na obecnosti. To platí i vzhledem k další, již zmíněné úpravě Fregova originálního systému, totiž jeho omezení na řád druhý, jak to Frege ostatně sám naznačil v *Grundgesetze* [1893/1903, díl I, § 25, 34] v souvislosti s úvahami nad korespondencí predikátu a množiny (průběhu hodnot). Nahlédnout, proč tomu tak je, tj. proč nepředstavuje vyškrtnutí vyšších řádů s výjimkou druhého podstatné expresivní omezení, lze nejlépe analýzou toho, proč tomu tak u redukce druhého na první řád není.

Obecný princip možného přechodu se přitom zdá být jasný. Omezíme-li se pro jednoduchost pouze na LOGIKU MONADICKOU, tj. výlučně s unárními predikáty, pak v příslušné logice druhého řádu operujeme se dvěma typy konstant a dvěma typy proměnných. Samotný princip množinové sémantiky ale tento rozdíl cíleně stírá, když totiž čte větu

Sókratés je filosof

jako

Sókratés náleží množině filosofů,

tj. interpretuje ji jakožto vyjádření vztahu mezi dvěma *předměty*, Sókratem a množinou filosofů. To nás může přivést k myšlence vyjádřit dosud implicitně zachycovaný vztah funkcionální aplikace, resp. predikace, explicitním symbolem jako

$\mathcal{PRED}$(Sókratés, filosof),

jenž by se tak stal jediným predikátem celého systému, podobně jako je znak náležení ($\in$) jediným (mimologickým) predikátem teorie množin.[11] Výrazy "Sókratés" a "filosof" se takto stávají jmény, byť eventuálně odlišných předmětných sort, se speciálními proměnnými typu x (x_1, $x_2, \ldots$) a y (y_1, $y_2, \ldots$). Implicitní dělení základního univerza do skupin, a tedy užití více druhů objektových proměnných, je ovšem formálně zcela neproblematické, již proto, že je lze dodatečně eliminovat pomocí predikátů S_1, $S_2, \ldots$ a postulátů typu:

$$(\forall x_1, x_2)[\mathcal{PRED}(x_1, x_2) \rightarrow S_1(x_1) \wedge S_2(x_2)],$$

$$(\forall x_1)[S_1(x_1) \vee S_2(x_1)],$$

$$(\forall x_1)\neg[S_1(x_1) \wedge S_2(x_1)],$$

s jediným druhem objektové proměnné x (x_1, $x_2, \ldots$). Z důvodů jednoduchosti zůstaňme ale u teorií vícesortových.[12]

[11] Máme zde tedy opět variace na téma 'explicitní' vs. 'implicitní'. Frege, v trochu jiné souvislosti, ale v podobném duchu, zmiňuje ve své *Begriffsschrift* [1879, § 3], že by jediným predikátem celého systému mohl být vlastně znak $\vdash$ tvrdící síly, tedy predikát "být pravdivý", což částečně koresponduje s jeho pozdějším ztotožněním vět se jmény pravdivostních hodnot.

[12] Detaily jednotlivých přechodů podává např. Peregrin [1997].

Pointou celého postupu v každém případě je, že lze každou druhořádovou formuli přeložit na formuli řádu prvního, která má nějaké podobné sémantické vlastnosti. Míra této podobnosti samozřejmě záleží také na tom, jak k sobě vztáhneme univerza $\dot{\mathfrak{I}}$, $\ddot{\mathfrak{I}}$ první a druhé sorty objektů. Ve standardním, druhořádovém případě se jednalo o implicitně zjednaný vztah množiny a její potence, nyní však máme dvě zcela libovolné skupiny objektů, které můžeme spojit pouze explicitně, tj. prostřednictvím výrazového aparátu logiky prvního řádu, např. postulátem

$$(\exists y)(\forall x)[\mathcal{PRED}(x,y) \leftrightarrow \varphi(x)],$$

kde φ je libovolná formule jazyka, v níž se y nevyskytuje volná. Jedná se vlastně o prvořádovou variantu schématu komprehenze, ale: zatímco druhořádový případ je ze sémantického hlediska trivialitou, tj. platí v každé standardní interpretaci, prvořádová varianta komprehenze třídu potenciálních interpretací podstatně zužuje v tom smyslu, že množině objektů první sorty, pro něž v dané interpretaci a libovolné valuaci platí $\varphi(x)$, musí odpovídat nějaký objekt druhé sorty, který ji daným způsobem reprezentuje. Aby ji reprezentoval jedinečně, musíme explicitně formulovat podmínku

$$(\forall y,z)[(\forall x)(\mathcal{PRED}(x,y) \leftrightarrow \mathcal{PRED}(x,z)) \rightarrow y = z],$$

kladenou obvykle na rovnost dvou množin ve smyslu totožnosti jejich prvků. Nyní máme jistotu, že je-li množina prvků z $\dot{\mathfrak{I}}$ v $\ddot{\mathfrak{I}}$ reprezentována, je tak činěno jednoznačně, nikoli však, že se tak stane pro každou podmnožinu $\dot{\mathfrak{I}}$, neboť schéma komprehenze vyžaduje existenci reprezentace pouze pro množiny vyjádřitelné v daném jazyce, jichž je tedy při jazyce spočetném pouze spočetně mnoho. Tím pádem se může stát, a v obecném případě skutečně stane, že tautologická formule PL_2 přestane být po příslušném překladu tautologií, neboť mezi uvažovanými prvořádovými interpretacemi jsou i takové, jež nemají v druhém řádu obdoby, třeba když druhá sorta obsahuje stejný počet objektů jako sorta první, jak to umožňuje Löwenheimova-Skolemova věta pro prvořádové jazyky. Touto úvahou je také částečně osvětlena podstata Löwenheimova-Skolemova paradoxu, k němuž se ale ještě dostaneme v oddíle 6.7.

Není přitom obtížné nahlédnout, že opačným směrem přenos tautologičnosti platí, tj. je-li prvořádový překlad druhořádové formule tautologický, je tautologická i tato formule samotná, neboť mezi možnými prvořádovými interpretacemi překladu se vyskytují všechny ty, jimž odpovídají interpretace druhořádové. Na této úvaze se zakládá také idea nestandardních interpretací PL_2, jež jsou podle jejich autora nazývány INTERPRETACEMI HENKINOVSKÝMI.[13] Vezmeme-li totiž interpretaci pře-

[13] Viz Henkin [1950].

kladu, tj. především příslušné sorty $\dot{\mathcal{I}}$ v $\ddot{\mathcal{I}}$, lze každý objekt $b \in \ddot{\mathcal{I}}$ nahradit množinou:

$$\left\{a \in \dot{\mathcal{I}} \mid \mathcal{IV}_{ab}^{xy} \models \mathcal{PRED}(x, y)\right\}$$

objektů z $\dot{\mathcal{I}}$, tj. dospět k jakési omezené standardní druhořádové interpretaci, v níž bude univerzum diskurzu proměnné druhého řádu tvořit pouze část, obecně tedy nikoli celá potence univerza základního. Pro takto rozšířený pojem interpretace je PL_2 úplná, resp. má všechny metalogické vlastnosti logiky prvního řádu.

Důvod, proč nešlo redukovat logiku druhého řádu na logiku řádu prvního, tkvěl tedy ve standardní sémantice a jejím pojmu podmnožiny v Cantorově maximálně liberálním smyslu. Existence interpretací nestandardních nám nyní dává nepřímý argument, proč nepovažovat Cantorův pojem množiny za jediný možný, a proč také *a priori* nevylučovat substituční kvantifikaci ve prospěch kvantifikace objektové. To nic nemění na faktu, že jsou přímé důvody pro preferování substituční kvantifikace a pochybnosti o tradičním pojetí množiny založeny na hlubším, obecně-filosofickém základě.

Přesuneme-li se nyní opět na rovinu standardní sémantické hry a zopakujeme, že jádrem neúspěchu redukce druhého řádu na první je neschopnost 'vyrobit' výrazovými prostředky prvního řádu dostatek prvků v druhé doméně, je zřejmé, že jakmile máme k dispozici řád druhý, je problém překonán, neboť schéma komprehenze pro libovolný redukovaný stupeň $n > 2$ lze nahradit axiomem

$$(\forall X)(\exists y)(\forall x)[\mathcal{PRED}(x, y) \leftrightarrow X(x)],$$

v němž proměnná X automaticky probíhá přes všechny podmnožiny univerza řádu $n - 1$, a zajišťuje tedy dostatečný počet reprezentantů v příslušné n-té sortě objektů.[14]

4.6 Co je číslo?

Obrat k jazyku přivedl Frega [1884] ke zkoumání užití čísel ve větách, vedeném pod hlavičkou otázky "o čem je vypovídáno číslo?". Frege přitom rozlišuje dva typy kontextů, v nichž se číslovky běžně vyskytují:

(1) ADJEKTIVNÍ jako "mušketýři jsou čtyři", v nichž se zdá číslovka fungovat gramaticky stejně jako ve větě "mušketýři jsou stateční", tj. po způsobu přídavného jména,

(2) SUBSTANTIVNÍ, k nimž se řadí většina vět matematiky, dejme tomu "5 je prvočíslo" či "5 = 2 + 3", v nichž je analogicky

[14] Detaily viz Shapiro [1991, kap. 6].

k větám "Mušaraf je generál" a "Mušaraf je pákistánský prezident" připisována substantivu nějaká vlastnost, resp. tvrzena identita dvou předmětů.

Začneme-li analýzou prvního typu použití, záhy odhalíme podstatný rozdíl uvedených vět, spočívající v tom, že se fráze "být čtyři", na rozdíl od fráze "být statečný", nechová distributivně, tj. není připisována každému jednotlivému mušketýrovi, např. Aramisovi, ale jejich celku. Průběžný pokus o odpověď na otázku, k čemu se vztahuje číslo, by tedy mohl znít:

číslo se vztahuje k množině předmětů.

Úvodem kapitoly jsme ale již v souvislosti s Quinovým tématem neurčitosti *deixe* zmínili, že pro Frega je toto řešení neakceptovatelné, není-li příslušná množina dána prostřednictvím jednotícího pojmu, tj. neřekneme-li, čeho že to je množina. Toto, tj. teze:

číslo se vztahuje k pojmu,

je také výsledek první, kritické části Fregových *Grundlagen*. V jejím závěru Frege [1884, § 53] ještě upozorňuje, že v náležení pojmu se podobá přípis čísla přípisu existence, neboť stejně jako nedává žádný netriviální smysl říkat, že Fidelio existuje, nedává smysl ani říkat, že je jeden, nedodáme-li např., že je to jediná Beethovenova opera, apod. V pojmovém písmu se tento rozdíl odráží v tom, že větu:

$(\exists! x)(x = \text{Fidelio})$,

která tvrzení existence Fidelia odpovídá, lze odvodit z tautologie:

Fidelio $=$ Fidelio,

ne tak již větu:

$(\exists! x)(x$ je Beethovenova opera),

k níž potřebujeme znát jak empirický fakt toho, že Beethoven Fidelia napsal, tak fakt, že v opeře nenapsal nic jiného. Paralela přípisu čísla s přípisem existence je o to významnější, že se také v jejím případě jedná o numerické vyjádření, totiž kvantifikaci predikátu jakožto neprázdného, tj. obsahujícího alespoň jeden prvek. Na tomto postřehu staví Frege [1884, § 55] svoji první definici čísla, jíž začíná druhá, konstruktivní část jeho *Grundlagen*.

Podle této koncepce jsou čísla uchopena jako typ zobecněných kvantifikátorů, tj. výrazů typu $(t \prec s) \prec s$, konkrétně pak tzv. NUMERICKY DEFINITIVNÍCH KVANTIFIKÁTORŮ. Ty jsou definovány induktivně takto:

A1 $(\exists_0 x)F(x) \rightleftharpoons \neg(\exists x)F(x)$,

A2 $(\exists_{n+1} x)F(x) \rightleftharpoons (\exists y)[F(y) \wedge (\exists_n x)(F(x) \wedge x \neq y)]$.

Numerický kvantifikátor $(\exists_m x)X(x)$ je pojmem druhého řádu, který náleží pojmu $F(x)$ řádu prvního tehdy a jen tehdy, jestliže pod tento spadá přesně m předmětů. — Mírně matoucí je, že adjektivní definici Frege formuluje jen jako pokus, který je třeba odmítnout a nahradit jiným, založeným na analýze substantivní. Jako námitky uvádí, že

(1) číslovka n se v *definiendu* nevyskytuje explicitně, ale tvoří nerozbornou část predikátu "pojmu X přísluší číslo n", a my tak nejsme na základě uvedené definice s to rozhodnout, zda $n = m$,

(2) čísla tím pádem nemohou být uchopena jako samostatné předměty,

(3) definice nedovoluje zodpovědět otázku, zda je Julius Caesar číslo.

Fregova argumentace je přitom velmi nepřehledná. Jasné je zprvu pouze to, že preferuje substantivní interpretaci číslovek, neboť je typická pro matematický diskurz: číslovky se vyskytují po stranách rovnosti, je přes ně kvantifikováno. Další zasazení Fregových námitek do kontextu jeho filosofie nám zprvu příliš nepomůže. V první řadě není vysvětleno, proč by měla být substantivní analýza čísla *a priori* nadřazená té adjektivní, tedy proč by např. aritmetické věty nemohly mít skrytě adjektivní strukturu, jak to ostatně i nabízí předvedená analýza čísel coby numerických kvantifikátorů. Větu $2 + 3 = 5$ lze např. rozložit do věty:

$$(\exists_2 x)F(x) \wedge (\exists_3 x)G(x) \wedge (\exists_0 x)(F(x) \wedge G(x)) \rightarrow (\exists_5 x)(F(x) \vee G(x)),$$

logicky dokazatelné z (A1–2) a řady notačních zkratek $1 \overset{\text{def}}{=} 0 + 1$, $2 \overset{\text{def}}{=} 1 + 1$, $3 \overset{\text{def}}{=} 2 + 1, \ldots$, tedy ze samých definicí, jak to odpovídá tradičním cílům analytického projektu. Pro přepis kvantifikovaných vět jako třeba $(\forall x)(x + 0 = x)$ se zase zdá postačující nahradit v rámci logiky vyšších řádů symboly numerických kvantifikátorů speciální proměnnou:

$$(\forall I)[IxF(x) \wedge (\exists_0 x)G(x) \wedge (\exists_0 x)(F(x) \wedge G(x)) \rightarrow Ix(F(x) \vee G(x))].$$

Problém je samozřejmě v tom, že tato nová proměnná probíhá přes všechny pojmy druhého řádu, nikoli pouze přes čísla, jak to předpokládáme u původní věty. To by se dalo napravit, kdybychom byli čísla od ostatních predikátů s to odlišit, kdybychom tedy disponovali predikátem třetího řádu, který by garantoval, že daný pojem druhého řádu je číslo, nebo není. Tím ovšem pouze opakujeme Fregův problém Julia Caesara, tedy až na to, že se nenacházíme na úrovni předmětu (vlastního jména), na níž se vyskytuje dobyvatel Galie, ale o dvě úrovně výš, tj. na úrovni pojmů (predikátů) řádu druhého, a že nezastáváme myšlenku všeobjímajícího univerza diskurzu, a nemáme tedy potřeby vymezit čísla vůči všem entitám dané sémantické kategorie. — Frege má sice pravdu, že kýžený predikát nelze dostat přímo z induktivní definice (A1–2), je to ale jím objevená metoda minimálního uzávěru, kterou popíšeme záhy, co nám v principu dovoluje shrnout takto zavedená individuální čísla do jednoho celku, byť v atypické aplikaci na objekty vyššího řádu. Tím je odbyt implicitní předpoklad Fregových námitek, totiž že na adjektivním čtení číslovek není možné postavit životaschopnou analýzu vět aritmetiky. Námitky samy lze nyní již vyřídit snadno.

Především si je třeba uvědomit, že definovanými čísly jsou samotné numerické kvantifikátory, tj. nikoli indexy jejich konstrukce. Jsou to tedy příslušné predikáty, pro co by měla být specifikována kritéria identity. Řekli jsme sice dříve, že rovnost je znakem předmětnosti, tedy něčím, čím se liší jméno od výrazů jiné kategorie, zároveň jsme ale upozornili na to, že se v otázkách konstituce významu prostřednictvím identit jedná o záležitost relativní. Poznamenali jsme navíc, že již s rozhodnutím kvantifikovat přes výrazy je spjat závazek specifikovat obor, k němuž se tato kvantifikace vztahuje, což obnáší stanovení příslušných kritérií identity pro příslušné jazykové reprezentace.

Je přitom známo, že Frege sice na jednu stranu emfaticky odmítá ztotožňování pojmu s množinou předmětů, které pod něj spadají, nicméně na přímý dotaz po možné identitě dvou pojmů [1983, s. 131] připouští, že je ji třeba chápat spíše *extenzionálně*, tj. že dvěma výrazům odpovídá týž pojem, jestliže platí o stejných entitách:

$$F(x) =_{x,y} G(y) \;\rightleftharpoons\; (\forall x)[F(x) \leftrightarrow G(x)].$$

Analogicky k této identitě lze snadno definovat binární relaci třetího řádu:

$$MxX(x) =_{X,Y} OxY(x) \;\rightleftharpoons\; (\forall X)[MxX(x) \leftrightarrow OxX(x)]$$

a problém s čísly jako kvantifikátory je vyřešen.[15] Mohl a měl tedy Frege podržet svoji první definici a nevydávat se jiným směrem? Záhy uvidíme, že nikoli, že tedy měl vážné technické důvody, proč aritmetiku

[15] Indexováním rovnosti argumenty příslušných pojmů fixujeme, čeho že jsou to pojmy. Nutnost tohoto opatření je patrná až u pojmů víceargumentových, kdy by mohly nastat nejasnosti v tom, která proměnná byla kvantifikována na pravé straně definice. S indexy v definicích pojmů vyšších řádů se budeme nadále setkávat často, stejně často je ale budeme vynechávat v případech, kdy žádné nedorozumění nehrozí. Indexy běžně užíváme např. v rámci množinové abstrakce, tj. u výrazů jako je $\{x \mid R(x,y)\}$, který chápeme jako označení množiny všech x (nikoli y) takových, že $R(x,y)$. Proměnná x je příslušným indexem vázána stejně jako indexem kvantifikátoru $(\forall x)R(x,y)$.

založenou na adjektivní analýze odmítnout. Přejděme proto již k jeho druhému pokusu, založenému na analýze substantivní.

Poté, co se Frege se rozhodl, že vysvětlit substantivní užití čísla z adjektivního není možné a že pravý tvar číslovky je definitivně tvarem vlastního jména, ocitl se před inverzním problémem: (1) jak vysvětlit užití adjektivní z užití substantivního a (2) jak zachránit velkou a evidentně zdravou část dosavadní analýzy, z níž vyšlo číslo jako něco, co přísluší pojmu. Klíčem k řešení bodu (1) je samozřejmě ukázat, že věty jako

A) Jupiter má čtyři měsíce

či "mušketýři jsou čtyři" mají také substantivní strukturu, tedy že jejich forma logická neodpovídá formě, k níž nás svádí gramatika. Přepíšeme-li nyní větu (A) do formy

B) Jupiterovy měsíce jsou čtyři,

je zřejmé, že jak v ní, tak ve větě "mušketýři jsou čtyři" sloveso "být" funguje jako kopula, nikoli výraz pro rovnost. — Právě to z nich přirozeně dělá případy užití adjektivního. K identitě lze ale podle Frega snadno přejít, upravíme-li větu (B) na

C) počet Jupiterových měsíců je čtyři.

Tím je jednak vysvětlen bod (1), alespoň dílem ale také bod (2), neboť na místě východiska celé substantivní strategie se ocitá komplexní jmenný výraz, skládající se z druhořádového funktoru "počet X", přesněji "počet$_x X(x)$", či symbolicky:

$$\mathcal{N}_x X(x),$$

tedy výraz kategorie $(t \prec s) \prec t$, nasytitelný predikátem $F(x)$ prvního řádu. Číslo je takto opět dáno do souvislosti s pojmy, tentokráte ale nikoli jakožto speciální druhořádový operátor, přiřazující pojmům pravdivostní hodnoty, tj. výraz kategorie $(t \prec s) \prec s$, ale jakožto výsledek aplikace druhořádového operátoru $\mathcal{N}_x X(x)$, tzv. KARDINÁLNÍHO OPERÁTORU, na nějaký pojem, tedy jako výraz kategorie t.

Jelikož podle Frega nelze od výrazu k číslu coby samostatnému předmětu dospět jinak nežli stanovením kritérií identity, musí být nyní primárně ohodnoceny pravdivostní hodnotou všechny výrazy tvaru

$$\mathcal{N}_x F(x) = \mathcal{N}_x G(x).$$

Otázka je, jak na to. Řekneme-li přitom, že by dvěma pojmům mělo být přiřazeno stejné číslo tehdy a jen tehdy, jestliže pod ně spadá stejný počet předmětů, zní to jako pouhý pleonasmus. To je ale v jistém smyslu vinou přirozeného jazyka, který nám na rozdíl od jazyka formálního zastírá, že pravou stranu této 'triviality' lze na rozdíl od rovnosti strany levé uchopit jako druhořádovou relaci $\mathcal{EQ}$ takovou, že

$$\begin{aligned}\mathcal{EQ}_{x,y}(F(x), G(y)) \rightleftharpoons (\exists R)\{(\forall x)[F(x) \to (\exists! y)(G(y) \wedge R(x,y))] \\ \wedge (\forall y)[G(y) \to (\exists! x)(F(x) \wedge R(x,y))]\},\end{aligned}$$

tedy vztah, v němž se dva pojmy nacházejí tehdy a jen tehdy, lze-li si pod ně spadající předměty jedno-jednoznačně přiřadit. Obvykle se mu říká ROVNOPOČETNOST (*Gleichzahligkeit*, *equinumerosity*). Výsledné kritérium má potom podobu

$$\mathsf{HP}\quad \mathcal{N}_x F(x) = \mathcal{N}_x G(x) \leftrightarrow \ \mathcal{EQ}_{x,y}(F(x), G(y))$$

a ve fregovské literatuře se pro ně ustálil Boolosův název HUMŮV PRINCIP, podle Fregova [1884, § 63] odkazu na následující místo z Humova *Treatise of Human Nature* [1739/1740, kniha I, část III, oddíl I, § 5]:

> Mají-li se k sobě dvě čísla tak, že nějaká jednotka jednoho odpovídá vždy každé jednotce druhého, prohlásíme je za rovná.

Co do formy vyhlíží HP jako pokus o definici *rovnosti* čísel. Není to ale rovnost, upozorňuje Frege, nýbrž číslo samo, co potřebuje být v rámci logicistického programu definováno. Jak by ale měla tato definice vypadat, když víme, že (1) *deixe*, možnost vykročit mimo jazyk, je nám v případě abstraktních předmětů aritmetiky přinejmenším v obvyklém, přímém smyslu odepřena, a (2) i kdyby nám odepřena nebyla, nestačila by k určení příslušného významu? (3) Možnost explicitního určení čísla pomocí stávajících logických operátorů, jako tomu bylo v případě definice adjektivní, rovněž nepřichází v úvahu, neboť tentokráte žádnou funkcí (konstantou) kategorie $(t \prec s) \prec t$ nedisponujeme, ani ji nejsme schopni získat konvenčním způsobem, tj. explicitním složením z konstant stávajících.

Přirozeně se tedy nabízí uchopit jako konstantu operátor kardinality samotný. Jeho úloha v logickém systému nemůže být samozřejmě stanovena explicitně, snad by to ale bylo možné kontextuálně, podobně jako je úloha existenčního kvantifikátoru vyjádřitelná formulí (axiomem):

$$F(N) \to (\exists x)F(x).$$

Médiem tohoto uchopení — definicí — čísla v kontextu věty by mohl být právě HP jakožto jediný předpoklad, který na čísla, resp. operátor $\mathcal{N}_x X(x)$, jehož jsou hodnotami, klademe. — Frege si byl samozřejmě vědom atypičnosti, s níž je označení Humova principu za definici spjato, a jelikož byl sám zastáncem pojetí "přísných pravidel definování", protežujících především explicitní definice, byl z něho i patřičně nesvůj. Při pokusu o jeho obhajobu v *Grundlagen* [1884, § 63 n] se odvolával zejména k tomu, že tento způsob implicitního zavádění nových předmětů je v matematice hojně využíván, a to v procesu tzv. logické abstrakce. Právě jeho prostřednictvím bylo dosaženo redukce vyšších číselných oborů na přirozená čísla, jak jsme o ní mluvili především v kapitole 2. Nyní se na abstrakční proceduru podíváme znovu a ve zcela obecné rovině.

4.7 Definice abstrakcí

Nauka o definici patřila k Fregovým oblíbeným tématům zejména proto, že se vůči ní většina jeho spoluputovníků v oblasti výzkumu základů matematiky hrubě prohřešovala. Jednalo se zejména o tendence zavádět nové objekty prostou stipulací, jakýmsi vyvářením z ničeho, díky kteréžto libovůli — jak se Frege [1983, s. 78] vyjádřil směrem ke Cantorovi — "není člověk dalek všemohoucnosti".[16] Definice v pravém slova smyslu (*eigentliche Definition*) je podle Frega [1983, s. 224] prostá notační konvence, jíž je novému symbolu, DEFINIENDU, stojícímu nalevo od znaku definitorické ekvivalence ($\rightleftharpoons$), dán význam prostřednictvím symbolů již zavedených, tvořících tzv. DEFINIENS strany pravé, u něhož je význam předpokládán. Zavádí se tedy nový znak, nikoli předmět, a celá záležitost je proto především otázkou větší přehlednosti a pohodlí.

Potřeba zavést logické předměty prostředky logického aparátu, který elementárními konstantami skládajícími typ 'vlastní jméno' nedisponoval, postavil ovšem Frega před těžce řešitelné dilema použití něčeho, co celý život kritizoval, totiž definice produktivní povahy (*schöpferische Definition*).[17] Takováto definice by se nemohla lišit pouze od definice explicitní, ale i od smysluplné věty, v níž — právě aby byla smysluplná — musí být význam všech užitých znaků předpokládán jako známý, a nelze jej tam tedy teprve zavádět. Název implicitní či kontextuální definice je ale na rozdíl od pojmu definice explicitní příliš vágní na to, abychom jej mohli jen tak označit za Fregem navržený třetí typ větného výrazu logických textů. Jak navíc uvidíme v příští kapitole, je termín "implicitní definice" zpravidla užíván pro specifický pojem Hilbertův.

[16] Citát pochází z textu věnovaného obvyklým logickým nešvarům matematických textů, který se v souvislosti naší kapitoly vyplatí uvést celý: "Spatří-li černoši ve vnitřní Africe poprvé dalekohled nebo hodinky, mívají sklon připisovat těmto věcem podivuhodné kouzelné vlastnosti. Něco podobného se stává mnohým matematikům s filosofickými výrazy. Mám na mysli zvláště tyto: 'definovat' (Brahma), 'reflektovat' (Višnu), 'abstrahovat' (Šiva). Připojená jména indických božstev naznačují kouzelné účinky, které jsou přitom předpokládány. [...] V držení těchto kouzelných sil není člověk dalek všemohoucnosti. Význam této možnosti lze sotva změřit. Pomysleme např. na její hodnotu pedagogickou: učitel má dobromyslného, ale líného a hloupého žáka. Abstrahuje tedy od jeho lenosti a hlouposti, přičemž stále reflektuje na jeho dobromyslnost. Následně mu definicí udělí vlastnosti píle a chytrosti. Prozatím se ovšem člověk omezil jen na matematiku."

[17] Viz Frege [1893/1903, díl II, § 143].

Pojem kontextuální definice je v obecném povědomí spjat především s Russellovou teorií deskripcí, resp. s jeho naukou o neúplném symbolu. Výraz typu $\iota x P(x)$ nemůže být podle Russella zaveden explicitně, protože bychom mu tak museli přiřadit předmět, který eventuálně neexistuje. Je proto předveden v kontextu celé věty, resp. větného schématu, jemuž je definicí přiřazen způsob, jak $\iota x P(x)$ z tohoto kontextu eliminovat, konkrétně:

$$F(\iota x P(x)) \;\rightleftharpoons\; (\exists x)[P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \to x = y) \wedge F(x)].$$

Množinové termy $\{x \mid F(x)\}$ lze zase eventuálně zavést takto:

$$N \in \{x \mid F(x)\} \;\rightleftharpoons\; F(N),$$

tj. jako součást komplexní notace, která proměňuje implicitní predikaci vlastnosti předmětu či předmětům v explicitní vyjádření vztahu dvou entit. Podstatné je, že mimo uvedený kontext, a to především po stranách rovnosti, nedávají výrazy $\iota x P(x)$ a $\{x \mid F(x)\}$ smysl. Nejsou to vlastní jména, u nichž lze třeba od výskytu ve větě $F(N)$ přejít k větě $(\exists x)(F(x) \wedge x = N)$, ale neúplné symboly, tedy pevné části komplexních notačních zkratek $F(\iota x P(x))$ a $N \in \{x \mid F(x)\}$, jimiž lze nahradit věty na pravé straně výše uvedené definice. Z tohoto důvodu se zdá být užití symbolu $\rightleftharpoons$ oprávněné.

U abstrakčních definicí, jak je Frege prezentuje v *Grundlagen*, se ale má věc jinak. Jak jsme již několikráte rozvedli, bází procesu logické abstrakce je ekvivalence mezi nějakými stávajícími, již konstituovanými objekty, např. (1) pojmy jako v případě rovnopočetnosti, (2) dvojicemi přirozených čísel či (3) koncentrovanými posloupnostmi:

$$(1) \qquad F \sim_1 G \;\rightleftharpoons\; \mathcal{EQ}_{x,y}(F(x), G(y)),$$

$$(2) \qquad \langle p, q\rangle \sim_2 \langle r, s\rangle \;\rightleftharpoons\; ps = qr,$$

$$(3) \qquad (a_n)_{n\in\mathsf{N}} \sim_3 (b_n)_{n\in\mathsf{N}} \;\rightleftharpoons\; \lim(a_n - b_n)_{n\in\mathsf{N}} = 0.$$

Podstatou definice je proměna této ekvivalence v rovnost nových předmětů. Frege [1884, § 64] jako příklad volí případ přímek a relaci rovnoběžnosti:

> Soud “přímka a je rovnoběžná s přímkou b”, symbolicky $a \parallel b$, lze uchopit jako rovnost. Učiníme-li tak, získáme pojem směru a řekneme: “Směr přímky a je roven směru přímky b.” Nahrazujeme tedy symbol $\parallel$ obecnějším $=$, a to tak, že zvláštní obsah prvního z nich rozdělujeme mezi a a b.

Máme tedy opět nějakou výchozí ekvivalenci:

$$(4) \qquad a \sim_4 b \;\rightleftharpoons\; a \parallel b,$$

kterou v druhém kroku transformujeme na rovnost, tj. stanovujeme:

$$(1') \quad \mathcal{N}_x F(x) = \mathcal{N}_x G(x) \;\leftrightarrow\; F \sim_1 G,$$

$$(2') \quad \tfrac{p}{q} = \tfrac{r}{s} \;\leftrightarrow\; \langle p, q \rangle \sim_2 \langle r, s \rangle,$$

$$(3') \quad \lim(a_n) = \lim(b_n) \;\leftrightarrow\; (a_n) \sim_3 (b_n),$$

$$(4') \quad \vec{a} = \vec{b} \;\leftrightarrow\; a \sim_4 b.$$

Obecná forma definice tohoto typu je tedy:

$$\text{DA} \qquad \#(a) = \#(b) \;\leftrightarrow\; a \sim b,$$

kdy operátor $\#(x)$ nazýváme ABSTRAKTOR. Dosti často, jako zde v případě racionálních čísel, se v názvu abstraktní entity ztratí entita původní, tj. abstraktor splývá s částí notace.

Srovnáme-li nyní definici abstrakcí s původními příklady kontextuálních definicí, vidíme, že výrazy typu $\#(x)$ jsou sice také zaváděny v kontextu specifické věty, totiž rovnosti, nyní ale právě proto, že je tento výskyt nutná a postačující podmínka jejich využití coby vlastního jména, tj. rovnou se předpokládá, že budou substituovatelné za jakékoli jiné výskyty jmen, a naopak, že je samotné bude možné nahradit předmětnou proměnnou. Podle Frega [1884, § 65] proto k *definiens* abstrakční definice nepatří pouze pravá strana ekvivalence, ale i symbol (prvořádové) rovnosti na straně levé, jenž ve svém obecném logickém významu zachycuje substituovatelnost přidružených výrazů, a to substituovatelnost *salva veritate*. Na jedné straně je tu tedy (i) explicitní definice a Russellova definice kontextuální, v nichž je od sebe symbolem $\rightleftharpoons$ ostře odděleno definující a definované, na straně druhé (ii) smysluplná věta, v níž není definováno nic a vše se předpokládá jako dané, mezi nimi pak jako pokus o spojení bezobsažnosti, analytičnosti definice první s netriviálností druhé (iii) Fregova definice čísla abstrakcí. V definicích ($1'$–$4'$) proto systematicky užíváme znaku $\leftrightarrow$.

Analytičnost (DA) podle Frega [1884, § 64] spočívá v tom, že levá strana principu předkládá pouhou alternativní ‘analýzu’ strany pravé, rozkládá ji tedy *pouze* jiným způsobem do tvaru, v němž figuruje rovnost coby klín celého tvůrčího procesu. V důsledku toho mají obě strany stejné pravdivostní podmínky a jejich ekvivalence je tautologická. Kritický čtenář Fregova zdůvodnění jistě zůstane na pochybách, zda lze celý již tak dosti odvážný podnik ospravedlnit pouze na bázi tohoto příměru, když není vůbec jisté, zda nahrazení ekvivalence rovností nevede v obecném případě ke sporu. — Vždyť ekvivalentní předměty nemusí být předměty stejné! — Pečlivé čtení textu *Grundlagen* [1884, § 65] ale ukazuje, že Frege byl takové naivitě dostatečně vzdálen, když píše:

> Abychom ospravedlnili náš pokus o definici směru přímky, musíme tedy ukázat, že je možné výraz "směr přímky a" nahradit výrazem "směr přímky b" vždy tehdy, kdykoli je přímka a rovnoběžná s přímkou b. To máme jednodušší o to, že nám zprvu není o směru přímky známa žádná jiná výpověď nežli tvrzení jeho rovnosti se směrem přímky jiné. Musíme tedy pouze prokázat jejich zaměnitelnost v takovýchto rovnostech nebo v obsazích, jež by mohly být částmi takovýchto rovností. Všechny ostatní výpovědi o směrech musí být teprve zavedeny a pro tyto definice požadujeme pravidlo zachování zaměnitelnosti směru přímky směrem přímky s ní rovnoběžné.

Abstrakce tedy nespočívá pouze v nahrazení ekvivalence rovností či jména konkrétního objektu jménem nějakého objektu abstraktního, ale primárně v ošetření příslušného kontextu tak, aby platila substituovatelnost *salva veritate* výrazů $\#(x)$. Toho dosáhneme v několika krocích:

(1) Omezíme kontext na výrokové formy invariantní k dané ekvivalenci $\sim$, tj. takové predikáty F, pro něž platí: jestliže $F(M)$ a $M \sim N$, pak $F(N)$. (Viz oddíl 4.2.)

(2) Tím nejprve proměníme výchozí ekvivalenci $\sim$ v kongruenci $\sim_L$, kde L je jazyk invariantních predikátů. Kongruence sama je jakousi latentní, nerealizovanou rovností. (Viz oddíl 4.3.)

(3) Rovnost samu získáme reflexí na takto získaný systém vět, když původní objekty uskupíme v souladu s Leibnizovým principem jakožto *clustery* lokální nerozlišitelnosti.

(4) Modifikací původních reprezentací operátorem # fixujeme explicitně přechod od jednoho kontextu k druhému, 'abstraktnějšímu'.

Takto, tedy vytvářením větších a větších reprezentačních *clusterů*, rezignací na další a další rozlišení, tj. hrubšími a hrubšími ekvivalencemi, lze v procesu abstrakce podle chuti a potřeb postupovat k předmětům abstraktnějším a abstraktnějším, až po totální jednotu, splynutí všeho v jediné. Případný metafyzický komentář tohoto závěru ponecháme na čtenáři. Pro nás je podstatné, že popsaný přechod od konkrétního k abstraktnímu není nic mystického, ani — ve své podstatě — podléhajícího zvláštním duševním schopnostem nadaného jedince. Ve skutečnosti pracujeme stále s týmiž symboly (reprezentacemi) a měníme jenom způsob naší řeči (*figure of speech*, *façon de parler*), jak jsme se o tom již zmínili v oddíle 4.2.

Hovoříme-li o abstrakci, máme tím tedy v první řadě na mysli abstrakci od těch jazykových forem, které nejsou invariantní k dané ekvivalenci, tedy něco objektivně fundovaného. Proto příslušný proces již poněkolikáté nazýváme ABSTRAKCÍ LOGICKOU, v kontrastu k tradičním formám ABSTRAKCE PSYCHOLOGICKÉ, operujícími s nějakou formou mentální nepozornosti, odmýšlením nevhodných distinkcí, jak byla a je vlastně dodnes rozšířena v úvodních kapitolách matematických učebnic a monografií, pokoušejících se spíše z rozmaru nežli z vnitřní povinnosti zdůvodnit užité elementární pojmy, jako je 'množina', 'funkce' či 'číslo'. My jsme jako ilustraci takové definice v oddíle 2.8 zmínili Cantorovo vymezení kardinálního a ordinálního čísla jakožto momentů postupného odhlížení od 'povahy' a nakonec i pořadí počítaných prvků.

Nyní je také zřejmé, že proměna ekvivalence v rovnost je pouhá sugestivní metafora pro transformaci jednoho kontextu v kontext nový, tedy pro užití jistých symbolů jiným způsobem. Tuto změnu lze vizualizovat modifikací původních reprezentací abstraktním operátorem, jak se to děje již v přirozeném jazyce, rozlišujeme-li např.

představu králíka	znak (*token*) 3
slovo králík	číslovku (*type*) 3
pojem králíka	přirozené číslo 3
skupinu králíků	reálné číslo 3.

Na podstatě věci tyto modifikace ale nic nemění, tj. vizuální změna samotná z výrazu ještě jméno abstraktní entity nedělá! V jistém smyslu je tu vždy jenom původní výraz ("králík", "3") a různé způsoby jeho užití. Připojování abstraktních modifikátorů je z obecného hlediska problému vystižení podstaty abstrakce stejně marné jako připojování slova "pravdivý" k větě s nadějí, že se nám tak podaří vystihnout podstatu pravdivosti. Jak upozornil Frege ve svém slavném reduktivním argumentu, vyslovením nebo napsáním skutečnosti, že je věta A pravdivá, jako "A je pravdivá", neříkáme nic víc než A, případně to samé jako "věta 'A je pravdivá' je pravdivá". Ve skutečnosti je to, na čem zde záleží, tvrdící síla, pragmatický akt spojený s vyslovením věty.[18]

V naší transcendentální dikci se principy abstrakce jeví jednoduše jako způsoby, jak ohodnotit věty jistého kontextu odkazem na věty již ohodnocené. HP je takto návodem, jak ohodnotit věty elementární aritmetiky odkazem ke každodenní praxi počítání předmětů a jejich porovnávání s předměty jinými. Z čistě teoretického hlediska je nicméně jasné, že ačkoli HP zavádí abstraktní výraz $\mathcal{N}_x F(x)$ pouze v kontextu věty

$$\mathcal{N}_x F(x) = \mathcal{N}_x G(x),$$

připouští i jeho užití ve větě

$$\mathcal{N}_x F(x) = M,$$

[18] Srov. k tomu citát na straně 235.

kde je M libovolné vlastní jméno, tedy i jméno potenciálně jiného tvaru než $\mathcal{N}_x F(x)$. Odsud však na rozdíl od prvního případu nejsme schopni jeho výskyt eliminovat, jinými slovy: tyto věty jsou co do pravdivostní hodnoty na bázi HP nedourčeny. Jelikož jiným principem týkajícím se významů výrazů typu $\mathcal{N}_x F(x)$, *nota bene* principem analytickým, v tuto chvíli nedisponujeme, vrátili jsme se opět k problému Julia Caesara.

Jestliže Frege o novém typu věty–definice očividně pochyboval, znovuvynoření problému Julia Caesara mu bylo v *Grundlagen* přímým podnětem, aby kontextuální definici čísla zamítl a nahradil definicí explicitní. Tu měla ospravedlnit jiná matematická zvyklost, nahrazující řeč o předmětech jisté vlastnosti řečí o jejich množině, tj. přechod od pojmu F k množině $\{x \mid F(x)\}$. Právě tato zvyklost vedla v moderní sémantice k interpretaci prvního (predikátu) druhým (podmnožinou nosiče).

Frege o $\{x \mid F(x)\}$ hovoří tradiční terminologií jako o "rozsahu pojmu F" či vlastní terminologií jako o PRŮBĚHU HODNOT funkce F, jímž ovšem není v obecném případě množina, ale spíše cosi jako graf funkce F, Fregem značený jako

$$\grave{\alpha}F(\alpha).$$

My se v dalším zpravidla omezíme na průběhy pojmů, tj. funkcí do pravdivostních hodnot. Ať tak či tak, rozsah pojmu, průběh hodnot, množina, agregát atd. mají podle Frega na rozdíl od pojmu tu přednost, že jsou užívány substantivně, přechod od adjektivní k substantivní analýze je tedy zvláště bezbolestný, ba vyhlíží vlastně jen jako záležitost vkusu. Nic nebylo vzdálenější pravdě, jak se záhy přesvědčíme.

Korespondence pojmů a jejich rozsahů (množin) nabízí přímý návod, jak odvodit explicitní definici čísla v substantivní verzi z verze adjektivní: namísto pojmu druhého řádu, příslušejícího těm a jen těm pojmům prvního řádu, pod něž spadá určitý stejný počet předmětů, tj. jsou v relaci $\mathcal{EQ}$, stačí vzít jeho rozsah. Toto je třetí a poslední definice čísla podaná v *Grundlagen* [1884, § 68]. Operátor $\mathcal{N}_x X(x)$ nyní libovolnému pojmu F přiřazuje množinu všech pojmů, které jsou s ním v relaci $\mathcal{EQ}$ neboli všech pojmů s F rovnopočetných. Symbolicky:

NX $\mathcal{N}_x F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{H \mid \mathcal{EQ}_{x,y}(H(x), F(y))\}.$

Pro tento způsob definice se v dnešní logicko-matematické praxi vžil také název "definice abstrakcí" a ve skutečnosti je používán skoro výhradně v tomto smyslu, nikoli ve smyslu (DA). Jeho základní myšlenka spočívá v tom, že od původního předmětu x, nacházejícího se v oboru předmětů s definovanou ekvivalencí $\sim$, přejdeme k novému objektu, totiž množině předmětů s ním ekvivalentních, neboli třídě ekvivalence $[x]_\sim$. DEFINICE EXPLICITNÍ ABSTRAKCÍ má takto nám známou podobu:

DX $[x]_\sim \stackrel{\text{def}}{=} \{y \mid y \sim x\}.$

Příčina její obliby je zřejmá: libovolný abstraktní předmět je možné explicitně definovat nad bází jednoho univerza jakožto množinu určité vlastnosti. Přirozená čísla jsou množiny všech rovnopočetných množin, racionální čísla jsou množiny dvojic (tj. rovněž množin)[19] čísel přirozených, reálná čísla jsou množiny posloupností, případně řezů (tedy rovněž množin) čísel racionálních atd. Všechny implicitní definice (1′–3′), případně (4′), se tak redukují na explicitní. Problém zůstává jediný: jaký abstraktní předmět je množina, resp. fregovský průběh hodnot.

V *Grundlagen* [1884, § 68] Frege tuto otázku odsouvá stranou s tím, že rozsah pojmu lze v podstatě užívat stejným způsobem jako samotný pojem, i když poněkud nesměle tvrdí, že pojem na rozdíl od rozsahu pojmu nemusí mít extenzionální kritéria identity, daná výše uvedenou definicí. Záhy se ovšem pokouší odvodit HP, tj. původní implicitní definici čísla, z nynější definice explicitní následujícím způsobem. Dosadíme-li do HP *definiens* explicitní definice (NX), získáme ekvivalenci:

$$[F]_{\mathcal{E}\mathcal{Q}} = [G]_{\mathcal{E}\mathcal{Q}} \leftrightarrow \ \mathcal{E}\mathcal{Q}_{x,y}(F(x), G(y)),$$

kterou máme dokázat. Podle Frega [1884, § 73] máme směr zprava doleva zdůvodnit tak, že ukážeme platnost ekvivalence

$$\mathcal{E}\mathcal{Q}_{x,y}(H(x), F(y)) \leftrightarrow \mathcal{E}\mathcal{Q}_{x,y}(H(x), G(y))$$

pro libovolný pojem H. Tento závěr je ale evidentní důsledek nevysloveného předpokladu, že se třídy $[F]_{\mathcal{E}\mathcal{Q}}$ a $[G]_{\mathcal{E}\mathcal{Q}}$ rovnají tehdy a jen tehdy, jestliže pod ně spadají tytéž pojmy (objekty), tj. jestliže

$$(\forall X)[\mathcal{E}\mathcal{Q}_{x,y}(X(x), F(y)) \leftrightarrow \mathcal{E}\mathcal{Q}_{x,y}(X(x), G(y))].$$

Teprve máme-li tento princip, lze HP dokázat, a to pouze z faktu, že je rovnopočetnost relací ekvivalence! Zapíšeme-li nyní Fregův skrytý předpoklad zcela obecně pro libovolné průběhy hodnot prvního řádu:

$$\mathsf{GV} \quad \{x \mid F(x)\} = \{x \mid G(x)\} \leftrightarrow (\forall x)(F(x) \leftrightarrow G(x)),$$

vidíme, že se opět jedná o případ definice abstrakcí, a to definice implicitní, tj. tvaru (DA), jemuž se chtěl Frege pro případ HP vyvarovat. Převedl však pouze problém implicitní definice kardinálního operátoru $\mathcal{N}_x X(x)$ na obecnější rovinu, totiž implicitní definice MNOŽINOVÉHO OPERÁTORU $\{x \mid X(x)\}$, rovněž výrazu kategorie $(t \prec s) \prec t$. Tento princip, v *Grundlagen* nevyřčený, zařadil Frege v *Grundgesetze* mezi své základní zákony aritmetiky jako tzv. GRUNDGESETZ V. Z dnešního pohledu se jedná o verzi axiomu extenzionality, podle něhož jsou dvě množiny stejné, jestliže mají tytéž prvky. Naposledy jsme se s ním setkali v oddíle 4.5.

[19] Redukce uspořádaných dvojic prvků na jejich množiny je podána na straně 394.

Jako ospravedlnění této ekvivalence coby logického principu měla Fregovi posloužit běžná matematická praxe, totiž obvyklý přechod od pojmu k jeho rozsahu, od ekvivalence stejných hodnot pro stejné argumenty k rovnosti rozsahů (extenzí), od nevyjádřeného, implicitního vztahu funkcionální aplikace $F(N)$ k explicitní relaci náležení

$$N \in \{x \mid F(x)\}.$$

Opět si zde tedy pohráváme s rozšířením ‘přirozeného’, objektového jazyka o výrazové prostředky jeho metajazykové reflexe, kategorizace do typů a jejich formálně-sémantického spojování. Míšení obou rovin ale tentokráte nekončí znásobením expresivní síly, nýbrž explozí: na světě je Russellův paradox.

4.8 Russellův paradox

Russellova antinomie, která se s ohledem na její nezávislé odhalení Zermelem nazývá také antinomie Zermelova-Russellova, není první ani jediný paradox, na nějž poslední fáze verbalizace či konceptualizace analýzy narazila. Jeho specifikem je právě skutečnost, že se dotýká těch nejzákladnějších pojmů teorie, a zasahuje tím pádem prakticky všechny tehdejší systémy — Fregův, Peanův, Cantorův i Dedekindův. Pozoruhodné je, že na svoji antinomii Russell roku 1901 přišel analýzou jiného, již existujícího paradoxu, tzv. paradoxu Cantorova. Ten formulujeme následovně:

> Podle Cantorovy věty platí pro každou množinu M vztah $|M| < |\mathcal{P}(M)|$. Uvažme nyní množinu *všech* objektů
>
> $$\mathsf{V} = \{x \mid x = x\}.$$
>
> Je zřejmé, že musí platit $\mathcal{P}(\mathsf{V}) \subseteq \mathsf{V}$, neboť pro každé $a \in \mathcal{P}(\mathsf{V})$ platí $a = a$. Definujme funkci $f : \mathcal{P}(\mathsf{V}) \to \mathsf{V}$ tak, že $f(a) = a$ pro každé $a \in \mathcal{P}(\mathsf{V})$. Funkce f je zjevně prostá, čili $|\mathcal{P}(\mathsf{V})| \leq |\mathsf{V}|$. To je ovšem v rozporu s Cantorovou větou.

Jinak řečeno: množina všech objektů by měla být největší možnou množinou, její potence musí být ale ještě větší, což nelze. — Při svém rozboru paradoxu vyšel Russell podle vlastních slov z důkazu Cantorovy věty.[20] V něm je uvažováno libovolné přiřazení f prvků $\mathcal{P}(M)$ prvkům M, konstruující množinu:

$$E_{f,M} = \{x \in M \mid x \notin f(x)\},$$

[20] Russell popisuje genezi objevu v jednom z dopisů Fregovi [1976, s. 215 n]. Příslušný argument se nachází také in Russell [1903, § 349].

která není v jeho oboru hodnot. Namísto M bere Russell množinu V všech objektů, tj. množin a objektů, které množinami nejsou, tzv. individuí či atomů, a uvažuje funkci $g : \mathsf{V} \to \mathcal{P}(\mathsf{V})$ takovou, že

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{je-li } x \text{ množina, tj. } x \in \mathcal{P}(\mathsf{V}), \\ \{x\} & \text{je-li } x \text{ individuum, tj. } x \in \mathsf{V} - \mathcal{P}(\mathsf{V}). \end{cases}$$

Diagonální konstrukce nyní dává množinu $E_{g,\mathsf{V}}$:

$$\{x \mid x \notin g(x)\} = \{x \mid x \text{ je množina} \wedge x \notin g(x)\} = \{x \mid x \notin x\},$$

která se, opět pod hrozbou sporu, nenachází v oboru hodnot funkce g. S ohledem na konstrukci funkce g z toho však plyne, že se $E_{g,\mathsf{V}}$ nenachází ani v její doméně, jíž byla množina všech objektů V. Množina všech množin, které si nenáležejí, tedy vůbec neexistuje, přestože byla utvořena podle všech dosud užívaných pravidel! Z čistě technického pohledu se Russellovi v konstrukci množiny $E_{f,M}$, převzaté z Cantorova důkazu, podařilo eliminovat z vydělující podmínky inkriminovanou funkci f. Té již nemůže být odvozený spor dáván za vinu, a zpochybněno je tak samotné vytvoření dané množiny.

Nyní rozeberme způsob, jakým byl paradoxem zasažen Fregův formalismus a jakou roli při tom hrál zmíněný GV. Pro syntakticky pečlivě vybudovaný systém, jakým byl ten Fregův, je samozřejmě objevení sporu katastrofou, *nota bene* když se jedná o systém umělý, jenž se teprve má osvědčit v zamýšleném projektu deduktivně a expresivně transparentní aritmetiky. Cantorova teorie množin se svým poloverbálním a v podstatě konstruktivním konceptem množiny byla v tomto ohledu ve výhodě a je vlastně ironií dějin, že se za hráz proti dalším množinovým paradoxům považovala její axiomatizace, která ve své klasické variantě s prostou deduktivní konzistencí stojí a padá.

Na Fregově systému je v první řadě pozoruhodné to, že není zasažen některými podobami paradoxu, včetně té, kterou Russell ve svém dopise Fregovi jako první navrhl, totiž skrze predikát “být predikátem, který nemůže být predikován o sobě samém”, symbolicky

$$F(X) \rightleftharpoons \neg X(X),$$

s odvozením sporu specifikací $X := F$ jako

$$F(F) \leftrightarrow \neg F(F).$$

Hierarchicky budovaná Fregova syntax totiž jednoduše vytváření takovýchto predikátů neumožňuje, neboť obor nenasycených výrazů je vždy stratifikován, tj. predikovat lze něco pouze entitě nižšího řádu. Tím Frege předjal Russellovu teorii typů.

Co zůstává u Frega nestratifikováno, jsou množiny, které (z vážných a později explikovaných důvodů) řadí vždy na úroveň objektů nejnižšího typu, tj. mezi významy kategorie t vlastního jména. S ohledem na tuto možnost převést predikát libovolného řádu na základní rovinu jednoduchých předmětů Frege také v *Grundgesetze* ohlašuje faktickou zbytnost logiky vyššího než druhého řádu, jak jsme se o tom zmínili dříve. Avšak bohužel, právě v této ontologické simplifikaci se skrývá trójský kůň množinových paradoxů, přestože Frege prvotně se znakem náležení $\in$, který je k jejich odvození zapotřebí, vůbec neoperuje a zavádí ho až později jako explicitně definovaný znak. Jeho definice je navíc dosti obecná, protože v souladu s Fregovým přesvědčením musí pokrýt všechny předměty:

A) $x \in y \rightleftharpoons (\exists F)(y = \{x \mid F(x)\} \wedge F(x))$,

podstatné nicméně je, že na jejím základě platí ekvivalence:

B) $N \in \{x \mid F(x)\} \leftrightarrow F(N)$

a že výrazy N a $\{x \mid F(x)\}$ patří k téže syntaktické kategorii. Tím pádem jsou formule $\{x \mid F(x)\} \in \{x \mid F(x)\}$ a $\{x \mid F(x)\} \notin \{x \mid F(x)\}$ správně utvořené, stejně tak jako je $x \notin x$ legitimní predikát a $\{x \mid x \notin x\}$ správně utvořené jméno. Vezmeme-li formuli

$$\{x \mid x \notin x\} \in \{x \mid x \notin x\},$$

pak pomocí (B) získáme okamžitě negaci

$$\{x \mid x \notin x\} \notin \{x \mid x \notin x\}$$

a *vice versa*. Nyní přejděme ke GV. Srovnáme-li jej, tj. ekvivalenci

$$\{x \mid F(x)\} = \{x \mid G(x)\} \;\leftrightarrow\; (\forall x)(F(x) \leftrightarrow G(x))$$

s extenzionální definicí rovnosti pojmů

$$F(x) =_{x,y} G(y) \;\leftrightarrow\; (\forall x)(F(x) \leftrightarrow G(x)),$$

vidíme nejprve shodu na pravé straně ekvivalence, což by nás mohlo podnítit k soudu, že se od sebe v podstatě neliší. Vyplatí se však připomenout, že v případě GV před námi neleží klasický typ definice, tj. že *definiens* není vyčerpáno pravou stranou ekvivalence. V GV jsou především — na rozdíl od definice rovnosti — definovány objekty stejného typu, jaký má proměnná v *definiens*. Výraz $F\{x \mid F(x)\}$ je tedy na rozdíl od $F(F)$, resp. $F(F(x))$ správně utvořený, neboť $\{x \mid F(x)\}$ náleží kategorii t.

Právě tento zdánlivě bezvýznamný detail vede ke katastrofě. S ohledem na jisté formální pohodlí vezměme namísto predikátu $x \notin x$, získaného z definice (A), odlišný, i když spřízněný predikát

$$W(x) \rightleftharpoons (\exists F)(x = \{y \mid F(y)\} \wedge \neg F(x)).$$

Je zřejmé, že je řádně definován a v přirozeném přepisu znamená cosi jako: “být rozsahem pojmu a nespadat pod něj”. Nyní lze k pojmu W utvořit příslušný průběh hodnot a ptát se, která z formulí $W\{x \mid W(x)\}$, $\neg W\{x \mid W(x)\}$ platí. Podle pravdivostního principu by to měla být právě jedna z nich. Předpokládejme nejprve, že platí

(1) $\neg W\{x \mid W(x)\}$,

čili po rozepsání

(2) $(\forall F)(\{x \mid W(x)\} = \{x \mid F(x)\} \to F\{x \mid W(x)\})$.

Specifikací proměnné $F := W$ dostaneme z (2) implikaci

(3) $\{x \mid W(x)\} = \{x \mid W(x)\} \to W\{x \mid W(x)\}$.

Antecedent formule (3) je ovšem tautologie, aplikací pravidla MP tedy získáme formuli

(4) $W\{x \mid W(x)\}$,

čili negaci předpokladu. Potud víme, že předpoklad neplatí. Předpokládejme tedy, že platí (4), což rozepsáno dá

(5) $(\exists F)(\{x \mid W(x)\} = \{x \mid F(x)\} \wedge \neg F\{x \mid W(x)\})$,

a uvažujme libovolný pojem F, jehož existence je zde tvrzena. Podle (5) má F stejný průběh hodnot jako W, podle GV tedy platí

(6) $(\forall x)(F(x) \leftrightarrow W(x))$,

kontrapozicí

(7) $(\forall x)(\neg F(x) \leftrightarrow \neg W(x))$.

Podle (5) ovšem platí také

(8) $\neg F\{x \mid W(x)\}$,

z formulí (7), (8) tak dostáváme negaci předpokladu, čili formuli (1). Úhrnem máme ekvivalenci

(9) $\neg W\{x \mid W(x)\} \leftrightarrow W\{x \mid W(x)\}$,

která je klasickou kontradikcí. Všimněme si, že GV byl použit pouze v druhém směru, zbytek odvození využívá výhradně obvyklých logických zákonů. — Již proto je ale v obecné rovině pošetilé označit GV za pravou příčinu, vysvětlení paradoxu, jako se to často dělá. Paradox je odvoditelný pouze z celku přijatých zákonů, zrovna tak dobře bychom tedy na základě provedené úvahy mohli nechat padnout vyloučený třetí a interpretovat paradox jako poukaz na fakt, že výrazu $W\{x \mid W(x)\}$ nemůže být jednoznačně přiřazena pravdivostní hodnota. Za tím, že obvykle připisujeme vinu na odvození sporu přímo GV, stojí především pragmaticko-ekonomické důvody, totiž snaha opravit systém co nejrychleji, bez ztráty významných předpokladů. Běžné logické zákony jsou s ohledem na tuto devízu interně schváleny jako příliš důležité.

Paralelně se samozřejmě můžeme pokoušet nalézt externí zdůvodnění toho, proč právě přidání GV vyústilo v paradox, zdůvodnění, které by, jak požadoval Russell, uspokojilo logický *common sense*. Russell tak např. dospěl k názoru, že je to bludná povaha GV. Díváme-li se na něj totiž jako na prostředek zavedení nových předmětů $\{x \mid F(x)\}$ do univerza, dopouštíme se tím, že tyto *nové* předměty uznáváme jako hodnoty předmětné proměnné z pravé strany ekvivalence — tedy části *definiens* —, bludného kruhu, neboť abychom věděli, zda platí $\{x \mid F(x)\} = \{x \mid G(x)\}$, musíme již vědět i to, zda

$$F\{x \mid F(x)\} \leftrightarrow G\{x \mid F(x)\}.$$

Podle Russella je tak objekt definován pomocí totality, která jej již obsahuje, neboli jeho definice je bludná, impredikativní. K detailům této teorie se dostaneme v kapitole 6.

Nyní si všimněme, že se Russellova diagnóza impredikativity či bludnosti týká všech definicí abstrakcí, operujících s pojmy, neboli PRINCIPŮ POJMOVÉ ABSTRAKCE, které, jako GV a HP, mají tvar

$$\#F = \#G \leftrightarrow F \sim G,$$

kde písmena F, G reprezentují pojmy prvního řádu a $\#F$, $\#G$ předměty, které pod ně spadají, resp. mohou spadat. Prohlédneme-li si však znovu odvození (1–8) sporné ekvivalence (9), vidíme snadno, že se v obecném případě nedostaneme dále než k bodu (5). Zbytek odvození je již závislý na specifické vlastnosti ekvivalence v GV. Vezmeme-li na jeho místě např. HP, nelze uvedeným způsobem odvodit (1), neboť z toho, že mají dva pojmy stejná kardinální čísla, neplyne, že pod ně spadají stejné předměty.

To vše uvádíme v tento okamžik především jako připomenutí věcí minulých (meze externích zdůvodnění) a předznamenání věcí příštích (konvenčnost interních zdůvodnění). Přímočaré a v jistém smyslu jediné možné poučení z Russellova paradoxu lze ale již nyní formulovat takto: Uskupování předmětů do celků definitivně nemůže být tou “nejelementárnější funkcí lidské mysli”, množina nemůže být smysluplně považována za “základní a přirozený rozumový pojem”, a to nehledě na to, co tvrdí či tvrdily tisíce filosofů a matematiků, kteří jsou v souladu se svými tendencemi vždy připraveni zamést trosky svých původních ‘intuicí’ pod koberec, aby je okamžitě nahradili ‘intuicemi’ jinými, např.

intuicí axiomatické teorie, na něž pak budou do krve přísahat, dokud je okolnosti (krutý osud) nedonutí jinak. Odkaz k 'intuicím', jak již poznamenal Wittgenstein [1953, § 213], je ostatně typicky užíván jako výmluva těch, kdo jsou líní či neschopní podat plnohodnotné vysvětlení, a ocitají se tedy zcela ve vleku okolností.

Fregovi je přitom v každém případě nutno připočíst k dobru, že nesdílel ani předsudek ohledně bezproblémové danosti množin či jiných objektů, které se snažil vždy zakotvit v jazyce pomocí jistých konstitutivních principů, jako je HP či GV, ani se po selhání těchto principů neuspokojil s plauzibilním *ad hoc* řešením, které by bylo v rozporu s jeho základním plánem transcendentálně-analytické aritmetiky. V příští kapitole uvidíme, že ani relativně nedávné fregovské výzkumy, které se pokouší vzkřísit ideu logicismu s poukazem na fakt, že Fregův systém nebyl paradoxem zasažen tak vážně, jak jsme si od jeho objevení mysleli, nejsou s to ospravedlnit hypotézu logické aritmetiky v rozsahu stanoveném již Fregovou *Begriffsschrift*. V závěru této kapitoly si k tomu připravíme půdu.

4.9 Následník v řadě

Návrh uchopit Fregův logicismus jako hypotézu v širším smyslu tohoto slova, totiž ne v kontextu nějaké konkrétní, již ustanovené vědy (po vzoru Goldbachovy domněnky v matematice), ale v rámci pokusů o ustanovení této vědy (matematiky) samotné, má několikeré opodstatnění a stejně tak mnoho interpretačních výhod. K první z nich patří explanační důvody historické. V jakési zakládající preambuli ke své *Begriffsschrift*, a tím i ke svému dílu jako celku, Frege [1879, s. IV] píše:

> Když jsem si položil otázku, ke kterému z těchto dvou druhů [analytických či syntetických vět] aritmetické soudy patří, musel jsem nejprve zkusit, jak daleko se v aritmetice lze dostat pomocí úsudků samých, pouze s oporou v zákonech myšlení, jež jsou nadřazeny všemu ojedinělému. Postupoval jsem tak, že jsem se nejprve pokusil odvodit pojem uspořádání v řadě logickou cestou, abych odtud mohl pokračovat k pojmu čísla. Aby se při tom nemohlo nepozorovaně vetřít nic z názoru, záleželo vše nutně na spojitosti úsudkového řetězce.

Tím je logicismus ohlášen jako perspektivní domněnka. Z dokladů pro jeho odmítnutí jako domněnky neúspěšné zde máme především Fregovu [1976, s. 212 nn] reakci na objev Russellova paradoxu, včetně jeho [1983, s. 298 nn] posledních, fragmentárních pokusů založit aritmetiku cele na geometrii, s komplexními čísly jakožto východiskem.

Druhým okruhem výhod a důvodů pro uvedené čtení logicismu je obecná licence, umožňující chápat Fregovu logiku jako svébytný projekt, v němž je vlastní budování formálního systému odvíjeno od otázek širšího, praktického i teoretického významu, na jejichž základě mohou mít teprve některé tradiční filosofické problémy, např. jestli jsou pravdy aritmetiky analytické, nebo syntetické *a priori*, dobrý smysl. Uvažme, že sama myšlenka logicismu, tj. možnosti převést aritmetiku na logiku, není vynálezem Fregovým. Za jejího otce bývá považován Leibniz, vedle Bolzana se k ní ale hlásí také představitelé většiny tradic moderní logiky, a to jak z Leibnize vycházející algebry logiky, např. Jevons a Schröder, tak reprezentanti původní tradice axiomatické, jdoucí zpět až k Aristotelovi a Eukleidovi, např. Dedekind a Peano.[21] Pouze představitel třetí z tradic, Cantor, vyjadřuje k logice značný despekt, když ještě roku 1896 radí editoru Fuchsovi odmítnout publikaci Schröderových článků s tím, že "je znaková řeč logického kalkulu [...] pro matematiku zbytečná".[22] Toto odmítnutí je však zjevně subjektivní, jednak namířené vůči Schröderovi, jednak nesdílené Cantorovými axiomatizujícími následovníky.

Stěžuje-li si nyní Frege [1884], že je mezi matematiky či filosofy jen málo těch, kdo by se dokázali shodnout v otázce "co je číslo?", mohl by na pozadí zmíněných plánů na 'logifikaci' aritmetiky stejným, ba větším právem lamentovat nad otázkou "co je logika?", neboť na rozdíl od úspěšné a plošně pěstované matematiky nic jako zavedená, funkční logická praxe k dispozici prostě nebylo. Právě proto zůstávají všechny logizující trendy od Leibnize po Dedekinda pouhými proklamacemi bez jakýchkoli konkrétních cílů či závazků.

Frege učinil první a nutný krok k nápravě daného stavu tím, že logiku, na niž se měla a mohla problematizovaná matematická praxe převést, založil sám. Tím dal logicistickému programu konkrétní náplň, zároveň ho ale vystavil možnému selhání, neboť nebylo dopředu jasné, jak daleko lze navrženým způsobem dojít při zachování původních východisek. K nim patří jednak transcendentálně-analytický aspekt celého zkoumání, tj. podmíněnost světa matematiky jeho konstitucí v jazyce, jak jsme se ji pokusili vysvětlit v této kapitole, jednak obecné přesvědčení, že explanační metody zvolené logiky musí být konceptuálně jednodušší a transparentnější nežli metody stávající matematiky. Tento druhý bod je sám o sobě samozřejmě vágní, poskytuje nám ale dobré vysvětlení toho, proč Frege jako řešení situace, k níž došlo v oblasti základů po paradoxu, odmítl Russellovu teorii typů. Později na tomto bodu postavíme již slíbenou kritiku neologicistického pokusu o ospravedlnění Fregova díla.

[21] Viz Dedekindův úvod k [1888], kde se o aritmetice (algebře, analýze) hovoří jako o části logiky, a *mutatis mutandis* Schröderovo [1897, s. 149]: "Čistá matematika je podle mě větví obecné logiky." U Jevonse [1874, s. 156] zase čteme: "Tvrdím, že algebra je jen vysoce rozvinutá logika a číslo jen logické rozlišení."
[22] Citováno podle Grattana-Guinnesse [2000, s. 175].

Prubířským kamenem, na němž Frege testoval nosnost své hypotézy a jenž jej přesvědčil, že má cenu pokračovat dál, bylo — jak víme z uvedeného citátu — odvození pojmu uspořádání v řadě logickou cestou. Konkrétní problém, který zde Frege líčí, vypadá takto: Máme-li nějakou dvojmístnou relaci R, dejme tomu relaci genetického rodiče, lze na předměty, které pořádá, nahlížet jako na výsledky aplikace (*Anwendung*) dané relace, tj. věta "N je rodičem M" popisuje N jako výsledek aplikace relace "y je rodič x", zkráceně $R(x, y)$, na M. Uvažme nyní relaci $R^\star$, v níž stojí dva předměty x, y tehdy a jen tehdy, když lze od x dospět k y n-násobnou iterací relace R na postupně 'generované' mezivýsledky.[23] Té se někdy říká *ancestral* relace R, totiž právě podle námi uváděné instance, v níž od relace (genetického) *rodiče* dospíváme k obecné relaci *předka* (*ancestor*), neboť člověk N se nazývá předkem člověka M, existuje-li konečná posloupnost lidí $x_1, \ldots, x_n$ ($n \geq 2$) taková, že každí dva její sousedící členové x_i, x_{i+1} ($1 \leq i < n$) jsou spojeni aktem početí ve smyslu $R(x_i, x_{i+1})$, a platí, že $x_1 = M$, $x_n = N$. Zápis vztahu $R^\star(M, N)$ formulí se tedy zdá být přímočarý:

$$(\exists x_1, \ldots, x_n)[R(x_1, x_2) \wedge \cdots \wedge R(x_{n-1}, x_n) \wedge x_1 = M \wedge x_n = N].$$

Následná reflexe ale přinese zjištění, že takto není N zachycen jako libovolný předek M, nýbrž jen jako konkrétní pra^{m}předek, tj. předek s konkrétním $m = n - 2$ počtem "pra".

Jako nejsnazší způsob nápravy vyhlíží předepsání výrazu $(\exists n)$ před danou formuli, tj. kvantifikace přes libovolnou posloupnost prvků. To je ale nemožné, neboť stejně jako v případě adjektivní definice čísla je n pouhým schematickým písmenem, nikoli objektem oboru kvantifikace. Fakt, že "N je předkem M", nelze tedy zachytit jedinou výše uvedenou formulí, ale všemi pro libovolné n, neboť N je očividně předkem M právě tehdy, když

(N je rodičem M) nebo

(N je rodičem rodiče M) nebo

(N je rodičem rodiče rodiče M) nebo

$\vdots$

Fregova klíčová otázka — a tím i popisovaný problém — nyní zní, zda lze pro danou relaci R definovat $R^\star$ jedinou logickou formulí. — Metateoretickými prostředky moderní logiky, jež jsme načrtli v předchozích kapitolách, lze dokázat, že to možné není, totiž omezíme-li se na její

[23] Příklad je trochu obtížné formulovat tak, aby vyhovoval představě generování rodičů aplikací na jejich děti: $R(x, y)$ proto čteme jako "y je rodič x", aby druhý prvek relace byl ten, jenž je její aplikací získán.

prvořádový fragment. To předvedeme v oddíle 5.10. Výše navržený odkaz k 'libovolné posloupnosti' prvků mezi členy M a N ale napovídá, že řešení existuje, využijeme-li výrazového systému, který takto velkorysou kvantifikaci umožňuje, totiž logiku vyšších řádů. To také ve své *Begriffsschrift* učinil Frege, čímž prokázal, že je tato logika s jeho projektem spjata jako *conditio sine qua non.*

Ačkoli celou věc probereme důkladně v příští kapitole, racionále druhořádové definice ancestrální relace není obtížné nahlédnout již teď. Předek osoby M je v souladu s výše uvedeným rozpisem libovolný 'výsledek' aplikace relace rodiče na osobu M a osoby (předky) takto získané, jinými slovy je to prvek množiny, která:

(1) obsahuje všechny rodiče osoby M,

(2) je uzavřena na relaci rodiče, tj. s každým prvkem, který jí náleží, obsahuje i jeho rodiče,

(3) je nejmenší taková, tj. neobsahuje žádné prvky, které nebyly získány opakovanou aplikací relace rodiče na M.

Této množině se obvykle říká (minimální) uzávěr, v tomto konkrétním případě uzávěr množiny rodičů osoby M na relaci rodiče. My jej v rámci množinového pohledu na věc popíšeme v dalších kapitolách, nyní jednoduše definujeme inkriminovanou ancestrální relaci takto:

$$R^\star(a,b) \rightleftharpoons (\forall X)[(\forall x)(R(a,x) \to X(x)) \wedge \\ (\forall x,y)(X(x) \wedge R(x,y) \to X(y)) \to X(b)].$$

Ačkoli je za jistých okolností konečný výsledek tentýž, Frege příslušnou legendu podává intenzionálně, tj. nehovoří o množinách, ale o vlastnostech, jimiž jsou tyto množiny teprve indukovány, a také místo termínu předchůdce (předek) používá inverzního termínu následníka (potomka). Výslednou definici pak čte ve stylu:

> Objekt b je NÁSLEDNÍK a v R-ŘADĚ tehdy a jen tehdy, když má všechny dědičné vlastnosti X v R-řadě, které mají děti osoby a, neboli přímí následníci a, tj. x taková, že $R(a,x)$, přičemž vlastnost X je DĚDIČNÁ V R-ŘADĚ, jestliže z toho, že má x vlastnost X, a vztahu $R(x,y)$ plyne, že má vlastnost X také y.

S definicí *ancestralu* jakožto základním pojmem teorie řad je Frege nyní schopen dokázat řadu rozličných původně 'nedokazatelných', protože základních principů, mezi nimi i zobecněnou verzi principu matematické indukce. V závěru *Grundlagen* [1884, § 91], při rekapitulaci výsledků analytického programu, uvádí jako příklad takové 'logicky neodvoditelné' věty, u níž se zdál být odkaz k intuici nezbytný, formuli 133 z *Begriffsschrift*:

> Jestliže je R jednoznačná (funkcionální) relace, tj. z $R(x, y)$ a $R(x, z)$ plyne vždy $y = z$, a m, n následují v řadě R za a, tj. platí $R^\star(a, m)$ a $R^\star(a, n)$, pak platí trichotomie $R^\star(m, n)$ nebo $R^\star(n, m)$ nebo $m = n$.

Role definice *ancestralu* v rámci logicistického projektu, tj. v aplikaci na přirozená čísla, je přitom následující: Máme-li definovánu relaci bezprostředního číselného následníka S a nulu 0, dovoluje nám *ancestral* přejít k relaci $S^\star$ (obecného) číselného následníka, kterou lze zapisovat také důvěrným $<$ či $\leq$ pro

$$x \leq y \rightleftharpoons S^\star(x, y) \vee x = y.$$

Přirozená čísla pak uchopíme explicitní definicí:

$$N(x) \rightleftharpoons 0 \leq x$$

jako nevlastní následníky 0 v S-řadě, tj. následníky, které zahrnují 0 samotnou. Příslušná instance formule 133 tvrdí, že je řada přirozených čísel relací $<$ lineárně uspořádána, neboť S přiřazuje každému z čísel nejvýše jedno.

Z diskuze Fregovy adjektivní definice přitom víme, že to nebyla definice jednotlivých čísel samotných, ale právě jejich shrnutí v jeden celek, co Frege považoval za citlivý bod celého projektu. Ten je ale nyní, zdá se, definicí *ancestralu* ošetřen. Nic nám tedy nebrání vzít Fregovu první definici čísla jako bázi, s nulou coby kvantifikátorem $(\exists_0 x)X(x)$ a následnickou relací jakožto binárním vztahem třetího řádu, jehož aplikací na numericky definitivní kvantifikátor získáme kvantifikátor následující. Definice je to relativně přímočará, i když poněkud nepřehledná s ohledem na kvantifikované řády a fakt, že ji formulujeme přímo pro kvantifikátory zobecněné, tj. poněkud šířeji, než potřebujeme:

$$\begin{aligned} &S_{X,Y}(IxX(x), JxY(x)) \rightleftharpoons \\ &\qquad (\forall X)[JxX(x) \leftrightarrow (\exists y)(X(y) \wedge Ix(X(x) \wedge x \neq y))]. \end{aligned}$$

Mohli bychom samozřejmě nejprve definovat numericky definitivní kvantifikátor jakožto pojem třetího řádu, pod nějž spadá pojem řádu druhého tehdy a jen tehdy, když pod něj spadají pouze rovnopočetné pojmy prvního řádu:

$$\begin{aligned} &\mathcal{NUM}_X(IxX(x)) \rightleftharpoons \\ &\qquad (\forall X, Y)[IxX(x) \wedge IxY(x) \leftrightarrow \mathcal{EQ}_{x,y}(X(x), Y(y))], \end{aligned}$$

a v definici následníka S pak příslušné proměnné explicitně omezit na obor predikátu $\mathcal{NUM}$. I tak bychom ale vyjádřili víc, než potřebujeme, neboť $\mathcal{NUM}$ odpovídá definici kardinality jako takové, tj. zachycuje také kvantifikátory větší než konečné mohutnosti. Jelikož nás momentálně zajímají pouze čísla přirozená, tj. konečné kardinály, můžeme si tento krok ušetřit, když aplikujeme *ancestral* relace S přímo na číslo 0. Tak získáme predikát:

$$N_X(IxX(x)) \rightleftharpoons S^{\star}_{X,Y}((\exists_0 x)X(x), IxY(x)),$$

vymezující všechna výše definovaná adjektivní čísla, tedy numericky definitivní kvantifikátory, které příslušejí konečným množinám. Podstatné pro korektnost této definice bylo, že relace S přiřazovala číslům opět čísla, nikoli že byla definována i pro jiné objekty.

Adjektivní definice, kterou jsme takto dovedli o něco dále, než byl Frege ochoten, ale naráží na jiný problém. Ať již definujeme čísla jakkoli, tj. jako objekty jakéhokoli řádu, nemůže být pochyb o tom, že by se mělo jednat o objekty různé. To se v základním případě řady 1, 2, 3, … rozumí jaksi samo sebou, neboť jejím prostřednictvím se učíme označovat jisté skupiny předmětů jako různé právě tehdy, když jim odpovídá různá číslovka, jiný (kardinální) krok na cestě jejich (ordinálního) vyčíslení. Náročnější počty, zahrnující aditivní a multiplikativní operace s množinami, ale již pracují s komplexními reprezentacemi typu “$54 + (6 + 1)$” či “$6 \times (2^3 + 2)$”, které — v závislosti na stanovených kritériích identity — mohou být přes typografickou odlišnost jmény téhož čísla. V tomto případě se tak stane, dají-li příslušné transformace (vyčíslení) obou výrazů tytéž standardní numerály, což, s ohledem na výsledek “61”, “60”, nenastává. — V případě adjektivních čísel jsou kritéria identity dána primárně vztahem mezi zobecněnými kvantifikátory, tj. jako

$$IxX(x) =_{X,Y} JxY(x) \rightleftharpoons (\forall X)[IxX(x) \leftrightarrow JxX(x)].$$

V *definiens* se tedy kvantifikuje přes všechny podmnožiny daného univerza. Dva kvantifikátory jsou přitom stejné, jestliže pod ně spadají tytéž podmnožiny, a různé, existuje-li podmnožina, která je odliší, tj. která spadá pod jeden, ale nikoli pod druhý. Jelikož pod n-tý numerický kvantifikátor $(\exists_n x)X(x)$ spadají vždy podmnožiny určitého počtu n předmětů, pak v situaci, kdy má předmětné univerzum pouze konečný počet menší než n, nespadá pod $(\exists_n x)X(x)$ vůbec nic. To ale znamená, že nad univerzem o m prvcích jsou numericky definitivní kvantifikátory pro $n > m$ nerozlišitelné, tím pádem extenzionálně identické. Počet čísel adjektivní aritmetiky je tedy závislý na počtu objektů základního univerza, které tak musí být nekonečné, aby námi rekonstruovaná aritmetika mohla řádně fungovat. Nemá přitom valnou cenu diskutovat o tom, zda je v univerzu (kterém?) nekonečně mnoho předmětů, ale jak tento předpoklad ovlivňuje smysluplnost našeho projektu. Z technického hlediska je přinejmenším zřejmé, že nám přibyla starost navíc.

Hlavní výhoda substantivní strategie a Fregem zamlčený důvod, proč opustil strategii adjektivní, spočívá nyní v tom, že oba principy abstrakce, HP i GV, uvedenou závislost na počtu prvků základního univerza nevykazují. Důvod je následující. Predikát

$$x \neq x$$

je čistě logický, lze ho tedy realizovat nad každým univerzem moderní sémantiky, o Fregově totálním univerzu všech objektů nemluvě. V souladu s GV nyní můžeme na tento predikát aplikovat množinový abstraktor a získat jméno:

$$\{x \mid x \neq x\}$$

PRÁZDNÉ MNOŽINY, již dříve (viz s. 30) zkracované jako $\emptyset$. To znamená, že v každém univerzu se musí nacházet odpovídající objekt kategorie t. Ten se proto může vyskytovat po stranách rovnosti a my můžeme korektně vytvořit predikát

$$x = \{x \mid x \neq x\}$$

ve významu "být roven prázdné množině". Nyní opět aplikujeme abstrakci a vytvoříme jméno

$$\{x \mid x = \{x \mid x \neq x\}\}.$$

V této fázi si již můžeme vybrat další typy iterací, např. ve stylu:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots,$$

když vytváříme vždy jednoprvkovou množinu z předchozího členu, nebo po vzoru:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots,$$

v němž se další člen sestává z množiny všech předchozích. První způsob odpovídá definici přirozených čísel Zermelově, druhý von Neumannově. Samo generování řady ale není podstatné, podstatné je, že kritéria identity jejích členů určuje generující princip samotný, tj. GV! Vezmeme-li totiž první dva členy a ptáme-li se, zda platí:

$$\{x \mid x \neq x\} = \{x \mid x = \{x \mid x \neq x\}\},$$

říká nám GV, že to může nastat tehdy a jen tehdy, platí-li:

$$(\forall x)(x \neq x \leftrightarrow x = \{x \mid x \neq x\}).$$

Jelikož ale pod první predikát nespadá nic a pod druhý právě jeden předmět, musí být tato ekvivalence nepravdivá, a první dva prvky konstruované řady jsou tedy odlišné předměty. Induktivní úvahou dokážeme tento závěr rozšířit na celou řadu, resp. řady.

Frege sice, jak víme, nedefinuje číslo ani jedním z uvedených způsobů, popsaný argument lze ale v principu aplikovat již na jeho druhou, implicitní definici čísla skrze HP. Ten dovoluje Fregovi definovat nulu jako:

$$0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}_x(x \neq x),$$

tedy jako číslo náležející pojmu "neroven sám sobě". Zaveďme pro ukázku ještě další číslo v řadě

$$1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}_x(x = 0),$$

spolu s obecným principem, jak pokračovat, bylo-li již dáno číslo n:

$$n + 1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}_x(x = 0 \vee \cdots \vee x = n).$$

Fregova definice jednotlivých čísel tedy evidentně anticipuje definici von Neumannovu. Položíme-li si nyní opět otázku po platnosti rovnosti $0 = 1$, tedy:

$$\mathcal{N}_x(x \neq x) = \mathcal{N}_x(x = 0),$$

je opět pouze na bázi HP dáno, že se tak stane tehdy a jen tehdy, platí-li podmínka:

$$\mathcal{EQ}_{x,y}(x \neq x, y = 0),$$

tj. jedná-li se o rovnopočetné predikáty. Tak tomu ale evidentně není, neboť opět: pod první nespadá žádný předmět, pod druhý právě jeden. Platí tedy $0 \neq 1$. Všimněme si, že tento argument by v obecném případě nešlo použít na definici *à la* Zermelo.

Není obtížné nahlédnout, že uvedené definice jednotlivých čísel zůstávají v platnosti i po přijetí Fregovy třetí, explicitní verze definice čísla, v níž se navíc z $\mathcal{N}_x F(x)$ stane jméno množiny všech pojmů rovnopočetných pojmu F, v *Grundgesetze* upravené na množinu všech množin rovnopočetných množině $\{x \mid F(x)\}$. Důvodem je Fregovo odvození HP z GV a příslušné explicitní definice. Tím vším je demonstrováno něco velmi podstatného, co unikalo pozornosti reformátorů logicistického programu po dlouhá desetiletí, totiž že technické jádro Fregova plánu je na užití GV podstatně nezávislé.

George Boolos byl první, kdo explicitně upozornil na fakt, že i po zavedení GV a jeho prohlášení za axiom zůstává hlavním principem Fregovy rekonstrukce aritmetiky HP. V *Grundlagen* je GV použit pouze k jeho odvození a i v *Grundgesetze* se užití GV omezuje na několik jednoduchých případů, které — jak ukázal Richard Heck, Jr. — lze úspěšně eliminovat. To nás teď alespoň zbavuje nepříjemného pocitu, že některý z předvedených kroků rekonstrukce byl umožněn jednoduše tím, že je

GV sporný. Skutečnost, že HP sporný není, patří k jednomu z milníků novofregovského bádání, jež vedle již zmíněného Hecka a Boolose reprezentují zvláště Crispin Wright a Bob Hale.

K neologicistické rekonstrukci Fregova díla, spolu s patřičnými odkazy na literaturu, se dostaneme v příští kapitole, a to na pozadí rozboru původních intencí Fregova logicismu a jejich porovnáním se specifiky 'logicismů' Fregových současníků, zejména Richarda Dedekinda. Kritikou Fregova a Dedekindova logicismu a prezentací patřičných detailů se nám také formálně uzavře jedna velkolepá éra v dějinách čísla, jakási antiteze k tezi o jeho názorném, geometrickém uchopení, a my budeme moci přejít k syntézi obou v teoriích dvacátého století, tak jak se vyvinuly v přímé reakci na množinové a jiné paradoxy.

5 Logická aritmetika a její meze

Náhlá konjunktura logicistických hnutí v devatenáctém století, jak jsme o ní hovořili ke konci minulé kapitoly, nemohla být zjevně podnícena zápalem pro logiku a její metody, neboť i po jejím založení Fregem roku 1879 neměli o jeho objevu dobrých dvacet let poté dobrou představu ani lidé jako Peano či Hilbert, jejichž jména si dnes s počátky moderní logiky spojujeme. Ve skutečnosti se jednalo především o negativní vymezení vůči Kantově filosofii matematiky,[1] v pozitivním smyslu pak o přihlášku k účasti na projektu verbalizace analýzy, popsaném v úvodní kapitole.

Je přitom ironické, že většina proponentů 'logické aritmetiky', a to včetně Frega, nebyla s to popsat svůj avizovaný rozchod se syntetickou matematikou v jiných než kantovských kategoriích, když totiž škrtla levou stranu jeho základního rozlišení

konstruktivní	diskurzivní
názor	pojem
matematika	logika
syntetické	analytické

a přihlásila se k pravé. Na základě tohoto pozorování můžeme hlavní úkol Fregova logicismu formulovat otázkou "jak lze založit aritmetiku nekonstruktivním způsobem?" či "jak ukázat, že se nejedná o syntetickou, ale analytickou disciplínu?", tj. disciplínu závislou nikoli na světě, ale na jazyce. Specificky potom: "jak eliminovat názor ze zdůvodnění elementárních aritmetických pojmů a vět?", což znamená především z konstrukce číselné řady 0, 1, 2, 3, ... a obhajoby pravdivosti vět, jako je "$2+2=4$". Tvrdím nyní, že odpověď na tyto otázky v ryze (anti)kantovském duchu podal Frege již ve své *Begriffsschrift* a že je vlastně úmyslně ob-

[1] Viz Dedekindovo [1888, předmluva]: "Hovořím-li o aritmetice (algebře, analýze) jako o pouhé části logiky, chci tím naznačit, že považuji pojem čísla za nezávislý na pojmech či názorech prostoru a času — a považuji jej spíše za bezprostřední produkt čistých zákonů myšlení."

sažena v samotném názvu spisu (*pojmové písmo*), neboť zní: “pomocí pojmů”. V této kapitole rozpracujeme detaily tohoto čtení Fregova projektu, abychom pak v jeho konfrontaci s ‘logicismy’ Fregových současníků, zejména Richarda Dedekinda, a některými novodobými teoriemi, které se tímto směrem pokouší Fregův logicistický plán revidovat, zjistili, že jsou sice také v důsledku neudržitelné, na rozdíl od něho však nedávají smysl ani jako ‘smělé hypotézy’, mj. právě proto, že postrádají jeho zdravé transcendentálně-analytické jádro, jinými slovy: chybí jim Fregův hluboký vhled do role jazyka v konstituci matematických oborů.

5.1 Logické předměty

Tvrzení, podle něhož je Fregovu odpověď na kantovské otázky původu matematických pravd a pojmů třeba hledat v oblasti širšího hnutí, jež se rozhodlo aktivovat dosud nevyužité pojmové zdroje, pochází od Alberta Coffy [1991, s. 20]. Coffa [1982] takto popsaný konceptualismus, v rozporu s Fregem, rozšiřuje dokonce i na geometrii, v jejím novém hilbertovském hávu axiomatické teorie o struktuře, resp. strukturách jistého typu. Námi navržená interpretace Fregova východiska je oproti Coffově podstatně skromnější, a proto konkrétnější. Tvrdíme, že počínaje svojí *Begriffsschrift* hledá Frege alternativu k uchopení čísel skrze konstrukci základní číselné řady

$$0, 1, 2, 3, \ldots,$$

která je podle Kanta závislá na názoru času. Jako adekvátní řešení se mu přitom jeví ustanovení predikátu (pojmu), jímž by byla čísla vymezena jako jeden celek, např. všichni následníci nuly, jinými slovy: jímž by byla pojmově vydělena. — Takřka z definice je přitom zřejmé, že chceme-li něco pojmově vydělovat, potřebujeme nejen

(i) vydělující pojem, ale i

(ii) to, z čeho vydělujeme,

tedy nějakou ontologickou bázi. Tyto dvě nutné složky logicistického plánu chci po řadě nazývat:

(i) deskriptivní a

(ii) konstitutivní.

Dále je jasné, že rozhodnu-li se charakterizovat číslo jako následníka nuly, zbývá mj. otázka, co je nula. A když řeknu např., že nula je prázdná množina, musím vysvětlit, co je to prázdná množina, a když pak řeknu, že se to rozumí samo sebou (něco ve smyslu: “shrnování předmětů do skupin je elementární funkce lidské mysli"), každý, kdo si odmítá lhát do kapsy, tuší, že jsem skončil s logickou analýzou čísla.

Hlavní problém Cantorovy i Dedekindovy teorie množin, stejně tak jako novodobých rekonstrukcí Fregova projektu, přitom spočívá právě v tom, že mají sklony toto "samo sebou" říkat dost často, jinými slovy: podceňují význam konstitutivní části projektu. Pro nás je nicméně podstatné, že ji nepodceňoval Frege, což doložíme na následujícím rozdílu: Zatímco ústřední otázka *Grundlagen*, Fregova polopopulárního, apologetického spisu, zněla:

(i) jak jsou nám dána čísla?,

ve Fregových *Grundgesetze*, kde měla být logicistická teze v detailech realizována, již tento problém nenajdeme. Hledáme-li pečlivě, objevíme tam však (a to prakticky až v poslední větě dodatku) dotaz jiný, totiž:

(ii) jak jsou nám dány logické předměty?,

uvedený jako základní problém aritmetiky.[2] Tento posun, tvrdím nyní, není nic jiného, nežli implicitní vyjádření Fregova přechodu od deskriptivní ke konstitutivní části programu. Otázka "jak jsou nám dána čísla?" byla totiž již v *Grundlagen* vyřešena, a to odkazem na formuli:

$$N(x) \rightleftharpoons (\forall X)[X(0) \wedge (\forall x, y)(X(x) \wedge S(x, y) \to X(y)) \to X(x)],$$

která má čísla pojmově vydělit. Zbývalo tedy zodpovědět: "z čeho?" Tím se nám také osvětlují již probírané pasáže z druhé části *Grundlagen*: Hledaná ontologická báze musí být — při zachování cílů projektu — popsaná logicky přípustným způsobem. Obvyklé typy definicí, zavádění nových objektů, jsou ale nekreativní, proto je zapotřebí hledat prostředky jiné, implicitní, mezi něž, po dlouhém váhání, Frege zařadil HP a posléze také GV.

Důvody, proč preferovat GV před HP, přitom není na obecné, předkritické rovině obtížné najít. Možnost explicitního vyjadřování *počtu* objektů patří sice k základním prostředkům emancipovaného uživatele jazyka, tj. je nesporně částí toho, co nazýváme 'jazykem přirozeným', dovedeme si nicméně představit diskurzy, kde tento prostředek není nezbytný či obvyklý v takové míře jako možnost hovořit o množinách daných prvků, tj. skupinách lidí, posloupnostech tónů, shlucích atomů apod. Z Fregovy analýzy čísla, zdá se, navíc plyne, že první možnost tu druhou předpokládá, neboť počet je vždy počtem nějaké množiny předmětů! V tomto smyslu globální expresivní nezbytnosti lze potom operátor množinové abstrakce přidat mezi výrazy logické, s konstantním významem

[2] Frege [1893/1903, díl II, s. 265] říká: "Za základní problém aritmetiky můžeme považovat otázku: jak uchopujeme logické předměty, speciálně čísla?"

napříč diskurzy, jak to Frege udělal ve svých *Grundgesetze*. Jeho systém je pak třeba odlišit od teorie množin jako LOGIKU S ABSTRAKCÍ. První přirozená námitka vůči preferování množiny před počtem vychází z upřesnění Fregova výsledku, podle něhož stejně jako počet je i množina především množinou něčeho, tj. vztahuje se k objektům, které váže dohromady, až skrze nějaký pojem. V tomto smyslu tedy její primát před počtem padá, a navíc je jasné, že uchopení čísel jakožto množin jenom odkládá problém konstituce těch předmětů, jichž jsou čísla množiny. Pohybujeme se tedy v ontologickém kruhu!

Pointa obvyklých množinových definicí čísla, předvedených v náznaku ke konci minulé kapitoly, byla ale právě ta, že použití abstrakčního principu na čistě logické predikáty jako "$x \neq x$" či "$x = x$" o univerzu, resp. univerzech nic nepředpokládá, a je tedy na něm, resp. na nich v jistém smyslu nezávislé! Tímto způsobem proto nedospějeme k množinám $\{x \mid F(x)\}$, které jsou vydělujícím predikátem F pevně vázány na ten který specifický kontext, a které jsou tedy přes svoji abstraktní povahu tímto vztahem konkretizovány, ale k množinám, jež se nazývají MNOŽINY ČISTÉ (*pure sets*), tj. formulovatelné v čistě logickém slovníku, k němuž ovšem počítáme i operátor $\{x \mid X(x)\}$.

GV jako perspektivní analytický princip tedy nejenom vede k nekonečně mnoha předmětům v univerzu, což je s ohledem na plánované vydělení čísel vítané zjištění, ale těchto nekonečně mnoho předmětů je dokonce nezávislých na mimologickém slovníku, tj. mohou být nazývány LOGICKÝMI PŘEDMĚTY, stejně jako jsou pravdy zdůvodnitelné čistě logicky nazývané pravdami logickými. Nepochybuji o tom, že v tomto smyslu zvolil svoji terminologii i Frege, tj. že logickým předmětem pro něj není libovolná množina (koček, duchů, atomů), ale právě a pouze množina čistá. Potvrzuje to ostatně i jeho implicitní praxe v *Grundgesetze*, kde se jiné než logické predikáty neuvažují a veškerá kvantifikace probíhá substitučně, tj. pouze přes výrazy přísně syntakticky budovaného umělého systému. Úvaha, která tuto tezi potvrzuje, je následující:

(1) V § 10 svých *Grundgesetze* řeší Frege znovu problém Julia Caesara, a to proto, že se v uvažovaném univerzu kromě 'čistých' průběhů objevují i jména pravdivostních hodnot, totiž všechny tautologie a kontradikce.

(2) Frege přitom předpokládá, že pro průběhy hodnot jsou kritéria identity dána GV, což nepřímo znamená, že se v nich nemohou objevit jiné než logické predikáty, neboť jinak by bylo třeba uvažovat i pravdivost vět, v nichž se příslušné mimologické predikáty vyskytují.

(3) Podle Frega zbývá pouze stanovit pravdivostní podmínky pro věty typu

$\{x \mid G(x)\} = S,$

kde S je správně utvořená věta a $\{x \mid G(x)\}$ správně utvořený term systému. Toho je podle něho možné dosáhnout dodatečným ztotožněním hodnot pravda a nepravda s vybranými čistými průběhy hodnot.

Frege se dále pokouší dokázat, že takováto konvence nemůže vést ke sporu, což je z dnešního pohledu irelevantní.[3] Hlavní je, že naše čtení *Grundgesetze*, tj. teze o (a) zužitkované substituční kvantifikaci, (b) logických předmětech (plus pravdivostních hodnotách) coby ontologické bázi Fregova projektu a (c) vůbec celý transcendentálně-analytický aspekt Fregovy aritmetiky již byly potvrzeny zvláště subtilním způsobem.

Výše zmíněná paralela logických předmětů a logických pravd je přitom z hlediska interpretace Fregova díla zvláště významná, neboť upozorňuje na stejnou chybu, která má v případě logických předmětů fatální důsledky. V oddíle 3.8 jsme zmínili, že Fregova idea jednoho všeobjímajícího univerza diskurzu blokuje adekvátní definici logické pravdivosti jako pravdivosti ve všech diskurzech a nahrazuje ji konceptem maximálně obecné pravdy, tj. pravdy platné pro všechny předměty. Racionální jádro Fregova rozhodnutí uvažovat jediný diskurz se přitom zakládá právě na pozorování nezávislosti některých vět na specifických (mimologických) predikátech vztažného kontextu a následné rekalibraci tohoto postřehu absolutním směrem, v němž jsou ony pravdy prohlášeny za pravdy *per se*, nezávislé na jakémkoli konkrétním kontextu. Upozornili jsme přitom, že logicky pravdivá věta je primárně stále *větou* daného diskurzu, tj. vztahuje se k němu buďto užitými mimologickými predikáty, nebo, pokud již žádné nemá, oborem své kvantifikace. Logickou ji dělá až reflexe na její formu, tedy porovnání s větami jinými, *a posteriori* tedy její nahlédnutí jako instance specifické logické formy.

Formule, kterými jsou tyto formy reprezentovány, primárně nejsou pravdivé ani nepravdivé, tj. jejich ohodnocení kolísá v závislosti na interpretaci. Konstantní případy některých z nich mohou vést k jejich prohlášení za pravdy či nepravdy specifického typu. Problematické je ovšem zpětné zařazení těchto nových pravd po bok pravd původních, zvláště když vede ke slití všech dílčích kontextů do jednoho, při zdůvodnění, že se logicky pravdivé formule díky své nezávislosti na jakémkoli kontextu musí vztahovat k nějakému kontextu univerzálnímu, jenž je nade všemi dílčími. Oním sémanticky konstantním prvkem, jenž odpovídá pravdám logickým a jenž musí být v univerzu v každém případě, jsou přitom podle Frega pravdivostní hodnoty pravda, nepravda.

[3] Podrobnou analýzu Fregova argumentu pro bezespornost systému předkládá Stekeler-Weithofer [1986, s. 357 nn].

S analýzou čísla se nyní Fregovi na stůl dostal další požadavek na takto upravenou sémantiku: některé předměty univerza musí mít čistě logickou povahu, tj. musí být k ostatním předmětům v podobném vztahu, v jakém jsou logické pravdy k pravdám 'tuctovým'. Výsledkem bylo přijetí GV a logických předmětů. Avšak stejně jako se slitím všech kontextů do jednoho ztratil rozdíl mezi logickou a prostou pravdou, ztratil se vlastně i rozdíl mezi logickým a prostým předmětem, neboť co jiného může dělat nějaký objekt logickým předmětem nežli přítomnost ve všech možných univerzech diskurzu! Opět zde tedy dochází ke konfúzi formule a smysluplné věty, formálního predikátu (otevřené formule) a predikátu artikulujícího pojem (nenasycené části věty).

Jedním z obecných poučení vyplývajících z Russellova paradoxu tedy může být, že neexistují žádné množiny *per se*, ale vždy jenom množiny něčeho, tedy agregáty vázané na nějaký konkrétní diskurz, obor předmětů. K nim patří i množiny čisté, tj. teoreticky je prázdná množina vždy prázdnou množinou nějakého diskurzu, např. historických nebo bájných bytostí. Na druhou stranu je třeba vzít v úvahu, že čisté množiny jsou produktem rozšíření objektového jazyka o výrazy metajazykové reflexe, mezi nimi identity $=$ a vztahu náležení $\in$, do objektového jazyka. V tomto smyslu mohou tvořit od počátku zcela specifickou předmětnou kategorii, tedy za předpokladu, že se řeč o nich prokáže jako konzistentní. Frege byl ve svých *Grundgesetze* v tomto ohledu neúspěšný, tj. GV se v rozporu s přirozeným očekáváním ukázal být pro daný účel nevhodný. Pocantorovská teorie množin se sice snaží najít prostředky, jak dopad selhání GV na koncepci čistých množin zmírnit, zpravidla tak ale činí způsobem, jenž je z hlediska Fregova jazykově-analytického pohledu na věc neakceptovatelný.

Zvláště v posledních dekádách fregovských výzkumů přitom není sporu o tom, že technické jádro Fregova logicistického projektu, jak ho načrtl ve svých *Grundgesetze*, snese co do sofistikovanosti srovnání s pokusy jeho následovníků, zejména když se zasažení Fregova systému paradoxem ukázalo být podstatně virtuální. Jak jsme již zmínili, HP si zachovává všechny výhody GV, aniž by byl kontradiktorický, jak ukážeme v dalších oddílech. Zbývá samozřejmě otázka, zda je HP možno považovat za analytický princip, ta je ovšem na této — interně technické — bázi neřešitelná. Na obecné rovině se zase vydáváme v nebezpečí, že po obhajobě obecné platnosti nějakého principu, jak jsme to naznačili výše pro GV, zjistíme, že se jedná o princip, jenž je ve sporu s jinými, podobně 'přirozenými' principy.

Ke zvláště didaktickým námitkám proti analytičnosti HP patří ta, podle níž nemůže být analytický právě pro svoji nekonečnou povahu, neboť analytičnost obnáší platnost v každém — tedy i konečném — diskurzu. Z podobného soudku se totiž rekrutují problémy týkající se axiomu nekonečna, tj. otázky typu existuje nekonečně mnoho předmětů?

či "je existence nekonečně mnoha předmětů nutná?", jimiž je od Russellových dob zaplevelena filosofie matematiky stejně, jako je od vynálezu neklasických logik filosofie logiky zatížena pseudoproblémy a prázdnými předpoklady ohledně platnosti matematických pravd ve všech možných světech. Transcendentálně-analytický přístup k filosofickým problémům, předvedený exemplárně Kantem v jeho dialektice, nám zde přitom radí, abychom před vlastním pokusem o odpověď na danou otázku zkoumali, jak by taková odpověď měla a mohla vůbec vypadat, tj. abychom nejprve zjistili, za jakých podmínek může daná otázka dávat nějaký smysl. Obratem dospějeme k závěru, že v uvedených námitkách je vždy zapřahán vůz před koně, neboť to nejsou jednotlivé diskurzy, co rozhoduje o analytičnosti principů jako HP či GV, ale tyto principy jsou naopak tím, co rozhoduje o pojmu přípustného diskurzu, přípustné interpretace.

Empiričtí filosofové, přikováni pevně k světu našich smyslů, samozřejmě chtějí, aby se tento svět a z něho odvozené diskurzy skládaly pouze z konečného množství objektů. Co ale nazývají předmětem a co jeho existencí? Je stejně jako židle předmětem i úsilí, které ji uvedlo v život? Je židle předmětem i poté, co se jí ulomila jedna z nohou? Uznávají empiristé skupinu předmětů jako samostatný předmět a uznávají, že je od těchto předmětů samotných odlišná, jako se liší pár bot od těchto bot přinejmenším svým počtem? Pokud ano, je jejich univerzum nekonečné. Pokud ne, ve smyslu Démokritova:

> sladké a hořké, studené a teplé, stejně jako barvy, to vše existuje jen v mínění, nikoli ve skutečnosti; co skutečně existuje, jsou neměnné částice substance a jejich pohyb v prázdném prostoru,

podřizují svět značně abstraktnímu principu, podle něhož neexistuje Démokritos ani věci, jimž obvykle existenci připisujeme, ale fiktivní částice, jejichž existenci postulujeme na základě dosti komplikovaných, tj. ne čistě empirických hypotéz, a které proto musí náležet sféře pouhého mínění.

Na relativně skromné (i když negativní) bázi lze tedy argumentovat pro nekonečnost jakéhokoli univerza, což se může stát na metajazykové úrovni podnětem pro definici interpretace určitým specifickým způsobem, jenž je nevyhnutelně nekonečný, zařadíme-li jako Frege množinový či kardinální abstraktor mezi logické symboly. — Současná logika tak nečiní, v jistém smyslu právě v reakci na Russellův paradox, ale i v důsledku reflexe na fakt, že je množina předmětů v nějakém ohledu objekt jiného typu nežli tyto objekty samotné, rozuměj: objekt s jinými typy vlastností a vztahů. Proto jsou také ve formální sémantice logiky druhého řádu uvažována dvě nezávislá univerza předmětů, jak to odpovídá Russellem navrženému 'konstruktivnímu' čtení GV coby principu, jenž vlevo zavádí nové předměty $\{x \mid F(x)\}$ odkazem na předměty již existující, staré, k nimž odkazuje proměnná x pravé části, a sází je do zcela nového univerza diskurzu se speciální proměnnou X. Jelikož substituce $F\{x \mid F(x)\}$ je pak z definice nepřípustná, paradox nelze odvodit!

Naznačili jsme, že tato predikativní úprava GV je v jistém smyslu přirozená, konvenující relativnímu užití operátoru “množina” v přirozeném jazyce. Z technicko-logicistického hlediska se tím ale ocitáme opět na samém počátku, neboť indukovaná hierarchizace univerza do individuí, jejich množin, množin jejich množin atd. vede stejně jako v adjektivním případě k závislosti počtu čísel (objektů univerza daného stupně) na počtu prvků základního univerza. Expresivní síla HP a GV ve Fregově projektu spočívala právě v tom, že byly chápány impredikativně, tj. že v nich bylo možné substituovat množiny za proměnnou pravé strany ekvivalence a prostřednictvím logických predikátů jako

$$x = \{x \mid x \neq x\} \qquad \text{či} \qquad x = \mathcal{N}_x(x \neq x)$$

sázet nově vytvářené předměty zpět do výchozího univerza a rozšiřovat ho tímto způsobem jaksi na vlastní pěst. Russellova neutralizace sporu pro případ GV proto zároveň vede ke ztrátě logicistického potenciálu HP, jenž sporný vůbec nebyl. Tím se jednak dostává do popředí konvenčnost obou principů a zároveň je vrženo zvláštní světlo na otázku toho, zda jsou vůbec tyto principy analytické či zda je předmětů v univerzu nekonečně mnoho, nemluvě o problematice ‘přirozených’ příčin Russellova paradoxu.

Impredikativita HP totiž nejenže není evidentně nijak bludná, ale má i jisté ospravedlnění v běžné jazykové praxi, kdy mezi počítané předměty řadíme i samotná čísla, a můžeme tedy vytvářet jména jako

$$\mathcal{N}_x(x < \mathcal{N}_x(x < 5))$$

či věty

$$\mathcal{N}_x(x < 5) < 5,$$

jejichž význam (číslo 5, hodnota nepravda) je zjevně korektně fixován. Námitka, že pojmové principy abstrakce jsou neudržitelné již proto, že při zavádění nových předmětů $\#F$ nekorektně odkazují na platnost vět jako $F(\#F)$, které jejich existenci již předpokládají, rovněž neobstojí. Zastáváme-li totiž názor, že k předmětům lze dospět pouze přes jejich (jazykové, resp. jevové) reprezentace, resp. ohodnocením nějakého předem popsaného větného kontextu pravdivostními hodnotami, pak nás problém definice předmětu skrze obor, v němž je již obsažen, příliš nezajímá, neboť — takto formulován — nedává dobrý smysl. My máme na jedné straně výrazy, které ohodnocujeme, na straně druhé principy tohoto ohodnocení, řekneme-li tedy např., že bude všem větám $F(N)$ pro libovolné N přípustné přiřazena hodnota pravda, a je-li přípustným termem výraz $\#F$, nedospíváme ještě k žádnému bludnému kruhu. Věta $F(\#F)$ je jednoduše ohodnocena jako pravdivá, nic víc, nic míň.

Abstraktní principy v našem, a odvažuji se říci i Fregově čtení poskytují v první řadě instrukce, jak ohodnotit věty, v nichž se vyskytují abstraktní termy. Takovýchto požadavků na věty Fregova systému je ovšem více a Russellův paradox 'pouze' ukazuje, že jim všem nelze dostát. To neznamená, že by se to jinému principu pro nějakou rozumnou variantu Fregova systému nemuselo povést. Jeho novodobá revize se ovšem vydává jiným směrem, pevně vnořeným do tradice moderní sémantiky teorie modelů. Ta není tradicí Fregovou, ale odvíjí se od Hilbertova pojmu implicitní definice a názoru, že je matematika vědou o struktuře, jenž slaví také dnes triumf v rámci tzv. filosofie strukturalismu.

5.2 Kritérium konzistence

O 'implicitní definici' jsme již několikráte hovořili ve smyslu hledané alternativy ke spolehlivé, leč neplodné definici explicitní a jako příklad jsme použili právě principy abstrakce v jejich dvojznačné roli analytické, a přesto netriviální věty. Standardní užití tohoto termínu je nicméně spojeno právě s Hilbertovým jménem, a ačkoli s Fregovými pokusy o nalezení způsobu, jak uchopit ontologickou bázi matematiky, souvisí, svou podstatou se od nich drasticky liší.

David Hilbert, jenž se od své královecké habilitace roku 1886 úspěšně věnoval rozličným matematickým tématům, se po získání profesury roku 1892 soustředil výhradně na témata z algebry a teorie čísel.[4] Bylo proto překvapením, když na sklonku století, konkrétně v semestru 1898/1899, na univerzitě v Göttingen, kam byl roku 1895 povolán, vypsal přednášku na téma základů eukleidovské geometrie. Jejím produktem byl *Festschrift* nazvaný *Grundlagen der Geometrie* [1899], v dějinách filosofie matematiky dodnes považovaný za milník stejného významu, jakým byly Fregovy o více než deset let starší *Grundlagen der Arithmetik*.

Ačkoli je Hilbertovo místo ve filosofii matematiky zajištěno, nelze si nevšimnout, že byl natolik matematikem, aby mu Fregovy jazykově-analytické eskapády v oblasti konstituce předmětných oborů zůstaly naprosto cizí, stejně jako mu zprvu byla cizí, či přinejmenším lhostejná, i Fregova logika.[5] Střízlivě vzato nemají často Hilbertovy vlivné názory na povahu matematiky v konfrontaci s Fregovým dílem charakter hluboké filosofické reflexe, ale spíše politických prohlášení, v nichž je srozumitelně formulována 'státní' doktrína pro další desetiletí. To, že se

[4] Stručný a zároveň informativní přehled o vývoji Hilbertových matematických zájmů podává Weyl [1944] formou 'nekrologu'.

[5] Viz jejich korespondence otištěná in Frege [1976]. Hilbert zde např. označuje Russellův paradox za problém *tradiční* logiky.

nakonec z desetiletí stalo století, jenom vypovídá o Hilbertově citu pro potřeby doby, jemuž vlastně částečně vděčíme i za to, že byla logika nakonec inkorporována do matematiky jako “nepostradatelný nástroj logicko-matematických zkoumání”, jak se Hilbert [1922, s. 162] vyjádřil dobrých dvacet let poté, co netrpělivě ukončil korespondenci s Fregem na podobné téma. O Hilbertově politickém talentu svědčí i to, jakému zájmu se dodnes těší jeho pařížská přednáška [1900*b*] o fundamentálních problémech matematiky a jaký vliv měla při posuzování jejich významu.

Vrátíme-li se zpět k základům geometrie, je zřejmé, že je jejich ústřední problém stejný jako ten základů aritmetiky, totiž jak zdůvodnit pravdivost jistého systému vět. Z pohledu Fregovy sémantiky, později artikulované v Tarského definici pravdy, se vlastně jedná primárně o problém ohodnocení vět elementárních, který definice neřeší, ačkoli se právě v nich stýká věta s matérií příslušné oblasti poznání, a dává tak tomu kterému diskurzu jeho specifický charakter. Tradiční pozice, zakonzervovaná právě v přístupu k základům geometrie, je ovšem odlišná, totiž axiomatická.[6]

Jak jsme již dílem zmínili, je podle Aristotela naše poznání založeno na elementárních pojmech, např. bodu a přímky, jejichž význam a vztahy musíme nahlédnout a vyjádřit v prvních premisách, např. že dvě (nerovnoběžné) přímky určují bod nebo že dva (neidentické) body určují přímku. Tyto premisy jsou samozřejmě obecné, jinak by nemohly sloužit k deduktivnímu odvozování ostatních vět diskurzu, což znamená, že přinejmenším z hlediska Fregovy logiky nejsou syntakticky elementární.[7] V každém případě zde vidíme jistou, i když ne zcela čitelnou kombinaci atomistického přístupu (zdůvodnění pravdivosti prvních premis nahlédnutím vztahů pojmů) s přístupem inferenčně holistickým (zdůvodnění pravdivosti vět jejich odvozením z prvních premis), která se táhne dalšími dějinami a lze ji najít *de facto* i u Frega, jenž své pokusy o logické založení aritmetiky prezentuje v *Grundgesetze* právě jako axiomatický systém, s principy typu GV coby axiomy.

Holistické čtení axiomatické metody se ovšem podstatně vymyká tomu, jak jsme ji prezentovali v kapitole 3. Tam se vždy jednalo o axiomatizaci nějakého oboru, předpokládalo se tedy, že je již tento obor nějakým způsobem dán a my se můžeme pokusit o jeho prezentaci způsobem alternativním, jenž má, zvláště je-li úspěšný, jisté výhody, např. možnost mechanické kontroly. Nazývejme tento přístup MĚKKÝM AXIOMATISMEM. V protikladu k tomu se AXIOMATISMUS TVRDÝ nepokouší určitý obor dodatečně axiomatizovat, ale na bázi daných axiomů zdů-

[6] To, že lze nakonec na oba přístupy nahlížet jako na projevy axiomatického myšlení, budeme diskutovat v kapitole 8, mj. právě v souvislosti s Hilbertovou pozdní filosofií matematiky.

[7] To, že jsou elementární z hlediska Aristotelovy logiky, mnoho neznamená, neboť ta kategorii komplexních vět vlastně vůbec nemá.

vodnit, což je podstatný rozdíl, neboť případný neúspěch nemůžeme vysvětlit jakožto možnou neaxiomatizovatelnost dané disciplíny, na níž přirozeně nic tragického není, ale přímo jako krizi základů. Hilbertova rozhořčená reakce na Gödelovy věty o neúplnosti aritmetiky o třicet let později je jasným, i když nepřímým svědectvím jeho tíhnutí k silnější verzi axiomaticko-deduktivní doktríny. Jeho populární spisy, včetně korespondence s Fregem, nicméně naznačují netriviální názorový vývoj.

Vůdčí idea je přitom více méně jasná. Atomistický způsob zdůvodnění vět nahlížením toho, co znamenají slova "bod", "přímka", ..., nevede k cíli, ba má pro svůj subjektivní charakter nežádoucí a často i sporné konsekvence. Navíc je zde fenomén neeukleidovských geometrií, v nichž mají tytéž základní pojmy zcela odlišný význam. Zdůvodnění elementárních vět touto cestou tedy nepřichází v úvahu, a je tak možné jenom na bázi vět jiných, tj. odvozením z nějakého celku S axiomů. O elementární větě φ nyní řekneme, že je pravdivá, jestliže je odvoditelná, tj.

$$\mathcal{I}(\varphi) = 1 \rightleftharpoons S \vdash \varphi,$$

a nepravdivá, je-li odvoditelná její negace:

$$\mathcal{I}(\varphi) = 0 \rightleftharpoons S \vdash \neg\varphi.$$

Problematický je přirozeně status axiomů. V úvodu ke *Grundlagen* nechává Hilbert stejně jako jeho antický vzor zvolené axiomy *vyjadřovat* jisté základní skutečnosti našeho názoru, aby je však vzápětí, tentokráte v jasném rozporu s tradicí, těmito axiomy *definoval.* Na Fregův [1976, s. 61 n] dotaz, jak mohou axiomy definovat něco, co ve své pravdivosti předpokládají, jej Hilbert šokuje prohlášením, že nechce předpokládat vůbec nic. Pravdivost axiomů nespočívá podle jeho mínění v jejich vztahu k předmětům daným v názoru, ale v jejich vztahu vůči sobě navzájem, tj. v jejich konzistenci. V odpovědi Fregovi [1976, s. 66] Hilbert píše:

> Jestliže si libovolně stanovené axiomy vzájemně neprotiřečí se svými důsledky, jsou pravdivé, předměty těmito axiomy definované existují. Toto je pro mě kritérium pravdy a existence.

Tento krok je obvykle chválen pro svoji odvahu, představuje ale také chytré spojení příjemného s užitečným, totiž využití axiomatické metody, která byla z technického hlediska vždy považována za velmi atraktivní, s jejím očištěním o nepohodlný, zdůvodňující prvek. Právě proto, že se v kontextu vývoje axiomatické tradice Hilbert rozhodl obětovat její atomistickou, názornou část, byl také Coffou [1982] nazván konceptualistou.[8] Uvidíme, že to je dosti ukvapené rozhodnutí.

[8] Coffa zde sice hovoří v první řadě o Poincarém, činí tak ale v kontextu tvrzení, že geometrické axiomy své pojmy definují, které odpovídá i názoru Hilbertovu.

Axiomy jsou podle Hilberta voleny zcela libovolně, resp. skoro libovolně, neboť do hry vstupuje ještě podmínka jejich konzistence. Ta zakládá pravdivost jejich, ale i pravdivost odvozovaných vět, především tedy nemůže nastat stav, kdy by hodnota pravda byla přiřazena zároveň nějaké větě a její negaci. Fregova první námitka proti Hilbertovu nápadu ztotožnit konzistenci s existencí je nasnadě: konzistentních teorií je spousta, ale jen některé jsou pravdivé. To však není fér již z toho důvodu, že Fregova kritéria existence o mnoho konkrétnější nejsou, a ve své obecnosti ani býti nemohou. Co vlastně podle Fregova názoru zajišťuje nějakému předmětu, resp. předmětům, existenci? Podle naší rekonstrukce z minulé kapitoly je to jejich konstituce v rámci větného oboru ohodnoceného podle jistých sémantických pravidel, totiž

(1) pravdivostního principu (každá věta systému je jednoznačně pravdivá či nepravdivá),

(2) obecného substitučního principu (nahrazením výrazů z třídy substituovatelných termů vznikne opět věta systému) a

(3) Leibnizova principu (rovnost mezi dvěma termy je pravdivá tehdy a jen tehdy, jsou-li substituovatelné *salva veritate*).[9]

Z logického hlediska nelze pro otázku existence skutečně o mnoho více udělat. Další kritéria jsou totiž čistě pragmatická: konstituovaný předmětný obor se musí ještě nějak osvědčit v praxi, např. měření a počítání, abychom ho poté nazvali čísly.

To vše se tedy zdá svědčit spíše pro Hilbertův přístup, tj. pro jeho příznivé srovnání s Fregovým transcendentálně-analytickým postojem a pro přidělení bodů navíc za to, že je ještě o něco (ontologicky) skromnější co se týče počtu kladených požadavků. Tato argumentace je ale mírně řečeno zvrácená, neboť stejně tak bychom mohli říci, že jsou fyzikalista či empirista, budující svět z atomů a počitků, skromnější nežli racionalista, jenž k tomu ještě potřebuje rozumové pojmy. Takto pojatá skromnost je divná ctnost, neboť nejde o volbu nejmenšího, ale adekvátního množství prostředků, jež nás pak nenutí redukovat pojmy základní na odvozené, např. pravdu na konzistenci. Odvolat se přitom můžeme na Kantovu [1781/1787, A 656/B 684] inverzi známé Occamovy břitvy:

> neredukuj rozmanitost entit více nežli třeba (entium varietates non temere esse minuendas),

v níž nahradíme slovo "entita" slovem "princip". Na pozadí Fregovy dosti obsáhlé polemiky s Hilbertem, která začala zmíněnou korespondencí

[9] Formulace uvedených principů a čtení Fregovy logiky jejich prizmatem je unikátní interpretační výkon Stekelerův [1986]. Podrobně jsem jej prezentoval in Kolman [2002].

a pokračovala sérií Fregových [1903], [1906] článků o základech geometrie, je přitom jasně vidět, jakou roli v docenění či alespoň vstřícnějším posouzení některých aspektů Hilbertovy axiomatické koncepce hrají detaily toho, jak si Hilbert ověřování konzistence axiomů, tedy základní předpoklad jejich smysluplnosti, představoval v praxi.

V jeho *Grundlagen* je bezespornost axiomů geometrie a nezávislost axiomu o rovnoběžkách předvedena prostřednictvím analytického (aritmetického) modelu, jenž tyto axiomy splní, resp. splní všechny z nich s výjimkou axiomu eukleidovského. Tím je v první řadě dáno najevo, že Hilbertovy axiomy nejsou věty, např. věty eukleidovské geometrie, které mají fixní význam a pravdivostní hodnotu, ale výrazy nějakého umělého jazyka, který lze interpretovat různě. Hilbert k tomu v dopise Fregovi [1976, s. 67] píše:

> Každá teorie je samozřejmě jen kostrou či schématem pojmů, spolu s jejich nutnými vzájemnými vztahy, a základní prvky si lze myslet libovolně. Jestliže si pod svými body myslím nějaké systémy předmětů, např. systém: láska, zákon, komín, ... a následně za vztah těchto předmětů k sobě navzájem považuji pouze souhrn svých axiomů, pak mé věty, např. věta Pythagorova, platí i o těchto předmětech.

To zní na první pohled absurdně, neboť Pythagorova věta sama zcela přirozeně nemůže být *o* lásce a komínu, ale o vztazích stran v trojúhelníku, což nemá nic společného s faktem, že nahrazením příslušných mimologických výrazů výrazy jinými můžeme eventuálně dostat opět pravdivou větu. Vstřícná interpretace však vezme v první řadě v úvahu, že Hilbertovy snahy dát základ geometrii eukleidovské byly formulovány na pozadí rozvoje geometrií neeukleidovských, jenž v inkriminované době zvláště bujel. Spolu s tím se objevil právě fenomén relativity základních geometrických pojmů, které se v rámci různých geometrií liší především vztahy navzájem (lze např. vést jedním bodem jednu či více přímek rovnoběžných k přímce dané), a jsou tedy dány jednak celkem uvedených axiomů, jednak demonstracemi pojmové bezespornosti eukleidovskou vizualizací, např. interpretací neeukleidovské roviny jakožto povrchu eukleidovské koule.

Zmínkou zákonů duality Hilbert v korespondenci s Fregem [1976, s. 67] implicitně odkazuje ke GEOMETRII PROJEKTIVNÍ, zabývající se studiem *vlastností* geometrických figur, které se zachovávají při projekci, tzv. vlastností DESKRIPTIVNÍCH oproti vlastnostem METRICKÝM. Pro projektivní geometrii je charakteristické, že se v ní pojmy vyskytují ve dvojicích, jejichž vzájemnou substitucí lze z pravdivé věty či platné definice získat opět pravdivé tvrzení; v rovině se to např. týká dvojic "bod" a "přímka", "ležet na" a "procházet", "kolineární"(ležící na téže přímce) a "konkurentní" (protínající se v témže bodě), "spojnice" a "průsečík". Příkladem metrické vlastnosti je pravoúhlost trojúhelníka. Příklad deskriptivní vlastnosti lze vyčíst z následujícího případu pravdivé věty, známé jako Pascalův teorém, a její dualizace, známé jako teorém Brianchonův:

> Šestiúhelník je vepsaný v kuželosečce tehdy a jen tehdy, jestliže jsou průsečíky tří dvojic jeho prodloužených protilehlých stran kolineární.
>
> Šestiúhelník je opsaný kuželosečce tehdy a jen tehdy, jestliže jsou spojnice tří dvojic jeho protilehlých vrcholů konkurentní.

Snaha vypořádat se v rámci studia základů geometrie s těmito fenomény je pochopitelná. Nic to ovšem nemůže změnit na okolnosti, že je třeba důsledně rozlišovat mezi větou a formulí a že to byl Frege [1976, s. 74], kdo opět udeřil hřebík na hlavičku, když na základě dodatečných Hilbertových vysvětlení vyslovil podezření, že Hilbert zřejmě nechce definovat pojmy jako 'bod' či 'přímka', ale pojmy druhého řádu, jako jsou např. 'symetrie' či 'tranzitivita' jejich vztahů, tedy vlastnosti struktury zachycované formulí coby reprezentantem formy.

Počáteční problémy s porozuměním na Fregově straně spočívaly právě v tom, že pojem formule sám neměl a pohyboval se vlastně vždy na úrovni věty, případně větného schématu. Zmínili jsme ostatně, že i axiomy své logiky chápal jako (plně kvantifikované) věty s definitivním významem, a nebyl proto s to dospět k adekvátnímu pojmu logické pravdivosti. Z podobného důvodu nedokázal přes veškerou snahu dát příliš smyslu Hilbertovým metateoretickým důkazům, což v historické perspektivě vysvětluje, proč není tvůrcem metamatematiky on, ale Hilbert. Podobně problematický je i Fregův přístup k neklasickým geometriím, které na některých místech [1983, s. 183 n] přirovnává k alchymii, jinde [1983, s. 264 nn] se s nimi zase pokouší vypořádat převedením jejich axiomů do antecedentu kondicionálu, jenž může být v případě logicky odvoditelného konsekventu uznán pravdivý jako celek, aniž by musela být uvažována pravdivost jeho částí. Z druhé strany je ovšem třeba připomenout, že Hilbert byl tehdy rovněž dalek jasné představy o podstatě navrhovaných metod.

5.3 Až na izomorfismus

Hilbertovy důkazy konzistence prostřednictvím modelu nesvědčí jenom o tom, že byl vyznavačem formálních teorií, ale i že byl přinejmenším v období *Grundlagen* axiomatistou měkkého typu. Jako takový *de facto* uznává, že existuje pravda a existence mimo konzistentní systémy, pokouší se však v praxi odkaz na ně nahradit právě konzistencí a odvoditelností, neboť se mu tyto pojmy na rozdíl od prvních dvou zdají být bezpečné a exaktní. To ho přirozeně vede k problému, zda ohodnocení vět, resp. formulí nějakého jazyka na základě zvolené axiomatické teorie vystihuje onen preteoretický koncept pravdy, tj. zda je jeho axiomatická definice v tomto smyslu úplná.

Existuje přitom několik možných pojmů úplnosti. Nejslabší a z hlediska eliminace sémantických pojmů nejlákavější verzí se zdá být prosté ujištění, že ohodnocení založené na dané axiomatizaci, jak jsme je popsali v předchozím oddíle, nenechá žádnou formuli nedourčenu, tj. ‘nerozhodne ji’, jak se vyjádřil Hilbert roku 1917 ve svých přednáškách.[10] To znamená, že v dané axiomatické teorii T neexistuje tzv. NEZÁVISLÁ FORMULE (na T), což je (uzavřená) formule φ, pro niž neplatí ani jedna z možností $T \vdash \varphi$, $T \vdash \neg\varphi$. Přesněji:

> DEDUKTIVNĚ ÚPLNOU TEORIÍ rozumíme množinu T formulí v daném jazyce L takovou, že pro každou (uzavřenou) formuli $\varphi \in F_L$ platí právě jedna z možností $T \vdash \varphi$, $T \vdash \neg\varphi$, tj. jedná se o bezespornou teorii bez nezávislých formulí.

To je samozřejmě čistě syntaktické rozlišení, přesto je v něm zakomponována sémantická motivace, totiž požadavek, aby pojem odvoditelnosti v daném axiomatickém systému kopíroval pravdivostní princip, tj. aby platila odvoditelnost (pravdivost) věty nebo její negace.

Druhý přístup tento elementární sémantický požadavek rozšiřuje. Axiomatizace podle něho nemá pouze napodobovat obecný pravdivostní princip, ale adekvátně zachytit i onen předem daný pojem pravdy, jakkoli je jen ‘intuitivní’ a preteoretický. Ve zmíněných přednáškách se Hilbert hlásí i k tomuto pojmu úplnosti, jenž je zvláště významně, i když ne zcela typicky exemplifikován ve výše dokázané větě o úplnosti výrokového a predikátového počtu. Můžeme jej nazývat úplností vůči interpretaci.[11] Východiskem je zde totiž vždy nějaká interpretace $\mathfrak{I}$ jazyka L, definující pravdivost (uzavřených) formulí F_L tak, že pro každou platí buďto $\mathfrak{I} \models \varphi$, nebo $\mathfrak{I} \models \neg\varphi$. Potom:

> Teorii T v jazyce L nazveme ÚPLNOU VŮČI INTERPRETACI $\mathfrak{I}$ tohoto jazyka, jestliže $T \vdash \varphi$ platí tehdy a jen tehdy, když $\mathfrak{I} \models \varphi$ pro každou formuli $\varphi \in F_L$,

neboli když množina (viz s. 188 n)

$$\mathsf{Th}(T) = \{\varphi \mid T \vdash \varphi\}$$

[10] Přednášky nebyly publikovány, anotované místo je uvedeno v komentáři in Hilbert [2004, s. 434].

[11] Úplnost výrokového a predikátového kalkulu je mimořádným případem proto, že je vlastně úplností vůči *interpretacím*, tj. kalkulizuje se v ní pojem logické, nikoli prosté pravdy.

a množina

$$\mathsf{Th}(\mathfrak{I}) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi \mid \mathfrak{I} \models \varphi\},$$

jíž se říká TEORIE INTERPRETACE $\mathfrak{I}$, koincidují. Tím ale výčet druhů pojmů úplnosti nekončí. V druhém vydání svých *Grundlagen* [1903] přidává Hilbert ke svým axiomům postulát, jakýsi metaaxiom, jenž od uvedených axiomů úplnost vyžaduje. Tentýž axiom úplnosti přidává Hilbert [1900*a*] také ke své axiomatizaci reálných čísel a vyjadřuje přesvědčení, že by měl být vedle bezespornosti kladen na systém libovolný.[12] Inkriminovaná verze úplnosti se ovšem liší od všech předchozích, přičemž vzdáleně připomíná kdysi zmíněnou úplnost Postovu, podle níž je axiomatický systém úplný, jestliže přidání neodvoditelné formule vede ke sporu. Postova úplnost je v obvyklých případech ekvivalentní úplnosti deduktivní.[13] V *Grundlagen* ale překvapivě k onomu sporu nemá vést přidání formulí, ale dalších prvků do definovaného univerza. Hilbert [1903, §8, s. 16] říká konkrétně:

> Prvky (body, přímky, roviny) geometrie tvoří systém předmětů, jenž při zachování celku uvedených axiomů nemůže být rozšířen.

To je měkký axiomatismus v té nejsilnější (nejměkčí?) formě, neboť se týká adekvátního zachycení popisovaného oboru nejen co do celku formulí, které nad ním platí, ale i jeho prvků. Axiomatický systém ho má zachytit tak přesně, aby jeho reinterpretací nebylo možné přidat nové prvky.

Zprvu je ovšem dosti nejasné, jak by k tomu mohlo dojít. Axiomatický systém buď úspěšně zachycuje eukleidovskou geometrii, pak není co přidávat, nebo definuje něco jiného, pak je celá záležitost ztracena. Instruktivní je zde opět polemika s Fregem. Podle Fregova [1903, s. 370], [1906, s. 386] návrhu se máme na Hilbertovy axiomy dívat jako na systém rovnic o více neznámých, od něhož požadujeme jednoznačnou řešitelnost, která užitým neinterpretovaným výrazům teprve přiděluje význam. Frege [1903, s. 370] se nato ptá:

> Kdo ale říká, že je tento systém pro ony neznámé řešitelný a že je řešitelný jednoznačně? Jak by toto řešení vůbec vypadalo v případě, že je možné? Každý z výrazů "bod", "přímka" atd. by musel být vysvětlen v nějaké větě, v níž by všechna ostatní slova byla známa.

[12] Podle nepublikované přednášky z roku 1905, citované in Zach [1999, s. 341].

[13] Obecně ekvivalentní samozřejmě nejsou, např. axiomatický systém VL s pravidlem substituce je úplný v Postově, nikoli v deduktivním smyslu. Vše záleží na užitých pravidlech, axiomech pro negaci a pojmu sporu. Proto se deduktivní úplnosti také někdy říká úplnost vůči negaci.

Hilbertův axiomatický systém ve skutečnosti nemůže mít jednoznačné řešení již proto, že podle Hilbertova vlastního přání nepopisuje konkrétní model (což je údajně nemožné), ale nějakou strukturu, totiž strukturu modelu, jenž dal celému systému název ‘základy geometrie’, tj. předmětný obor bodů, rovin a ploch. Pokud se mu to povede, zachytí tím pádem i všechny obory, které jsou eukleidovské geometrii strukturálně podobné neboli s ní izomorfní. Z Hilbertovy strukturalistické pozice by nyní bylo žádoucí dosáhnout alespoň toho, aby celku zvolených axiomů nevyhověly takové obory, které danou izomorfii porušují přidáváním dalších prvků. Uvedenému axiomu pak odpovídá nejspíš tzv. KATEGORIČNOST formální teorie, tj. požadavek, aby všechny její modely byly izomorfní.[14] Moderní definice vypadá následovně:

> Interpretace $\mathcal{I}$ a $\mathcal{J}$ jazyka L se nazývají IZOMORFNÍ, jestliže existuje bijektivní zobrazení $i : \dot{\mathcal{I}} \to \dot{\mathcal{J}}$ takové, že pro každé $c, f^n, R^n \in L$ a $a_1, \ldots, a_n \in \dot{\mathcal{I}}$ platí:
>
> (1) $i(\mathcal{I}(c)) = \mathcal{J}(c)$,
>
> (2) $i(\mathcal{I}(f^n)(a_1, \ldots, a_n)) = \mathcal{J}(f^n)(i(a_1), \ldots, i(a_n))$,
>
> (3) $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{I}(R^n) \leftrightarrow \langle i(a_1), \ldots, i(a_n) \rangle \in \mathcal{J}(R^n)$.
>
> Příslušné zobrazení i se nazývá IZOMORFISMEM obou interpretací. Izomorfii interpretací $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ značíme jako $\mathcal{I} \cong \mathcal{J}$. Nepožadujeme-li, aby bylo zobrazení i surjektivní, ale jen injektivní, získáme pojem VNOŘENÍ první interpretace do druhé. Vnořená interpretace je izomorfní se svým obrazem.

Ačkoli tedy interpretace, vymezená Hilbertovými axiomy, nemůže být jediná, může být jediná co do určité struktury neboli jediná až na izomorfismus. Právě pro tento typ uchopení dané interpretace prostřednictvím axiomů, tj. jejího jednoznačného popisu ‘až na izomorfismus’, se vžil název IMPLICITNÍ DEFINICE. V jakém smyslu se na něj jako na definici lze dívat, budeme záhy diskutovat v souvislosti s logicismem Dedekindovým.

Vraťme se ale ještě k Fregově námitce ohledně řešitelnosti axiomů. Frege v ní naznačuje přinejmenším dva závažné problémy spjaté s ideou axiomu/definice. Jeden z nich se týká toho,

(1) zda bezespornost axiomů nelze v posledku řešit právě jen konstrukcí nějakého modelu.

To odpovídá zmíněnému Hilbertovu postupu, nutno však říci, že si Hilbert [1900*b*] již v té době sliboval, že důkaz konzistence aritmetiky provede přímo, tj. nikoli odkazem na interpretaci z jiného oboru. Je to

[14] K tomuto názoru se kloní i Hallett, jenž postavení axiomu v Hilbertově díle analyzuje ve svém komentáři k přetisku *Grundlagen* in Hilbert [2004, s. 426 nn].

vlastně jeden z jeho dvaceti významných matematických problémů. I proto lze tušit, že se Hilbertovy snahy a názory na axiomatismus vyvíjely směrem k jeho striktní podobě, v níž měly být interpretace axiomů definitivně eliminovány. To mu ne zcela právem vyneslo nálepku formalisty. — Druhým Fregovým problémem je obava,

(2) zda bezespornost axiomů existenci nějakého modelu v obecnosti umožňuje.

To samozřejmě záleží na tom, jak definujeme model teorie, neboť z oddílu o logice druhého řádu víme, že v případě standardních modelů nemá každá bezesporná teorie model. Pointa nicméně spočívá v tom, že nám Hilbert na rozdíl od Frega žádnou definici toho, co rozumí interpretací, 'systémem předmětů', nepodal. Mohl by se, jak je to dodnes obvyklé, odvolávat na naše intuice, právě takovýmto vágním, a proto nebezpečným vymezením se ale chtěl od počátku svým axiomatismem vyhnout.

Ačkoli by to mělo být na základě dosud řečeného dostatečně jasné, přesto si neodpustím zdůraznit, že přenesení pravdivosti z interpretace formálního jazyka (coby množiny předmětů a na ní definovaných relací) na formuli nemá s intuicemi, tedy čímsi neuchopitelným či uchopeným jen zčásti, nic společného. Z předchozí kapitoly totiž víme, že řeč o předmětech a jejich relacích je jen nepřímým způsobem řeči o výrazech, které byly ohodnoceny v nějakém větném celku podle pravidel předmětné konstituce. Interpretace formálního jazyka tedy v důsledku nespočívá, a dost dobře ani nemůže spočívat, v jeho asociaci s kusy reality, ale s částmi již interpretovaného jazyka, jehož věty teprve realitu definují, přesně ve smyslu Fregova [1918a, s. 74] prohlášení, že skutečnost (fakt) je pravdivá věta. V tomto smyslu také navrhuji číst Fregův poslední citát věnovaný Hilbertovi, viz s. 306. Jmenným konstantám c_1, c_2 jsou např. přiřazena jména "bod $[2,4]$", "přímka $y = x + 2$", predikátové konstantě P^2 predikát "x leží na y" a formuli $P^2(c_1, c_2)$ skrze větu "bod $[2,4]$ leží na přímce $y = x + 2$" hodnota pravda.

Interpretace formálního jazyka je tedy vlastně také teorie, a to dokonce v původnějším slova smyslu. Jedná se o celek vět konstituujících daný předmětný obor, jejichž ohodnocení pravdivostními hodnotami je chápáno jako fixní, určující eventuálně pravdivost teorie formální, která se ovšem v závislosti na dané interpretaci může měnit. Množiny formulí jsou teoriemi nazývány právě v tomto odvozeném smyslu, a to především díky Hilbertovu obratu. Totéž se týká oboru kvantifikace, jenž je u teorií prvního typu, po Stekelerově [1986, s. 380] vzoru nazvaných TEORIEMI MATERIÁLNÍMI, dán jednou provždy třídou všech substituovatelných termů. V rámci FORMÁLNÍCH TEORIÍ si oproti tomu ponecháváme vždy možnost kvantifikovat i přes objekty, které nejsou explicitně zmíněny, tj. nebyly pro ně v rámci teorie zavedeny konstanty.[15] Lze se mj. domnívat, že to byl právě nejasný status obou teorií, co na počátku metamatematiky vedlo k typickému zaměňování kategoričnosti teorie s její deduktivní úplností. Pro teorie prvního řádu přitom platí přechod od kategoričnosti k deduktivní úplnosti, neboť neúplnou teorii S lze za pomoci příslušné nezávislé formule konzistentně rozšířit dvěma možnými směry $S + \varphi$, $S + \neg\varphi$, které musí mít podle věty o úplnosti modely, jež jsou i modely S, ale nejsou přirozeně izomorfní. Deduktivní úplnost je takto v PL nutnou podmínkou kategoričnosti, což je další důvod, proč — alespoň z axiomaticko-strukturalistických pozic — považovat první vlastnost za významnou. V teoriích druhého řádu je situace jiná.

Poznamenejme ještě, že samotný fakt toho, že jsme obvyklý pojem interpretace popsali jako teorii, naznačuje, že nejsme daleko ani od vstřícné interpretace axiomatismu jistého typu, totiž toho, jenž souvisí s inferenčním holismem. O tom se zmíníme v oddíle 8.4. Hilbertovými názory jsme se ale nyní zabývali především pro jejich roli v novodobé reinterpretaci logicistických výsledků Fregových. K té se záhy dostaneme propojením Hilbertových názorů s logicismem Richarda Dedekinda.

5.4 Dedekindova aritmetika

Co se týče přístupu k základům matematiky, představuje Richard Dedekind spojnici mezi svými současníky, Cantorem a Fregem, na straně jedné, a nastupující generací, zvláště pak Hilbertem, na straně druhé. Podobně jako zprvu u Hilberta byla i jeho oficiálním polem působnosti teorie algebraických čísel, kterou spoluzaložil a zaplnil dnes standardními pojmy, jako je těleso či ideál. Snaha o abstraktní prezentaci známých číselných oborů jej ovšem vedla k otázkám jejich řádné definice, jak jsme se s ní setkali v oddíle 2.2 věnovaném Dedekindově teorii reálných čísel coby řezů na racionálních číslech. Redukcí kontinua na množiny přirozených čísel se základy analýzy ocitly ve stavu, jenž byl mnohými pozvolna akceptován, málokým však považován za dále analyzovatelný. Dedekind stejně jako Frege patřili v tomto ohledu k výjimkám. Míra vnější shody jejich výsledků je až zarážející.

Stejně jako Frege věnuje Dedekind zkoumání přirozeného čísla vlastní monografii pod názvem *Was sind und was sollen die Zahlen* [1888]. Ta vychází devět let po *Begriffsschrift* a čtyři roky po *Grundlagen der Arithmetik*, ačkoli je původ idejí v ní uvedených podstatně starší, neboť

[15] Pro odchovance teorie modelů se možná vyplatí zmínit, že materiální teorie odpovídá do jisté míry tomu, čemu se tam říká úplný diagram interpretace (struktury), totiž systému formulí, který ji vyčerpávajícím způsobem popisuje, kde tedy každému objektu odpovídá jmenná konstanta a každému vztahu objektů formule, která jej zachycuje. Samozřejmě, že se takovýmto vysvětlením zapřahá vůz před koně.

Dedekind dlouho váhal s jejich otištěním. V úvodu spisu hovoří o aritmetice jako o části logiky, upřesňuje však, že tím míní v první řadě nezávislost pojmu čísla na názoru prostoru a času. Rozhodující roli v jeho prezentaci hraje pojem množiny (systému), jemuž jsou věnovány první paragrafy. Zde již začínají vnitřní neshody s Fregovou filosofií.

Dedekindův přístup k množinám v podstatě kopíruje přístup Cantorův, tj. množina je pro něj základní pojem, jenž je intuitivně zakotven v možnosti shromažďování předmětů v jeden celek. Na rozdíl od Fregova způsobu, jenž množiny vyděluje pojmově jako $\{x \mid P(x)\}$, má tato metoda zjevnou nevýhodu, neboť zprvu nevede k ustanovení prázdné ani jednoprvkové množiny: Proces shromažďování prvků nemá nikdy za výsledek žádný nebo jen jeden prvek, v důsledku proto není možné odlišit samotný prvek od jednoprvkové množiny, jíž náleží, a tedy ani vztah prvku ($\in$) a inkluze ($\subseteq$). Dedekind — na rozdíl od Cantora — tyto vztahy také nerozlišuje (!) a používá univerzální znak $\ni$ ve významu obou.

Ne náhodou je tentýž defekt typický pro soudobou (předfregovskou) logiku, reprezentovanou nejvýznamněji Ernstem Schröderem, jehož *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [1890–1895] Dedekind také uznale zmiňuje úvodem spisu. Je dobré si uvědomit, že sémantické rozdíly mezi $\in$ a $\subseteq$ odpovídají Fregově analýze věty a kategorizaci tradičních pojmových slov na jména a výrazy nenasycené, tj. rozličné syntakticko-sémantické analýze vět "Sókratés je smrtelný" a "lidé jsou smrtelní". Frege upozorňuje, že tradiční chápání jména jako singulárního pojmu je matoucí, neboť stírá rozdíl mezi výrazy "satelit Země" a "Měsíc", tj. právě mezi množinou jednoprvkovou

$$\{x \mid x \text{ je satelit Země}\} = \{\text{Měsíc}\}$$

a jejím prvkem

Měsíc.

Rozdíl lze s jistou mírou opatrnosti číst také tak, že první výraz označuje jeden jediný prvek kontingentně, zatímco druhý nutně, odkud se bere i výše (viz oddíl 4.4) nastíněný rozdíl mezi určitou deskripcí a jménem. O tom, že se nejedná o pouhé rozlišení arbitrární, tj. bez hlubšího logického zakotvení, svědčí fakt, že jeho zanedbání vedlo k jednomu z prvních sémantických paradoxů, jenž se podle svého 'objevitele' (či spíše oběti) jmenuje Schröderův.

Stručně vysvětlím, o co se jedná. Schröderův paradox se zakládá na předpokladu, že prázdná množina náleží každé množině, tj. platí $\emptyset \subseteq a$ pro a libovolné. Nyní stačí vzít nějakou pevnou množinu b, a uvažovat množinu všech množin, které jsou s b identické. Tak dospějeme k jednoprvkové $\{b\}$. Podle předpokladu by mělo platit $\emptyset \subseteq \{b\}$, což jak víme, skutečně nastává, problém je, že interpretujeme-li $\subseteq$ stejně jako $\in$, dostáváme vztah $\emptyset = b$, čili: libovolný předmět se rovná prázdné množině.

Schröder [1890–1895, díl I, s. 245 nn] to nejprve dosti pochybně obhajuje odvoláním se na běžný obrat, že "daná množina obsahuje b a kromě toho už *nic*", aby záhy vzniklý paradox eliminoval ještě pochybnějším způsobem, jenž mu však podle některých pramenů vynesl prvenství v objevu teorie typů. To je absurdní již z toho důvodu, že Fregova hierarchizace funkcí tuto teorii reprezentuje v dostatečně rigorózním tvaru.

Přes popsanou nedůslednost je Dedekindův příspěvek k teorii množin významný zejména tendencí explicitně a přehledně formulovat všechny užité principy. Zermelo [1908*b*] ostatně jmenuje právě Dedekindův spis jako významnou inspiraci své axiomatizace teorie množin. Z podobných důvodů, tj. jakožto důsledek Dedekindova zvyku být co nejexplicitnější, vešlo do povědomí, že je skutečným autorem standardní axiomatizace aritmetiky, podané Peanem v jeho *Aritmetices principia* [1889] a nazvané po něm Peanovou aritmetikou. Peano totiž, ku svému vlastnímu neprospěchu, v úvodu svého spisu uznává inspiraci Dedekindovým esejem. Nic míň, ale ani nic víc! Dedekindův přístup z *Was sind und was sollen die Zahlen* navíc není axiomatický ve smyslu Peanova syntaktického odvozování formulí z formulí, na druhou stranu předjímá rysy axiomatismu raného Hilberta, především tedy přesvědčení, že lze k definici nějakého oboru dojít zachycením jeho strukturálních rysů. Významné je, že Dedekind nezůstal u pouhých proklamací a doplnil vše o žádoucí detaily, jež budeme diskutovat dále. Proto může být právem označován za otce filosofie (matematického) strukturalismu.

Jakou strukturu mají přirozená čísla, přitom rámcově víme již od Frega: jsou to následníci nuly, tedy výsledky konečné iterace aplikace injektivní funkce následníka na nějaký prvek, jenž se v této řadě již neobjeví. Kámen úrazu spočívá v zachycení konečnosti oné iterace, neboť, jak sdělil Dedekind v dopise Keftersteinovi,[16] v pokusu o zachycení přirozených čísel, tedy konečných mohutností, je užití obratu "dostat se tam konečně mnoha kroky" bludným kruhem. Avizovaným řešením je teorie řetězců z Dedekindova eseje [1888, § 4]:

> ŘETĚZCEM (*Kette*, *chain*) nazveme množinu S spolu se zobrazením $f : S \to S$. Správně by se tedy mělo hovořit o řetězci vůči f, nebo f-ŘETĚZCI, a psát $\langle S, f\rangle$, zpravidla však ztotožňujeme řetězec s jeho nosičem. Máme-li nějaký řetězec, můžeme v jeho rámci rozlišit rozličné PODŘETĚZCE, což jsou množiny $A \subseteq S$, které jsou rovněž řetězci vůči f, resp. její restrikci $f|A$.

O podmnožině A f-řetězce S, která je také f-řetězcem (resp. $f|A$-řetězcem), se často říká, že je na f UZAVŘENA, tj. všechny aplikace této funkce na prvky A jsou opět prvky A. Např. množina sudých čísel je uzavřena na libovolné mocnění x^n, nikoli na přičítání $x + 3$. Množinu lze

[16] Viz van Heijenoort [1967, s. 98–103].

samozřejmě uzavírat také vůči relacím, např. právě genetického rodiče či potomka. Množina aristokratů je např. uzavřena na druhou, nikoli na první z nich, samozřejmě modulo levobočci.

Pojem UZÁVĚRU[17] množiny $A \subseteq S$ na funkci f odpovídá pojmu podřetězce T f-řetězce S, pro nějž platí $A \subseteq T$. Uvážíme-li množinu $M(A)$ všech takovýchto podřetězců řetězce S, můžeme z nich vytvořit průnik

$$K_A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap M(A) = \bigcap \{T \mid A \subseteq T \subseteq S \wedge f|T : T \to T\}.$$

Jelikož $S \in M(A)$, je $M(A)$ neprázdný a definice dává smysl (viz poznámka na s. 138). Je přitom snadné dokázat, že K_A je opět podřetězcem S, neboť (1) $K_A \subseteq S$ a (2) z $a \in K_A$ plyne $a \in T$ pro každé $T \in M(A)$, tím pádem $f(a) \in T$ pro každé $T \in M(A)$, a tím pádem $f(a) \in K_A$. Jelikož platí také (3) $A \subseteq K_A$, dostáváme úhrnem $K_A \in M(A)$. K_A je tedy uzávěrem A, pro nějž navíc z definice platí $K_A \subseteq T$ pro libovolný uzávěr T množiny A, jde tedy o nejmenší řetězec dané vlastnosti, neboli MINIMÁLNÍ UZÁVĚR množiny A na funkci f.

Tímto komplikovaným opisem obcházíme zjevně definici K_A přes nežádoucí odkaz k onomu "dostat se tam konečně mnoha kroky", tj. pomocí proslulých tří teček

$$K_A = A \cup f(A) \cup f(f(A)) \cup f(f(f(A))) \cup \cdots,$$

a řešíme tak v množinové terminologii stejný problém jako Frege svojí definicí *ancestralu.* Tato neoficiální, preteoretická definice 'tří teček' má však své didaktické výhody. Díky ní např. hned vidíme, proč se o A zpravidla hovoří jako o BÁZI, případně GENERÁTORU množiny K_A. Rovněž je s její pomocí možné nahlédnout platnost tří obecných teorémů, které Dedekind v rámci své teorie řetězců dokazuje a které zužitkujeme dále. Jako první vezměme teorém 58, podle něhož lze minimální uzávěr množiny A složit z této množiny samotné a minimálního uzávěru jejího obrazu, tj. platí:

$$K_A = A \cup K_{f(A)}.$$

Důkaz: Označme množinu $A \cup K_{f(A)}$ stručně jako U. Triviálně platí $A \subseteq K_A$. Navíc platí $f(A) \subseteq K_A$, tedy i $K_{f(A)} \subseteq K_A$ z uzavřenosti K_A a minimality $K_{f(A)}$. Tím jsme dostali vztah $U \subseteq K_A$. Nyní potřebujeme dostat opačnou inkluzi. K té stačí ukázat, že $U \in M(A)$. Jelikož zjevně $A \subseteq U$, zbývá ověřit, že se jedná o řetězec neboli množinu uzavřenou na funkci f. Zbytek plyne z minimality K_A. Přitom obecně platí $g(C \cup D) = g(C) \cup g(D)$, tedy i (1) $f(A \cup K_{f(A)}) = f(A) \cup f(K_{f(A)})$. Z vlastností

[17] Často se ovšem uzávěrem nazývá až to, co záhy nazveme uzávěrem minimálním.

uzávěru plyne (2) $f(A) \subseteq K_{f(A)}$ a (3) $f(K_{f(A)}) \subseteq K_{f(A)}$. Z (1–3) tak dostáváme (4) $f(U) = f(A \cup K_{f(A)}) \subseteq A \cup K_{f(A)} = U$. □

Druhým teorémem je teorém 57, podle něhož je obraz minimálního uzávěru minimálním uzávěrem obrazu, tj.

$$f(K_A) = K_{f(A)}.$$

Důkaz: Nejprve ukažme, že $f(K_A) \in M(f(A))$, tj. že je $f(K_A)$ uzávěrem $f(A)$. (1) Jelikož platí $f(K_A) \subseteq K_A$, musí platit i $f(f(K_A)) \subseteq f(K_A)$, tj. $f(K_A)$ je f-řetězec. (2) Z $A \subseteq K_A$ plyne $f(A) \subseteq f(K_A)$. Z toho dostáváme inkluzi $K_{f(A)} \subseteq f(K_A)$. Druhou inkluzi dostaneme takto: (1) $f(K_A) = f(A \cup K_{f(A)})$ podle předchozí věty, tedy (2) $f(K_A) = f(A) \cup f(K_{f(A)})$. (3) $f(A) \subseteq K_{f(A)}$ a $f(K_{f(A)}) \subseteq K_{f(A)}$ plyne z vlastností uzávěru. Dáme-li body (1–3) dohromady, získáme kýženou inkluzi. □

A do třetice, jako teorém 59, dokazuje Dedekind PRINCIP INDUKCE. To je zvláště významné, neboť právě kolem něho se soustředí většina pozdějších útoků na nosnost logicistického projektu. Jádro příslušného tvrzení je přitom více než jasné. Pracujeme-li s nějakým minimálním uzávěrem K_A, je zřejmé, že platí-li nějaká vlastnost pro všechny prvky množiny A a je-li přenášena funkcí f, pak platí pro celé K_A. Formulováno extenzionálně:

> Mějme řetězec $\langle S, f \rangle$ a $A \subseteq S$ takové, že $K_A = S$. Nechť pro nějakou množinu $T \subseteq S$ platí podmínky:
>
> (1) $A \subseteq T$,
>
> (2) jestliže $a \in T$, pak $f(a) \in T$ pro každé $a \in S$.
>
> Pak již platí:
>
> (3) $T = S$.

Důkaz: Podle definice je T zjevně uzávěrem A, tj. patří k prvkům systému $M(A)$, jehož je K_A průnikem. Tím pádem platí $S = K_A \subseteq T$. Opačná inkluze je snadná, neboť $T \subseteq S$ platí podle předpokladu. □

K diskuzi principu a jeho důkazu se ještě mnohokráte vrátíme, nyní proto přistupme k vlastnímu popisu struktury přirozených čísel zúžením pojmu řetězce na speciální případ řetězce jednoduchého, pro nějž Dedekind [1888, § 6] používá název "jednoduše nekonečný systém" (*einfach unendlich*, *simply infinite*). Jím budeme dále nazývat takový f-řetězec S, jenž je generován injektivní funkcí f z jediného prvku $a \in S$, jenž navíc nenáleží jejímu oboru hodnot, přesněji: JEDNODUCHÝM ŘETĚZCEM je trojice $\langle S, f, a \rangle$, kde

D1 $\langle S, f\rangle$ je řetězec,

D2 $S = K_{\{a\}}$,

D3 $a \in S - f(S)$,

D4 f je injektivní.

Místo $K_{\{a\}}$ píšeme zpravidla jen K_a. Jednoduchý řetězec je tím, co má vyjadřovat definici přirozených čísel coby lineární nekonečné posloupnosti následníků nuly, resp. nějakého prvního prvku a:

$$a,\ f(a),\ ff(a),\ fff(a),\ \ldots.$$

Symbolickým přepisem Dedekindových definujících podmínek (D1–4) (ne přesně v uvedeném pořadí) získáme sadu Peanových axiomů:

P1 $(\forall x)(s(x) \neq 0)$,

P2 $(\forall x, y)(s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$,

PI $(\forall X)[X(0) \wedge (\forall x)(X(x) \rightarrow X(s(x))) \rightarrow (\forall x)X(x)]$

coby formulí jazyka PL_2, v nichž “0” a “s” figurují jako pouhé neinterpretované konstanty, nahrazující z mnemotechnických důvodů dříve užitá “a” a “f”. Podmínce (D1) nic neodpovídá, neboť je implicitně předpokládaná ve smyslu totální definovanosti příslušné funkce na univerzu každé interpretace. Formule (P1–2) a (PI) spolu s $\mathfrak{B}_2$ budeme dále nazývat Peanovou aritmetikou druhého řádu a značit $\mathfrak{PA}_2$. Okolnost, že je to označení oprávněné přinejmenším v užším, strukturalistickém smyslu, zbývá ještě prokázat. V první řadě bychom měli ověřit toto:

> V jednoduchém řetězci $\langle S, f, a\rangle$ (1) je a jediným prvkem S ležícím mimo $f(S)$ a (2) je také jediným generátorem S.

Důkaz: Podle dokázaných teorémů 57, 58 platí, že $S = K_a = \{a\} \cup K_{f(a)} = \{a\} \cup f(K_a) = \{a\} \cup f(S)$. Z toho plyne přímo bod (1). Mějme nyní nějaký prvek $b \in S$ takový, že $S = K_b$. Pak platí opět $S = \{b\} \cup f(S)$ a z bodu (1) musí platit $a = b$. Tím je vyřízen bod (2). □

Všechny prvky jednoduchého systému jsou získány konečně mnoha aplikacemi dané funkce na výchozí prvek. O tom, že se jiné než takto získané prvky v jednoduchém systému nevyskytují, nás ujišťuje právě princip indukce, tedy axiom (PI). První dva axiomy, (P1), (P2), kombinují požadavek injektivity funkce s její nesurjektivitou, tedy vynecháním alespoň jednoho prvku definičního oboru z oboru hodnot. To vlastně odpovídá požadavku prostého zobrazení množiny do sebe samé, které je, jak víme, charakteristické pro množiny nekonečné, a bylo tak i Dedekindem [1888, § 5] využito. Jelikož lze nekonečnou množinu definovat také jinak, nazývá se tento koncept po svém autorovi, neboli:

> Množinu A nazýváme DEDEKINDOVSKY NEKONEČNOU tehdy a jen tehdy, jestliže existuje injektivní zobrazení $f : A \to A$, které není surjektivní, tj. $A - f(A) \neq \emptyset$.

K alternativním definicím nekonečnosti se ještě dostaneme v oddíle 6.5. Nyní si všimněme, že ačkoli Dedekind explicitně nezastával myšlenku axiomatické definice, jeho postup Hilbertově ideji konvenuje. Popis jednoduchého řetězce byl dán ve vší obecnosti, kterou Peanovy axiomy coby formule umělého jazyka přímo odrážejí. Všechny dosavadní důkazy přitom svědčí o tom, že se strukturu přirozených čísel podařilo skutečně jednoznačně zachytit. Finální demonstraci toho, že jsou si všechny jednoduché řetězce coby interpretace $\mathfrak{PA}_2$ izomorfní, a $\mathfrak{PA}_2$ je tím pádem kategorická, ukážeme o něco později.

Pozastavme se ale nad tím, že Dedekind [1888, § 10] kategoričnost $\mathfrak{PA}_2$ formuluje jako teorém, podle něhož jsou "všechny jednoduše nekonečné systémy [strukturálně] podobné posloupnosti přirozených čísel", tj. ne jen sobě navzájem. V tomto bodě se totiž Dedekind coby předchůdce Hilberta setkává s Fregem coby propagátorem logického uchopení čísla. Dedekind si uvědomuje, že zachycení struktury přirozených čísel je jedna věc a zachycení přirozených čísel samých věc druhá. Jeho program má také dvě části, z nichž deskriptivní skončila stanovením Peanových axiomů. Ontologické části Fregova programu, která vyžaduje popsat nějaký obor logických předmětů, z něhož jsou čísla vydělena *predikátem*, se Dedekind snaží vyhnout tím, že čísla vyděluje *formulí*, tj. axiomy $\mathfrak{PA}_2$, ze všech možných interpretací, systémů. Dedekind přitom na rozdíl od Hilberta nezapomíná, že je to možné pouze 'až na izomorfismus', tj. že axiomy coby formule nám z povahy věci nedefinují jeden jediný, ale nekonečně mnoho systémů. Domnívá se však [1888, pozn. 134], že nás důkaz kategoričnosti popisu jednoduchého řetězce ospravedlňuje vzít jeden takový řetězec jakožto kanonický a prohlásit ho za přirozená čísla v naději, že tímto způsobem naše představa o nich původně vznikla.

Tradiční množinové definice přirozených čísel, jako je Zermelova či von Neumannova, představují právě takovéto volby kanonického systému jako řetězce čísel, je to však konvenčnost tohoto výběru, čemu se chtěl Dedekind svojí axiomatickou definicí čísla vyhnout. Proto navrhuje [1888, def. 73] získat kýžený řetězec abstrakcí ze všech ostatních, tj. jako ten, jehož prvky kromě okolnosti, že jsou to prvky jednoduchého řetězce, žádné dodatečné vlastnosti nemají. Tento postup by měl samozřejmě své výhody, neboť od čísel 1, 2 skutečně neočekáváme platnost vztahů $1 \in 2$ či $1 \subseteq 2$, jak je tomu u zmíněných definicí množinových, které jsou vlastně explicitní až příliš. Na druhou stranu je Dedekindem navrhovaný akt abstrakce dosti vágní na to, aby mohl být akceptován jako přípustný definiční prostředek, navíc prostředek čistě logický. Nejvážnějším problémem ale je, že předpokládá nějaký jednoduchý systém již jako daný![18] — Uvedenému tvrzení, že má axiomatický systém nekonečně mnoho různých modelů, předchází totiž významná podmínka: v případě, že má alespoň jeden. Na tomto místě Hilbert použil podmínku konzistence, jejíž vztah k existenci modelu je ale, jak jsme viděli, obecně diskutabilní. Dedekindovi je třeba přičíst ke cti, že se pokusil dokázat nejen strukturální jednoznačnost svého popisu, tj. podmínku *jednoznačnosti*, ale i podmínku *existence*, tj. skutečnost, že existuje alespoň jeden jednoduchý řetězec. Jeho úvaha [1888, teorém 72] je přitom následující: Vezměme (dedekindovsky) nekonečnou množinu A a funkci $f : A \to A$, která ji prostě zobrazuje na vlastní část. Pak existuje z definice prvek $a \in A - f(A)$ a systém $K_a \subseteq A$ je oním kýženým jednoduchým řetězcem. To ale znamená, že existence jednoduchého řetězce je ekvivalentní existenci (dedekindovsky) nekonečné množiny. Tím pádem musíme ještě ukázat, že taková množina existuje a že je navíc v nějakém smyslu jednodušší nežli množina přirozených čísel. Tak se ovšem dostáváme zpět k ontologické části Fregova programu.

5.5 V Hilbertově hotelu

George Boolos [1987, s. 188] napsal, že po obdržení Russellova dopisu, oznamujícího výskyt sporu v *Grundgesetze*, se měl Frege okamžitě zaregistrovat v Hilbertově hotelu. V této poznámce je chytře skryta nejen obecná rada reinterpretovat Fregovy výsledky výše načrtnutým strukturalistickým způsobem, ale i konkrétní způsob, jak zachránit to nejcennější, totiž Humův princip, konstrukcí jednoduchého modelu, který jej splňuje. "Hilbertův hotel" se totiž primárně vztahuje k populárnímu a často užívanému příkladu, jímž Hilbert ilustruje zvláštní vlastnosti nekonečných množin oproti konečným. Základní příběh je takový:

> Hoteliér, kterému přijel solventní host, má však již všechny pokoje obsazeny špatně platícími chudáky, se jistě ocitl v nepříjemné situaci, kterou není s to řešit standardními prostředky. Ne tak majitel nekonečného hotelu. Přes plně vyčerpanou kapacitu stačí, když z pokoje č. 1 přesune hosta do pokoje č. 2, obecně pak hosta z pokoje č. n do pokoje č. $n+1$. Všichni staří hosté evidentně bydlí a pro nového hosta je připraveno č. 1.

V nekonečném hotelu lze ale tímto způsobem ubytovat nejen jednoho hosta, ale prakticky jakýkoli počet hostů, včetně nekonečného, samozřejmě za předpokladu, že nepřevýší (nekonečnou) kardinalitu hotelu.

Souvislost s Humovým principem dostaneme jako vedlejší produkt krátkého 'strukturalistického' exkurzu. Uvážíme-li obecnou formu principů abstrakce, jako je HP a GV, získáme formuli

[18] K podrobné diskuzi Dedekindovy argumentace srov. Potter [2000, kap. 3].

$$F(X) = F(Y) \leftrightarrow X \sim Y,$$

v níž je F funktorovou konstantou druhého řádu. V příslušné interpretaci $\mathcal{I}$ jí bude odpovídat funkce f z univerza $\ddot{\mathcal{I}}$ druhořádových entit do univerza $\dot{\mathcal{I}}$ prvořádových, standardně tedy $f : \mathcal{P}(A) \to A$, kde A je základní nosič interpretace. Další podoba funkce f je určena ekvivalencí $\sim$, tj. ekvivalentním prvkům $\mathcal{P}(A)$ by měly být přiřazovány stejné prvky A a *vice versa.*

Vzpomeneme-li na oddíl věnovaný abstrakci a její obvyklý výklad, podle něhož abstrakční definice jednoduše přiřazují entitám x příslušné ekvivalenční třídy $[x]_\sim$, nepředstavuje strukturalisticky interpretovaný abstrakční princip nic jiného nežli pokus o prosté zobrazení g kvocientu $\mathcal{P}(A)/{\sim}$ do A. Uvažme nyní čtyři různé relace ekvivalence definované na potenci $\mathcal{P}(A)$ nějaké množiny A:

(1) $X \sim_1 Y \rightleftharpoons (\forall x)[(x \in X \leftrightarrow x \in X) \vee (x \in Y \leftrightarrow x \in Y)]$,

(2) $X \sim_2 Y \rightleftharpoons (\forall x)(x \in X \leftrightarrow x \in Y)$,

(3) $X \sim_3 Y \rightleftharpoons (\exists f)(f : X \leftrightarrow Y)$,

(4) $X \sim_4 Y \rightleftharpoons (X - Y) \cup (Y - X)$ je konečné.

Probírejme je postupně. Podle definice (1) jsou si všechny prvky $\mathcal{P}(A)$ ekvivalentní. Příslušný kvocient má tedy jediný prvek, tj.

$$|\mathcal{P}(A)/{\sim_1}| = 1,$$

a požadovaná funkce g existuje vždy, neboť podle definice musí mít doména každé interpretace alespoň jeden prvek. Případ (2) tvoří ekvivalence vyjádřená Fregovým GV, tedy extenzionální rovnost. Skrze ni jsou ale ve standardním pojetí sémantiky PL_2 prvky $\mathcal{P}(A)$ přímo definovány, což znamená, že se nám příslušný kvocient rozpadne na stejný počet prvků, jaký měla daná potence:

$$|\mathcal{P}(A)/{\sim_2}| = |\mathcal{P}(A)|.$$

GV se takto redukuje na požadavek prostého zobrazení potence dané domény do této domény samé, což je v rozporu s Cantorovou větou. Russellova původní analýza paradoxu se tím potvrzuje jako případná a my vidíme, že GV nemůže být splněn v žádné (standardní) interpretaci, a je tedy, přinejmenším z hlediska PL_2, logickou kontradikcí.

Přistupme k ekvivalenci (3). V ní snadno rozpoznáme pravou stranu Humova principu, tedy požadavek rovnopočetnosti uvažovaných množin. Pokusme se rovnou po Boolosově vzoru sestrojit požadovaný model. V něm by měly být množinám stejného počtu předmětů přiřazeny tytéž předměty základního univerza, množinám různého počtu různé. Vyjděme nejprve z toho, že je naše univerzum A konečné a že máme jeho prvky očíslovány, či ještě lépe, že ho přímo tvoří nějaký počáteční úsek číselné řady $A = \{0, 1, \ldots, n\}$. Přiřazujeme-li nyní každé množině ten prvek, jenž odpovídá její kardinalitě, tj. definujeme-li požadovanou funkci jako

$$f(X) = |X|$$

pro libovolné $X \subseteq A$, vidíme, že se hodnota $f(A)$ v A nevyskytuje. To znamená, že pro A konečné platí

$$|\mathcal{P}(A)/{\sim_3}| > |A|$$

a konstrukce g je nemožná. Přirozeně se nabízí vzít množinu nekonečnou, tj. místo počátku číselné řady číselnou řadu N_0 celou, a aplikovat ideu Hilbertova hotelu, tj. posunout hodnoty výše uvažované funkce f o jedno místo doprava a přiřadit nekonečné kardinalitě, která je mezi mohutnostmi podmnožin N_0 jediná, uvolněné místo nuly:

$$f(X) = \begin{cases} |X| + 1 & \text{je-li } X \text{ konečná,} \\ 0 & \text{je-li } X \text{ nekonečná.} \end{cases}$$

Tak také vypadá Boolosem [1986/1987, s. 174] navržený důkaz konzistence HP konstrukcí modelu. Boolos [1987, s. 187] při tom ovšem cituje Burgesse [1984], jenž již dříve v recenzi Wrightovy knihy [1983] konzistenci HP prohlašuje za dokazatelnou odkazem na podobný, v jistém smyslu však elegantnější model, v němž zůstává ve hře původní funkce $f(X) = |X|$, za univerzum ovšem nevezmeme samotná přirozená čísla, ale jejich rozšíření o kardinalitu $\aleph_0$, tj $A = \{0, 1, \ldots, \aleph_0\}$. Fungují samozřejmě oba.

Vraťme se ale k našim čtyřem ekvivalencím. Dokázanou skutečnost, že je princip abstrakce, užívající $\sim_3$, splnitelný interpretací nad nekonečným univerzem a pouze takovou, lze nyní zobecnit v tom smyslu, že je splnitelný nad *každým* nekonečným univerzem A, neboť tam vždy platí

$$|\mathcal{P}(A)/{\sim_3}| \leq |A|.$$

Zbývá nám nicméně ještě případ ekvivalence (4). Ten se má k případu (3) stejně, jako se k sobě měly případy (1) a (2), tj. jde o jistý vztah inverze. Nad konečným univerzem je totiž příslušné prosté zobrazení realizovatelné bez omezení, tj. přechází v případ (1), kdy se všechny množiny stanou ekvivalentními. U nekonečné domény se věci komplikují. Mějme takovou doménu A a předpokládejme, že je $|A| = \kappa$. Jelikož množina všech konečných podmnožin nekonečné množiny B má stejnou kardinalitu jako B, platí, že pro libovolnou $X \subseteq A$ existuje právě κ ekvivalentních prvků $\mathcal{P}(A)$, čili $\left|[X]_{\sim_4}\right| = \kappa$. Jelikož kvocient $\mathcal{P}(A)/{\sim_4}$ představuje rozklad množiny $\mathcal{P}(A)$ do λ disjunktních podmnožin, musí platit

$2^\kappa = |\mathcal{P}(A)| = \kappa \times \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$. Z toho plyne, že $\lambda = 2^\kappa$, a my máme stejnou rovnost jako v případě GV, totiž $|\mathcal{P}(A)/{\sim_4}| = |\mathcal{P}(A)|$.[19]

Spolu se čtvrtou ekvivalencí jsme zakončili jakýsi tutoriál neologicistických metod interpretace Fregových principů. Užití kardinální aritmetiky v posledním případě zvláště hmatatelně obráží lesk i bídu popisovaného přístupu. Stejným způsobem, jakým musel neznalý čtenář prostě uvěřit, že je předvedenými kalkulacemi příslušný argument nějak externě ospravedlněn, musel uvěřit i důkazu konzistence Humova principu, neboť, korektně vzato, přirozená čísla měla být jeho pomocí teprve zavedena. Uvedené metody zjevně předpokládají mnohem (mnohem!) více, než se snaží dokázat. Skutečnost, že se logicismus bez takovýchto, i když méně očividných triků v důsledku neobejde, bude také finálním argumentem jak proti jeho resurekci, tak proti jeho původní, podstatně serióznější podobě.

Abychom ale nebyli nespravedliví. Z uvedených příkladů je vidět, že neologicistický pohled má značný teoretický náboj, přinejmenším ve vztahu k teoriím stávajícím. Samostatná zkoumání principů abstrakce, podniknutá v posledních letech,[20] propojila Fregovu teorii s teorií množin a teorií modelů, a vedla tak k dalšímu studiu formálně-logické části Fregova díla, která byla v důsledku paradoxu dlouhodobě opomíjena. Díky tomu se zjistilo, že nevinně vypadající HP je ve skutečnosti stejně silný jako celý systém Peanovy aritmetiky, tj. nad logikou druhého řádu platí

$$\mathsf{HP} \vdash \mathfrak{PA}_2.$$

Hypotézu, že tomu tak je, vyslovil Charles Parsons [1965]. Crispin Wright [1983] příslušné dedukce předvedl, spolu s domněnkou, že je HP konzistentní. V reakci na to navrhli důkaz konzistence pomocí modelu Burgess [1984], Hodes [1984] a Hazen [1985]. Boolos [1987] se zasloužil o jeho rozvedení a popularizaci. Navíc upozornil na fakt, že Frege v náčrtu provedení logicistického programu v *Grundlagen* použil sporný GV pouze k odvození HP. HP spolu s vhodnou kalkulizací PL_2 se proto nazývá FREGOVOU ARITMETIKOU, dále značenou jako $\mathfrak{FA}$. Boolos [1990] dále navrhl, aby byla odvoditelnost $\mathfrak{PA}_2$ z HP nazývána FREGOVÝM TEORÉMEM. Richard Heck, Jr. [1993], [1995] později ukázal, že Frege příslušné dedukce provedl *de facto* sám ve svých *Grundgesetze*, ba že dokázal i kategoričnost $\mathfrak{FA}$ a také tzv. rekurzivní teorém, na němž Dedekind svůj důkaz jednoznačnosti $\mathfrak{PA}_2$ staví.

To vše je třeba brát s mírnou rezervou, neboť v době, kdy psal Frege druhý díl *Grundgesetze*, tj. v devadesátých letech předminulého století,

[19] Jak v této, tak v úvaze k bodu (3), je předpokládán axiom výběru.

[20] Studii cele věnovanou problematice abstrakce představuje Fine [2002]. Reprezentativním souborem neologicistických příspěvků je kromě antologie Boolos [1998] také Demopoulos [1995] a Schirn [1998].

mu již byl Dedekindův esej dobře znám. Význam Fregovy prezentace tak jako tak spočívá především v tom, že probíhá zcela formálně, tj. vše je získáno pouhým následováním pravidel kalkulu. V tomto smyslu byl Frege skutečným pionýrem axiomatické metody, neboť jako první v praxi uskutečňoval to, o čem jiní pouze hovořili. Již z těchto důvodů se vyplatí načrtnout důkaz Fregova teorému, tedy ekvivalenci jeho a Peanovy aritmetiky, a dokončit tak dříve započatý nárys technických detailů Fregovy logicistické hypotézy.

5.6 Fregův teorém

Definici jednotlivých přirozených čísel, jak ji Frege naznačil v § 74, 77 *Grundlagen*, již známe z oddílu 4.9. Jde o schéma:

$$0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}_x(x \neq x) \qquad\qquad n+1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}_x(x = 0 \vee \cdots \vee x = n).$$

Víme také, že každý model HP musí být díky realizaci těchto termů nekonečný. Samotný pojem $A(x)$ čísla (*Anzahl*), jenž nepokrývá jen čísla přirozená, ale všechny, tedy i nekonečné kardinály, přitom vypadá takto:

$$A(x) \rightleftharpoons (\exists F)(x = \mathcal{N}_y F(y)).$$

K vymezení přirozených čísel jakožto následníků nuly pomocí *ancestralu* potřebujeme základní relaci BEZPROSTŘEDNÍHO NÁSLEDNÍKA V ŘADĚ. Frege ji definuje již v § 76 takto:

S $\quad S(a,b) \rightleftharpoons (\exists F)(\exists y)[F(y) \wedge \mathcal{N}_x F(x) = b \wedge \mathcal{N}_x(F(x) \wedge x \neq y) = a].$

Zde je opět třeba dát pozor na to, že $S(x,y)$ znamená "y je bezprostřední následník x", tj. v přirozeném čtení se vlastně jedná o relaci bezprostředního předchůdce. O této relaci Frege dále v *Grundlagen* formuluje několik důležitých vět, jejichž důkazy ovšem zpravidla jen naznačuje, aby je podrobně dokázal až ve svých *Grundgesetze*. My budeme v následujících poloformálních črtách sledovat rekonstrukci Boolosovu a Heckovu. V první řadě je třeba dokázat, že je S jednoznačná oběma směry, tj. že je to funkce a jako taková je prostá, úhrnem tedy:

V1 $\quad S(a_1,b_1) \wedge S(a_2,b_2) \rightarrow (a_1 = a_2 \leftrightarrow b_1 = b_2).$

Důkaz: Začněme funkcionalitou S. Nechť kromě antecedentu platí ještě $a_1 = a_2$. Z definice (S) musí pro nějaké F, G a c_1, c_2 platit $\mathcal{N}_x F(x) = b_1$, $N_x G(x) = b_2$, $F(c_1)$, $G(c_2)$ a $a_1 = \mathcal{N}_x(F(x) \wedge x \neq c_1) = a_2 = \mathcal{N}_x(G(x) \wedge x \neq c_2)$. To poslední znamená, že $\mathcal{EQ}_{x,y}(F(x) \wedge x \neq c_1, G(y) \wedge y \neq c_2)$ prostřednictvím nějaké jedno-jednoznačné relace R. Tu lze ovšem rozšířit na relaci R' tak, že $R'c_1c_2$. Díky ní pak již platí $\mathcal{EQ}_{x,y}(F(x), G(y))$, potažmo tedy i $b_1 = b_2$. Důkaz injektivity je podobný, nyní ale předpokládáme

$b_1 = b_2$. Z rovnosti $b_1 = \mathcal{N}_x F(x) = b_2 = \mathcal{N}_x G(x)$ usoudíme na rovnopočetnost $\mathcal{EQ}_{x,y}(F(x), G(y))$ podle nějaké relace R. V souladu s předpokladem $F(c_1)$, $G(c_2)$ uvážíme předměty c_1', c_2' takové, že $R(c_1', c_2), R(c_1, c_2')$, a relaci R' shodnou s R až na to, že $R'(c_1', c_2)$ a $R'(c_1, c_2')$ neplatí. Místo toho, v případě že $c_1' \neq c_1$ a $c_2' \neq c_2$, položíme $R'(c_1', c_2')$. Zbytek je triviální. □

Z důvodů přehlednosti zapisujme dále fakt funkcionality neboli jednoznačnosti vpravo nějaké relace R jako $\mathcal{FUNC}(R)$. Další Fregem dokázaná věta říká, že relace S nepřiřazuje ničemu nulu, tj.

V2 $\neg S(a, 0)$.

To je dáno jednoduše tím, že předcházení ve smyslu relace $S(a, b)$ vyžaduje z definice (S) existenci prvku y spadajícího pod pojem F, pro který $\mathcal{N}_x F(x) = b$. Vztah $\mathcal{N}_x F(x) = 0$ platí ovšem podle definice a HP tehdy a jen tehdy, je-li pojem F prázdný.

Nyní již můžeme přikročit k definici přirozeného čísla jako takového. S její pomocí dokážeme omezit kvantifikaci některých teorémů, které by pro celé univerzum diskurzu platit nemusely. Východiskem je již zmíněná definice ANCESTRALU relace R:

R* $$R^\star(a, b) \rightleftharpoons (\forall X)[(\forall x)(R(a, x) \to X(x)) \wedge (\forall x, y)(X(x) \wedge R(x, y) \to X(y)) \to X(b)].$$

Relaci NEVLASTNÍHO ANCESTRALU relace získáme opět buďto odvozením jako $R^\star_=(a, b) \rightleftharpoons R^\star(a, b) \vee a = b$, nebo přímo:

R$^*_=$ $$R^\star_=(a, b) \rightleftharpoons (\forall X)[X(a) \wedge (\forall x, y)(X(x) \wedge R(x, y) \to X(y)) \to X(b)].$$

Přirozená čísla jsou definována jako obvykle:

$$N(x) \rightleftharpoons S^\star_=(0, x).$$

Odvození principu indukce z uvedených definicí je stejně jako u Dedekinda otázkou několika snadných kroků. Ve Fregově systému má co do použití indukce spíše charakter pravidla nežli (meta)teorému, proto ji tak i zaveďme

I$^=_S$ $F(0), F(x) \wedge S(x, y) \to F(y) \ / \ N(z) \to F(z)$,

coby instanci obecnějšího

I$^=_R$ $F(a), F(x) \wedge R(x, y) \to F(y) \ / \ R^\star_=(a, z) \to F(z)$.

Důkaz: Chceme odvodit ($\mathrm{I}_R^=$) z definice ($\mathrm{R}_=^*$). Předpokládejme obě formule antecedentu pravidla spolu s antecedentem jeho závěru, tj. formulí $R_=^\star(a,z)$. Jejím rozpisem a konkretizací pro F získáme implikaci, jejíž antecedent je shodný s antecedentem obhajovaného pravidla, aplikací MP tedy získáme formuli $F(z)$, a tím i konsekvent konsekventu našeho pravidla. □

Paralelně lze samozřejmě uvažovat i pravidla založená na definici vlastního *ancestralu*. Jejich formulace a odvození jsou přímočaré, budeme je tedy rovnou předpokládat a citovat jako (I_S), resp. (I_R).

Všimněme si, že v této fázi jsme zdánlivě hotovi, neboť naše dvě věty a pravidlo odpovídají třem axiomům $\mathfrak{PA}_2$. Situace je ale komplikovanější než Dedekindova, neboť jsme pomocí HP přesně podle Fregova plánu vymezili dosti širokou oblast předmětů, z nichž některé již byly rozpoznány jako přirozená čísla. Před vlastní koncovkou tedy musíme ještě ukázat, že se S na těchto předem definovaných přirozených číslech chová podle očekávání, tj. především, že číslu n přiřazuje číslo $n+1$. V důsledku toho budeme moci relaci S coby funkci považovat přinejmenším na extenzi predikátu N za totálně definovanou a důkaz Fregova teorému uzavřít jako úspěšný.

Definice jednotlivých čísel a důkaz jejich odlišnosti, tedy nekonečnosti jejich celku, se přitom zakládaly na ideji uchopení dalšího čísla řady jako počtu totality čísel dosud definovaných. Jelikož nyní disponujeme relací *ancestralu*, zdá se, že by pro definované n šlo toto číslo zachytit jako $\mathcal{N}_x S_=^\star(x,n)$, čímž by se požadovaný teorém redukoval na

V3 $N(n) \to S(n, \mathcal{N}_x S_=^\star(x,n))$.

Idea je tedy celkem průhledná. Samotný důkaz už ne. Frege [1884, § 82] jej navrhuje provést indukcí ($\mathrm{I}_S^=$) na formuli

$$K(y) \rightleftharpoons S(y, \mathcal{N}_x S_=^\star(x,y)).$$

První část důkazu je přitom relativně snadná:

A $S(0, \mathcal{N}_x S_=^\star(x,0))$.

Důkaz: Nejprve je třeba dokázat snadný důsledek definice (R^*):

L1 $R^\star(a,b) \to (\exists z)R(z,b)$.

Postupujeme indukcí (I_R) aplikovanou na formuli $G(x) \rightleftharpoons (\exists z)R(z,x)$. Triviálně platí (i) $(\forall x)(R(a,x) \to G(x))$ a (ii) $(\forall x,y)(G(x) \wedge R(x,y) \to G(y))$. Konsekventem indukce je nyní přímo dokazovaná věta. Máme-li (L1), uvažujeme takto. Podle (V2) neplatí $S(x,0)$ pro žádné x, podle (L1) tedy pro žádné x nemůže platit ani $S^\star(x,0)$, z čehož plyne $\mathcal{N}_x S_=^\star(x,0) = \mathcal{N}_x(x=0) = 1$. $S(0,1)$ přitom evidentně platí. □

Tím máme induktivní předpoklad. Nyní potřebujeme dokázat induktivní krok, tj. dědičnost vlastnosti K. K tomu je zapotřebí věta, podle níž se přirozená čísla necyklí:

V4 $N(x) \rightarrow \neg S^{\star}(x, x)$.

Omezení na extenzi N je přitom významné, neboť podle definice (S) se nekonečná čísla, např. Fregem definované

$$\infty \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{N}_x N(x),$$

předcházejí, tj. platí $S(\infty, \infty)$. Tím by důkaz věty (V3) kolaboval. Podmínka konečnosti, která se v ní vyskytuje, se do ní dostala právě z těchto důvodů, tj. jakožto věcné břemeno věty (V4). Tu nyní dokážeme:

Důkaz: K důkazu (V4) potřebujeme lemma

L2 $R^{\star}(a, b) \rightarrow (\exists z)(R(z, b) \wedge R^{\star}_{=}(a, z))$,

jež dokazujeme indukcí (I_R) pro formuli $G(x) \rightleftharpoons (\exists z)(R(z, x) \wedge R^{\star}_{=}(a, z))$. (i) Z předpokladu $R(a, x)$ plyne ihned $G(x)$ pro $z := a$, vezmeme-li v úvahu triviálně platnou větu $R^{\star}_{=}(a, a)$. Tím máme induktivní předpoklad. (ii) Nyní předpokládejme $R(x, y)$ a $G(x)$, tedy existenci z takového, že $R^{\star}_{=}(a, z)$ a $R(z, x)$. Pomocí jednoduché věty $R^{\star}_{=}(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R^{\star}_{=}(x, z)$ tak dostáváme nejprve $R^{\star}_{=}(a, x)$, což spolu s $R(x, y)$ dává $G(y)$.

Vlastní důkaz (V4) využívá indukci ($\mathrm{I}_S^{=}$) pro $H(x) \rightleftharpoons \neg S^{\star}(x, x)$. (i) $H(0)$ je snadný důsledek (V2) a lemmatu (L2). (ii) Kontrapozicí předpokládáme, že $S(x, y)$ a $\neg H(y)$, tj. $S^{\star}(y, y)$; chceme dokázat $\neg H(x)$. Podle (L2) musí existovat z takové, že $S(z, y)$ a $S^{\star}_{=}(y, z)$. Druhá formule je ekvivalentní disjunkci $S^{\star}(y, z) \vee y = z$, přičemž v obou případech lze usoudit na platnost $S^{\star}(z, z)$. Podle věty (V1) je ovšem relace S jednoznačná, z $S(x, y)$ a $S(z, y)$ tedy usoudíme na $x = z$ a z $S^{\star}(z, z)$ dostáváme požadované $\neg H(x)$. □

Nyní je již na řadě dokončení důkazu (V3), tj. induktivní krok

B $S(a, b) \rightarrow [S(a, \mathfrak{N}_x S^{\star}_{=}(x, a)) \rightarrow S(b, \mathfrak{N}_x S^{\star}_{=}(x, b))]$.

K tomu je zapotřebí dokázat platnost dalšího lemmatu

L3 $S(a, b) \rightarrow (\forall x)(S^{\star}_{=}(x, b) \wedge x \neq b \leftrightarrow S^{\star}_{=}(x, a))$.

Frege podle všeho v *Grundlagen* [1884, § 83] tvrdí, že k tomu stačí (V4), to ale není možné již proto, že (L3) obecně neplatí, např. právě pro nekonečná čísla. S pomocí (V4) je možné odvodit pouze podmíněnou verzi

L3' $N(b) \rightarrow$ (L3).

Máme-li ji, jsme schopni dokázat opět pouze podmíněnou variantu induktivního kroku

B' $N(a) \to$ (B),

která ale naštěstí k odvození (V3) stačí, využijeme-li mírně upravené podoby pravidla indukce

I_S^B $F(0), N(x) \to (F(x) \wedge S(x,y) \to F(y)) \; / \; N(z) \to F(z)$.

(B') je pak jejím druhým antecedentem, (V3) tvoří konsekvent. K důkazu Fregova teorému nám tedy postačí odvodit zmíněná pomocná tvrzení. Začněme redukcí indukce (I_S^B) na indukci ($\mathrm{I}_S^=$):

Důkaz: Předpokládejme antecedent pravidla (I_S^B) a vezměme $G(x) \rightleftharpoons F(x) \wedge N(x)$ jako bázi indukce ($\mathrm{I}_S^=$). (i) $G(0)$ platí z předpokladu. (ii) Mějme $G(x)$, tj. $F(x)$ a $N(x)$, a $S(x,y)$. Podle předpokladu pak platí $F(y)$, triviálně $N(y)$, úhrnem tedy $G(y)$. Z toho lze usoudit na $N(z) \to G(z)$, což se redukuje na $N(z) \to F(z)$. □

Podle vytyčeného plánu pokračujeme důkazem lemmatu (L3') $N(b) \to [S(a,b) \to (\forall x)(S^\star_=(x,b) \wedge x \neq b \leftrightarrow S^\star_=(x,a))]$.

Důkaz: Předpokládejme $N(b)$ a $S(a,b)$. Nechť navíc $S^\star_=(x,b) \wedge x \neq b$, tj. $S^\star(x,b)$. Podle (L2) existuje z takové, že $S(z,b)$ a $S^\star_=(x,z)$. Z (V1) pak plyne, že $a = z$, čili $S^\star_=(x,a)$. Nechť naopak platí $S^\star_=(x,a)$. Z $S(a,b)$ nyní plyne $S^\star(x,b)$. Jelikož $N(b)$, tak podle (V4) platí $\neg S^\star(b,b)$, což ale znamená, že $x \neq b$. □

Poslední na řadě je podmíněná verze induktivního kroku (V3), tj. (B') $N(a) \to [S(a,b) \to (S(a, \mathcal{N}_x S^\star_=(x,a)) \to S(b, \mathcal{N}_x S^\star_=(x,b))]$.

Důkaz: Předpokládejme, že $N(a)$, $S(a,b)$ a $S(a, \mathcal{N}_x S^\star_=(x,a))$. Z prvních dvou lze odvodit $N(b)$, z posledních dvou podle (V1) $b = \mathcal{N}_x S^\star_=(x,a)$. Podle (L3') a HP tudíž platí $b = \mathcal{N}_x(S^\star_=(x,b) \wedge x \neq b)$. Jelikož pro $G(x) \rightleftharpoons S^\star_=(x,b)$ platí triviálně $G(b)$, je z definice (S) zřejmé, že $S(\mathcal{N}_x(G(x) \wedge x \neq b), \mathcal{N}_x G(x))$ čili $S(b, \mathcal{N}_x(S^\star_=(x,b)))$. □

Tím jsou pohromadě všechny kusy potřebné k důkazu (V3), tedy i k dokončení důkazu Fregova teorému. Předvedená odvození odpovídají tomu, co Boolos a Heck [1998] nazvali 'hypotetickým důkazem' (V3) podle neúplných pokynů daných Fregem v *Grundlagen*. Jak jsme zmínili, ona domnělost je dána především tím, že některé Fregem popsané mezikroky nejsou bez určitých úprav proveditelné, a není tedy jasné, zda by Frege při vlastní realizaci svého plánu nevolil jinou cestu. Důkaz v *Grundgesetze*, který již Frege podává se všemi náležitostmi, je založen na poněkud odlišné myšlence, kterou rozebírá Heck [1993].

Heck [1993, s. 284] také vyslovuje domněnku, že věty (V1–4), již proto, že jsou zmíněny v poloformálním výkladu *Grundlagen*, nejsou jen jedny z mnoha tvrzení odvozených v *Grundgesetze*, ale ve skutečnosti oněmi 'základními zákony aritmetiky', jejichž transparentní převedení na logické pravdy Frege slíbil v *Begriffsschrift*. To se může zdát přehnané, neboť nic takového Frege ve svých *Grundgesetze* nezmiňuje. Frege je ovšem ohledně svých cílů obecně velmi skoupý na slovo. Např. o logických předmětech, jejichž ospravedlnění je podle něho základním problémem (filosofie) aritmetiky, se dozvídáme až z dodatku ke *Grundgesetze*, napsaného po objevu paradoxu, a několika dopisů Russellovi. Jistě bychom se o nich dozvěděli více, kdyby Frege o nutnosti explicitní formulace GV sám sebe přesvědčil již v *Grundlagen*. Právě proto je ale významné, že se už tam objevují výše uvedené věty (V1–4).

Heck pro svoji 'hypotézu' navíc uvádí ještě pádnější argument, a to teorém 263 *Grundgesetze*, jenž má přibližně tuto podobu

$$[\mathcal{FUNC}(Q) \wedge (\forall x)(G(x) \leftrightarrow Q^{\star}_{=}(a,x)) \wedge \neg(\exists x)Q^{\star}(x,x) \wedge \\ (\forall x)(G(x) \rightarrow (\exists y)Q(x,y))] \rightarrow \mathcal{N}_x G(x) = \infty).$$

Zde se tvrdí, že každý systém, jenž odpovídá extenzi predikátu G, je rovnopočetný systému přirozených čísel, jestliže je uspořádán relací Q, která je funkcionální, necyklí se, každému jeho prvku přiřazuje další a každý jeho prvek je v této relaci nevlastním následníkem jistého prvku a. Heck [1993, s. 284] upozorňuje na to, že mnohem zajímavější než teorém je jeho důkaz. Frege v něm totiž ukazuje, že každý systém popsané vlastnosti není pouze rovnopočetný, ale dokonce izomorfní systému přirozených čísel. Věty (V1–4) figurující v teorému 263 jako jeho části (ne nutně ve stejném pořadí):

(1) $\mathcal{FUNC}(S)$,

(2) $(\forall x)(N(x) \leftrightarrow S^{\star}_{=}(a,x))$,

(3) $\neg(\exists x)(S^{\star}_{=}(a,x) \wedge S^{\star}(x,x))$,

(4) $(\forall x)(N(x) \rightarrow (\exists y)S(x,y))$,

pro S a N chápané jako neinterpretované konstanty, jsou tedy potenciálními axiomy kategorické aritmetiky, jejíž možnost Frege v rámci svého systému obhájil. Jejich výhoda oproti čtyřem axiomům Dedekindovým je samozřejmě pouze heuristická: prakticky okamžitě vidíme, že jejich model musí tvořit posloupnost prvků počínající prvkem a, která se nemůže větvit s ohledem na (1) ani cyklit s ohledem na (3), postupuje tedy do nekonečna s ohledem na (4), nelze k ní ale přidat žádné jiné prvky s ohledem na (2). Vlastní důkaz kategoričnosti je pak v jistém smyslu už jen záležitostí technické rutiny, ovšem rutiny dané logicistickým kontextem, který teprve určuje, jaké postupy jsou standardní a jaké nepřípustné či žádající předchozí ospravedlnění. Proto se zmíněnému důkazu budeme věnovat v dalších oddílech. Ještě předtím si ale dovolme stručné resumé.

Řekli jsme, že v rámci Fregova plánu logické aritmetiky lze rozlišit dva cíle, totiž (1) definici čísla coby pojmu, resp. predikátu, jenž by dovolil vydělit individuální čísla a jen je z oboru všech předmětů, případně všech logických předmětů, jako jedny z mnoha, (2) definici toho, co logický předmět je, tj. vytvoření ontologické báze, nad níž by ono vydělení šlo provést. Po řadě jsme o nich hovořili jako o (1) deskriptivní a (2) konstitutivní části projektu. — První z nich je uskutečněna standardními logickými prostředky, rozuměj: prostředky, které Frege jako standardní zavedl a které tak v jistých modifikacích používáme dodnes. Jsou to v první řadě koncept explicitní definice a metoda minimálního uzávěru. V druhém případě byla jeho odpovědí kontextuální definice, tj. principy jako HP a GV. Úspěch této části projektu je problematický a většina Fregových matematických následníků se ji pokoušela hodit přes palubu buďto prostým postulováním v Hilbertově stylu, nebo naivním odkazem na 'naše intuice'. Russell [1919, s. 71] právě v komentáři k Hilbertovu stanovisku hovoří ironicky o výhodách krádeže nad poctivou dřinou (*the advantages of theft over honest toil*).

Předchozí oddíly nám prezentovaly Fregovy výkony v *Grundlagen* a *Grundgesetze* jako kompatibilní s redukovanými požadavky Hilbertovy školy. Frege předkládá axiomatický systém, jenž je konzistentní, škrtneme-li problematický GV a eliminujeme-li jej z užitých dedukcí, což se ukázalo být dosti přímočaré. Hlavním principem Fregova systému je ve skutečnosti Humův princip, GV měl dát dodatečně celé záležitosti 'čistě logický' náboj a je v zásadě použit především k odvození HP. Rozdíly mezi axiomatismem Hilbertovým a Fregovým jsou přesto značné a byly také dostatečně zdůrazněny, především srovnáním axiomů Fregovy a Peanovy aritmetiky. Z čistě formálního hlediska jsou si oba systémy ekvivalentní, tj. Frege může být docela dobře prohlášen za postulacionistu. Předvedený postup z *Grundlagen* a *Grundgesetze* však názorně ukazuje, že jím není. Zopakujme proč.

Upozornili jsme, že relativní komplikovanost důkazu Fregova teorému, tj. především odvození vět (V3) a (V4), je na neformální rovině dána faktem, že Frege jednotlivá čísla a relaci S definuje předem. Právě proto je ale dalek toho sepsat své zákony (V1–4) jednoduše jako něco, co musí splnit systém, jenž se má nazývat aritmetikou. Fregovy axiomy evidentně nemají být formule, ale pravdivé věty, jejichž pravdivost musí být obhájena na bázi předchozí definice číselného oboru. Právě tento tradiční koncept axiomatické metody hájil Frege vůči Hilbertovi s mottem, že to není bezespornost, co dělá axiomy pravdivé, ale jejich pravdivost, co je dělá bezesporné. Čtenář nechť nicméně nezapomene, že i Fregův přístup má své slabiny, resp. že se od Hilbertova postoje v mnohém zase tak moc neliší.

Paradoxní na celé záležitosti je, že to byl Frege, nikoli Hilbert, kdo byl schopen dát pojmu deduktivní konzistence nějaký konkrétní smysl, neboť na rozdíl ode všech tehdejších propagátorů axiomatické a logické matematiky disponoval funkčním deduktivním systémem. Samotný pojem přímého odvození je samozřejmě jasný a pochází již od Aristotela. Jak ale ukazují výmluvně např. dějiny 'dokazování' postulátu o rovnoběžkách, právě otázky konzistence a nezávislosti axiomů nelze vést s pouhou vágní představou plauzibilního argumentu. To, co potřebujeme v první řadě, je explicitní popis syntaxe daného jazyka a úsudkových pravidel, jimiž se lze transparentně, nejlépe tedy čistě mechanicky, řídit. V dosažení toho nejde raný axiomatismus Hilbertův o moc dále nežli axiomatismus Aristotelův a Eukleidův. Totéž se ovšem týká axiomatismu Dedekindova a Peanova!

Fregovi měla navíc axiomatická prezentace aritmetiky zajistit podporu pro tezi o její analytičnosti, kdy se tomu, aby se do příslušných zdůvodnění "nemohlo nepozorovaně vetřít nic z názoru", zabrání "spojitostí úsudkového řetězce", tj. jeho normováním podle předem daného schématu. S ohledem na tento rys Fregova programu má jeho logicismus podstatně komplikovanější strukturu, než jsme dosud uvažovali. Označíme-li jeho deskriptivní a konstitutivní složku úhrnně jako část sémantickou a jeho axiomatický element jako část deduktivní, dostáváme následující schéma:

(1) sémantická část
   (a) deskriptivní část
   (b) konstitutivní část
(2) deduktivní část.

Vzájemný vztah těchto složek je komplikovaný. Jejich prostředníkem měl být nejspíš GV, jednak ve své roli abstrakčního principu generujícího ontologickou bázi, jednak jakožto východisko (axiom) mechanického generování základních vět (V1–4) aritmetiky. Podle dosud řečeného by se možná dalo očekávat, že toto odvozování bylo záležitostí sekundární, tj. že byl Frege axiomatistou měkkým. S ohledem na jeho staromilský postoj k axiomům a inferenčně-holistické poznámky z *Begriffsschrift* je to ovšem záležitost diskutabilní. Nelze samozřejmě předpokládat, že měl Frege svůj postoj promyšlen do všech důsledků; a je dost pravděpodobné, že se v něm ne nutně koherentním způsobem mísily geniální ideje vlastní s nereflektovaným odkazem předků. Z pozic našeho výkladu na tom ale nesejde. Podstatné je ukázat, že na Fregových názorech může být postaven nějaký plauzibilní obraz role logiky v matematice. O to se zde systematicky snažíme.

5.7 Rekurzivní teorém

Podíváme-li se na dosud diskutovanou část logicistického konceptu, lhostejno, zda ve Fregově či Dedekindově verzi, může nás zarazit jedna nápadná okolnost. Praktická aritmetika, která je součástí povinného vzdělání, se velmi málo zabývá něčím takovým, jako jsou čísla *per se* či jejich (axiomaticky zadaná) struktura. To, co si takřka každý v souvislosti s aritmetikou vybaví nejdřív, jsou samozřejmě aritmetické operace sčítání, násobení atd., tedy praktické počty — algoritmické transformace složených znaků na znaky jednoduché. O nich ale např. v druhé, konstruktivní části Fregových *Grundlagen* nepadlo ani slovo. — Věc se samozřejmě nemá tak, že by Frege na aritmetické operace zcela zapomněl; pouze je považoval za něco odvozeného, čehož původní podoba souvisí s tím, co [1983, s. 296] posměšně nazýval "čísly malých dětí" (*Kleinkinder-Zahlen*) a co podle něho nemá žádnou teoretickou relevanci.

Fregův postoj k celé záležitosti lze zvláště názorně demonstrovat na jednom mimořádně temném (možná nejtemnějším) místě destruktivní části jeho *Grundlagen*. V oddíle I, týkajícím se povahy elementárních vět typu $2 + 2 = 4$ či $2738984 + 9 = 2738993$, na nichž se Kant [1781/1787, A 164/B 205] pokusil demonstrovat syntetičnost aritmetiky, diskutuje Frege otázku jejich odvoditelnosti z obecných zákonů. Podle Kanta se jedná o věty nedokazatelné, založené na konstrukci v názoru. Podle Leibnize [1705, kniha IV, kap. VIII, § 10] jde oproti tomu o pouhé důsledky definicí

$$
\begin{aligned}
&1 + 1 \stackrel{\text{def}}{=} 2,\\
&2 + 1 \stackrel{\text{def}}{=} 3,\\
&3 + 1 \stackrel{\text{def}}{=} 4,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

a principu nahraditelnosti stejného stejným, tj. substituovatelnosti *salva veritate*. Ačkoli je zřejmé, že Frege [1884, § 6] uvádí Leibnizovo stanovisko na podporu stanoviska vlastního, neříká to explicitně, pouze upozorňuje — podobně jako před ním Bolzano [1810, doplněk, § 6], [1837, § 305] —, že Leibniz ve svém odvození věty $2 + 2 = 4$ jako

$$2 + 2 \stackrel{\text{def}}{=} 2 + 1 + 1 \stackrel{\text{def}}{=} 3 + 1 \stackrel{\text{def}}{=} 4$$

zapomněl uvést ještě jeden obecný zákon, totiž asociativitu

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1.$$

To samozřejmě svědčí v neprospěch Leibnizovy verze logicismu (odvození aritmetiky z pouhých identit), neboť je jednak zpochybněna čistota deduktivní (nenázorné) stránky Leibnizova důkazu (tj. ono "odvození"), jednak není zřejmé, zda je asociativní zákon logické, nikoli specificky aritmetické povahy, což by samozřejmě nahrávalo opět Kantovi. Pravděpodobně jako hypotetický pokus o záchranu Leibnizovy linie protikantovského útoku uvádí Frege ještě názor Hermanna Grassmanna [1861, s. 4], který chce asociativitu zdůvodnit skrze svoji (slavnou) rekurzivní definici sčítání

(i) $a + 0 = a$,

(ii) $a + (b + 1) = (a + b) + 1$,

resp. její část (ii). Podle Frega — a tím se dostáváme k onomu temnému místu výkladu — však i tento pokus selhává: Grassmannovy rovnice neprezentují řádné definice, protože

(1) k tomu, abych porozuměl výrazu “$a+(b+1)$”, musím již rozumět výrazu “$a + b$”,

(2) Grassmann neukázal, že “$a + b$” není prázdný symbol, tj. že existuje označované číslo a že je pouze jedno.

Rozluštit první námitku asi není obtížné pro nikoho, kdo zná Fregovy obecné sémantické principy, v tomto případě princip kompozicionality: Chci-li rozumět výrazu “$a + (b + 1)$”, musím rozumět jeho složkám, tj. výrazům “a”, “b” a “+”, výsledně tedy i výrazu “$a + b$”, který by měl být prostřednictvím rovnice (ii) definován. Co si z tohoto Fregova argumentu má ovšem vzít nepoučený čtenář (a samotný Grassmann), není z daného textu vůbec jasné. Výrazy (i), (ii) jistě nejsou explicitní definicí operace +, nikdo ale ani neříkal, že se Grassmann o takovou definici pokouší. Frege tak pouze tiše předpokládá, že by se Grassmann o takovouto definici pokoušet měl, aniž by ovšem uvedl, zda je něco takového nutné či vůbec možné, což je o to více zarážející, že se sám s problémem danosti významu prostřednictvím explicitní a implicitní definice potýká o několik kapitol dál!

Nedostatek porozumění pro zdůvodněné záměry jiných odráží ještě více druhá z Fregových poznámek, neboť její rozluštění vyžaduje od čtenáře znalost oněch logicistických specifik, o nichž jsme nedávno mluvili, totiž onoho konceptuálního vydělování aritmetických objektů z mohutnějších celků. Rozveďme to podrobněji. — Pojem funkce, který Frege úspěšně aplikoval ve své formální sémantice, byl v rámci překotného rozvoje moderní analýzy vystaven dvěma extrémním pohledům:

(1) Na jedné straně stála Eulerova představa funkce jakožto předpisu vystaveného z omezeného počtu základních operací, od nichž bylo dokonce očekáváno splnění některých sémantických požadavků, jako jsou derivovatelnost, spojitost či integrovatelnost.

(2) Na druhé straně máme Dirichletův liberální koncept libovolné korespondence mezi prvky domény a oboru hodnot.

Vlastní matematická praxe balancovala vždy podle okamžitých potřeb mezi těmito hranicemi, lze ale tušit, že logicistická pozice musela být blíže oné liberální straně, přinejmenším proto, že se o funkcích chtěla bavit v obecnějším nežli jen aritmetickém smyslu, a potřebovala je tedy zbavit jejich operativní, algoritmické povahy. Již diskutovaná odlišnost dvou typů logicismu spočívá ovšem v tom, že zatímco Dedekind spolu s Cantorem přímo přebírají koncept Dirichletův, Frege se snaží zobecnit Eulerovu pozici, tj. chce ponechat prvotní závislost na jazyce, rozvolňuje ale onen výpočetní element. Příslušný předpis, skrze nějž je teprve funkce definována, sice zaručuje jednoznačnost přiřazení, obecně ale nedovoluje pro daný argument vypočíst příslušnou hodnotu.

V souladu s Fregovými principy by nám tedy každá funkce měla být dána explicitně prostřednictvím predikátu $T(\vec{x}, y)$, o němž bylo nějakým, ne nutně efektivním způsobem dokázáno, že platí

$$(\forall \vec{x})(\exists! y) T(\vec{x}, y).$$

Na základě toho pak teprve můžeme stanovit

$$f(\vec{x}) = y \rightleftharpoons T(\vec{x}, y).$$

Definice Grassmanova typu, tj. definice rekurzí, tomuto požadavku triviálně nevyhovuje, neboť není tvořena jedinou formulí, ale dvěma pravidly, z nichž jedno stanovuje hodnotu definované funkce pro 0, druhé pak říká, čemu se má dotyčná funkce rovnat pro argument $n + 1$, byla-li již stanovena hodnota pro n. Z Fregova hlediska, které se obráží právě v jeho kritice Grassmanna, nedávají obraty jako

stanovit hodnotu funkce f pro $n + 1$

smysl, není-li již funkce f definována, což s ohledem na postupné fixování hodnot rekurzivním procesem skutečně není! Cílem je tedy eliminovat tento konstruktivní, dynamický způsob ve prospěch způsobu logického, statického, tj. zbavit se onoho dvojfázového rekurzivního odkazu na to, co jsme dosud (v čase?) vyrobili, ve prospěch vydělení příslušné funkce z většího oboru všech funkcí vůbec, případně všech funkcí daných nějakým logicky přípustným způsobem ('logických funkcí').

To ovšem neznamená, že má být rekurzivní definice zcela zavržena, pouze je třeba ospravedlnit její formu kanonickými metodami. Z Dedekindova hlediska stačí ukázat, že nad přirozenými čísly, resp. nějakým jednoduchým řetězcem, skutečně zachycuje právě jednu funkci dané vlastnosti. Frege chce mít navíc v ruce příslušný (čistě logický) predikát, který odpovídající funkci vyděluje. Obojí garantuje tzv. rekurzivní teorém, jenž

Dedekind [1888] i Frege [1893/1903] *mutatis mutandis* formulovali a dokázali, aby jej poté použili k již zmíněnému důkazu kategoričnosti svých axiomatizací aritmetiky.

Ve zbytku tohoto oddílu předvedeme důkazy obou vět. S ohledem na další výklad je vhodné věnovat mimořádnou pozornost zvláště důkazu REKURZIVNÍHO TEORÉMU. Ten v jedné ze svých verzí, která se blíží původní Dedekindově formulaci ve větě 125 jeho eseje, vypadá takto:

> Mějme nějaký jednoduchý řetězec $\langle S_1, f_1, a_1\rangle$ a libovolný řetězec $\langle S_2, f_2, a_2\rangle$, kde $a_2 \in S_2$. Pak existuje právě jedno zobrazení $g : S_1 \to S_2$ takové, že platí následující podmínky:
>
> (a) $g(a_1) = a_2$,
>
> (b) $g(f_1(x)) = f_2(g(x))$ pro každé $x \in S_1$.

Důkaz: Začneme jednodušší částí důkazu, jíž je jednoznačnost popisu funkce g. Předpokládejme, že mu vyhovují dvě funkce k, l, a dokažme, že se rovnají. Jelikož je první ze systémů jednoduchý řetězec, můžeme postupovat indukcí! (i) Báze indukce $k(a_1) = a_2 = l(a_1)$ platí z definice. (ii) Nyní předpokládejme, že platí $k(x) = l(x)$ pro nějaké $x \in S_1$. Na základě tohoto předpokladu a definice obou funkcí platí $k(f_1(x)) = f_2(k(x)) = f_2(l(x)) = l(f_1(x))$. Tím jsme dokázali induktivní krok a důkaz je hotov.

Nyní dokazujeme existenci. Uvažme funkci $h : S_1 \times S_2 \to S_1 \times S_2$ takovou, že $h(\langle x, y\rangle) = \langle f_1(x), f_2(x)\rangle$, tj. jakousi funkci dvojitého následníka, a aplikujme ji na dvojici 'prvních' prvků $\langle a_1, a_2\rangle$, tj. vytvořme jednoduchý řetězec $G = K_{\langle a_1, a_2\rangle}$. Naším cílem je ukázat, že G je ve skutečnosti již požadovanou funkcí g.

(1) Zatím víme pouze, že se jedná o relaci $G \subseteq S_1 \times S_2$. Začněme tím, že je definována na celém S_1. Postupujeme opět indukcí pro množinu $U = \{x \in S_1 \mid (\exists y)\, \langle x, y\rangle \in G\}$. (i) Jelikož z definice platí $\langle a_1, a_2\rangle \in G$, platí i $a_1 \in U$. (ii) Předpokládejme, že $x \in U$ pro nějaké $x \in S_1$. To znamená, že pro nějaké $y \in S_2$ platí $\langle x, y\rangle \in G$. Z definice uzávěru pak ale i $\langle f_1(x), f_2(y)\rangle \in G$, čili $f_1(x) \in U$. Obě části indukce jsou tedy splněny a my můžeme (iii) usoudit na $U = S_1$.

(2) Nyní chceme dokázat funkcionalitu G. Indukci tentokráte provedeme na množině $V = \{x \in S_1 \mid (\exists! y)\, \langle x, y\rangle \in G\}$. (i) Předpokládejme, že $\langle a_1, b\rangle \in G$ pro nějaké $b \in S_2$. Jelikož $G = K_{\langle a_1, a_2\rangle}$, musí podle Dedekindových teorémů dokázaných v oddíle 5.4 platit buďto $\langle a_1, b\rangle = \langle a_1, a_2\rangle$, nebo $\langle a_1, b\rangle = h(\langle c, d\rangle)$ pro nějaké $\langle c, d\rangle \in G$. Nechť platí druhá možnost. Z definice h dostáváme $\langle a_1, b\rangle = \langle f_1(c), f_2(d)\rangle$, a tedy $a_1 = f_1(c)$, což je v rozporu s jednoduchostí řetězce S_1. To znamená, že $b = a_2$. (ii) Induktivní krok dokážeme sporem. Nechť tedy pro nějaké $x \in V$ platí $f_1(x) \notin V$. To znamená, že existují $b, c \in S_2$ takové, že $b \neq c$,

$\langle f_1(x), b\rangle \in G$ a $\langle f_1(x), c\rangle \in G$. Jelikož nemůže platit $f_1(x) = a_1$, můžeme z G vybrat $\langle d_1, e_1\rangle$, $\langle d_2, e_2\rangle$ takové, že $h(\langle d_1, e_1\rangle) = \langle f_1(x), b\rangle$, $h(\langle d_2, e_2\rangle) = \langle f_1(x), c\rangle$. Z definice h a injektivity f_1 plyne, že $x = d_1 = d_2$. Jelikož $b \neq c$, musí platit i $e_1 \neq e_2$. Jelikož $\langle x, e_1\rangle$, $\langle x, e_2\rangle \in G$, musí tedy $x \notin V$. Spor. (iii) Ergo $V = S_1$.

(3) S ohledem na dokázanou funkcionalitu můžeme namísto G psát g. Zbývá ověřit, zda splňuje požadované podmínky. (a) Jelikož $\langle a_1, a_2\rangle \in g$ z definice, máme okamžitě $g(a_1) = a_2$. (b) Triviálně platí $\langle x, g(x)\rangle \in g$. Jelikož je g řetězec vůči h, platí $h(\langle x, g(x)\rangle) = \langle f_1(x), f_2(g(x))\rangle \in g$, což po úpravě notace znamená právě $g(f_1(x)) = f_2(g(x))$. □

Důkaz kategoričnosti $\mathfrak{PA}_2$, tj. strukturální jednoznačnosti Dedekindova popisu jednoduchého řetězce, je nyní přímočarý, tedy máme-li dokázáno jisté elementární lemma týkající se skládání funkcí:

> Mějme zobrazení $f : C \to D$. Platí, že f je bijektivní tehdy a jen tehdy, jestliže existuje zobrazení $g : D \to C$ takové, že $f \circ g$ a $g \circ f$ jsou identity na C, resp. D.

Důkaz: Předpokládejme, že je f bijektivní. Funkce f^{-1} je potom hledanou funkcí g. Tím je dokázána jedna strana ekvivalence. Nyní předpokládejme, že jsou pro nějaké g funkce $f \circ g$ a $g \circ f$ identitami. (1) Nejprve ukažme, že je f injektivní. Nechť platí $f(c_1) = f(c_2)$ pro nějaká $c_1, c_2 \in C$. Podle předpokladu tedy $c_1 = g(f(c_1)) = g(f(c_2)) = c_2$. (2) Nyní ukažme surjektivitu f. Mějme nějaké $d \in D$. Podle předpokladu platí, že $f(g(d)) = d$, tudíž $d \in rng(f)$. □

Nyní můžeme dokončit důkaz VĚTY O KATEGORIČNOSTI $\mathfrak{PA}_2$ neboli tvrzení:

> Pro každé $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ takové, že $\mathfrak{I}_1 \models \mathfrak{PA}_2$ a $\mathfrak{I}_2 \models \mathfrak{PA}_2$, platí $\mathfrak{I}_1 \cong \mathfrak{I}_2$.

Důkaz: Vezměme dva jednoduché řetězce $\langle S_1, f_1, a_1\rangle$, $\langle S_2, f_2, a_2\rangle$ coby modely $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ axiomů $\mathfrak{PA}_2$, tj. předpokládejme, že $\dot{\mathfrak{I}}_i = S_i$, $\mathfrak{I}_i(s) = f_i$ a $\mathfrak{I}_i(0) = a_i$ pro $i \in \{1, 2\}$, jak to odpovídá naší poznámce o variantách notace interpretací téhož jazyka ze strany 212. Zbývá dokázat existenci příslušné bijekce zachovávající strukturu jednoduchého řetězce. Podle rekurzivního teorému existují funkce $g_1 : S_1 \to S_2$ a $g_2 : S_2 \to S_1$:

(a) $g_1(a_1) = a_2 \qquad g_2(a_2) = a_1$

(b) $f_1 \circ g_1 = g_1 \circ f_2 \qquad f_2 \circ g_2 = g_2 \circ f_1.$

Dokážeme-li, že je g_1, resp. g_2, bijekcí, jsme hotovi, neboť spolu s ní představují tyto podmínky všechny požadavky na izomorfii obou řetězců. V důkazu bijektivity nás přitom zajímá funkce $h = g_1 \circ g_2$, o níž chceme dokázat, že je identitou, tj. že pro každé $x \in S_1$ platí $h(x) = x$, abychom poté mohli aplikovat naše lemma. Postupujme indukcí pro $W = \{x \in S_1 \mid h(x) = x\}$. (i) $a_1 \in W$ platí triviálně, neboť $g_2(g_1(a_1)) = a_1$ podle podmínky (a). (ii) Nechť tedy $x \in W$. Pak platí $h(f_1(x)) = g_2(g_1(f_1(x))) = g_2(f_2(g_1(x))) = f_1(g_2(g_1(x))) = f_1(h(x)) = f_1(x)$, tedy $f_1(x) \in W$. (iii) Ergo $W = S_1$. Totéž lze ale dokázat pro funkci $g_2 \circ g_1$, z čehož podle předchozího lemmatu plyne, že jsou g_1 a g_2 bijekcemi. Tím je důkaz hotov. □

Nyní se vraťme zpět k rekurzivnímu teorému a jeho roli v ospravedlnění definice rekurzí. Dedekindova formulace teorému brala primárně ohled na jeho použití v důkazu kategoričnosti $\mathfrak{PA}_2$, a proto se k přímému rekurzivnímu zavádění funkcí příliš nehodí. Z předvedeného důkazu lze ale snadno odvodit pohodlnější varianty rekurzivního teorému, vztahující se i na víceargumentové funkce, jako jsou právě sčítání a násobení. Na počtu parametrů či užitých funkcí totiž nezáleží, podstatné vždy je, aby se jeden z argumentů definované funkce g vztahoval k nějakému jednoduchému řetězci, na němž je pak založena předvedená konstrukce a důkaz indukcí. Jelikož je celá řetězcová anabáze od počátku koncipována jako cesta, jíž se lze dostat k přirozeným číslům, můžeme druhou verzi rekurzivního teorému formulovat přímo pro ně, tj. nad řetězcem $\langle \mathsf{N}_0, s, 0\rangle$ přirozených čísel:

> Mějme nad N_0 definovánu n-argumentovou funkci f a funkci g o $n{+}2$ argumentech. Pak existuje právě jedna $n{+}1$-argumentová funkce $h : (\mathsf{N}_0)^{n+1} \to \mathsf{N}_0$ taková, že:
>
> (a) $h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$,
>
> (b) $h(\vec{x}, s(y)) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y))$ pro každé $\vec{x} \in (\mathsf{N}_0)^n$.

S pomocí této verze teorému lze nyní již snadno zavést dvojargumentovou funkci h_+ sčítání, uvažujeme-li totiž identickou funkci $f(x) = x$ a funkci $g(x, y, z) = s(z)$. Funkci $h_\times$ násobení získáme skrze konstantní $f(x) = 0$ a funkci $g(x, y, z) = h_+(x, z)$, jak to odpovídá obvyklé rekurzivní definici

(i) $a \times 0 = 0$,

(ii) $a \times (b + 1) = a \times b + a$.

K Fregově explicitní definici rekurzivně zavedených funkcí se opět dostaneme analýzou důkazu rekurzivního teorému. Způsob, jakým v něm byla postulovaná funkce g definována, není totiž nic jiného, nežli metoda minimálního uzávěru, reflektovaná ve Fregově *Begriffsschrift* v druhořádové definici *ancestralu.* Namísto obecného schématu, jež lze snadno rekonstruovat, uveďme raději konkrétní případy explicitních definicí rekurzivních funkcí h_+ a $h_\times$ v jazyce $\mathfrak{PA}_2$:

$$\begin{aligned} h_+(x,y) = z &\rightleftharpoons (\forall f)\{(\forall u,v)[(f(u,0) = u \wedge \\ &\qquad f(u,s(v)) = s(f(u,v))] \rightarrow f(x,y) = z\}, \\ h_\times(x,y) = z &\rightleftharpoons (\forall f)\{(\forall u,v)[(f(u,0) = 0 \wedge \\ &\qquad f(u,s(v)) = h_+(u,f(u,v))] \rightarrow f(x,y) = z\}. \end{aligned}$$

Korektní by samozřejmě bylo zavést nejprve obraty "$h_+(x,y) = z$", resp. "$h_\times(x,y) = z$" jako jména pro trojmístné relace $H_+(x,y,z)$, resp. $H_\times(x,y,z)$, pro něž je teprve třeba dokázat funkcionalitu. Právě s ohledem na rekurzivní teorém je to ale zbytečná oklika.

5.8 Poincarého kritika

Vypleteme-li se na okamžik ze sítě logicistických argumentů a důvodů, proč postupovat tím a ne jiným způsobem, tj. podíváme-li se na celou věc střízlivýma očima, nemůžeme popřít, že na rekurzivním teorému není překvapivé to, *co* říká, ale *že* to vůbec říká, neboť v obvyklé početní praxi o existenci rekurzivně popsané funkce vůbec nediskutujeme, protože nám s tímto popisem splývá. V tomto okamžiku nejistoty o smysluplnosti logicistických metod vstupuje do hry oficiální legenda. V ní jsme v první řadě vyzváni nahlížet význam rekurzivního teorému jako pokračování Bolzanova systematického úsilí o vytlačení názoru ze základů matematiky, např. v rámci důkazu věty o mezihodnotě. Teze jsou přitom následující:

(1) Bolzano zbavil svými analytickými důkazy kalkulus potřeby geometrické opory, tj. závislosti na kantovském názoru prostoru.

(2) Frege a Dedekind učinili totéž pro názor času, jehož role v aritmetice souvisí podle Kanta právě s rekurzivním, postupným zaváděním pojmů. Objekty či funkce nejsou definovány naráz, ale v konsekventních fázích, odvolávajících se na fáze již realizované.

(3) V podstatě se jedná o vytěsnění potenciálního nekonečna ve prospěch nekonečna aktuálního.

Tento příběh je ale jenom jiným dokladem toho, že se dějiny píší z pozic vítězů. Přitom jsme již naznačili, proč je tato pozice pochybná a zmíněné vítězství se může snadno ukázat jako vítězství Pyrrhovo:

(4) Bolzano ve skutečnosti nemohl *dokázat*, že má každá spojitá funkce na kontinuu vlastnost mezihodnoty (*intermediate-value*

property), protože nedisponoval jasným pojmem kontinua, a tedy pojmem aritmetické *pravdy*.

Důkaz v primárním slova smyslu je vždy důkazem toho, *že je něco pravdivé*, tedy volba mezi dvěma předem danými alternativami pravda, nepravda. V tomto smyslu mohl Bolzano podat nanejvýš jakési 'prototeoretické' zdůvodnění, jak by mělo vypadat kontinuum, na němž pro spojité funkce platí věta o mezihodnotě, tedy návrh konstituovat aritmetický obor jistým způsobem, jenž je ovšem pouze jednou z předem neomezeného počtu možností, jak postupovat dál.

'Důkazů' tohoto druhého typu, tedy typu rozhodnutí, jak modifikovat pojem pravdy v reakci na nějakou více či méně krizovou situaci, je ovšem v dějinách matematiky celá řada, přičemž z našeho specifického úhlu pohledu k nim prominentně patří např. Cantorův důkaz nespočetnosti reálných čísel či Brouwerova demonstrace, že je každá totální funkce na reálných číslech spojitá. A v neposlední řadě Dedekindův rekurzivní teorém. V rekurzivním teorému přitom nejde 'pouze' o pojem čísla či aritmetické pravdy, ale o samotný pojem definice, neboť právě způsob, jak 'korektně' zavést obvyklé operace sčítání a násobení, je bez výše provedené paradigmatické demonstrace nepředstavitelný, tj. jedná se o ono rozhodnutí, na němž lze teprve stavět další, tentokráte již skutečné důkazy.

Logicistům je proto možné předhazovat nanejvýše a zároveň především to, že jejich rozhodnutí nebylo s ohledem na další vývoj příliš šťastné, jak to, tváří v tvář Russellovu paradoxu, učinil Poincaré [1906*b*, § 15] svým často citovaným zvoláním: "logicismus není neplodný, zrodil antinomie". Optimista bude s přihlédnutím k neologicistickým objevům oponovat, že paradox nepředstavuje pro logicistický plán zásadní problém, neboť se primárně jedná o debakl technický, který se dá různými způsoby napravit, jak se to ostatně nedávno podařilo v rozsahu, jenž se zdál být dlouhou dobu nemyslitelný. Z pesimistova pohledu to však znamená pouze tolik, že Russellův paradox není tím nejhorším, co s sebou logicismus přinesl, resp. co svědčí o jeho totálním selhání. Škarohlídův zrak pak s největší pravděpodobností padne právě na rekurzivní teorém, resp. s ním spjatý pokus o obhajobu definice rekurzí logickými prostředky. Reprezentativním příkladem pesimistického přístupu je právě stanovisko Poincarého, které nám zde poslouží jako východisko naší kritiky.

Poincarého pozice v dějinách matematiky a její filosofie se až nápadně podobá pozici Hilbertově. Oba učinili řadu hlubokých objevů v neobyčejně širokém spektru matematických a fyzikálních disciplín, jež často sami založili, a těší se proto dodnes respektu jako málokterý jiný matematik té doby. Oba se právě pro šíři svých zájmů zabývali i otázkami základů a filosofie matematiky, a oba tak činili způsobem, jenž prozrazoval spíše značný politický talent i ambice nežli snahu o detailně propracovaný logicko-filosofický systém. Jejich postřehy jsou ovšem (právě proto) vlivné a (přesto) inspirující.

K logicismu se Poincaré vyjadřuje opakovaně ve svých ‘populárně-filosofických’ spisech, a to zpravidla negativně. Obecnou pomýlenost přístupu logicistů k matematice popisuje [1908, úvod] takto:

> V jejich očích by měl ten, kdo chce učit aritmetiku přísně logickým způsobem, začít stanovením obecných vlastností transfinitních kardinálů a mezi nimi potom rozlišit velmi malou třídu, totiž obvyklých celých čísel. Díky této oklice je možné úspěšně dokázat všechny věty vztahující se k této malé třídě (tj. k naší aritmetice a algebře) bez použití jakéhokoli principu, jenž by nebyl logický. Tato metoda zjevně odporuje jakékoli příčetné psychologii; jistě to nebyla tato cesta, kterou se lidská mysl ubírala při rozvíjení matematiky; takže její autoři, domnívám se, ani neuvažují o tom, že by ji aplikovali ve středoškolské výuce.

Nám, kdo jsme se dožili začátku nového tisíciletí, se musí Poincaré nutně jevit jako nezměrný optimista, jenž ani v nejtemnější ze svých představ netušil, že teorie množin právě díky těm, “kdo žili již dlouho v této [z logicismu vzrostlé] atmosféře”, vstoupí dokonce na školy základní.[21] Vrátíme-li se nyní zpět k samotnému problému, můžeme nejprve se souhlasem kvitovat, že Poincaré bez dalšího řadí teorii množin k logicistickému projektu, jak to rámcově (tj. s vědomím relevantních rozdílů) odpovídá naší rekonstrukci Fregova a Dedekindova projektu, včetně jeho identifikace s pokusem o vydělení čísel z větší skupiny objektů, tedy, jak říká Poincaré, s obecným postupem od rodu (*genu*) k druhu (*species*). To nám dává naději, že Poincaré, přestože cituje hlavně Cantora a Russella, hovoří o stejném logicismu jako my, pročež můžeme postoupit od jeho obecných ke konkrétním námitkám.

Poincarého polemika s Russellovým logicismem přitom začala pozoruhodně stejným způsobem a ve stejné době jako Fregova polemika s Hilbertem, totiž koncem století nad základy geometrie. Tehdy vydal Russell přepracovanou verzi své disertace *An Essay on the Foundations of Geometry* [1897], v níž aplikoval některé ze svých raných novohegelovských názorů na základy geometrie. V kombinaci s jeho bytostným empirickým naladěním to vedlo k nepříliš koherentní teorii, podle níž jsou některé axiomy geometrie, jako je eukleidovský postulát o rovnoběžkách či třírozměrnost prostoru, empirickými zákony, odvozenými ze zkoumání empirického prostoru, viz [1897, s. 162], zatímco jiné, např. Russellův axiom vzdálenosti, podle něhož dva body jednoznačně určují

[21] Že se v případě kreslení Vennových diagramů v prvních třídách jedná o všechno jiné než úspěch (záhadný zákaz sčítání jablek s hruškama!) a vlastně i o všechno jiné než o teorii množin, je jiná věc.

prostorovou veličinu, jsou (syntetické) *a priori* ve smyslu předpokladů každého empirického měření, viz [1897, s. 161]. Kniha se nedočkala příliš vřelého ohlasu, recenzoval ji ovšem Couturat a Russellova odpověď, v níž byla odmítnuta Poincarého vlastní teorie, podnítila jeho vstup do diskuze roku 1899.[22]

Poincarého základní a Russellem odmítnutá teze spočívala v tom, že axiomy geometrie jsou v první řadě *konvence*, u nichž není třeba pravdivostní hodnotu vůbec uvažovat. To může nápadně připomínat Hilbertův postoj, k němuž ostatně Poincaré [1905, § 2] cítil značnou afinitu, už proto, že se sám potýkal s problémem relativity geometrických pojmů, plynoucí z objevu neeukleidovských geometrií, k nimž (konkrétně pro Lobačovského rovinnou geometrii) také zkonstruoval eukleidovský model.[23] To, co mu bylo na Hilbertově přístupu cizí a co na něm také odsuzoval, byl jeho přehnaně formální charakter, jenž jej v jeho očích přiblížil až přespříliš názorům Russellova a Cantorova logicismu. Poincarého konvencionalismus totiž primárně nebyl veden snahou vyhnout se problému geometrické pravdy, toho, o čem axiomy pojednávají, totiž o empirickém prostoru, ale vědomím komplikovaného vztahu geometrie k empirické zkušenosti. V jednom ze svých méně známých pojednání [1898, závěr] např. píše:

> Naše volba [té které geometrie] není určena zkušeností. Je jednoduše vedena zkušeností. Ale zůstává svobodnou; vybíráme si tuto spíše než jinou geometrii ne proto, že je pravdivější, ale proto, že nám více konvenuje. Ptát se, zda je Eukleidova geometrie pravdivější nežli geometrie Lobačovského, je absurdní stejně jako dotaz, zda je metrický systém pravdivý a systém yardů, stop a palců nepravdivý.

V historické perspektivě odpovídá Russellův a Poincarého postoj dvojímu čtení Kantovy transcendentální filosofie, totiž

(1) *absolutnímu*, které je objevem neeukleidovských geometrií, případně jejich fyzikálními aplikacemi definitivně vyvráceno, a

(2) *relativnímu*, jež si je vědomo apriorní povahy matematiky a fyziky v empirických měřeních, zdůrazňuje ale právě jejich instrumentální charakter, tj. připouští, že je věcí volby, jaké nástroje užijeme, a že příroda nástroje, skrze něž je poznávána a definována, neurčuje a ani nemůže určovat jednoznačně.

Podle Poincarého se to týká všech geometrických pojmů, tedy i pojmu vzdálenosti, jenž je tou kterou sadou axiomů 'definován' různě. Zatímco

[22] Jednalo se o článek Poincaré [1899]. Historii celé kontroverze, včetně bibliografických údajů, popisuje Grattan-Guinness [2000, s. 278 nn].
[23] Je předveden např. in Hartshorne [2000, s. 355 nn].

proti externímu, pragmatickému zdůvodnění pravdivosti geometrických axiomů nemáme co namítnout, je opětovné vytažení otázky axiomů coby definicí užitých pojmů značně kontroverzní, neboť nám neříká, na základě čeho se jednotlivé věty geometrie stávají větami, tj. jsou interně ohodnoceny jako pravdivé. — Na tomto pozadí nevypadá Russellovo empirické stanovisko ani Fregovo 'politicky nekorektní' přirovnání neeukleidovských geometrií k pavědám na úrovni alchymie zase tak naivně a dogmaticky. — Sotva nás tedy překvapí, že musí-li, pak Poincaré operuje pouze pojmem geometrického instinktu či intuice. Na teoretické úrovni, zdá se, ovšem přejímá [1906*a*, § 28] Hilbertův názor, podle něhož o správnosti axiomatické definice rozhoduje důkaz její bezespornosti, typicky konstrukcí příkladu (modelu), jak to Hilbert učinil pro axiomatizaci z *Grundlagen*. Opět je tu ale jeden zdánlivě bezvýznamný detail.

Na rozdíl od Hilberta není pro Poincarého [1905, § 4–5] důkaz bezespornosti axiomů, resp. jeho možnost, *kritériem* jejich *smysluplnosti*, ale právě kritériem toho, zda se jedná o definici, tj. axiom v Hilbertově smyslu slova, nebo o axiom v tradičním smyslu pravdivé věty. Nemůžeme-li totiž, říká Poincaré [1906*a*, § 29], dokázat bezespornost axiomů nějaké disciplíny, aniž bychom přitom použili principů, jejichž bezespornost dokazujeme, jedná se nejspíš o zákony syntetické *a priori*. Rozdíl mezi geometrií a aritmetikou spočívá podle Poincarého právě v tom, že zatímco první byla díky Hilbertovi prokázána jako bezesporná, a své pojmy tedy definuje, v případě druhé vede každý důkaz bezespornosti k aplikaci principu indukce, jenž je ovšem jedním z jejích obligátních axiomů, což dává zcela inherentní kruh. Tento kruh je podle něho nutně obsažen v každém pokusu odvodit matematickou indukci z jiných, např. čistě logických principů, neboť indukce je specifickým principem aritmetiky, zajišťujícím jí status syntetického *apriori*, tedy nikoli disciplíny analytické. Logicistické paradoxy jsou takto pouze důsledky slepé aplikace statických metod logiky na konstruktivně, 'dynamicky' fundovanou disciplínu.

Poincarého pozice je ovšem všechno jenom ne zcela jasná a mnohé z jeho tezí, jako ta o syntetičnosti principu indukce, mají charakter pouhých prohlášení, tj. nejsme ničím přesvědčeni ani přesvědčováni o tom, že by nemohl platit opak. Že se ve skutečnosti jedná o pozici silně dogmatickou, zachraňující absolutistické čtení Kanta alespoň v oblasti aritmetické, vyplyne poté, zeptáme-li se cvičně, zda lze na základě Hilbertových důkazů konzistence považovat geometrii za analytickou disciplínu. Poincarého odpověď (na rozdíl od té, jíž nám sugeruje Coffa [1991]) by byla samozřejmě záporná a odkazovala nejspíše k faktu, že uvedené důkazy jsou důkazy relativní, převádějící bezespornost neeukleidovských geometrií na eukleidovské (konstrukcí eukleidovského modelu), a jejich pak zase na bezespornost aritmetiky reálných čísel (konstrukcí modelu analytického).

Při redukci vyšších číselných oborů na čísla přirozená by tak proklamovaná syntetičnost geometrie byla *de facto* garantována syntetičností elementární aritmetiky, v níž by hrál princip indukce stejnou roli nezpochybnitelného fundamentu, jakou hrál před objevem neeukleidovských geometrií názor eukleidovského prostoru. Historický význam Poincarého kritiky logicismu proto nespočívá ani tak v hloubce užitých argumentů, např. explicitního odmítnutí absolutistické interpretace Kantovy transcendentální filosofie, ale v samotné okolnosti, že ve své kritice převládající trend pouze neusměrňuje, jako to dělá např. Hilbert, ale rozhodně popírá, čímž dává vedle revidujícího proudu vzniknout i proudu alternativnímu, plně rozvinutému až Brouwerovým intuicionismem. V tomto smyslu mohl Brouwer nazývat Poincarého preintuicionistou.

Problém indukce je přitom z hlediska udržitelnosti logicistické hypotézy skutečně vážný, nikoli však v Poincarého, natož pak v Brouwerově dogmatickém smyslu. Podle Poincarého nemohou logicisté dokázat princip indukce, aniž by jej sami při tomto důkazu nepoužili, pročež jej musí uznat jako nezávislý, mimologický princip. Podle logicistů ale není problém v samotném principu indukce, jenž je prostě vedlejším produktem způsobu, jakým byly definovány jednoduché řetězce, tj. k jeho ospravedlnění nám stačí obsáhnout danou definici neboli vědomosti pojmové. Problém je v tom, zda se nám skrze pojmy řetězce, uzávěru či *ancestralu* skutečně podařilo vyloučit induktivní (rekurzivní) způsob zavádění pojmů z inventáře elementární matematiky ve prospěch explicitních metod logiky. Naše odpověď, podaná v následujícím oddíle, je záporná a podstatně konkrétnější než ta Poincarého, což je umožněno úvodní schematizací Fregova projektu, tedy jeho rozdělením na deduktivní a sémantickou část, a té zase na část deskriptivní a ontologickou.

5.9 Lesk a bída logicismu

Deduktivní část Fregova projektu padá s deduktivní neúplností Peanovy aritmetiky, k níž se vyjádříme hned v dalším oddíle. Jelikož se z hlediska vyvození příslušných negativních závěrů nejedná o příliš kontroverzní téma, tj. selhání logicistických očekávání je zde okamžitě patrné, přistupme nyní rovnou k ontologické kapitole sémantické části. Zde je třeba postupovat citlivěji.[24]

Jak víme, Fregův logicismus potřebuje v prvním, ontologickém kroku obhájit existenci nekonečné množiny, z níž by v druhém, deskriptivním kroku vydělil čísla jako *species*. Prvního se Frege pokouší dosáhnout pomocí GV, v neologicistické úpravě pak HP, a to konstrukcí řady objektů, jíž v teorii množin později odpovídá Zermelova a von Neumannova definice přirozených čísel:

[24] Obsah tohoto oddílu tvoří části mých článků Kolman [2005*b*] a Kolman [2007].

(i) prázdná množina $\emptyset$ je objekt,

(ii) je-li x objekt, pak i $\{x\}$, případně $x \cup \{x\}$ je objekt.

To je samozřejmě definice indukcí, jíž se měl čistě logický způsob popisu báze vyhnout. Neologicistická revize se ontologickou část Fregova projektu pokouší obejít jeho modelově-teoretickou interpretací, podle níž HP svojí formou existenci nekonečné množiny indukuje. To je ale zjevná polopravda: HP indukuje existenci nekonečné množiny pouze za předpokladu, že (1) je konzistentní a že (2) z konzistence vyplývá existence modelu. Jak jsme nicméně viděli, Boolosův důkaz konzistence HP je naopak *založen* na konstrukci modelu, a to modelu, jenž sestává z přirozených čísel, která se nám zatím nepodařilo zavést jinak než ve stylu:

(i) 0 je číslo,

(ii) je-li x číslo, pak i $x + 1$.

Rovněž Dedekind, jenž si byl nutnosti dokázat existenci modelu svých axiomů vědom, k tomu potřeboval popsat nějakou logicky akceptovatelnou (dedekindovsky) nekonečnou množinu. Jeho příklad [1888, teorém 66], založený na podobné ideji Bolzanově [1851, § 13], popisuje část totality možných objektů svého (mého) myšlení:

(i) a je nějaký objekt mého myšlení,

(ii) je-li x objekt mého myšlení, pak myšlenka, že x je objekt mého myšlení, je objekt mého myšlení.

Tento zoufalý pokus nás v rozporu se svým záměrem spíše definitivně přesvědčí o tom, že předvést příklad nekonečné množiny jinak než pomocí rekurze je zhola nemožné, a to proto, že se v ní skrývá elementární způsob, jímž je nám pojem nekonečna dán. Spolu s Kantem tedy můžeme říci, že nekonečno je pouhou formou rekurze, s přirozenými čísly jakožto nejjednodušším, a tedy neodvozeným představitelem.

Všimněme si, že na základě této úvahy může strukturalistická idea *de facto* získat určitý kredit, musí se nicméně osvobodit od zbytků logicistické doktríny, tj. především pojmout přirozená čísla jakožto instanci jisté *konstrukční formy*, nikoli jisté *třídy objektů*. Transfinitní řada Cantorových ordinálních čísel představuje paradigmatický příklad jiné, i když spřízněné konstrukční formy, stejně jako s ní spjatý princip transfinitní indukce:

(i) nechť platí vlastnost F pro 0, resp. $\emptyset$,

(ii) nechť z toho, že F platí pro všechna x taková, že $x < y$, plyne platnost F pro y,

(iii) pak F platí pro všechna ordinální čísla.

Přesvědčíme-li se takto o tom, že je ontologická část logicistického projektu mrtvá, můžeme doufat, že lze zachránit alespoň část deskriptivní, na jejíž rehabilitaci je ostatně soustředěn i neologicistický podnik. Předpokládáme tedy, že jsou nám nějak dána přirozená čísla a na nich definovaná relace S, resp. funkce s následníka, a tvrdíme, že jsme je s to uchopit jako jeden celek, aniž bychom k tomu potřebovali odkaz ke konečnému počtu iterací aplikovaných na číslo 0. To je úloha predikátu:

$$N(x) \rightleftharpoons (\forall X)[X(0) \wedge (\forall y)(X(y) \rightarrow X(s(y))) \rightarrow X(x)].$$

Nyní zbývá udělat to, co jsme dosud pouze obcházeli, totiž obhájit jeho korektnost, tedy fakt, že mu vyhovují pouze přirozená čísla a nic jiného. Vyjdeme přitom z Fregovy intenzionální formulace N, podle níž jsou čísla uchopena jednoduše jako ty předměty, které mají všechny dědičné vlastnosti (v řadě určené funkcí s), které má i 0. Jelikož ke každému přirozenému číslu, tj. prvku N_0, lze dojít od nuly konečným iterováním následnické funkce, je zřejmé, že platí

$$\mathsf{N}_0 \subseteq \{x \mid N(x)\}.$$

Otázka je, zda se nám do extenze N nemohou dostat také předměty jiné, tj. zda nemohou existovat předměty, které mají sice všechny dědičné vlastnosti nuly, nicméně nejsou jejími následníky. Oficiální argument, který tuto možnost vylučuje, vypadá takto: Vezmi vlastnost

$$P(x) \rightleftharpoons x \text{ je přirozeným číslem}$$

a uvažuj a takové, že $N(a)$. Zjevně platí, že $P(0)$ a že je P dědičná v řadě určené s, tudíž, podle definice N, musí platit i $P(a)$. Tím pádem:

$$\{x \mid N(x)\} \subseteq \{x \mid P(x)\} = \mathsf{N}_0.$$

Podezřelý na celé věci je samozřejmě predikát P. Možností, jak jej chápat, je přitom několik. Ta nejhorší z nich bere na jeho místě rovnou výraz N. Z formálního hlediska tomu nestojí nic v cestě, neboť se jedná o přípustnou hodnotu proměnné X v jeho definici! Věcná nekorektnost tohoto postupu je nicméně jasná nade vší pochybnost:

> Argument platí tehdy a jen tehdy, jestliže P označuje právě množinu všech přirozených čísel. My se ale snažíme zjistit, zda tuto vlastnost splňuje N, tj. argument nás nedostává nikam dál.

Celý postup až nápadně připomíná schéma bludného kruhu, jež Russell rozpoznal u GV, totiž impredikativitu příslušné definice. Jak již jsme ale upozornili v souvislosti s impredikativním HP, z definicí tohoto typu ještě nemusí formálně plynout spor. A skutečně, není známo, že by N sporný byl.

Nejistotě lze samozřejmě čelit formální predikativizací podezřelých principů a definicí, tj. konkrétně vyloučením výrazu N z hodnot proměnné X v N, jak k tomu dochází v rámci teorie typů. K tomuto řešení se dostaneme v příští kapitole. Moderní metamatematika volí podobnou cestu, v níž se proměnná X jednoduše vztahuje pouze k výrazům aritmetického jazyka prvního řádu, mezi něž N triviálně nepatří. Tím je učiněno zadost zmíněné predikativitě, stále ovšem zbývá ukázat požadovanou korektnost (adekvátnost) predikátu N. Potřebujeme tedy mezi redukovanými hodnotami proměnné X najít nějakého vhodného kandidáta pro P.

V příštím oddíle uvidíme, že to není možné, tj. že predikátová logika prvního řádu nedisponuje formulí, která by zachytila všechna a pouze přirozená čísla, což znamená, že definice N a na ní založený princip indukce aritmetiky prvního řádu kolabují. I kdyby se tak ale nestalo, nemělo by uvedené zdůvodnění smysl, a to z mnohem prostšího a obecnějšího důvodu neslučitelnosti následujících požadavků:

(1) Jakéhokoli kandidáta pro P najdeme, musí být vždy konceptuálně ‘jednodušší’ než predikát N, jinak by nemohl sloužit ke zdůvodnění jeho korektnosti.

(2) Najdeme-li takový predikát P, nepotřebujeme již predikát N, neboť naším cílem bylo uchopení přirozených čísel, což podle předpokladu splňuje již jednodušší P.

Tím je v podstatě vyřízena i deskriptivní část Fregova projektu. S ohledem na další výklad se ale vyplatí doplňující komentář: Frank Ramsey [1925, s. 204] založil obhajobu definicí, jako je N, na předpokladu, že lze jejich údajnou bludnost eliminovat důsledným rozlišováním mezi samotnými čísly, resp. jejich množinami, danými předem, a predikáty, jako je N. Ty jsou specifikovány dodatečně, a proto nezávisle na tom, co označují, a nemohou být tedy bludné, protože jejich proměnné odkazují mimo sféru výrazů, k označovaným množinám. Okolnost, že impredikativita nepředstavuje žádnou hrozbu, jestliže příslušné ‘definice’ chápeme jako určité deskripce nezávisle existujících objektů, byla od té doby zmiňována často, významně např. Gödelem [1944, s. 136]. Ani jeden z těchto návrhů ovšem nepředstavuje pádný argument proti našemu odmítnutí Fregovy definice, neboť přehlížejí, že Fregova intenzionální interpretace N toto diferencované čtení nevylučuje, a náš argument s ním tedy počítá, resp. je na něm zcela nezávislý. Co se týče vlastního čtení Fregovy definice, vše záleží na tom, přes jaké vlastnosti proměnná X probíhá, tj. co rozumíme pojmem vlastnosti.

Jestliže definujeme pojem vlastnosti extenzionálně, jedná se vlastně o Ramseyho a Gödelovu množinu. Extenzionální čtení definicí, jako je N, jsme přitom systematicky aplikovali při popisu Dedekindovy aritmetiky, v níž byl k zachycení třídy všech přirozených čísel použit pojem minimálního uzávěru množiny $\{0\}$ na relaci s. Okolnost, že se tak opravdu podaří zachytit třídu všech následníků nuly, je postavena na tom, že mezi množinami, jejichž je minimální uzávěr průnikem, se vyskytuje také množina N_0 přirozených čísel, kterou se tímto způsobem snažíme definovat. Na tom není opět formálně nic sporného, není však zřejmé, jak se řeč o takovéto množině všech čísel, která musí být v oboru kvantifikace proměnné X, liší od užití predikátu

$$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \ \vee \ \text{atd.},$$

jenž má nepochybně stejnou extenzi, a slouží tedy ke stejnému cíli, nicméně byl z logicistického hlediska shledán jako nepřípustný pro svoji nekonečnou povahu, resp. pro odkaz ke konstrukci v čase pomocí "atd.". Známý fakt, že je logika druhého řádu ve standardní interpretaci ekvivalentní logice nekonečných formulí, jenom podtrhuje náš závěr, že se v užití druhořádových definicí jedná o pouhý trik, jenž má zastřít nekonečné předpoklady skrývající se ve velkorysém užití druhořádových proměnných. Tyto proměnné přitom pod podmínkou funkčnosti musí kvantifikovat přes to, co se původně snažily zachytit, tj. množinu všech přirozených čísel v případě N, příslušné aritmetické funkce v případě definicí h_+, $h_\times$ (viz s. 334) apod. Inkriminované aritmetické pojmy nám takto opět nakonec nemohou být dány jinak nežli prostou rekurzí.

Náš průběžný závěr ohledně logicistické hypotézy tedy nesvaluje její selhání na Russellův paradox, jenž je pouhým technickým nedopatřením, které se navíc podařilo opravit, ani na impredikativitu užitých pojmů, neboť ta je v mnoha případech neškodná, ba může působit i plodně. Na vině je podle nás rozhodnutí definovat aritmetické objekty *explicitně*, tj. vyloučit rekurzivní definice z kanonických metod reformované aritmetiky. Logicisté i neologicisté jsou přitom nevyhnutelně nuceni užívat rekurzivního způsobu pojmotvorby, a to nejen při definici základních logických pojmů, jako jsou formule nebo důkaz, ale i při obhajobě korektnosti svých umělých druhořádových definicí.

Fregův a Dedekindův pokus formulovat a dokázat něco, jako je rekurzivní teorém, se přitom rovná rozhodnutí pěstovat aritmetiku jistým velmi abstraktním způsobem. V tomto projektu nejsou rekurzivní formace uchopeny jako *jména* aritmetických objektů, jak tomu je ještě v rámci školní výuky a při obvyklých počtech, kde nikdo existenci a jedinečnost příslušných výrazů nezpochybňuje, nýbrž jako *určité deskripce*, které musí být na obě zmíněné vlastnosti dodatečně přezkoušeny, mají-li být dále používány korektně. Tento plán se ukázal být jako nerealizovatelný, přinejmenším jako celek, neboť rekurze je evidentně nejjednodušším způsobem, jak pojmenovávat věci v aritmetice, tedy jak konstituovat aritmetický obor. Je pravděpodobné, že si to Frege v důsledku uvědomil, a vzdal proto celý projekt. Uvedený závěr o ireducibilitě indukce lze v každém případě nalézt u Poincarého, jenž se (ne zcela přímou) propagací návratu ke konstruktivním kořenům matematiky stal *de facto* předchůdcem Brouwerovým. Hlavní proud následujícího vývoje se dal nicméně směrem jiným, totiž cestou podivných kompromisů, které měly uspokojit všechny, aby nakonec vážně neuspokojily nikoho. Přechod k axiomatickým teoriím prvního řádu je jedním z nich.

5.10 Aritmetika prvního řádu

Definitivní vyvrácení Fregovy logicistické hypotézy, které jsme nastínili v předchozím oddíle, je ještě závislé na dovysvětlení dvou bodů, totiž (1) zpochybnění její deduktivní části a (2) demonstraci toho, že nelze týchž expresivních výsledků dosáhnout v omezení na prvořádový fragment jazyka, v němž by odpadl onen nepříjemný regres, nastíněný v minulém oddíle. Tyto dvě části spolu samozřejmě souvisejí v tom smyslu, že rozličné fragmenty jazyka PL_2 mohou mít různé deduktivní vlastnosti. Tak tomu skutečně i je, na zhodnocení části (1) to ale nakonec velký vliv nemá. Začněme nicméně částí (2). Postačující bude, když ukážeme:

> V $\mathsf{PL}_=$ nelze definovat (netriviální) minimální uzávěr množiny na danou funkci.

Důkaz: Mějme nějakou teorii S v jazyce $\mathsf{PL}_=$, k němuž náleží i funktorová konstanta f, nějakou formuli $\psi(x)$ a množinu formulí T, v jejímž rámci má predikátová konstanta $P \notin L_S$ zachytit uzávěr extenze formule $\psi(x)$ na aplikaci funkce odpovídající f. Předpokládejme dále, že $\mathcal{I}$ je model celé teorie $S + T$, v němž navíc $\mathcal{I}(P)$ skutečně zachycuje příslušný minimální uzávěr. Předpokládejme dále, že se jedná o uzávěr netriviální, tj. takový, kdy se v extenzi P nachází pro každé $n \in \mathsf{N}$ prvek, jehož nelze dosáhnout méně než n aplikacemi funkce $\mathcal{I}(f)$ na prvky extenze $\psi(x)$. V triviálním případě samozřejmě uzávěr definovatelný je. — Vezměme nyní konstantu $c \notin L_{S+T}$ a uvažme množinu U, sestávající z následujících formulí

$$
\begin{aligned}
&P(c),\\
&\neg\psi(c),\\
&(\forall x)(\psi(x) \rightarrow c \neq f(x)),\\
&(\forall x)(\psi(x) \rightarrow c \neq f(f(x))),\\
&(\forall x)(\psi(x) \rightarrow c \neq f(f(f(x)))),\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Úmysl je zřejmý: V případném modelu teorie U náleží prvek odpovídající konstantě c extenzi P, nelze se k němu nicméně dostat žádným konečným počtem kroků od nějakého prvku extenze $\psi(x)$, což znamená, že extenze P není minimálním uzávěrem extenze $\psi(x)$ na f. Kdybychom uměli ukázat, že má model celá teorie $S + T + U$, prokázali bychom, že P není s to zachytit minimální uzávěr v libovolné interpretaci výchozí teorie, a T je tedy jako jeho implicitní definice nepoužitelná. K existenci tohoto modelu nás ale opravňuje věta o kompaktnosti pro $\mathsf{PL}_=$, podle níž má teorie model, má-li model každá její konečná podmnožina. Každou konečnou podmnožinu $U' \subseteq U$ lze přitom splnit nad daným $\mathcal{I} \models S + T$, totiž když vezmeme nejvyšší počet výskytů konstanty f ve formulích z U' a za $\mathcal{I}(c)$ zvolíme ten prvek $a \in \mathcal{I}(P)$, jenž není dosažitelný z extenze $\psi(x)$ stejným nebo menším počtem kroků. Takový prvek existuje z netriviality uzávěru. Tím pádem je splnitelná každá konečná podmnožina $S+T+U$ a kýžený závěr snadno následuje. □

Následky této věty pro prvořádovou verzi aritmetiky jsou bezprostředně viditelné, i když jsme zatím neřekli, jak bude vlastně příslušný systém vypadat. Vyjdeme-li z původní sady (P1–2), (PI) axiomů $\mathfrak{PA}_2$, je zřejmé, že první revize se bude týkat principu indukce, z něhož je třeba odstranit druhořádovou kvantifikaci. Na jeho místo se proto dostává tzv. SCHÉMA INDUKCE:

SI $\quad \varphi(0) \wedge (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \varphi(s(x))) \rightarrow (\forall x)\varphi(x),$

na něž sice můžeme nahlížet jako na výše ohlášenou predikativizaci principu indukce, v němž je proměnná X omezena na výrazy prvořádového jazyka, z pohledu logiky prvního řádu se ale *de facto* nejedná o jednu, nýbrž nekonečně mnoho formulí, totiž pro každou formuli $\varphi(x)$ uvažovaného jazyka. K tomu zatím počítáme pouze konstanty 0 a s.

Z předchozí věty přitom plyne, že jakkoli bude systém prvořádové aritmetiky vypadat, nepodaří se nám v něm zachytit strukturu jednoduchého řetězce. Důkaz nám totiž pro speciální případ formule $\psi(x) := x = 0$ a funktoru $f := s$ ukazuje, že k teorii, jejímž modelem jsou přirozená čísla, existuje jiný její model, v němž je realizována nová konstanta c a platí všechny z následujících formulí

$$c \neq 0,$$
$$c \neq s(0),$$
$$c \neq s(s(0)),$$
$$\vdots$$

Jestliže se v uvažované teorii vyskytuje schéma indukce, znamená to, že konstantě c odpovídá právě onen nežádoucí prvek, jenž má všechny dědičné vlastnosti nuly, nicméně není jejím následníkem, tj. nachází se mimo číselnou řadu. Modelům prvořádové aritmetiky, které obsahují prvky, které nemají formu $s(\dots s(0)\dots)$, se říká NESTANDARDNÍ MODELY, zmíněným prvkům NESTANDARDNÍ ČÍSLA. STANDARDNÍM MODELEM je samozřejmě model založený na množině N_0 přirozených čísel s obvykle definovanými konstantami.

Příčiny selhání schématu oproti principu indukce nejsou po předchozím výkladu nijak překvapivé: Mezi všemi dědičnými vlastnostmi, které nula má, chybí ta nejpotřebnější, totiž vydělující všechny následníky nuly a právě je, na níž by onen nepatřičný cizí element přirozeně vypadl. Důkaz kategoričnosti v Dedekindově stylu nelze provést proto, že v něm využitá metaindukce byla značně velkorysá ve vztahu k aplikovaným vlastnostem, resp. množinám. My jsme nyní omezeni pouze na ty z nich, které jsou zachytitelné v jazyce prvního řádu. Všimněme si navíc, že princip indukce ve své roli axiomatické definice sám o sobě zajišťoval, že je model aritmetiky spočetný, protože lze každý jeho prvek prezentovat formou $s(\dots s(0)\dots)$ pro nějaký konečný počet s. Tato jeho role nyní padá. Zbylé dva axiomy (P1–2) si ale stále vynucují nekonečnost, což znamená, že s každým modelem této prvořádové aritmetiky je podle Löwenheimovy-Skolemovy věty dán i model větší mohutnosti! Kategoričnost je tedy nenávratně ztracena.

Získaná jistota, že jakákoli prvořádová aritmetika bude expresivně slabá, tj. slabá co do své strukturálně-sémantické stránky, nám ještě nebere naději, že se ukáže silná deduktivně, ve smyslu úplnosti příslušného deduktivního systému vůči standardní interpretaci. Dosud uvažovaná sada axiomů:

P1 $(\forall x)(s(x) \neq 0)$,

P2 $(\forall x, y)(s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$,

SI $\varphi(0) \wedge (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \varphi(s(x))) \rightarrow (\forall x)\varphi(x)$

skutečně úplná je! Bohužel to není znak síly, ale slabosti, spočívající v jednoduchosti uvažovaného jazyka $L = \{0, s\}$. Vzpomeňme, že jsme obvyklé základní aritmetické pojmy jako sčítání či násobení byli v $\mathfrak{PA}_2$ schopni zavést právě díky síle druhořádové indukce. Ta nám nyní chybí, a my nejsme adekvátně s to zachytit ani relaci $<$. Vlastně není zprvu jasné, v jakém smyslu bychom ji vůbec zachytit chtěli, když uvažovaný axiomatický systém nefixuje strukturálně (až na izomorfismus) jednoznačnou interpretaci, a uspořádání se tedy v jednotlivých modelech *nutně* liší.

Nezbývá nám proto než obrátit logicistický postup vzhůru nohama, vzít interpretaci N_0 jednoduše jako danou a pokoušet se z ní vydělit povolenými prostředky známé aritmetické pojmy. Zavedeme-li pro libovolné $n \in \mathsf{N}_0$ zkratky

$$s^{(n)}(x) \rightleftharpoons \underbrace{s \dots s}_{n\times}(x) \qquad \overline{m} \overset{\text{def}}{=} s^{(m)}(0),$$

kde $\overline{n}$ je tzv. n-tý NUMERÁL, pak např. definovatelností sčítání v daném aritmetickém jazyce L můžeme mínit existenci formule φ z F_L, pro niž:

$$\mathsf{N}_0 \models \varphi(\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}) \text{ tehdy a jen tehdy, když } m + n = p.$$

Tomu se obecně říká DEFINICE FUNKCE V INTERPRETACI. V deduktivním smyslu, tj. vzhledem k danému axiomatickému systému $\mathfrak{K}$ aritmetiky, bychom mohli požadovat nalezení formule, pro niž platí

$$\mathfrak{K} \vdash \quad \varphi(\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}), \text{ jestliže } m + n = p,$$

$$\mathfrak{K} \vdash \neg\varphi(\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}), \text{ jestliže } m + n \neq p.$$

Tomu se obecně říká ZACHYCENÍ FUNKCE, resp. relace V TEORII. Všimněme si dále, že ze zachycení aritmetické funkce v $\mathfrak{K}$ plyne její definovatelnost v N_0 tehdy, jestliže je $\mathfrak{K}$ korektní vůči interpretaci N_0, tj. platí $\mathsf{N}_0 \models \mathfrak{K}$. Naopak z definovatelnosti plyne zachycení tehdy, je-li $\mathfrak{K}$ vůči N_0 úplná.[25]

Na tomto místě se vyplatí oživit alternativní domluvu ohledně notace, jejíž možnost jsme již dříve naznačili (viz s. 212) a dílem i využili. Všimněme si, že užíváme-li značení N_0 ve významu (standardní) interpretace jazyka aritmetiky, měli bychom stejně jako dříve v algebraickém případě pečlivě rozepisovat, jaké pojmy jsou na jejím nosiči definovány, tj. uvádět spolu s ním i příslušný jazyk. Není-li to jasné z kontextu, pak se v praxi užívá právě onen zmíněný algebraický zápis, např. $\langle \mathsf{N}_0, s, 0 \rangle$, a to ve významu interpretace $\mathfrak{I}$ jazyka $L = \{0, s\}$ coby n-tice $\langle A, s_A, 0_A \rangle$ pro $A = \dot{\mathfrak{I}}$, $s_A = \mathfrak{I}(s)$ a $0_A = \mathfrak{I}(0)$. Po obvyklém způsobu potlačujeme indexy ohodnocených konstant, nevede-li to ke konfúzi znaku (s) a označovaného (s_A).

Vrátíme-li se zpět k formálním aritmetikám, platí, že axiomatický systém s jazykem omezeným na konstanty $\{s, 0\}$ neumožňuje definovat uspořádání v žádném z uvedených smyslů. Příslušné schéma indukce navíc není nijak podstatné, lze je např. nahradit sadou axiomů

Q $\quad (\forall x)(\exists y)(x = 0 \vee x = s(y)),$

SS $\quad (\forall x)(s^{(n)}(x) \neq x)$ pro $n > 0$,

kde (SS) je opět schéma, jehož úkolem je zakázat tvoření cyklů, tj. má stejný význam jako Fregova věta (V4) z oddílu 5.6. Že tímto způsobem nelze zakázat struktury neizomorfní s jednoduchým řetězcem přirozených čísel, je nyní patrné i vizuálně. Jelikož ani přidání axiomů pro symbol uspořádání $<$ neumožňuje definovat aritmetické operace, musí být i ony zavedeny axiomaticky, totiž rekurzivní dvojicí

[25] U funkce, na rozdíl od relace, je často vyžadováno, aby byla v deduktivní teorii zachycena jako funkce, k čemuž se podrobněji vyjádříme v oddíle 8.9.

P3 $(\forall x)(x + 0 = x)$,

P4 $(\forall x, y)(x + s(y) = s(x + y))$.

Přidáme-li tyto dva axiomy k trojici (P1–2), (SI), získáme tzv. PRESBURGEROVU ARITMETIKU, která je opět úplná vůči N_0, resp. $\langle \mathsf{N}_0, s, 0, + \rangle$, což dokázal Mojżesz Presburger [1929], po němž je proto pojmenována. Lze v ní definovat $<$ jako

$$x < y \rightleftharpoons x \neq y \wedge (\exists z)(x + z = y),$$

zato v ní stále nelze definovat násobení. Opět tedy přidáváme axiomy

P5 $(\forall x)(x \times 0 = 0)$,

P6 $(\forall x, y)(x \times s(y) = x \times y + x)$,

a dospíváme tak k tzv. PEANOVĚ ARITMETICE PRVNÍHO ŘÁDU, tj. souhrnu axiomů (P1–6) a schématu (SI), jejž budeme dále značit jednoduše jako $\mathfrak{PA}$.[26]

Na rozdíl od druhořádové verze se zde zdá být přítomen značný podíl libovolnosti, *de facto* tomu tak ale není. Ukázalo se totiž, že s pomocí sčítání a násobení lze v $\mathfrak{PA}$ již definovat všechny ostatní 'obvyklé' operace, jako je mocnění či faktoriál, neboli tzv. primitivně rekurzivní funkce, což znamená, že v ní lze simulovat většinu obvyklé matematické praxe. Tato relativní síla $\mathfrak{PA}$ je ale draze vykoupena, neboť právě díky ní je deduktivně neúplný nejen tento axiomatický systém, ale každý, jenž jej jistým způsobem obsahuje, např. ten axiomatické teorie množin, Fregovy aritmetiky nebo Peanovy aritmetiky druhého řádu. Tento metavýrok je obsahem tzv. Gödelových vět o neúplnosti aritmetiky, k nimž se ještě dostaneme v kapitole 8.

Významné je, že jsou věty o neúplnosti aritmetiky vlastně i větami o neúplnosti logiky, totiž máme-li na mysli logiku v původní formě, která neměla důvod rozlišovat mezi prvním a jinými řády. Nežli tuto poznámku blíže vysvětlíme, zaostříme znovu na pojmy úplnosti a rozhodnutelnosti. Je zřejmé, že teorie $\mathsf{Th}(\mathfrak{I})$ formulí platících v jisté interpretaci $\mathfrak{I}$, v případě $\mathsf{Th}(\mathsf{N}_0)$ teorie aritmetiky, je úplná z definice, a to jak v deduktivním smyslu, tak vůči interpretaci. Úplná (formální) aritmetika tedy existuje. Problém je, že nemusí mít a v důsledku Gödelových vět ani nemá efektivní sadu axiomů, tj.:

> Neexistuje efektivně popsaná množina T formulí taková, že platí $\mathsf{Th}(T) = \mathsf{Th}(\langle \mathsf{N}_0, s, 0, +, \times \rangle)$.

[26] Užitím gotického písma se i v dalším textu nechceme svévolně odchýlit od obvyklého způsobu zápisu standardně studovaných teorií (*PA*, PA), ale podtrhnout jejich rozdíl vůči teoriím materiálním, tj. především bezobsažnost a různou interpretovatelnost užitých symbolů.

Při efektivní axiomatizaci teorie T jde obecně o nalezení efektivně zadané množiny S takové, že

$$\mathsf{Th}(S) = \mathsf{Th}(T).$$

Teorie S, T, splňující zmíněnou rovnost, nazýváme EKVIVALENTNÍ. Zůstává vysvětlit, co myslíme slovem "efektivní". K tomu se velmi podrobně vyjádříme v dalších kapitolách, speciálně v kapitole 7, nyní jen naznačme několik prvních kroků.

Dejme tomu, že efektivitou myslíme totéž co rozhodnutelností. Axiomatickou TEORII T přitom nazýváme ROZHODNUTELNOU, jestliže je rozhodnutelná množina $\mathsf{Th}(T)$ jejích teorémů. Rozhodnutelná sada axiomů přitom nezaručuje rozhodnutelnou teorii, ale pouze teorii polorozhodnutelnou, a to proto, že nám umožňuje systematicky generovat všechny teorémy, a my se tedy pro formuli, která teorémem je, v konečně mnoha krocích dozvíme odpověď ANO. Tomuto rysu axiomatické teorie se říká efektivní vyčíslitelnost a lze jej obecně definovat takto:

> Množina $U \subseteq \mathsf{N}$ se nazývá EFEKTIVNĚ VYČÍSLITELNÁ, jestliže existuje algoritmus, jenž její prvky uspořádá v řadu.

Omezení na podmnožiny přirozených čísel je důsledkem nutné spočetnosti U, plynoucí již z možnosti uspořádání dané množiny v seznam. V definici je ale navíc vyžadováno algoritmické (efektivní) generování tohoto seznamu. Obecně lze užít samozřejmě libovolnou spočetnou množinu, třeba formulí nějakého formálního jazyka. Výše užité pozorování nyní říká:

> Efektivně vyčíslitelná množina je polorozhodnutelná a *vice versa.*

Důkaz: Polorozhodnutelnost vyčíslitelné množiny $U \subseteq \mathsf{N}$ je jasná. Jestliže $a \in U$, pak se objeví na nějakém místě jejího vyčíslení $a_1, a_2, \ldots$ a my budeme s to odpovědět ANO. Opačný směr je složitější. Pokud bychom zkoušeli přirozená čísla jedno po druhém, zarazila by se konstrukce seznamu v okamžiku, když by dané číslo nepatřilo množině U, a algoritmus by nám tudíž nedal odpověď ANO. Tomu se lze snadno vyhnout konstrukcí komplexnějšího algoritmu, v němž je aplikováno více a více kroků algoritmu polorozhodnutí na delší a delší úseky přirozených čísel, tj. nejprve aplikujeme jeden krok na číslo 1, pak dva kroky na čísla 1, 2, obecně tedy n kroků na prvky úseku $1, \ldots, n$. Je zřejmé, že pokud $a \in U$, dostaneme tímto postupem v konečně mnoha krocích odpověď ANO a zařadíme a na konstruovaný seznam. Nic jiného se zjevně na seznam nedostane. $\square$

Efektivní axiomatizovatelnost teorie T nabízí hledaný algoritmus efektivního vyčíslení množiny $\mathsf{Th}(T)$. Zmínili jsme, že předpokladem je zde rozhodnutelnost množiny axiomů nějaké ekvivalentní teorie, s ohledem na obecnou polorozhodnutelnost výsledku by ale *de facto* mohla stačit již množina polorozhodnutelná. A skutečně, s ohledem na tzv. Craigův trik, k němuž se dostaneme v oddíle 8.9, zde nedochází k žádnému rozšíření pojmu efektivní axiomatizace. Není také obtížné ověřit, že z úplnosti efektivně axiomatizovatelné teorie plyne její rozhodnutelnost, což je dáno tím, že se v předpokládaném vyčíslení všech teorémů pro každou uzavřenou formuli musí vyskytnout buď ona, nebo její negace. To je tzv. úplnost vůči negaci.[27] Všimněme si, že tento typ úplnosti se na logiku nevztahuje, pročež může být, jak víme, predikátová logika prvního řádu úplná, aniž by byla rozhodnutelná. Efektivní axiomatizovatelnost jí nicméně zajišťuje vlastnost polorozhodnutelnosti.

Nyní již přejděme ke slíbené neúplnosti logiky druhého řádu. Interpretace jazyka, v nichž platí tytéž formule, se nazývají ELEMENTÁRNĚ EKVIVALENTNÍ. Neplatí přitom, že by dvě elementárně ekvivalentní interpretace byly nutně izomorfní, z kategoričnosti teorie ale již elementární ekvivalence jejích modelů plyne, pročež lze snadno nahlédnout i platnost následujícího vztahu, jemuž se někdy říká SÉMANTICKÁ ÚPLNOST teorie:

$$\mathfrak{PA}_2 \vDash \varphi \text{ tehdy a jen tehdy, když } \mathsf{N}_0 \vDash \varphi,$$

kde formule φ je libovolná formule aritmetiky druhého řádu v jazyce $L = \{s, 0, +, \times\}$. N_0 je tedy příslušný standardní model, který lze rozepsat jako $\langle \mathsf{N}_0, \mathcal{P}(\mathsf{N}_0), s, 0, +, \times \rangle$. Jelikož $\mathfrak{PA}_2$ se na rozdíl od $\mathfrak{PA}$ skládá z konečného počtu axiomů, lze ji (pomocí konjunkce) uchopit jako axiom jediný, a získat tak ekvivalenci

$$\vDash \mathfrak{PA}_2 \rightarrow \varphi \text{ tehdy a jen tehdy, když } \mathsf{N}_0 \vDash \varphi.$$

Tím se ovšem libovolná formule $\mathfrak{PA}_2 \rightarrow \varphi$ stává v závislosti na aritmetické pravdivosti φ logickou pravdou. Z hlediska sémantické části Fregova logicismu se to zdá být dobrá zpráva, pro deduktivní to ale znamená konec. Zde je podrobné zdůvodnění:

(1) Kdyby byla logika druhého řádu úplně efektivně axiomatizovatelná, byla by množina druhořádových tautologií polorozhodnutelná, tj. existoval by algoritmus, jenž by pro danou formuli v případě, že tautologií je, řekl v konečně mnoha krocích ANO.

(2) Podle Gödelových vět takový algoritmus neexistuje pro aritmetické formule prvního řádu, přesněji: neexistuje žádná efektivní axiomatizace teorie $\mathsf{Th}(\langle \mathsf{N}_0, s, 0, +, \times \rangle)$.

[27] K rozlišení různých typů úplnosti srov. oddíl 5.3.

(3) To, zda je nějaká formule formulí prvního nebo druhého řádu, lze ovšem rozhodnout pouhou mechanickou kontrolou.

(4) Jelikož platnost prvořádových formulí ve standardních modelech aritmetiky prvního a druhého řádu koincidují, je zřejmé, že z předpokladu úplnosti logiky druhého řádu a uvedené ekvivalence by nyní musela plynout úplnost prvořádové aritmetiky. To ale není možné.

(5) Logika druhého řádu tedy musí být neúplná, či ještě přesněji: nemůže být slabě úplná. (Silná neúplnost, která je slabší podmínkou, plyne již z neplatnosti věty o kompaktnosti, jak jsme to zmínili v oddíle 4.5.) Stejným způsobem, tj. přes fakt, že obsahuje logiku řádu prvního, lze dojít i k její nerozhodnutelnosti.

Na pozadí tohoto argumentu vidíme, že rozlišení logiky prvního a vyšších řádů je z historického hlediska nepřímým důsledkem Gödelových vět, který má napomoci zmírnit jejich dopad na původní logicistický projekt, ponechávaje alespoň prvořádový fragment logiky úplný vůči prvořádové sémantice. Otázka samozřejmě je, zda je logicismus na samotné úplnosti logiky tolik zainteresován, tj. zda mu v jeho úsilí o transparentní zachycení logických a aritmetických pojmů spíše než o jejich polorozhodnutelnost, která z úplnosti plyne, nejde o rozhodnutelnost celou, která, jak víme, neplatí již pro první řád. V tomto případě by potom byla deduktivní část Fregova plánu ohrožena již Churchovou větou, ohlašující nerozhodnutelnost predikátové logiky prvního řádu, a neúplnost, resp. nerozhodnutelnost aritmetiky by toho již nemohly mnoho pokazit.

Pěstování *aritmetiky* prvního řádu je v tomto ohledu ještě podezřelejší, neboť nemá ani jednu z žádoucích metalogických charakteristik, tj. není ani kategorická, ani úplná, o rozhodnutelnosti nemluvě. Jediný pozitivní výsledek je tedy její bezespornost, plynoucí z existence standardního modelu. Této skutečnosti se ale velká pozornost nepřisuzuje s ohledem na nevyjasněný status N_0, čehož náprava by vyžadovala nějakou obdobu ontologické části Fregova logicistického plánu. O to větší pozornost je věnována modelům nestandardním, přestože se tím *de facto* prvotní projekt logického zdůvodnění aritmetiky, k němuž se Hilbertova metamatematika ještě jistým způsobem hlásí, proměňuje ve frašku, v níž se neúspěch vydává za objev, totiž nových, dosud neznámých čísel. Paralela s objevem neeukleidovských geometrií se samozřejmě nabízí, zůstává ale pouhou paralelou formální, přinejmenším do té doby, než se pro tyto 'neeukleidovské' aritmetiky najde podobné využití jako třeba pro komplexní, hyperkomplexní nebo ordinální čísla. Do té doby nemáme v ruce nic víc nežli prostý fakt konzistence axiomatického systému, jenž byl získán zkusmým oslabením principu indukce a jeho prohlášením za větu, jíž — jaksi mimoděk — splňují i přirozená čísla.

Ve Fregově a Dedekindově koncepci přitom indukce nehraje roli kontingentně platného tvrzení, které o přirozených číslech platí stejně jako o králících čtyřnohost, ale důsledek jejich induktivní definice, tedy cosi, co je v principu možné dokázat. To, že má tento důkaz formu metaindukce, není při důkladném rozlišení obou rovin ani bludným kruhem, ani svědectvím o syntetičnosti a nezdůvodnitelnosti principu indukce. Důkaz sám totiž platnost principu nezakládá, ale pouze ukazuje, že je důsledkem formy původní induktivní definice. Nic víc, nic míň. — Z hlediska Wittgensteinova a Brandomova rozlišení explicitního a implicitního tkví samozřejmě problém v samotném pokusu o to, princip indukce *explicitně* formulovat, neboť se tím snažíme o něco, co se nanejvýš *implicitně* ukazuje v induktivně definované řadě. Zodpovědnost za následný kategoriální omyl 'nestandardních aritmetik' tak cele padá již na Fregův a Dedekindův logicismus. Jejich následníci pouze časem ztratili, případně nikdy neměli Dedekindovy zábrany a Fregův filosofický vhled, a pokračují tedy pouze v šíleném plánu artikulace neartikulovatelného, v němž se jim jediným mantinelem stalo Hilbertovo kritérium bezespornosti. Proto je zvláště významné ptát se ve Wittgensteinově duchu:

> Co by se vlastně stalo, kdyby se axiomatická aritmetika ukázala být sporná?[28]

K Wittgensteinovým poznámkám o základech matematiky se ještě vrátíme, zapamatujeme si však, že to nemusí být nadužívaný pojem syntetického *apriori*, jak se jej snaží vrátit do hry Poincaré, ale rozdíl implicitního a explicitního, na čem je zvláště ve vztahu k indukci možné popsat odlišnost východisek konstruktivní a klasické matematiky. Na pozadí toho se rekurzivní teorém v první z nich stává banalitou, jak je tomu do značné míry ještě v klasické teorii rekurze, v druhé, jež je pevně vnořena v abstraktní teorie množin a modelů, pak něčím, co je třeba dokázat.

Stejně jako má abstraktně vedená matematika své slabé, ale i silné stránky, má samozřejmě svoje přednosti i zkoumání prvořádových teorií, a to právě s ohledem na demonstrace vzájemné deduktivní a expresivní závislosti a nezávislosti užitých aritmetických pojmů. Peanova aritmetika je pro svou neúplnost a nezúplnitelnost v tomto ohledu vlastně již příliš silná, a na zajímavosti tak nabývají její oslabení. Ke standardně uvažovaným náleží aritmetika bez indukce, jež sestává z týchž axiomů (P1–6), rozšířených o axiom (Q), jenž je v $\mathfrak{PA}$ odvoditelný díky indukci. Tento systém se nazývá ARITMETIKOU ROBINSONOVOU, a značí se $\mathfrak{Q}$. Raphael M. Robinson [1950] zavedl $\mathfrak{Q}$ jako příklad nerozhodnutelné teorie, která má konečně mnoho axiomů, a je tedy triviálně KONEČNĚ AXIOMATIZOVATELNÁ, což neplatí ani o jedné z dosud zmíněných formalizací aritmetiky.

[28] Srov. k tomu Wittgensteinovy [1984*a*] poznámky týkající se sporu a jeho důkazu podle rejstříku (položky "Widerspruch", "Widerspruchsfreiheitsbeweis").

Konečně axiomatizovatelná je ovšem tzv. SKOLEMOVA ARITMETIKA, která je jakýmsi multiplikativním analogonem aritmetiky Presburgerovy a nejsnáze ji lze nahlédnout jako teorii struktury $\langle \mathsf{N}, 1, \times \rangle$, neboť závislost výše předvedené rekurzivní definice násobení na sčítání nedovoluje použít obvyklou axiomatickou sadu. Axiomatika je pojmenovaná podle Thoralfa Skolema [1931], jenž dokázal její rozhodnutelnost. Významné je přitom rovněž odebrání symbolu s, neboť ten spolu s násobením již umožňuje definovat sčítání jako

$$x + y = z \rightleftharpoons s(a \times c) \times s(b \times c) = s(s(a \times b) \times (c \times c)),$$

kde $a = s(x)$, $b = s(y)$ a $c = s(s(z))$, což znamená, že $\mathsf{Th}(\langle \mathsf{N}_0, s, 0, \times \rangle)$ je ekvivalentní s $\mathsf{Th}(\langle \mathsf{N}_0, s, 0, +, \times \rangle)$, a tedy efektivně neaxiomatizovatelná. Všimněme si, že Presburgerovu aritmetiku lze právě s ohledem na zmíněnou úplnost uchopit také jako teorii struktury $\langle \mathsf{N}_0, s, 0, + \rangle$.[29]

Skolemova a Presburgerova aritmetika jsou ovšem zajímavé spíše jako extrémní případy. Výhoda Robinsonovy aritmetiky oproti ostatním oslabením $\mathfrak{PA}$ spočívá především v tom, že je již v ní možné zachytit potřebné aritmetické funkce. Z tohoto důvodu je pak nejen podstatně silnější než aritmetika Skolemova a Presburgerova, ale také nerozhodnutelná. Na druhou stranu zůstává pořád podstatně slabší než $\mathfrak{PA}$, neboť v ní nelze o těchto funkcích dokázat jisté obecné věty, např. již $(\forall x)(0 + x = x)$ či $(\forall x)(x \neq s(x))$. $\mathfrak{Q}$ tedy zůstává v obecnosti omezena na odvoditelnost všech instancí $0 + \overline{m} = \overline{m}$, resp. $\overline{m} \neq \overline{m + 1}$. Tyto skutečnosti samozřejmě ovlivňují podobu nestandardních modelů, které teorie $\mathfrak{Q}$ a $\mathfrak{PA}$ připouštějí. To ale není naše téma. Později, v souvislosti s finitistickou doktrínou, bude zmíněna ještě tzv. PRIMITIVNĚ REKURZIVNÍ ARITMETIKA, stručně $\mathfrak{PRA}$, obsahující kromě (P1–2) také axiomy pro všechny primitivně rekurzivní funkce, jak je popíšeme v kapitole 7. Od $\mathfrak{Q}$ a $\mathfrak{PA}$ se $\mathfrak{PRA}$ liší tím, že sice obsahuje schéma indukce (SI), ale pouze v omezení na formule bez kvantifikátorů. Právě to ji v očích některých matematiků činí spolehlivým metamatematickým nástrojem, tj. bází, nad níž lze např. ověřovat absolutní bezespornost axiomatických systémů.

5.11 Kategoričnost analýzy

Selhal-li pokus o logické založení aritmetiky již na přirozených číslech, lze očekávat, že v případě čísel reálných situace o mnoho lepší nebude, zvláště když je v jejich případě otázka kvantifikace přes množiny ještě citlivější, neboť jsou sama popsána jako množiny, ať již ve formě Dedekindových řezů nebo Cauchyho posloupností. Z formalisticko-strukturalis-

[29] Těmto slabým formálním teoriím se věnuje např. Smorynski [1991], včetně některých historických aspektů jejich vzniku.

tického hlediska se ovšem nic nemění: druhořádová teorie je expresivně silná, prvořádová slabá, i když zajímavá co do formálně-logických vlastností. Ty jsou dokonce oproti $\mathfrak{PA}$ o něco příznivější. Dříve než v příští kapitole přikročíme k výkladu ideových směrů, které se pokusily logicismus revidovat, nebo zcela svrhnout a stavět na jeho troskách, věnujme ještě několik stránek pokusům o zachycení struktury reálné osy, jak jsme je započali v oddílech 2.3 a 2.5, zabývajících se základy teorie těles a přímek.

Fakt Löwenheimovy-Skolemovy věty nám dává dopředu tušit, že se v pokusech o kategorickou axiomatizaci nekonečné struktury neobejdeme bez druhého řádu. V úvahu ovšem přichází také určitý kompromis, totiž implicitní omezení kategoričnosti na modely fixní mohutnosti. Takto je např. definována $\aleph_0$-KATEGORIČNOST teorie jakožto izomorfie všech modelů, jejichž mohutnost je nekonečná spočetná. Lze ukázat, že tuto vlastnost má teorie přímek, tj. (lineárně) uspořádaných hustých množin bez nejmenšího a největšího prvku, jejíž přímočarou prvořádovou axiomatizaci značíme jako $\mathfrak{DLO}$ (*dense linear ordering*):

$$(\forall x)\neg(x < x),$$

$$(\forall x, y)(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z),$$

$$(\forall x, y)(x < y \vee x = y \vee y < x),$$

$$(\forall x, y)(\exists z)(x < y \rightarrow x < z \wedge z < y),$$

$$(\forall x)(\exists y, z)(y < x \wedge x < z).$$

Tvrdíme tedy:

$\mathfrak{DLO}$ je $\aleph_0$-kategorická.

Důkaz: Mějme dva modely $\langle A, <\rangle$, $\langle B, <\rangle$ teorie $\mathfrak{DLO}$ a předpokládejme, že jsou jejich nosiče A, B spočetné. Tím pádem lze jejich prvky seřadit do posloupností $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathsf{N}}$. Příslušný izomorfismus f modelů A, B je nejsnáze konstruovat tzv. 'cik-cak' způsobem, který je dostatečně názorný, aby mohl být popsán pouze poloformálně: Začneme jednoduše třeba přiřazením $f(a_1) = b_1$. Nyní přecházíme střídavě mezi oběma posloupnostmi, najdeme v nich vždy prvek c, jenž ještě nebyl použit a má nejmenší index, a přiřadíme mu takový nepoužitý prvek d druhé strany, jenž má nejmenší index a je vůči již použitým prvkům své strany ve stejném vztahu $<$ jako prvek c k již použitým prvkům své. Takový prvek musí vždy existovat s ohledem na hustotu a neexistenci krajních bodů. Přecházení mezi oběma stranami zajišťuje, že se na prvek a_n, resp. b_n dostane nejpozději v kroku $2n$. Zobrazení je tedy bijekcí. Jeho izomorfie plyne z konstrukce. $\square$

S teorémem o $\aleph_0$-kategoričnosti $\mathfrak{DLO}$ v ruce můžeme tedy po Dedekindově způsobu 'definovat' racionální čísla jako spočetnou přímku *per se*, tj. prostou všech jiných nežli popsaných strukturálních vlastností, samozřejmě za předpokladu, že nějaká přímka vůbec existuje a že nám tento postup dává dobrý smysl. Jestliže jsme již zavedli množinu $\langle \mathsf{Q}, < \rangle$ racionálních čísel jinak, třeba přes obvyklou konstrukci z dvojic čísel přirozených, snadno dokážeme, že se jedná o model $\mathfrak{DLO}$. V důsledku toho pak můžeme rovnou tvrdit Cantorem [1895/1897, § 9] dokázanou větu:

> Každá spočetná přímka je izomorfní s $\langle \mathsf{Q}, < \rangle$.

Ta je *de facto* prvním oficiálním důkazem $\aleph_0$-kategoričnosti $\mathfrak{DLO}$. Nyní přejděme k přímkám úplným. — V oddíle 2.3 jsme ukázali, jak k libovolné uspořádané množině sestrojit její minimální zúplnění, totiž metodou dedekindovských řezů. Všimněme si přitom, že uspořádané množiny přirozených a celých čísel již úplné jsou, nejsou to ovšem přímky. Q je tedy přirozený příklad přímky, která není úplná, což víme díky existenci iracionálních čísel, jako je např. $\sqrt{2}$. Z toho již plyne korolár k předchozí větě, podle něhož:

> Každá úplná přímka je nespočetná.

Zúplnění jakékoli přímky tedy vede nutně k nespočetné množině. Z toho samozřejmě neplyne, že by každé zúplnění muselo mít mohutnost kontinua, natož že by s ním muselo být strukturálně izomorfní. Nabízí se tedy do hry vtáhnout výše zmíněnou minimalitu. Jistou naději nám přitom může dát také postřeh, že dedekindovská konstrukce zůstává minimální i při opakované iteraci. To se zdá být nejprve překvapivé, neboť např. k racionálním číslům přidala nespočetně mnoho dalších, a tento nárůst by šlo tedy při dalším opakování očekávat, zvláště když víme, že podmnožin dané třídy, s nimiž konstrukce operuje, je vždy více než prvků třídy původní. Dedekind ale nepracuje se všemi podmnožinami výchozí množiny, nýbrž se všemi řezy na nich. Těch je v případě úplné množiny stejný počet jako jejích prvků, představujících příslušná řezová čísla. Obor zúplňovaný a zúplněný jsou tedy triviálně izomorfní.

Takový vztah minimálního zúplnění k zúplňované množině, na němž by šlo postavit strukturální teorii kontinua coby úplné přímky, lze přitom získat jako snadný důsledek věty o minimálním zúplnění, jenž zní:

> Uspořádaná množina $\langle A, < \rangle$ je (slabě) hustá ve svém minimálním zúplnění $\langle A', < \rangle$, čímž myslíme existenci prvku $c \in A$ takového, že $a \leq c \leq b$ pro dané $a, b \in A'$ s vlastností $a < b$.

Důkaz: Pracujeme s detaily důkazu z oddílu 2.3. Můžeme předpokládat, že se $\langle A', < \rangle$ sestává z (redukovaných) dedekindovských řezů nad A, přičemž původním prvkům $a \in A$ odpovídají řezy $A_{<a} \in A'$. Mějme nějaké

prvky $X, Y \in A'$, kdy $X < Y$, tj. $X \subset Y$. To znamená, že existuje prvek $b \in A$ takový, že $b \in Y - X$, a platí tedy $X \leq A_{<b} < Y$, což jsme chtěli dokázat. □

Díky tomuto koroláru a způsobu, jakým vzniklo R z Q, se nyní v případném strukturálním opisu kontinua nabízí odkaz k minimalitě vypustit a nahradit jej existencí podmnožiny, která je spočetná a v dané množině hustá (nyní již v původním silném smyslu). Této vlastnosti struktury se říká SEPARABILITA. Na tom, že lze každý bod příslušné přímky aproximovat body spočetné podmnožiny, se také zakládá následující teorém:

Každé dvě úplné přímky, které jsou separabilní, jsou izomorfní.

Důkaz: Mějme přímky $\langle A, < \rangle$, $\langle B, < \rangle$ požadovaných vlastností. Podle předpokladu existují spočetné množiny $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, které jsou v A, resp. B husté, a tím pádem musí být samy přímkami. To znamená, že jsou podle předchozí věty izomorfní podle nějakého zobrazení $f : X \to Y$. Nyní definujeme zobrazení $g : A \to B$ takové, že

$$g(a) = \sup \{f(x) \mid x \in X \wedge x < a\}$$

pro každé $a \in A$. Tvrdíme, že se jedná o požadovaný izomorfismus. To dokážeme v několika fázích. (1) Pro $a \in X$ je $g(a) = f(a)$, neboť (i) pro každé $x \in X$ platí $x < a$ tehdy a jen tehdy, když $f(x) < f(a)$, tj. $f(a)$ je horní mezí množiny $\{f(x) \mid x \in X \wedge x < a\}$, a to (ii) zároveň mezí nejmenší, neboť pro $z < f(a)$ musí z hustoty Y v B existovat prvek $b \in X$ takový, že $z < f(b) < f(a)$. Zjevně musí platit $b < a$. Funkce g je tedy rozšířením f, resp. $g|X = f$. (2) Ověřme, že je totální. Pro každé $a \in A$ existuje z hustoty X v A a neexistence největšího prvku v A prvek $y \in X$ takový, že $a < y$. Z vlastností f je tedy $f(y)$ horní mezí množiny $\{f(x) \mid x \in X \wedge x < a\}$, která tak má podle předpokladu suprémum. (3) Dokažme, že g zachovává uspořádání. Pro prvky $a, b \in A$ takové, že $a < b$, existuje $c \in X$ takové, že $a < c < b$, a pro $f(c)$ musí platit $g(a) < f(c) = g(c) < g(b)$, tj. $g(a) < g(b)$. Podobně se dokáže opačný směr, úhrnem tedy máme, že $a < b$ tehdy a jen tehdy, když $g(a) < g(b)$. (4) Podle předchozího bodu lze z $a \neq b$ usoudit na $g(a) \neq g(b)$ pro libovolné $a, b \in A$, funkce g je tudíž injektivní, a představuje tak vnoření A do B. (5) Zbývá dokázat, že platí $rng(g) = B$, tj. že máme před sebou surjektivní funkci. Uvažme nějaký prvek $b \in B$. Z hustoty Y v B plyne že $b = \sup \{y \mid y \in Y \wedge y < b\}$. Z izomorfie X a Y podle f tedy dostáváme $b = \sup \{f(x) \mid x \in X \wedge f(x) < b\}$. Pro b existuje $c' \in Y$ takové, že $b < c'$, a tudíž i $c \in X$ takové, že $f(c) = c'$. Tím pádem má množina $\{x \mid x \in X \wedge f(x) < b\}$ horní mez, a tudíž i suprémum a. Nyní platí, že $g(a) = \sup \{f(x) \mid x \in X \wedge x < a\} = \sup \{f(x) \mid x \in X \wedge f(x) < b\} = \sup \{y \mid y \in Y \wedge y < b\} = b$, což jsme chtěli dokázat. □

Opět jsme tedy v příjemné pozici, kdy můžeme buďto prohlásit za kontinuum nějakou z množin splňující uvedené podmínky (pokud taková ovšem existuje), nebo dokázat, že je splňuje naše R, a tvrdit:

Každá úplná separabilní přímka je izomorfní s $\langle \mathsf{R}, < \rangle$.

Příslušné tvrzení dokazuje v principu opět Cantor [1895/1897, § 11], i když ve formulaci, která vedle separability dané množiny uvádí ještě požadavek perfektnosti. Zermelo ve svých editorských poznámkách ke Cantorovým [1932, s. 354] sebraným spisům upravuje tvrzení do námi dokázaného tvaru. V příslušné kategorické axiomatizaci R bude kromě zachycení spočetnosti husté podmnožiny, jež je nutně druhořádovou vlastností, figurovat také druhořádový AXIOM ÚPLNOSTI:

$$\begin{aligned} \text{CA}\ \ & (\forall X)\{(\exists x)\ (\forall y)(X(y) \to y \leq x) \to \\ & \qquad (\exists x)[(\forall y)(X(y) \to y \leq x) \wedge (\forall z)((\forall y)(X(y) \to y \leq z) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \to x \leq z)]\}. \end{aligned}$$

Nyní přejděme k teorii těles. Zde se situace mírně komplikuje. Z výsledků tohoto oddílu plyne, že dvě spočetná uspořádaná tělesa jsou izomorfní jako přímky, tj. v restrikci na svá uspořádání. Příslušný izomorfismus ovšem nelze obecně rozšířit, tj. neplatí, že by dvě spočetná uspořádaná tělesa byla nutně izomorfní i jako tělesa. Vezmeme-li např. těleso $\langle \mathsf{Q}, +, \times, < \rangle$ a prvek $\sqrt{2}$, lze sukcesivním uzavíráním množiny $\mathsf{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$ na operace $+$, $\times$ a jejich inverze dospět ke spočetnému tělesu $\langle \mathsf{Q}(\sqrt{2}), +, \times, < \rangle$, mezi nímž a tělesem Q neexistuje žádný izomorfismus $f : \mathsf{Q}(\sqrt{2}) \leftrightarrow \mathsf{Q}$, neboť pro takový by muselo platit $f(\sqrt{2}) \times f(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2} \times \sqrt{2}) = f(2) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$, žádné '$\sqrt{2}$' v Q ale není. Obecně platí, že máme-li podtěleso O tělesa P a množinu $M \subseteq P$, značíme jako $O(M)$ nejmenší podtěleso tělesa P obsahující $O \cup M$. Jako $O(a)$ značíme $O(\{a\})$ pro $a \in P$. Lze dokázat, že mohutnost $O(a)$ není větší než mohutnost O nebo $\aleph_0$, s ohledem na konečná podtělesa. Zobecnění pro mohutnost $O(M)$ je snadné.

Řekli jsme dříve, že uspořádání tělesa je netriviální, neboť v příslušných axiomech požadujeme kompatibilitu tohoto uspořádání s multiplikativní a aditivní strukturou tělesa, jíž není možné dosáhnout obecně, např. hned u tělesa komplexních čísel. I když se nám navíc těleso uspořádat povede, neznamená to v žádném případě, že je toto uspořádání určeno jednoznačně. Dobrou zprávou ale je, že je-li uspořádané těleso $\langle M, +, \times, < \rangle$ úplné, je již jeho uspořádání jednoznačné, tj. pro těleso $\langle M, +, \times \rangle$ existuje jen jedno jediné kompatibilní uspořádání. Důkaz vychází z toho, že v úplném tělese má každý nezáporný prvek nezápornou druhou odmocninu, tj. jedná se o čtverec. Jelikož je v každém uspořádaném tělese čtverec libovolného prvku, s výjimkou nuly, kladný, dostáváme snadno pro množiny P_1, P_2 kladných tříd indukovaných kompatibilními uspořádáními $<_1$, $<_2$ vztah $P_1 = P_2$. Uvedená věta nám dává jistou naději, že jsou každá dvě úplná tělesa izomorfní.

Východiskem při konstrukci požadovaného izomorfismu jsou přitom dříve zavedené množiny N_M, Z_M a Q_M nějakého tělesa M coby lokální varianty přirozených, celých a racionálních čísel daného tělesa. O Q_M víme, že se vždy jedná o tzv. prvotěleso tělesa M, tedy že je jeho vůbec nejmenším podtělesem, obsaženém v každém podtělese. To vše snadno plyne z pozorování, že (i) neutrální prvky tělesa a podtělesa koincidují, (ii) tím pádem pro libovolné podtěleso P tělesa M platí $1_M \in P$, tedy i (iii) $N_M \subseteq P$, z čehož již snadno dostaneme (iv) $Z_M \subseteq P$ a (v) $Q_M \subseteq P$.

S ohledem na konstrukci Q_M z N_M je prvotěleso každého tělesa M evidentně spočetné. V oddíle 2.5 jsme navíc uvedli, že je archimédicita tělesa M ekvivalentní hustotě Q_M v M a že je každé úplné těleso archimédovské. Tím dospíváme ke strukturální podobnosti úplných těles coby úplných přímek. Opět tím ale ještě není zajištěna existence izomorfismu celého tělesa. K tomu je zapotřebí doplnit konstrukci strukturální podobnosti přímek o další specifikace, založené na zkoumání struktury prvotěles v tělesech charakteristiky 0. Prakticky z definice lze přitom dokázat následující větu:

> Má-li těleso M charakteristiku 0, je $\langle N_M, s, 1\rangle$ s $s(x) = x + 1$ jednoduchý řetězec.

To znamená, že v tělesech O, P charakteristiky 0 jsou jejich ‘přirozená čísla’ $\langle N_O, s, 1\rangle$, $\langle N_P, s, 1\rangle$ nutně izomorfní podle nějaké funkce j. Ta tím pádem splňuje podmínky (i) $j(1) = 1$ a (ii) $j(x + 1) = j(x) + 1$, z čehož snadnou indukcí dostaneme platnost vztahů (iii) $j(x + y) = j(x) + j(y)$ a (iv) $j(x \times y) = j(x) \times j(y)$. To znamená, že j je také izomorfismem struktur $\langle N_O, +, \times\rangle$ a $\langle N_P, +, \times\rangle$. Tento izomorfismus lze nyní dále rozšířit na struktury Z_O, Z_P a Q_O, Q_P při zachování platnosti podmínek (iii), (iv), z čehož získáme větu:

> Mají-li tělesa O, P charakteristiku 0, jsou jejich prvotělesa Q_O, Q_P izomorfní.

Tato věta ve skutečnosti platí pro prvotělesa těles libovolné charakteristiky, tj. prvotělesa každých dvou těles charakteristiky p jsou izomorfní a rovněž charakteristiky p.[30] Daný izomorfismus je navíc určen jednoznačně.

Skutečnost, že mají všechna prvotělesa těles charakteristiky 0 povahu strukturálních invariantů, se dá rozšířit i na jejich uspořádání, neboť platí obecné lemma:

---

[30] Je-li p prvočíslo, pak je prvotěleso izomorfní tělesu $\mathbb{Z}_p$ definovanému v oddíle 2.5. Je-li $p = 0$, je izomorfní s $\mathbf{Q}$. Důkaz viz Truss [1997, s. 81].

Prvotěleso každého tělesa charakteristiky 0 lze uspořádat právě jedním způsobem.

To plyne opět ze způsobu konstrukce Q_M, a důkaz proto vynecháme. Ale pozor, z jednoznačné uspořádatelnosti prvotělesa neplyne vůbec uspořádatelnost tělesa samotného, natož jeho jednoznačnost! Podstatný pro naši věc je přímý důsledek naposled uvedeného lemmatu, který říká:

Jsou-li tělesa O, P uspořádaná, jsou jejich prvotělesa Q_O, Q_P izomorfní.

Ten lze již přímo aplikovat na větu, kterou chceme v tomto oddíle dokázat, totiž:

Každá dvě úplná tělesa jsou izomorfní.

Důkaz: Mějme dvě úplná tělesa $\langle A, +, \times, < \rangle$ a $\langle B, +, \times, < \rangle$ a izomorfismus j jejich prvotěles $\langle Q_A, +, \times, < \rangle$ a $\langle Q_B, +, \times, < \rangle$. Jelikož se jedná i o izormofismus příslušných přímek $\langle Q_A, < \rangle$ a $\langle Q_B, < \rangle$, které jsou navíc spočetné a husté v A, resp. B, lze jej rozšířit na izomorfismus k přímek $\langle A, < \rangle$ a $\langle B, < \rangle$ přesně tak, jak jsme to udělali v důkazu věty o izomorfii úplných separabilních přímek. Toto rozšíření bylo ve skutečnosti jediné možné, tj. odkaz ke konkrétní konstrukci není v důsledku nutný. Nám nyní zbývá předvést, že platí (i) $k(x + y) = k(x) + k(y)$ a (ii) $k(x \times y) = k(x) \times k(y)$ pro libovolné $x, y \in A$.

Postupujme sporem a předpokládejme, že $k(x) + k(y) < k(x + y)$. Z hustoty Q_B v B plyne, že existuje $r' \in Q_B$ takové, že $k(x) < r' < k(x+y) - k(y)$ a s' takové, že $k(y) < s' < k(x + y) - r'$. Pro tato r', s' zjevně platí, že $k(x) < r'$, $k(y) < s'$ a $k(x+y) > r'+s'$. Z konstrukce k plyne, že existují $r, s \in Q_A$ taková, že $k(r) = r'$ a $k(s) = s'$. Jelikož k je v příslušné restrikci izomorfismem Q_A a Q_B jako těles, platí $k(r + s) = r' + s'$. To znamená, že $x < r$, $y < s$ a $x+y > r+s$. To ale není možné, předpoklad je tedy třeba zamítnout. Obdobným způsobem zamítneme i předpoklad $k(x)+k(y) > k(x+y)$, a dospějeme tak k závěru $k(x)+k(y) = k(x+y)$.

Úvaha pro násobení je podobná, mírně se ale komplikuje rozlišením kladných a záporných prvků. Předpokládejme nejprve $k(x) \times k(y) < k(x \times y)$ pro $x, y \in A$ kladná a zvolme opět $r', s' \in B$ taková, že $k(x) < r'$, $k(y) < s'$ a $k(x \times y) > r' \times s'$, např. volbou $r' := \frac{a}{k(y)}$ pro a takové, že $k(x) \times k(y) < a < k(x \times y)$, a $s' := \frac{b}{r'}$ pro b takové, že $r' \times k(y) < b < k(x \times y)$. Zbytek argumentu je stejný, a máme tedy vztah $k(x) \times k(y) = k(x \times y)$ pro kladné x, y. Uvědomíme-li si nyní, že vzhledem k definici inverzního prvku a dokázané izomorfii k vzhledem ke sčítání platí $k(0) = k(x + (-x)) = k(x) + k(-x) = 0$, tj. $k(-x) = -k(x)$, redukuje se nám problém platnosti uvedené rovnosti pro prvky záporné okamžitě na problém platnosti pro kladné, který je již vyřešen, a to díky platnosti vztahů jako $(-a) \times b = -(a \times b)$, $(-a) \times (-b) = a \times b$ apod., které známe z číselných oborů. □

Dokázali jsme tedy, že je teorie úplných (uspořádaných) těles, daná sadou axiomů (1–8) z oddílu 2.5 a axiomem úplnosti (CA), kategorická. Značme tento systém jako $\mathfrak{R}_2$ a nazývejme jej ANALÝZOU DRUHÉHO ŘÁDU. Samotná teorie uspořádaných těles je přitom zjevně prvořádová, což znamená, že zatímco je minimální uspořádané těleso určeno jednoznačně jakožto kopie Q obsažená v každém uspořádaném tělese coby jeho prvotěleso, neexistuje žádné uspořádané těleso maximální, tj. lze konstruovat uspořádaná tělesa libovolné kardinality. To již neplatí pro tělesa archimédovská, která lze vždy (způsobem analogickým předchozím konstrukcím) vnořit do tělesa R. V důsledku toho platí obecné tvrzení:

> Uspořádané těleso je archimédovské tehdy a jen tehdy, je-li izomorfní nějakému podtělesu tělesa $\langle \mathsf{R}, +, \times, < \rangle$.

To znamená, že nejen úplnost, ale již archimédicitu uspořádání nelze vyjádřit v jazyce prvního řádu! Archimédicita oboru je zjevně tou vlastností, která udržuje mohutnost struktury mezi spočetnou mohutností a mohutností kontinua. V tomto duchu, tj. jakožto maximální uspořádané těleso, které si ještě udržuje vlastnost archimédicity, charakterizoval svým ‘axiomem úplnosti’ reálná čísla Hilbert [1900a], jak jsme o tom již jednou hovořili v oddíle 5.3.

5.12 Analýza prvního řádu

Idyla strukturálního invariantu axiomatické definice $\mathfrak{R}_2$ končí okamžitě poté, co nahradíme druhořádový axiom (CA) prvořádovým SCHÉMATEM ÚPLNOSTI:

$$\begin{aligned}\text{CS}\quad & (\exists x)\,(\forall y)(\varphi(y) \rightarrow y \leq x) \rightarrow \\ & (\exists x)[(\forall y)(\varphi(y) \rightarrow y \leq x) \wedge (\forall z)((\forall y)(\varphi(y) \rightarrow y \leq z) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \rightarrow x \leq z)].\end{aligned}$$

Získáme tím prvořádovou verzi teorie reálných čísel, PRVOŘÁDOVOU ANALÝZU, značenou jako $\mathfrak{R}$. Ta musí mít podle Löwenheimovy-Skolemovy věty modely všech nekonečných mohutností, mj. i nějaký model spočetný, který je tedy nutně modelem nestandardním. Ve srovnání s nestandardními modely aritmetiky nám tu ovšem nepřibyla nová, nestandardní čísla, ale ubyla čísla stará! Není přitom obtížné nahlédnout, že to musí být ta čísla, která nelze prezentovat jako supréma množin vydělených prvořádovými výrazy. Mezi ty ovšem patří také výrazy polynomiální, vtírá se tedy domněnka, že vynechanými čísly budou čísla transcendentní, zatímco čísla algebraická by měla být prvky každého modelu $\mathfrak{R}$. A skutečně, nahradíme-li (CS) dvojicí axiomů

9a) $(\forall x)(\exists y)(x > 0 \rightarrow y^2 = x)$,

9b) $(\exists x)(a_n x^n + \cdots + a_0 x^0 = 0)$ pro $a_0, \ldots, a_n \in \mathsf{Z}$, $a_n \neq 0$ a $n \in \mathsf{N}$ liché,

z nichž ten druhý je vlastně axiomatické schéma, získáme tzv. teorii reálně uzavřených těles, která je $\mathfrak{R}$ ekvivalentní a jejímž nejmenším modelem je právě soubor K všech algebraických čísel v R. To i z moderního pohledu ospravedlňuje jejich dřívější označení za kontinuum. Cesta k němu coby modelu axiomů (1–9) přitom vede jinudy, nežli jsme dospěli k modelům $\mathfrak{R}$.

Víme, že R nevzniklo z Q algebraickým rozšířením o všechny kořeny racionálních polynomů, tedy realizací požadavku na obecnou proveditelnost odmocňování, ale cestou zúplňování uspořádání. Těleso M se přitom nazývá ALGEBRAICKY UZAVŘENÝM, jestliže v něm má každý polynom (stupně $n \geq 1$) s koeficienty v M kořen. Racionální čísla, (reálná) algebraická čísla ani čísla reálná zjevně algebraicky uzavřená nejsou. Ze základní věty algebry plyne, že to platí pro čísla komplexní. Rozšíření P tělesa O se nazývá jeho ALGEBRAICKÝM ROZŠÍŘENÍM, jestliže je každý jeho prvek ALGEBRAICKÝ NAD O, což znamená: kořenem polynomu s koeficienty v O. Lze dokázat, že ke každému tělesu O existuje jeho algebraicky uzavřené algebraické rozšíření, které je navíc jednoznačné (až na izomorfismus) a nemá větší kardinalitu než O nebo $\aleph_0$.[31] Těleso komplexních čísel je právě takovýmto rozšířením tělesa R. Aplikujeme-li větu na Q, získáme těleso, které musí být s ohledem na předpokládanou spočetnost (vlastním) podtělesem komplexních čísel, tedy od nich samých odlišné. Tvoří ho právě všechna algebraická (komplexní) čísla. Vzhledem k tomu, že každé algebraicky uzavřené těleso musí obsahovat kořen i polynomu $x^2 + 1 = 0$, platí, že jej nelze uspořádat.

Na tomto pozadí se zdá těleso R představovat jakýsi rozumný kompromis mezi požadavkem na uspořádatelnost a algebraickou uzavřenost struktury v tom smyslu, že v něm 'většina' polynomiálních rovností řešení má. Této uzavřenosti se z čitelných důvodů říká reálná, přičemž uspořádané těleso M se nazývá REÁLNĚ UZAVŘENÉ, (i) jestliže v něm má každý kladný prvek druhou odmocninu a (ii) jestliže v něm má kořen každý polynom lichého stupně, tj. platí axiomy (9a–b). Opět lze dokázat větu o existenci jednoznačného reálně uzavřeného algebraického rozšíření, jejíž aplikací na Q pak dostaneme reálně uzavřené těleso (reálných) algebraických čísel, tedy naše původní kartézské kontinuum K. To tedy představuje jakýsi průsečík pokusů popsat kontinuum geometricky, přes úplnost uspořádání, jak byla zachycena v (CA) a jeho oslabení (CS), a popsat ho algebraicky, jak to vyjadřuje pojem reálné uzavřenosti zachycený axiomy (9a–b).

[31] Viz Truss [1997, s. 179].

Podobnou kompenzaci výhod, jakou představuje zúžení algebraické uzavřenosti tělesa na uzavřenost reálnou, představuje pro těleso komplexních čísel přechod od dedekindovského ke cantorovskému typu úplnosti, která naopak ve svém zobecnění uspořádatelnost tělesa nevyžaduje. My jsme ji sice v oddíle 2.5 u tělesa, které je sekvenčně úplné, předpokládali, zmínili jsme ale, že se jedná především o didaktický mezikrok, který nám umožní srovnat různé způsoby konstrukce reálných čísel. Vezmeme-li nyní výchozí definice konvergence a koncentrovanosti, podané v oddíle 2.1 a zobecněné v oddíle 2.5, lze v nich odkaz k uspořádání tělesa M samého eliminovat tím, že nad ním definujeme tzv. METRIKU neboli funkci d z $M \times M$ do množiny nezáporných reálných čísel (lze vzít ale i nezáporná čísla racionální) takovou, že platí

(1) $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$,

(2) $d(x,y) = d(y,x)$,

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$,

pro každé $x, y, z \in M$. Dvojici $\langle M, d\rangle$, kde M může být libovolná množina a d splňuje podmínky (1–3), se obecně říká METRICKÝ PROSTOR. Podmínce (3) se říká TROJÚHELNÍKOVÁ NEROVNOST. Zobecníme-li nyní definice konvergence a koncentrované posloupnosti přirozeným způsobem:

$$(\forall m \in \mathsf{R}, m > 0)(\exists p \in \mathsf{N})(\forall q \in \mathsf{N}, q \geq p)(d(a_q, b) < m),$$

$$(\forall m \in \mathsf{R}, m > 0)(\exists p \in \mathsf{N})(\forall q, r \in \mathsf{N}, q, r \geq p)(d(a_q, a_r) < m),$$

lze přímočaře definovat i pojem sekvenční úplnosti metrických prostorů a dokázat, že mu těleso komplexních čísel coby metrický prostor s metrikou $d(x,y) = |y - x|$ dostává, tj. že všechny koncentrované posloupnosti komplexních čísel mají komplexní limity.

Vraťme se ale k teorii $\mathfrak{R}$. Zmínili jsme že metamatematická fakta, týkající se tohoto prvořádového oslabení analýzy, pro ně vyznívají o mnoho příznivěji nežli pro případ oslabení aritmetiky. Teorie $\mathfrak{R}_2$ je, jak víme, sice kategorická, jelikož v ní lze ale definovat podobor přirozených čísel (všimněme si, že definice N_M, a tudíž i Z_N a Q_N byly druhořádové), nemůže být deduktivně úplná. Platí v ní tedy opět jen jakási sémantická verze úplnosti, podle níž

$$\mathfrak{R}_2 \vDash \varphi \text{ tehdy a jen tehdy, když } \mathsf{R} \vDash \varphi.$$

S ohledem na sílu druhořádového (CA) je podle očekávání mnoho z axiomů uspořádaného tělesa redundantních. Z druhé strany $\mathfrak{R}$ coby prvořádová teorie sice nutně vykazuje obvyklý kategorický defekt, dokonce není kategorická ani relativně, tj. v žádné nekonečné mohutnosti, je ale deduktivně úplná, resp. úplná vůči R, a tudíž i rozhodnutelná. Obojí dokázal Tarski [1948].

Z úplnosti $\mathfrak{R}$ a její ekvivalence s axiomy (1–9) plyne, že prvořádová teorie reálných čísel $\mathsf{Th}(\mathsf{R})$ je zároveň teorií reálně uzavřených těles. Nabízí se ale i jiné alternativy, např. teorie uspořádaných těles, pro něž platí věta o mezihodnotě pro racionální polynomy $p(x)$, neboli rozšíření axiomů (1–8) o schéma:

$$(\exists x)p(x) \leq 0 \wedge (\exists x)p(x) \geq 0 \rightarrow (\exists x)p(x) = 0,$$

kde $p(x)$ symbolizuje libovolný term jazyka analýzy.[32] Tato ekvivalence znovu upozorňuje na fakt, jak významnou roli při inferenčně-holistickém způsobu definování kontinua hraje pojem funkce, jak jsme to diskutovali mj. již ve spojitosti s Lagrangeovým pokusem o radikální reformu kalkulu. Chceme-li totiž vymezit pojem funkce tak, aby mu odpovídaly nějaké příjemné algebraické vlastnosti, jako je neomezená derivovatelnost či integrovatelnost, nabízí se polynom jako prototyp. Následujíce Bolzana v jeho pokusu o vymezení kontinua prostřednictvím věty o mezihodnotě pak dojdeme ke kontinuu podstatně skromnějšímu, než k jakému dospěl Cantor s využitím alternativního konceptu Dirichletova. Prokázaná ekvivalence věty o mezihodnotě s větou o suprému zůstává zachována, neboť ta se nyní vztahuje na omezené množiny vydělené formulemi prvního řádu. Relativita pojmu kontinuity je tedy opět potvrzena.

Jak lze nicméně očekávat, má deduktivní úplnost $\mathfrak{R}$ i své stinné stránky. Tak především v ní nemohou být definovatelná přirozená čísla, jinak by totiž musela být úplná i $\mathfrak{PA}$. To je samozřejmě v rozporu s přirozeným očekáváním, že je $\mathfrak{R}$ coby teorie reálných čísel také teorií čísel přirozených. Defekt spočívající v existenci nestandardních modelů jsme již zmínili, zároveň jsme jej ale v případě modelu spočetného dokázali využít k dodatečnému ospravedlnění jedné ze starších verzí matematického kontinua a opětovnému uvědomění si problematické, relativní povahy tohoto pojmu. Totéž lze učinit i s komplementárním defektem existence modelů větší nežli požadované mohutnosti. Tyto modely musí být uspořádanými tělesy, neboť jejich axiomatizace je prvořádová, a to dokonce tělesy reálně uzavřenými. Pro jejich kardinalitu je nicméně nelze vnořit do R. Podle výše uvedené věty to znamená, že jsou nearchimédovské, tj. obsahují nekonečně malé veličiny.

Na bázi tohoto pozorování se v minulém století rozhodl Abraham Robinson [1961] vzkřísit již pohřbený koncept infinitesimálního kalkulu Leibnize a Newtona v rámci tzv. NESTANDARDNÍ ANALÝZY. Sama motivace je ovšem mírně problematická, neboť, jak jsme zdůraznili dříve,

[32] Ekvivalence schématu (CS) a schématu pro polynomy nad teorií uspořádaných těles je netriviálním důsledkem Tarského [1948, s. 48 n, pozn. 9] výsledků. Ekvivalenci polynomiálního schématu s axiomy reálně uzavřených těles lze nalézt třeba in van der Waerden [1971].

u Leibnize ani Newtona nešlo při použití infinitesimálních veličin ani tak o systematickou koncepci, jako o metodologickou bezradnost, jak úspěšně fungující kalkul založit jiným, bezpečnějším způsobem. Souvislost obou teorií je tedy z velké části jen verbální. Robinsonův přístup je specifický tím, že nearchimédovské modely analýzy konstruuje s využitím sofistikovaných prostředků teorie modelů tak, aby se jednalo o *rozšíření* (standardních) reálných čísel R, tj. aby byla struktura R do struktury nestandardních čísel vnořitelná.[33] Robinsonova původní metoda se zakládá na podobné aplikaci věty o kompaktnosti, jakou jsme použili pro konstrukci nestandardních čísel $\mathfrak{PA}$ v oddíle 5.10. Ta nyní obnáší velkorysé rozšíření jazyka analýzy o jméno c_a pro každý prvek $a \in \mathsf{R}$, fixování standardní interpretace úplným diagramem, tj. teorií struktury $\langle \mathsf{R}, +, \times, <, \{c_a \mid a \in \mathsf{R}\}\rangle$, a její rozšíření o množinu formulí $\left\{0 < d < \frac{1}{n} \mid n \in \mathsf{N}\right\}$ pro zcela novou jmennou konstantu d.

Podstatně konkrétnější je druhá z konstrukcí, která se zakládá rovněž na idejích Skolemových, totiž jeho způsobu konstrukce nestandardního modelu prvořádové aritmetiky. Skolem [1934] uvažuje (totální) funkce na N, tj. prvky N^{N}, s přirozenou definicí algebraických operací jako $(f + g)(i) = f(i) + g(i)$ atd. a konvencí, že $f = g$, resp. $f < g$ tehdy a jen tehdy, je-li množina $\{i \mid f(i) = g(i)\}$, resp. $\{i \mid f(i) < g(i)\}$ 'velká', tj. splňují-li f a g příslušnou relaci skoro na všech prvcích N s možnou výjimkou konečně mnoha. Podmnožinám N této vlastnosti, tj. majícím konečný doplněk, se říká KOFINITNÍ. Necháme-li v takto získané struktuře reprezentovat přirozená čísla konstantními funkcemi $f(x) = n$, zkráceně $\mathbf{n}$, je zřejmé, že se např. diagonála

$$f(n) = n$$

stane právě oním nestandardním nekonečně velkým číslem, jež jsme dříve získali větou o kompaktnosti. Problém spočívá v tom, že uvedené požadavky na 'velikost' shody nestačí k tomu, aby byla daná struktura modelem výchozí teorie. Máme-li např. posloupnosti $a = (a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ a $b = (b_n)_{n\in\mathsf{N}}$ takové, že $a_p = 0$, $b_q \neq 0$ pro p, q lichá, a $a_p \neq 0$, $b_q = 0$ pro p, q sudá, platí $a \neq \mathbf{0}$ a $b \neq \mathbf{0}$, nicméně $a \times b = \mathbf{0}$.

Tomu lze odpomoci zobecněním Skolemovy metody, jak se ho později ujal Łoś [1955] v metodě ultraproduktu coby specifické interpretace daného jazyka prvního řádu, založené na kartézském součinu (nosičů) interpretací předem daných.[34] Tento součin je přitom indexován nějakou množinou I, nad níž je dán systém U jejích podmnožin, jenž splňuje vlastnosti ultrafiltru. Nejprve několik standardních definicí:

[33] Termíny "standardní" a "nestandardní" jsou zde s ohledem na historický vývoj samozřejmě matoucí.

[34] Oba způsoby konstrukce nestandardního modelu $\mathfrak{N}$, tj. přes větu o kompaktnosti a přes ultraprodukt, jsou popsány in Robinson [1974].

> Systém $U \subseteq \mathcal{P}(I)$ se nazývá ULTRAFILTREM na $I \neq \emptyset$, jestliže pro každé $X, Y \subseteq I$ platí: (i) $\emptyset \notin U$, (ii) jestliže $X, Y \in U$, pak $X \cap Y \in U$ a (iii) $X \in U$ platí tehdy a jen tehdy, když $I - X \notin U$. Z podmínek (i–iii) již plyne podmínka (iv), totiž že jestliže $X \in U$ a $X \subseteq Y$, pak $Y \in U$. To zmiňujeme proto, že podmínky (ii) a (iv) obvykle slouží k definici tzv. FILTRU, tj. systému U podmnožin I, který je uzavřen na průniky a nadmnožiny. Filtr, jenž splňuje i podmínku (i), se nazývá VLASTNÍ. Ultrafiltr je alternativně definovatelný podmínkami (ii–iv), tj. jako filtr, jehož prvkem je buď množina, nebo její doplněk. NETRIVIÁLNÍM (ULTRA)FILTREM se nazývá (ultra)filtr, jenž neobsahuje žádné konečné množiny.

Máme-li třídu interpretací $\{\mathcal{I}_i \mid i \in I\}$ jazyka L a filtr U nad I, můžeme definovat novou interpretaci jazyka I následovně. Uvažujeme nejprve množinu $A := \prod_{i \in I} \dot{\mathcal{I}}_i$, tj. systém všech zobrazení $g : I \to \bigcup_{i \in I} \dot{\mathcal{I}}_i$ takových, že $g(i) \in \dot{\mathcal{I}}_i$ pro každé $i \in I$. Na těchto funkcích stanovíme podle filtru U relaci $\sim_U$, v níž se dvě funkce nacházejí tehdy, jestliže se množina indexů, na níž se shodují, nachází v U, tj.

$$g \sim_U h \rightleftharpoons \{i \in I \mid g(i) = h(i)\} \in U.$$

Systém všech kofinitních množin na nekonečném I tvoří filtr. Nás sice s ohledem na naše cíle zajímají právě ultrafiltry, zvolený postup nicméně dovoluje nahlédnout, jaká podmínka hraje v předvedené konstrukci jakou roli.

Pouze z vlastností filtru např. plyne, že je $\sim_U$ relací ekvivalence. Můžeme tedy přejít ke kvocientu $A/\sim_U$, zkráceně A_U, daného kartézského součinu a uchopit ho jako nosič $\dot{\mathcal{U}}$ interpretace $\mathcal{U}$ jazyka L, nazývané také REDUKOVANÝ PRODUKT, v případě ultrafiltru ULTRAPRODUKT interpretací $\{\mathcal{I}_i \mid i \in I\}$. Značíme jej jako $\prod_{i \in I}^{U} \mathcal{I}_i$. První dvě podmínky ohodnocení jazyka L jsou definovány přirozeným způsobem:

(i) $\mathcal{U}(c)$ je třída $[g]_{\sim_U}$, zkráceně g_U, taková, že $g(i) = \mathcal{I}_i(c)$ pro každé $i \in I$,

(ii) $\mathcal{U}(f^n)$ je funkce na A_U, která každému $h_{1U}, \ldots, h_{nU}$ přiřazuje k_U takové, že $k(i) = \mathcal{I}_i(f^n)(h_1(i), \ldots, h_n(i))$ pro každé $i \in I$.

Lze ověřit, že definice nezávisí na výběru reprezentantů příslušných abstrakčních tříd, a je tedy korektní. To platí i pro interpretaci relací:

(iii) pro $h_1, \ldots, h_n \in A$ platí $\langle h_{1U}, \ldots, h_{nU} \rangle \in \mathcal{U}(R)$ tehdy a jen tehdy, když $\{i \in I \mid \langle h_1(i), \ldots, h_n(i) \rangle \in \mathcal{I}_i(R)\} \in U$.

Tato podmínka je také bází důkazu tzv. ŁOŚOVY VĚTY, podle níž nad ultrafiltrem (!) U pro každou sentenci φ jazyka L platí

$$\prod_{i\in I}^{U} \mathcal{I}_i \vDash \varphi \text{ tehdy a jen tehdy, když } \{i \in I \mid \mathcal{I}_i \vDash \varphi\} \in U,$$

tedy sentence je splněna v ultraproduktu $\mathcal{U}$ tehdy, platí-li ve 'většině' výchozích interpretací. Důkaz uvádíme pouze ilustračně.

Důkaz: Zapíšeme-li $\mathcal{I}\mathcal{V}^{\vec{x}}_{\vec{a}} \vDash \varphi(\vec{x})$, kde $\vec{x}$ jsou všechny volné proměnné ve φ a $\vec{a}$ jejich valuace, jako $\mathcal{I} \vDash \varphi(\vec{a})$, musíme dokázat, že $\mathcal{U} \vDash \varphi(h_{1U}, \ldots, h_{nU})$ právě tehdy, když $\{i \in I \mid \mathcal{I}_i \vDash \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in U$ pro libovolné prvky $h_{1U}, \ldots, h_{nU} \in \dot{\mathcal{U}}$. Pro elementární formule to platí z definice $\mathcal{U}$. Dále postupujeme indukcí podle výstavby formule. Pro konjunkci dostáváme jeden směr z uzavřenosti filtru na průniky, druhý z uzavřenosti na nadmnožiny. Pro negaci platí $\mathcal{U} \vDash \neg\varphi(h_{1U}, \ldots, h_{nU})$ tehdy a jen tehdy, když $\mathcal{U} \nvDash \varphi(h_{1U}, \ldots, h_{nU})$, což podle induktivního předpokladu nastává tehdy a jen tehdy, když $\{i \in I \mid \mathcal{I}_i \vDash \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \notin U$. Z vlastností ultrafiltru pak plyne, že $\{i \in I \mid \mathcal{I}_i \vDash \neg\varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in U$. Jelikož $\{\neg, \wedge\}$ je úplná skupina spojek VL, zbývá ošetřit nějaký kvantifikátor. Jestliže $\mathcal{U} \vDash (\exists x)\varphi(x, h_{1U}, \ldots, h_{nU})$, pak existuje k_U takové, že $\mathcal{U} \vDash \varphi(k_U, h_{1U}, \ldots, h_{nU})$. Pak $\{i \in I \mid \mathcal{I}_i \vDash \varphi(k(i), h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in U$ podle předpokladu, a tedy i $\{i \in I \mid \mathcal{I}_i \vDash (\exists x)\varphi(x, h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in U$. To plyne jednoduše z vlastností splňování a uzavřenosti na nadmnožiny. Opačný směr nicméně vyžaduje akt výběru, kdy danému i přiřazujeme nějakou hodnotu b_i proměnné x takovou, že $\mathcal{I}_i \vDash \varphi(b_i, h_1(i), \ldots, h_n(i))$. Pro funkci $k(i) = b_i$ pak dostaneme $\mathcal{U} \vDash \varphi(k_U, h_{1U}, \ldots, h_{nU})$. □

Omezíme-li se na případ ultraproduktu téže interpretace, tj. tzv. ULTRAMOCNINU $\prod_{i\in I}^{U} \mathcal{I}$, dostáváme okamžitě důkaz její elementární ekvivalence s interpretací $\mathcal{I}$, neboť 'většina interpretací' se zde s ohledem na fakt, že pro každý ultrafiltr platí $\emptyset \notin U$, rovná již 'interpretaci jediné'. Zobrazení $g(a) = \mathbf{a}_U$, pro $\mathbf{a}$ konstantní funkci z I do $\{a\}$, představuje vnoření interpretace do své ultramocniny, což znamená, že ultramocnina je jejím ELEMENTÁRNÍM ROZŠÍŘENÍM, tj. rozšířením, které je se svojí podstrukturou elementárně ekvivalentní. Podobně získáme pojem ELEMENTÁRNÍ PODSTRUKTURY.[35]

[35] Zde je pro pořádek vhodné doplnit to, co si čtenář nejspíš již sám odvodil ze zavedených distinkcí a zvyklostí. Definici PODSTRUKTURY (podinterpretace) $\mathcal{J}$ nějaké struktury (interpretace) $\mathcal{I}$ jazyka L získáme přímočaře skrze podmínky, podle nichž (i) $\dot{\mathcal{J}} \subseteq \dot{\mathcal{I}}$ a (ii) interpretace $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ všech druhů konstant z L se na prvcích $\dot{\mathcal{J}}$ shodují. Podobně pro pojem ROZŠÍŘENÍ STRUKTURY. Bod (i) je obvykle chápán volněji, ve smyslu hilbertovského "až na izomorfismus". Za podstrukturu, resp. rozšíření struktury tedy bereme i struktury s těmito izomorfní.

Vezmeme-li nyní ultramocninu $\mathsf{R}^* \rightleftharpoons \prod_{i\in\mathsf{N}}^{U} \mathsf{R}$ reálných čísel podle netriviálního ultrafiltru U na N, jedná se o model analýzy, tedy uspořádané těleso, obsahující R, resp. jeho kopii jako elementárně ekvivalentní podtěleso. *Prima facie* není zřejmé, že by se jednalo o vlastní rozšíření, a tím pádem rozšíření nearchimédovské, neboť uvedená ultramocnina vznikla faktorizací součinu spočetně mnoha kopií R a jako taková má opět (nejvýše) mohutnost kontinua. Právě zde přijde ke slovu netrivialita použitého ultrafiltru. Všimněme si, že tato vlastnost je pro daný účel nutná, neboť v případě triviality je ultraprodukt izomorfní s tou z interpretací $\mathcal{I}_i$, pro niž $\{i\} \in U$. Z definice triviálního ultrafiltru plyne, že taková interpretace existuje vždy.

Podle popsaného vnoření g interpretace do ultramocniny odpovídá každému číslu $r \in \mathsf{R}$ v ultramocnině R^* jeho obraz $\mathbf{r}_U$, tedy ekvivalenční třída ke konstantní posloupnosti

$$\mathbf{r} = (r, r, r, \ldots).$$

Prvky $\mathbf{r}_U$ se s $\mathbf{r}$ — z netriviality ultrafiltru U — shodují ve více než konečně mnoha případech. Pro diagonální posloupnost

$$d = (1, 2, 3, 4, \ldots)$$

coby reprezentanta jisté třídy ekvivalence to znamená, že je odlišná od každého čísla $\mathbf{r}$ a platí $\mathbf{r}_U < d_U$, neboť doplněk množiny

$$\{i \in \mathsf{N} \mid \mathbf{r}(i) < d(i)\}$$

je konečný, a ona tak musí náležet příslušnému netriviálnímu ultrafiltru. Dané těleso je tedy nearchimédovské a ultramocnina R^* musí být vlastním rozšířením R. — S ohledem na to je možné v R^* rozlišit prvky R standardní, jež jsou obrazy reálných čísel, a prvky $S = \mathsf{R}^* - R$ nestandardní. Mezi nimi pak existují prvky nekonečně velké

$$S_V \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathsf{R}^* \mid (\forall r \in R)(|r| < |x|)\},$$

jejichž příkladem je právě diagonála $f(n) = n$, či nekonečně malé

$$S_M \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathsf{R}^* \mid (\forall r \in R)(|x| \leq |r|)\},$$

např. $f(n) = \frac{1}{n}$. Podle definice k nim patří i 0. Pro $x, y \in \mathsf{R}^*$ lze dále definovat nekonečnou blízkost

$$x \doteq y \rightleftharpoons (\exists a \in S_M)(|y - x| = a).$$

Vyloučíme-li z R^* čísla nekonečně velká, tj. přejdeme-li k množině $F = \mathsf{R}^* - S_V$, lze dokázat, že pro každé $x \in F$ existuje právě jedno číslo $r \in R$ takové, že $x \doteq r$. To znamená, že se v R^* kolem každého standardního reálného čísla kumuluje jakýsi svazek, MONÁDA čísel nestandardních, a my příslušnou faktorizací $F/\doteq$ získáme zpět těleso R reálných čísel. — Základní problém nestandardního modelu analýzy stále spočívá ve způsobu jeho konstrukce:

(1) Robinson při ní využívá Cantorovo, resp. Dedekindovo R jako triviálně dané, z obecně-filosofického hlediska tedy k jejich konstrukci nenabízí alternativu, ale pouhou variaci.

(2) Jeho metody jsou metodami teorie modelů a množin, a to v relativně silné podobě. K důkazu existence netriviálního ultrafiltru je např. zapotřebí nějaké formy axiomu výběru, jenž je také dále využíván v důkazu Łośovy věty.

Původní Cantorova konstrukce reálných čísel se přitom zdá přímo vybízet vyjít z tělesa Q, zkonstruovat příslušnou ultramocninu Q^* a tu prohlásit za nově získaná nestandardní čísla. Faktorizací konečných čísel z Q^* lze pak sice opět získat čísla R, rozdíl oproti R^* ale spočívá v tom, že Q^* není elementárním rozšířením R, ale pouze Q. Nemůže se tedy jednat ani o reálně uzavřené těleso, tj. kontinuum kartézského typu. Rozdíl v konstrukci R z Q^* oproti konstrukci Cantorově je přitom následující:

(1) Cantor omezuje reprezentace reálných čísel na fundamentální posloupnosti. Tím jsou předem vyloučena nekonečně velká čísla, neboť fundamentální posloupnosti jsou (v libovolném metrickém prostoru) dokazatelně omezené.

(2) Blízkost fundamentálních posloupností je odhadována racionálními čísly, tj. příslušná ekvivalence je od počátku hrubší nežli ta vedoucí k nestandardnímu případu. Tím jsou rovnou vyloučeny veličiny nekonečně malé.

Právě zmíněná a v oddíle 2.5 dokázaná omezenost fundamentálních posloupností nám dává dodatečný vhled do toho, proč byly definovány tak, jak byly, totiž podmínkou na zhuštění *všech* členů od jistého počínaje, nikoli např. jen členů konsekventních, tj. podmínkou

$$(\forall m \in \mathsf{N})(\exists p \in \mathsf{N})(\forall q \geq p)(|a_{q+1} - a_q| < \tfrac{1}{m}).$$

Tu splňuje např. tzv. HARMONICKÁ ŘADA

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots,$$

jejíž členy však rostou přes všechny meze. Pro libovolné n totiž platí:

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{2^{p-1}} \frac{1}{2^p} = \frac{n}{2}.$$

V souvislosti s bodem (2) je vhodné zmínit, že Cantor [1883a, s. 172] coby propagátor aktuálního nekonečna v matematice explicitně označil infinitesimália za neexistující, mající pouze nevlastní, synkategorematický význam. Ten je podle něho značný. Časem nicméně u Cantora začal převládat vyloženě negativní postoj, který svojí dikcí připomíná Fregovo odmítnutí neeukleidovských geometrií. V dopise Vivantimu pak přirovnává nekonečně malé veličiny k bacilům cholery, která prostupuje tehdejší matematiku.[36] Nutno však říci, že Cantor primárně odmítá infinitesimální veličiny uvažovat v rámci reálných čísel, čímž obhajuje především svůj koncept kontinua jako úplné uspořádané množiny, která — pro svoji archimédicitu — nekonečně malé dopředu vylučuje. V rámci ordinálních čísel je zase nepotřebuje s ohledem na výše popsanou genezi, totiž iterování jistých uzávěrových operací nad podmnožinami reálných čísel. Při vstřícné interpretaci lze tedy říci, že čistě abstraktní možnost veličin inverzních k nekonečným nepopírá, pouze jí nedokáže dát rozumný smysl.

[36] Viz Dauben [1979, s. 131].

6 Ve stínu paradoxu

Ohlas Russellova paradoxu lze do velké míry připisovat jeho elementární povaze, která jej činí snadno srozumitelným, a proto zvláště 'paradoxním'. Bylo by ale naivní domnívat se, že představuje jakýsi kolaps rozumu *per se*, stejně jako jej nepředstavují klasické paradoxy Zénónovy nebo Epiménidův paradox lháře. Síla antických antinomií oproti antinomii Russellově spočívá v tom, že se týkají způsobů popisu empirického světa, a nezůstávají tedy na abstraktní úrovni jazyka jako např. paradox lháře. V tom ale tkví také jejich apriorní neškodnost, neboť svět a jeho popis jsou (v jistém smyslu) různé věci a z nekoherence druhého nepřestane existovat první. Tato poznámka zůstane v platnosti i poté, co otázku po existenci (objektivního) světa nahradíme otázkou po možnosti jeho (objektivního) poznání.

Zatímco sémantické antinomie typu lháře se mohou za jistých okolností ještě blížit problémům, které, jak říká Quine [1966, s. 25], napadají "znuděné dítě o deštivé sobotě", Russellův a podobné paradoxy představují pro svoji spjatost s projektem radikální přestavby základů matematiky spíše než pouhá 'puzzles' klíčová místa, na jejichž vyjasnění stojí tíha rozhodnutí, zda a jak pokračovat dál. V této kapitole se vedle diskuze paradoxů samých budeme věnovat těm směrům výzkumu základů, které se rozhodly sledovat linii vymezenou metodami Fregovy logiky na straně jedné a Cantorovou teorií množin na straně druhé. Hranice mezi nimi a těmi trendy, které se jako intuicionismus Brouwerův a konstruktivismus Weylův přiklonily k radikálnějšímu řešení, není vždy ostrá, již proto, že něco jako úplný rozchod s tradicí je ve skutečnosti nemožný. Brouwer i Weyl také často jen lavírují na hraně toho, co z užívaných metod definice a důkazu lze ještě změnit při zachování alespoň nějaké srozumitelnosti. K tomu se ale dostaneme v kapitole 7.

Jádro řešení Russellova paradoxu v rámci obou trendů, tj. klasického a revizionistického, se také z věcného pohledu příliš neliší. V důsledku se totiž vždy zakládá na nějakém zohlednění konstruktivního charakteru matematiky, ať již při větší péči o výstavbu užitého jazyka, v explicitní formulaci axiomů a odvozovacích pravidel či v hierarchické koncepci jazyků a univerz. Rozdíl je především externí povahy, kdy intuicionismus a konstruktivismus nemusí paradox 'řešit', ale nanejvýš uchopit jako příležitost k vypracování nové alternativy. Před logicismem oproti tomu stojí problém, jak oficiálně usmířit přijetí konstruktivních prvků s původní doktrínou jejich zbytnosti. Frege, zdá se, nahlédl marnost tohoto počínání a spolu s revizionisty Brouwerova typu považoval Russellovy resuscitační snahy, tj. jeho teorii typů, za "dodatečné vyprošťování lodi z mělčiny, za něco, k čemu by při dobrém vedení vůbec nemuselo dojít".[1] Totéž se týká i Zermelovy teorie množin.

Na tomto pozadí lze vést přirozeně spory o tom, do jaké míry je Russellem, Zermelem a dalšími přestavěný koráb množinové a logické aritmetiky stále ještě tou původní lodí, která se rozbila o skály paradoxu, když sice zůstal zachován původní *design* trupu, plavidlo ale funguje na zcela odlišný pohon. Podobně se můžeme ptát, zda je v případě halasně vypraveného plavidla Brouwerova správné mluvit o novém stroji, když bylo z velké části postaveno z trosek vyplavených po katastrofě na břeh, tj. využívá např. topologické definice Cantorovy či Fregovu logickou syntax. Ve prospěch Russella i Zermela je přitom možné říci alespoň tolik, že ještě (byť ne zcela uvážlivě) sdílejí původní ideály svých 'mistrů', kteří matematiku viděli jako *species* obecné nauky o logických předmětech a množinách, a pokračují tedy v plánu, který se ukázal být alespoň v nějakých aspektech nosný a věcně odůvodnitelný. V tom se odlišují od 'politiků' Hilbertova typu, kteří z čistě pragmatických důvodů odmítají bořit osvědčený systém (Cantorův ráj) a případné námitky revolucionářů odbývají jeho dílčími úpravami, např. přihlédnutím k efektivním aspektům matematiky. V tom jim dal právě Fregův logicismus s důrazem na psané slovo silnou zbraň.

Hilbertovi a jeho filosofii se ale budeme věnovat až v kapitole 8. Tato je cele zaměřena na Russella a Zermela coby neoficiální vykonavatele Fregovy a Cantorovy závěti, i když jim toto označení lze připsat jen se značnou rezervou. Russell byl ovlivněn primárně Peanem, filosoficky tkvěl hluboce v tradici britského empirismu a jeho recepce Frega byla více než problematická. Jejich vztahy lze tedy označit spíše za kolegiální. Cosi podobného platí i v případě Zermelově, jenž zase byl odchovancem Hilbertovy axiomatické školy, která Cantora hluboce respektovala, nicméně pracovala na bázi vlastních principů, s nimiž se Cantor nijak neztotožňoval. Nutno však říci, že se Zermelo od Hilbertova formalismu, jenž časem — zejména v konfrontaci s učením Brouwerovým — vyústil ve finitismus coby novou doktrínu základů, postupně distancoval.

[1] Frege [1895, s. 439] se takto vyjadřuje ke Schröderovu řešení po něm pojmenovaného paradoxu (viz oddíl 5.4) jakousi anticipací teorie typů. Fregův pozdější přístup k Russellovu paradoxu ale naznačuje, že se jedná o postoj obecný.

6.1 Logické a jiné paradoxy

Debata nad dopadem paradoxu na tehdejší stav základů matematiky a logiky započala záhy po jeho objevu a jejím moderátorem nebyl 'kupodivu' nikdo jiný než Russell. Ten také cele přijal nesnadné břímě znovupostavení otřeseného logicistického projektu na pevné nohy, když se ukázalo být zřejmé, že se Frege a Dedekind na dalším vývoji již podílet nehodlají. Frege sice ještě v dodatku ke *Grundgesetze* [1893/1903, díl II, s. 262] navrhuje jakousi rychlou opravu GV:

$$\{x \mid F(x)\} = \{x \mid G(x)\} \leftrightarrow \\ (\forall y)[y \neq \{x \mid F(x)\} \wedge y \neq \{x \mid G(x)\} \rightarrow (F(y) \leftrightarrow G(y))],$$

identifikující problém právě v substituci specifikované množiny za proměnnou predikátu, sám ale zjevně nevěří, že by tak bylo možné systém zachránit po věcné stránce. Quine [1955] tak jako tak později ukázal, že je tato revize neslučitelná s předpokladem existence alespoň dvou odlišných předmětů, jimiž musí být již např. Fregovy hodnoty pravda a nepravda. Fregův příspěvek k myšlence logicismu tedy objevem paradoxu definitivně končí.

Russell oproti tomu věnoval svému paradoxu a nápravě jeho dopadu na Fregův systém část svého života po oficiálním zveřejnění antinomie v *The Principles of Mathematics* [1903]. Toto období vyvrcholilo publikací trojdílných *Principia Mathematica* [1910–1913] (dále obvykle jen "Principia"), která napsal spolu se svým učitelem, slavným algebraikem Alfredem Northem Whiteheadem. Wittgensteinova kritika z těchto let a vlastní politické a jiné aktivity pozvolna přesunuly těžiště Russellova zájmu do jiných oblastí filosofie a vědy a lze říci, že s vydáním *Principií* přestává být činný jako logik, přestože zažil ještě mnoho literárně plodných let, ba desetiletí.[2]

První řešení paradoxu přitom Russell navrhl již v rámci *Principles*, jež psal jako projekt symbolické matematiky ještě pod vlivem Peanovy školy, tj. bez přímé znalosti Frega. Tomu je v knize narychlo věnován jeden z dodatků. Hned poté, co paradox v *Principles* vyřešil, Russell toto řešení zase stáhnul, což pak opakoval v nepravidelných a leckdy velmi krátkých intervalech po celý život, a to nejen ve věci paradoxu, ale svých filosofických názorů obecně. Návrh z *Principles* [1903, dodatek B] je nicméně významný tím, že vlastně předjímá řešení finální, totiž teorii typů, když zdůrazňuje, že proměnná x funkce $f(x)$ musí mít vždy nějaký

[2] Russell zemřel roku 1972 ve věku nedožitých devadesáti osmi let. V období po *Principiích* napsal řadu významných monografií obecně filosofického charakteru, a to jak s tematikou epistemologickou, tak populárně-vědeckou a společenskou. Ty, v nichž "bojuje za ideály humanismu a svobody myšlení", mu roku 1950 vynesly Nobelovu cenu za literaturu.

“obor významu” (*range of significance*), a nevztahuje se tedy ke všem objektům vůbec, jak je tomu ještě u Frega. Obory významu jsou hned nato rozvrstveny do typů, přičemž množině předmětů a oněm předmětům samotným odpovídá vždy odlišný typ, takže výraz “$x \in x$” nedává vůbec smysl a nemůže být k odvození paradoxu použit.

Tento způsob zamezení antinomie není samozřejmě nijak originální, *de facto* ho v jiné souvislosti použil i Schröder. Také Fregův systém již podobnou stratifikaci vykazoval, totiž v oblasti funkcí a s precizností, s níž se Russellův vágní návrh nemůže srovnávat. — Ještě Gödel [1944, s. 125 nn] ostatně ve svém mnohem pozdějším zhodnocení Russellovy mnohem pozdější logiky explicitně říká, že co do formální přesnosti “představuje ve srovnání s Fregem značný krok zpět”. — Frege [1893/1903, díl II, s. 254 nn] a [1976, s. 228 n] ovšem Russellův návrh jako řešení paradoxu explicitně zamítl, jednak proto, že rozlišení různých typů objektů komplikuje již tak dosti složitý systém jeho logiky vyšších řádů, jednak že neumožňuje provést logicistický plán v těch intencích, které jsme popsali v předchozích dvou kapitolách. Russell, v dopise Fregovi [1976, s. 230 n], myšlenku předmětných hierarchií odmítl nejprve také, a to ze zcela opačného důvodu, totiž že nechávala vše ještě příliš jednoduchým, především v ní nebyly stratifikovány věty (propozice), což v principu umožňovalo odvození dalších paradoxů.

Ty přitom začaly na přelomu století růst jako houby po dešti, a to nejen v oblasti základů matematiky, tedy ve stylu paradoxů Cantorova a Russellova, ale i logiky v širším, řekněme sémantickém slova smyslu, po vzoru paradoxů Epiménidova typu. Russell se proto intenzivně zabýval jejich shromažďováním, v naději, že se mu podaří najít nějaký jejich společný rys, a bude tak moci podat takové řešení problému, které, jak se později [1959, kap. 7] vyjádřil:

(1) bude platit pro všechny paradoxy,

(2) nezasáhne vážně větší část tehdejší matematiky a

(3) uspokojí i logický *common sense*, tj. nebude mít charakter nějaké *ad hoc* úpravy.

O tom, že je něco takového vůbec možné, lze pochybovat od počátku, na druhou stranu je třeba vzít v úvahu, že samy paradoxy nebyly sbírány čistě náhodně, ale podle jistého rodového klíče. Úspěch, byť omezený, tedy nebyl zcela vyloučen.

Ať tak či tak, Russellův [1906*b*] druhý pokus o diagnózu nedostává žádnému z uvedených bodů a představuje vlastně jen jakési zamyšlení nad tím, kudy dál. Jedná se o výčet několika způsobů, jak paradoxům čelit, a to:

(a) ‘cik-cak’ teorií (*zig-zag theory*),

(b) teorií omezení velikosti (*limitation-of-size theory*),

(c) teorií eliminace tříd (*no-class theory*).

Teorie (b) je obvykle užívána jako racionále úprav zavedených do pocantorovské teorie množin, formulace je ovšem čistě Russellova, tj. byl v tomto bodě pionýr. Bod (c) dále rozvádí Russellovu teorii denotace, která v některých znacích, např. určitých deskripcích, viděla tzv. neúplné symboly. To se má nyní týkat i množinových termů. V prvních fázích svého vývoje měla přitom teorie (c) podobu tzv. teorie substituční, v níž byly jako neúplné symboly eliminovány dokonce propozice (propoziční funkce).[3] Jelikož se ke bodům (a–c) ještě jednou alespoň stručně vyjádříme, přejděme nyní rovnou k Poincarého reakci na Russellův článek. Stala se totiž pro další vývoj problému určující a lze v ní vlastně spatřovat i bod, v němž se cesty proponentů logicismu a jejich protivníků na okamžik sešly, aby se hned nato opět rozdělily, tentokráte již natrvalo.

Své časopisecky publikované názory na povahu vědecké a matematické metody shrnul Poincaré ve své slavné, polopopulární studii *La Science et l'hypothèse* [1902]. Navazující diskuze, do níž se zapojili jak Couturat, tak Russell, spolu s novými počiny na poli teorie množin, k nimž patřil především Zermelův důkaz věty o dobrém uspořádání stejně jako objevy dalších paradoxů, podnítily Poincarého v letech 1905 a 1906 k vydání série tří článků pod názvem *Les mathématiques et la logique* [1905], [1906*a*], [1906*b*], vydaných později v upravené podobě jako část obsáhlejšího textu *Science et méthode* [1908]. V třetí a poslední ze svých statí se Poincaré vyjádřil rovněž k Russellově zmíněné katalogizaci paradoxů, vytknul jí značnou vágnost a navrhnul 'pravé řešení' několika z nich, které úvodem zmínil. Byly to:

(1) paradox Burali-Fortiho,

(2) paradox Königův,

(3) paradox Richardův.

Ono pravé řešení spočívá podle Poincarého jednak (i) v eliminaci bludného kruhu, jehož se všechny tyto paradoxy dopouštějí, a jednak (ii) v eliminaci aktuálního nekonečna, které předpokládají. Nejprve k paradoxům samým.

Poincarého výběr jednotlivých případů je velice šťastný, neboť reprezentativně pokrývá spektrum relevantních antinomií. Burali-Fortiho paradox lze označit za první množinový paradox vůbec, a patří tedy ke skupině, kterou později Ramsey [1925, s. 183 n] vlivně nazval PARADOXY LOGICKÝMI (resp. matematickými či množinovými), a to v opozici k PARADOXŮM EPISTEMOLOGICKÝM (resp. sémantickým). K těm zase patří

[3] Srov. Potter [2000, s. 128 nn] pro další diskuzi.

Richardova antinomie, a to s ohledem na podstatné využití obratů jako "definovat", "označovat" a "znamenat". Königův paradox pak představuje jakýsi mezipřípad či, chcete-li, ukázku toho, že je uvedené dělení neostré, neboť může být zařazen do obou skupin. Ramseyho dělení je obvykle komentováno s tím, že sémantické výrazy jako "označovat" do matematiky nepatří, což je sice pravda, teorie množin ani matematická logika ale nejsou obvyklými případy matematických teorií a systematické užití metajazykových obratů, jako jsou tyto, je, přinejmenším v druhé z nich, na denním pořádku.

Berme nyní zmíněné paradoxy jeden po druhém a začněme hned PARADOXEM BURALI-FORTIHO. Cesare Burali-Forti byl Peanův asistent, jenž pracoval na převedení Cantorova díla do Peanovy symbolické notace. V rámci tohoto projektu publikoval [1897] jakousi verzi Cantorova paradoxu pro ordinální čísla, kterou lze formulovat již pro jejich původní, polointuitivní verzi asi takto:[4]

> Ordinální čísla jsou ve své dvojí roli indexů zobecněného vyčíslení množin a typů dobrých uspořádání sama dobře uspořádána. Jejich celku Ω tedy odpovídá ordinální číslo větší než kterýkoli prvek z Ω. Ergo $\Omega < \Omega$. Alternativně lze dospět ke sporu uvažováním čísla $\Omega + 1$.

O této antinomii věděl Cantor již od roku 1895 a vypořádal se s ní stejně jako s ostatními paradoxy způsobem, o němž se zmíníme později. Burali-Forti sám zmíněný výsledek za paradox nepovažoval, ale interpretoval ho jako důkaz faktu, že nejsou ordinální čísla obecně srovnatelná. Tento závěr by byl ve skutečnosti pro Cantorovu teorii mnohem drastičtější nežli paradox sám, neboť je v rozporu se samotnou konstrukcí ordinálních čísel.[5]

Russell, jenž uvedený výsledek jako první paradoxem nazval a přiřadil mu i Burali-Fortiho jméno, nejprve navrhl [1903, s. 323] jeho reinterpretaci v tom smyslu, že systém všech ordinálních čísel není dobře uspořádatelný, což je jen o něco méně drastické nežli závěr Burali-Fortiho. Posléze [1906*b*] mu tato antinomie sloužila za příklad paradoxů, které jako Cantorův a Russellův vedou k předpokladu příliš velkých množin. Cantor o nich, jak záhy uvidíme, hovořil také jako o inkonzistentních totalitách. Jejich zákazem v rámci 'limitation-of-size theory' lze zmíněné antinomie eliminovat. Poincaré [1906*b*, § 8] má ale samozřejmě pravdu, když říká, že takto prezentované ošetření kontradikce nemá valného významu, neboť nám neříká, jak velká musí množina být, aby mohla být

[4] Formální verzi lze získat na základě výkladu z oddílu 6.6.

[5] Burali-Fortiho formulace celé věci byla vůbec velmi zmatená a nemá cenu ji podrobně rozebírat. Případ diskutuje Poincaré [1906*b*, § 7].

považována za inkonzistentní. Cantor je v tomto ohledu konkrétnější. Postupme ale dále.

Svůj paradox založil středoškolský učitel Jules Richard [1905] na aplikaci Cantorovy diagonální metody. Byl publikován v následujícím znění:

> Uvažujme celek všech reálných čísel z intervalu $(0,1)$ popsatelných (definovatelných) konečně mnoha slovy. Takových popisů je jen spočetně mnoho, čísla jimi označovaná lze tedy seřadit v posloupnost. S odkazem k ní můžeme diagonální metodou sestrojit jméno čísla, které v této posloupnosti není. Toto jméno je ale konečné, příslušné číslo by tam tedy zároveň být mělo.

Mezi sémantické paradoxy patří také PARADOX BERRYHO, jenž představuje chytré zjednodušení výše uvedeného RICHARDOVA PARADOXU. Oba paradoxy jsou spřízněny i tím, že jejich autorem není profesionální matematik, což svědčí o tom, jakému zájmu se problematika paradoxů tehdy těšila.

G. G. Berry, knihovník Bodleyovy knihovny, zaslal v letech 1904 až 1910 Russellovi deset dopisů s paradoxy, které sám vymyslel. Právě první z nich, poprvé publikovaný Russellem [1908], nese tradičně Berryho jméno:

> Uvažujeme-li ordinální čísla popsatelná konečně mnoha slovy, pak musí existovat první, které takto popsatelné není. My jsme ho ale právě konečně mnoha slovy popsali.

Tuto antinomii lze samozřejmě formulovat i pro méně kontroverzní případ čísel přirozených, totiž když uvažujeme pouze totalitu všech čísel popsatelných nějakým omezeným počtem písmen či slabik.

Případ dalšího paradoxu, tzv. Königova, je zajímavý již pro své dramatické pozadí. Maďarský matematik Julius König vystoupil roku 1904 na mezinárodním matematickém kongresu v Heidelbergu s příspěvkem *Zum Kontinuum-Problem*, který měl ukázat, že kontinuum není rovno ani prvnímu nespočetnému, ani žádnému jinému $\aleph$, v důsledku čehož nepadá jen Cantorova hypotéza kontinua, kterou Hilbert [1900*b*] ve své přednášce na předchozím kongresu v Paříži zařadil do čela dosud nevyřešených významných matematických problémů, ale i věta o dobrém uspořádání. Na kongresu v Heidelbergu byl Cantor také přítomen a na Königův příspěvek reagoval prý velmi emotivně. Podle Kowalewského [1950, s. 202] děkoval Bohu, že mu dovolil dožít se vyvrácení svých omylů, podle Schoenfliese [1922, s. 101 n] však vzápětí vyzýval ostatní, aby Königovo tvrzení vyvrátili. Königovo vystoupení tak jako tak vzbudilo menší senzaci, objevu byly věnovány titulky v lokálním tisku a sám bádenský velkovévoda se nechal informovat o jeho podstatě. Jelikož se König mezi kolegy těšil vynikajícímu renomé, upírala se naděje příznivců hypotézy k vyvrácení některého z užitých předpokladů. To se ukázalo být úspěšné. Zermelo údajně již den nato objevil, že nespolehlivým článkem řetězu je jeden z výsledků Bernsteinovy disertace, který neplatí obecně.[6] Cantor mohl být tedy spokojen. — Příští rok publikoval nicméně König [1905*a*] jinou, méně formální verzi svého důkazu, která je nazývána KÖNIGOVÝM PARADOXEM:

> Přestože je reálných čísel nespočetně mnoho, těch, která lze pojmenovat konečným výrazem, je jenom spočetně. Pokud lze kontinuum dobře uspořádat, můžeme vzít nejmenší číslo, které takto pojmenovatelné není. Právě tím jsme ho ale pojmenovali.

Takto jsme dospěli k poslední antinomii Poincarého výčtu. Není přitom pochyb, že jsou si všechny předvedené paradoxy, resp. paradoxní argumenty v nějakém smyslu podobné, dokonce velmi podobné. To nám ale přesto neumožňuje zacházet s nimi podle téhož schématu. Tak např. v případě Königova paradoxu můžeme v souladu s úmyslem jeho autora snadno napadnout právě možnost uspořádání reálných čísel, což u analogicky vystavěného paradoxu Berryho nedává smysl, neboť ordinální čísla, která v něm uvažujeme, byla Cantorovými generativními principy jako dobře uspořádaná zavedena. V souladu s Quinovým [1966, s. 3] rozlišením bychom takto mohli Königův paradox považovat za tzv. PARADOX VERIDICKÝ, tj. tvrzení, které se může zdát zprvu záhadné, bližší ohledání však ukáže, že je pravdivé. Tím tvrzením samozřejmě není paradox sám, ale věta: "kontinuum nelze dobře uspořádat". — Jako příklad antinomie veridického typu uvádí Quine jednu z Russellem navržených populárních variant Russellova paradoxu, tzv. PARADOXU HOLIČE:

> Ve vesnici je člověk, jenž je holičem. Tento člověk holí všechny a pouze ty obyvatele vesnice, kteří se neholí sami. Otázka je, zda se holí sám.

Předpokládáme-li, že existují pouze dvě neslučitelné alternativy (holí se sám nebo se neholí sám), pak musíme z toho, že nás každá z nich dovede vždy k té druhé, a tedy ke sporu, usoudit, že ve vesnici neexistuje žádný takový holič. To je vše.

Tento způsob 'řešení' je samozřejmě velmi svůdný a je vlastně obsažen i v teorii omezení velikosti, která prostě prohlásí množinu všech předmětů či všech předmětů nenáležejících sama sobě za neexistující, nekonzistentní (Cantor), netvořící totalitu (Russell). V krajním případě můžeme tak jako Poincaré [1906*b*, § 15] odmítnout aktuální nekonečno

[6] Podle některých pramenů, viz třeba Grattan-Guinness [2000, s. 334], byl autorem korekce Hausdorff, definitivně to ale potvrzeno není, jak dokládá Ebbinghaus [2007, s. 51 nn].

vůbec. Rozdíl oproti případu s holičem je ovšem ten, že lidé ve zmíněné vesnici existují nezávisle na tom, zda jednoho z nich nazýváme či nenazýváme holičem. U množin je však tato nezávislost na pojmenování pochybná, tj. nejprve musíme nějaká pojmenování mít, aby se jiná, jako např. $\{x \mid x \notin x\}$, ukázala být nemožná, selhávající ve své deskriptivní roli. Těžko tedy prohlašovat některé množiny za neexistující, když nemáme žádná jasná kritéria jejich existence! — Tím nemá být řečeno, že je existence obyvatel holičovy vesnice zcela nezávislá na jazyku. Podstatné je, že kritéria, která jejich identitu coby fyzických (a tedy holitelných) bytostí vymezují, jsou nezávislá na dodatečných kritériích toho, zda je někdo z nich holičem, který holí všechny a pouze ty, kdo neholí sama sebe! — Naším průběžným závěrem je, že zatímco Poincarého ‘pravé řešení’ paradoxů vyloučením aktuálního nekonečna nedává na tomto jazykově-analytickém pozadí příliš smysl nebo je podstatně vágní, navržená léčba bludným kruhem je v zásadě správná.

Problém je, že jakýkoli pokus o její schematizaci vede snadno k přehlédnutí faktu, že to není abstraktně popsaný bludný kruh sám, čemu se snažíme vyhnout, ale důsledky, které mají jisté paradoxně vypadající argumenty pro daný diskurz. Neposuzujeme-li tyto argumenty případ od případu, tj. jak co do užitých předpokladů, tak co do potenciálních důsledků, dopouštíme se výsledně často bludného kruhu vyšší, a proto nebezpečnější kategorie, když komplikovaně zdůvodňujeme něco, co už se takovýmito prostředky pro svou relativní jednoduchost zdůvodnit nedá. Russellova dodatečná hierarchizace Fregova logického systému, zvláště pak rozvětvená teorie typů, je prominentním případem takového selhání, zejména poté, co byl v minulé kapitole Fregův projekt rozpoznán jako externě neobhajitelný.

Vodítkem je nám tedy opět jen systematická nedůvěra k paušálním ‘řešením’ čehokoli, včetně paradoxů. K návrhům, jak je ‘vysvětlit’, se musíme chovat jako k tomu, co skutečně jsou, totiž užitečná schémata, která nám umožňují pozvolna proměňovat paradoxy skutečné v paradoxy veridické, v duchu intersubjektivní varianty Quinova [1966, s. 12] postřehu, že

> antinomie jednoho je veridickým paradoxem jiného a něčí veridický paradox může být pro druhého banalitou.

Takto lze říci, že je-li např. Russellův paradox v rámci současné logiky a teorie množin veridickým paradoxem, lze paradoxy Zénónovy stále považovat za skutečné antinomie ‘přirozené fyziky’, zatímco existenci spojitých, leč nederivovatelných funkcí nebo jedno-jednoznačnou zobrazitelnost nekonečné množiny na vlastní část nepovažujeme obvykle ani za jeden z nich.

6.2 Bludný kruh a kontinuum

Souběžně s prezentací kroků, které byly na počátku století oficiálně podniknuty na obranu logicistického trendu před zhoubnými důsledky paradoxu, se v následujících oddílech chceme věnovat vlastní analýze zmíněných antinomií. Tak budeme moci adekvátně posoudit, do jaké míry byly tehdy zvolené postupy skutečně nevyhnutelné a do jaké míry způsobené nejasnostmi ve vlastních předpokladech. To bude o to významnější, že některé z uvažovaných antinomií přímo souvisí s pojmem reálného čísla. Navažme ale nejprve na přetrženou nit historického výkladu.

Na Poincarého kritický článek [1906*b*], věnovaný analýze paradoxů, reagoval Russell téhož roku statí *Les paradoxes de la logique* [1906*a*]. V ní nejprve odmítnul Poincarého námitku, týkající se aktuálního nekonečna, jednoduchým odkazem k tomu, že mnohé paradoxy, např. lháře nebo holiče, jsou na tomto pojmu nezávislé, a výtka tedy postrádá obecné platnosti. K první námitce Russell [1906*a*, s. 198] ovšem píše:

> Uznávám [...], že klíč k paradoxům spočívá v myšlence bludného kruhu; toto zrnko pravdy dále spatřuji i v Poincarého námitce, podle níž cokoli, co se nějakým způsobem týká *všech* nebo *některých* prvků nějaké třídy, nemůže být samo jedním z jejích prvků.

Princip bludného kruhu pak reformuluje vlastním (resp. Peanovým) způsobem, jenž se objeví i dva roky poté v zakládajícím spise teorie typů *Mathematical logic as based on the theory of types* [1908]:

> Cokoli obsahuje vázanou proměnnou, nesmí být mezi možnými hodnotami této proměnné.

Dále ještě zvažuje, jak stratifikovat univerzum diskurzu tak, aby objekty, které byly definované pomocí kvantifikace přes objekty jiné, náležely vždy odlišným univerzům. K tomu se ale dostaneme později. Nyní přezkoumejme bludnost některých z výše uvedených paradoxů. Začněme paradoxem Richardovým.

Ten je významný již pro využití diagonální metody. Ta vedla ovšem i k jiným podivným výsledkům, mezi něž vedle Cantorova důkazu nespočetnosti kontinua patří prominentně i Gödelův důkaz neúplnosti aritmetiky. Pro posouzení Richardova paradoxu je podstatný následující rozdíl: (1) V případě argumentu Cantorova *hypoteticky* předpokládáme, že máme nějaké vyčíslení všech reálných čísel. Zkonstruujeme číslo, které mezi nimi není, a usoudíme, že reálná čísla nemohou být spočetná, tj. že žádné takové vyčíslení neexistuje. (2) V případě Richardova argumentu bereme vyčíslení množiny všech konečně pojmenovatelných reálných čísel z intervalu $(0, 1)$ za dané. Zkonstruujeme název čísla, které mezi nimi není, a dospějeme k paradoxu, neboť tento název je opět konečný, ono číslo by tedy mezi prvky výchozí množiny mělo být podle předpokladu, který nepovažujeme za hypotetický, ale pravdivý.

Co nám nyní radí Poincarého a Russellův princip bludného kruhu, není zdaleka jasné. Můžeme třeba (i) pouze tvrdit, že všechna konečně definovatelná čísla netvoří totalitu, a inkriminovaný diagonální výraz, který k této neexistující totalitě odkazuje, není tím pádem jménem. Nebo (ii) můžeme dodat, že totalitu mohou tvořit pouze čísla definovatelná bez odkazu k této totalitě samé, tj. čísla nějaké úrovně v dále popsané hierarchii čísel, přičemž diagonální výraz takové číslo nedefinuje, a paradox tedy nevzniká. To vše je dost dobře stravitelné a odpovídá to i Poincarého komentáři k Richardovu paradoxu, stále se zde ale pohybujeme na povrchu, tj. nenabízíme takové řešení, které je dobré *nutně*! — Ve všech uvedených paradoxech jsou přitom za samozřejmé brány předpoklady filosoficky problematičtější nežli metafora bludného kruhu, která nemá primárně žádnou filosofickou ani logickou relevanci. Jelikož se zabýváme Richardovým paradoxem, začněme tím, že jej rozložíme do několika jednoduchých kroků:

(1) Máme jazyk nad fixní sadou elementárních znaků, např. symbolů psacího stroje nebo klávesnice počítače.

(2) Zvolíme nějaké ‘abecední’ uspořádání těchto znaků a vytvoříme posloupnost všech jejich možných konečných kombinací.

(3) Projdeme tento seznam a vyškrtáme všechny výrazy, které nedefinují reálné číslo z intervalu $(0, 1)$.

(4) Takto získáme vyčíslení $(d_n)_{n\in\mathsf{N}}$ všech požadovaných jmen dostupných v daném jazyce, a tím pádem i vyčíslení $(\mathbf{d}_n)_{n\in\mathsf{N}}$ všech čísel, která jsou v tomto jazyce pojmenovatelná, kdy tučně pro tento okamžik označujeme význam daného výrazu. Odkazem na zcela konkrétní diagonální proceduru tvoříme výraz “diagonální číslo posloupnosti $(d_n)_{n\in\mathsf{N}}$”, zkráceně *diag*, označující číslo **diag**, které nemůže být s ohledem na způsob konstrukce identické s žádným $\mathbf{d}_n$. To znamená, že ani výraz *diag* nemůže být roven nějakému d_n, což je ovšem v rozporu s jeho konečností.

Začněme bodem (1). Ten je zcela neproblematický v případě jednoduchých nebo umělých jazyků. Paradox ale svoji sílu čerpá z aplikace na jazyk přirozený, což dělá předpoklad (1) nesamozřejmým, neboť: Zaprvé, neexistuje jeden, nýbrž mnoho přirozených jazyků, s různými abecedami, a nemáme žádný důvod, proč považovat jeden z nich za nějak přirozenější či základnější než druhý. A zadruhé, přirozený jazyk, jazyk, který zcela univerzálně používáme, není právě na rozdíl od jazyků umělých fixní ani co do užívaných slov, ani co do sady základních znaků, tj. stále si ponecháváme možnost jeho rozšíření o nová slova a nové základní symboly (např. @). To vše může blokovat fázi (2) argumentu, zvláště, když bychom ono vyčíslení všech kombinací znaků chtěli přenechat stroji. Uvidíme, že odkazem na neudržitelnost bodu (1) pro případ jazyka matematiky odbývá Richardův paradox také Zermelo. Pro tento okamžik nicméně předpokládejme, že nic z řečeného podstatně nevadí, tj. psací stroj nám je dost dobrý, a postupme k bodu (3).

Procházíme-li systematicky posloupnost všech výrazů dané abecedy, je zřejmé, že jednou musíme narazit na výraz *diag*. Paradox vzniká proto, že tento výraz vypadá jako jméno čísla definovaného odkazem k posloupnosti $(d_n)_{n\in\mathsf{N}}$. A tak tomu skutečně je, jakmile byla tato posloupnost vytvořena, tj. jakmile byly všechny nevhodné výrazy vyškrtány. Stejně jako výraz "tato kočka" je takto i výraz *diag* jménem *něčeho* výhradně v závislosti na kontextu použití, což se zde redukuje na předpoklad, že se v příslušném (logickém) prostoru vyskytuje nějaká posloupnost nebo kočka. A jelikož v procesu vytváření posloupnosti $(d_n)_{n\in\mathsf{N}}$ tato posloupnost z definice ještě neexistuje, jméno *diag* musí být vyškrtnuto, což řeší paradox. Za jeho odvozením se tedy skrývá náš starý problém: Být jménem něčeho není syntaktický, ale sémantický pojem, kritéria onoho vyškrtání (nemusí se nutně jednat o efektivní proces!) výrazů, které nejsou jmény čísel, musí být tedy dána předem, tj. nelze je primárně poznat na jménech samotných. Výraz *diag*, stejně jako žádný jiný výraz či artefakt, není jménem automaticky, tj. pouze na základě svého tvaru, stejně jako není jménem každá určitá deskripce či výraz, který jméno připomíná.

Richardův paradox jsme tedy v principu zvládli, přejděme proto na chvíli ke Cantorovu argumentu pro nespočetnost kontinua. Mějme k dispozici nějaký systém D kritérií, popisujících, jak by mělo vypadat pojmenování reálného čísla, a to kritérií, která jsou natolik schematická, že nám umožňují uspořádání těchto jmen v posloupnost $(d_n)_{n\in\mathsf{N}}$. Příkladem nám zde může být třeba (primitivně) rekurzivní aritmetika, která bude hrát v naší knize ve věci nespočetnosti kontinua ještě významnou, i když poněkud odlišnou roli. Zkonstruujme výraz *diag* a formulujme paradox. Závěry, které nabízíme, jsou nyní dva:

(i) Výraz *diag* není jménem reálného čísla.

Na tento úsudek máme obecně právo, neboť pojem čísla, a zvláště čísla reálného, není nijak přirozený a odvíjí se právě od výchozích kritérií toho, co za číslo, resp. jeho pojmenování hodláme považovat. Nikdo nám nemůže *a priori* bránit uvažovat pouze čísla pojmenovatelná polynomy nebo rekurzivními posloupnostmi.

(ii) Výraz *diag* je jménem reálného čísla, které transcenduje výrazové možnosti D.

Zde chápeme paradox jako symptom, že je systém D příliš omezený, totiž v konfrontaci s dalšími racionálními kritérii toho, co lze nebo je vhodné ještě za reálné číslo považovat. To je analogické diskutovanému případu omezenosti 'přísně' konstruktivních či algebraických metod popisu kontinua ve vztahu k okamžitým potřebám matematické praxe, např. měření obvodu kruhu. Právě proto jsme Cantorův důkaz nespočetnosti kontinua zařadili po bok Bolzanova důkazu věty o mezihodnotě a Dedekindova důkazu rekurzivního teorému, tedy do kategorie důkazů nevlastních, artikulujících jistá rozhodnutí, v tomto případě opět rozhodnutí definovat pojem reálného čísla jinak, totiž dostatečně liberálně na to, aby transcendoval každou schematizaci, která by jeho instance umožnila uspořádat v řadu.

Domyslíme-li právě řečené do důsledku, zjistíme, že je tím (i) podkopán základ Königova paradoxu a zároveň (ii) opodstatněn Poincarého útok na nekonečno aktuální. Důkaz nespočetnosti kontinua totiž neimplikuje nutně, že je reálných čísel *více* než přirozených, a že tedy musí existovat reálná čísla nepojmenovatelná v jazyce. K takovému závěru lze dojít jen tehdy,

(1) předpokládáme-li, že je jejich celek dán nezávisle na zvolených reprezentacích a

(2) dáváme-li Cantorovu idiosynkratickému pojmu (porovnávání) velikosti množiny skrze (ne)možnost jedno-jednoznačného přiřazení nějaký přirozený význam.

To první jde zcela proti duchu obratu k jazyku, který je vodítkem našeho zkoumání a jehož nevyhnutelnost jsme zdůvodnili dříve. To druhé je pošetilé již proto, že navržené porovnávání množin mělo zprvu jasné 'kontraintuitivní' důsledky, např. zobrazení množiny do sebe sama, které je v rozporu s Eukleidovým požadavkem, aby byl celek větší než část, tedy něčím, co by 'většina' těch, kdo neznají Cantorovu nauku, označila právě za 'přirozené'. — V Cantorově definici rovnosti mohutností máme proto jen další exemplář do naší kolekce rozhodnutí, která bylo možné, nikoli nutné, v oblasti základů matematiky učinit.[7]

Ve vlastním zdůvodnění jak své definice porovnávání mohutností, tak definice reálného čísla, užívajících pojmu funkce, Cantor nicméně ukázal, že myslí jednodimenzionálně, přesně ve smyslu úvodní (s. 19) Platónovy charakterizace vědce jakožto snící bytosti, která se omezuje

[7] Možnost vybudování 'eukleidovské' teorie množin na předpokladu, že injektivita zobrazení $f : A \to A$ již implikuje jeho surjektivitu, diskutuje např. Mayberry [2000]. Podobně Vopěnka [1989, s. 364 nn] v komentáři k Bolzanovi [1851, § 20] uvažuje tzv. GENERÁLNÍ KOLAPS, podle něhož jsou všechny nekonečné množiny rovnomocné, jako seriózní alternativu Cantorova předpokladu, že lze aktualizovat množinu všech potencí. Srov. k tomu poznámku na straně 128.

pouze na objekt svého zkoumání, nikoli na způsob, jímž je nám dán. V naší formulaci to znamená, že nebere v úvahu reflektující metajazyk a začíná tím, co má být výsledkem definujícího procesu, ponechávaje stranou jeho bytostnou relativitu a závislost na jazyku.[8] Tím, že uchopil pojem funkce jako nejliberálnější rozšíření pojmu přiřazení, které je jednoznačné směrem vpravo, Cantor zdánlivě vyhrál celou ‘hru’ na vymezení kontinua jednoduchým *fiat*. Stejnou strategii přijal později i ve vztahu k pojmu množiny, který pro něj nezávisí na daném predikátu, jako u Frega, nýbrž je primárně výsledkem jakéhokoli shromažďování předmětů v jeden celek. V tomto případě ale ukázal slabiny Cantorova velkorysého přístupu právě objev matematických paradoxů, k nimž nebyl — přes jistá upřesnění, která podáme dále — Cantor schopen říci nic víc, než že je mají na svědomí nekonzistentní množiny, což se jako v každé platonistické teorii rovná prohlášení, že existuje, co existuje, a neexistuje, co neexistuje. Nás ovšem nezajímají tautologie, ale netriviální kritéria toho, kdy lze výraz daného kontextu považovat za jméno, což se právě rovná pozorování, že při posuzování toho, co existuje, je vždy třeba začít jazykem.

Ti, kdo snad stále ještě tíhnou ke Cantorovu způsobu myšlení, by si měli uvědomit, že stejně jako definoval reálné číslo odkazem na *libovolnou* (fundamentální) posloupnost, mohli Řekové popsat číslo jako bod konstruovatelný *libovolnými* prostředky nebo Gödel charakterizovat dokazatelné věty jako ty, co jsou pravdivé. Problémy, jako je kvadratura kruhu, axiomatizovatelnost aritmetiky či rozhodnutelnost predikátového počtu (Hilbertův ‘Entscheidungsproblem’), by tím jednoduše zmizely, neboť první z nich byl za těchto podmínek vyřešen již Archimédem aplikací mechanických metod a poslední může každý vyřešit sám, když se pokusí najít formuli, o níž nepůjde zjistit, že se nejedná o tautologii. Jak jsme již zmínili a ještě zmíníme pro konkrétní případy, dokázaná neřešitelnost těchto problémů neznamená, že jsou neřešitelné absolutně, ale prostřednictvím kanonických metod, popsaných předem. Z toho plyne, že nástroje, které máme v ten který moment k dispozici (pravítko a kružítko, deduktivní důkazové systémy, Turingův stroj) hrají podstatnou roli v posuzování toho, co existuje. A protože jsou tyto nástroje nejlepší *v daný* moment, jsou také omezené a mohou být později nahrazeny nástroji jinými, neboli: pojem existence je pojmem relativním.

Abychom se ale vrátili k úloze diagonálního argumentu při definici reálného čísla. Náš postoj k tomu, jak diagonální konstrukci využívá Cantor, nejlépe shrnuje Wittgenstein [1984*a*, s. 131], když říká:

> To, co je na pojetí: “všechna reálná čísla nelze uspořádat do řady”, či dokonce “množina … není spočetná” nebezpečné a

[8] Vliv pohybů v jazyce na předmět matematiky analyzuje Kvasz [1998] a Kvasz [2008].

> klamné, spočívá v tom, že je zde záležitost tvorby a určení pojmu prezentována jako přírodní jev.

Ve skutečnosti jsme oprávněni pouze k závěru, že je pojem reálného čísla fixován jinak než pojem čísla přirozeného, tedy přes systém jmen, který transcenduje každou schematizaci, a nemůže být proto pod hrozbou sporu považován za uzavřený, definitivní či, chceme-li, aktualizovaný, jak to odpovídá Poincarého analýze. Tento poslední obrat je ovšem třeba brát se značnou rezervou, neboť může vést k alternativnímu pojetí kontinua a klasické logiky. — Konstruktivně interpretován nám Cantorův důkaz pouze ukazuje, jak lze k danému systému jmen reálných čísel sestrojit jakousi lokální *deixí* jméno čísla, které mezi nimi prokazatelně není. Tento proces lze provádět opakovaně, a dospívat tak v odkazu na dosud zkonstruované k hierarchii reálných čísel. Ta je v každé ze svých fází závislá na fázi předchozí, tj. jiný začátek by vedl k jiné hierarchii, a je evidentně spočetná. Tím padá jednak pověra o nezávislosti matematiky na konkrétní situaci, vyjádřená zvláště odpudivě v tvrzení, že matematické pravdy platí ve všech možných světech, případně věčně, jednak se potvrzuje Kantova teze, že nekonečno je především formou indukce, jíž může být i indukce transfinitní. Podstatné je, že se na třídu takto generovaných reálných čísel, případně ordinálů, přes něž indexujeme jednotlivé stupně hierarchie, nesmíme dívat jako na uzavřenou ve výše uvedeném smyslu definitorické nasycenosti. To neznamená přímo, že bychom nemohli hovořit *o všech* reálných číslech, či přes ně uniformně kvantifikovat, pouze si musíme zvyknout, že se příslušnou proměnnou vztahujeme k velkoryse definovanému výrazovému systému, a že tedy rozhodnutí, zda výraz je či není jménem reálného čísla, není otázkou prosté syntaktické kontroly, ale ověření globálních sémantických požadavků, často vázaných na parametry nějaké konkrétní situace. Možnost takovýchto komplikovaných pojmenování s oblibou používal Brouwer v konstrukci svých slavných slabých protipříkladů proti zákonům klasické logiky. K tomu se dostaneme v kapitole 7.

Jelikož se čistě množinovým paradoxům budeme věnovat v oddílech týkajících se Zermelovy axiomatizace teorie množin, přejděme ještě v rychlosti k paradoxům typu lháře, tj. klasického EPIMÉNIDOVA PARADOXU:

> Kréťan řekl: “Všichni Kréťané jsou lháři.”

V tomto konkrétním případě se, jak známo, o skutečný paradox nejedná, neboť jednak neplatí, že by lhář musel lhát pořád, a i kdyby ano, je věta jednoduše nepravdivá, a představuje tak inverzní případ Quinova veridického paradoxu, tedy PARADOX FALSIDICKÝ. Lepší příklad je proto paradox připsaný Eubúlidovi:

> Eubúlidés řekl: “Teď lžu.”

či jeho Tarského [1933, s. 158] adaptace:

(c) Věta (c) je nepravdivá.

Ve všech těchto větách se jedná o případy tzv. AUTOREFERENCE, tedy odkazu k sobě sama. Ta se dnes stala zvláště pod vlivem Gödelových výsledků a jejich variant dosti populárním tématem, je ale pro účely analýzy paradoxu asi stejně užitečná jako příměr bludného kruhu, jehož je v Russellově čtení projevem.

Nám stačí zobecnit již řečené: Stejně jako není výraz sám o sobě jménem, není ani větou ve smyslu artikulace nějakého rozdílu, tahu v jazykové hře, něčeho, co bychom chtěli kvalifikovat jako dobré či špatné, specificky tedy pravdivé či nepravdivé. Pro jednoduchost můžeme zavést obvyklé rozlišení správně utvořené věty jako gramatické kategorie a soudu, který vyjadřuje, jako kategorie sémantické. Připustíme-li nyní, že je výraz (c) gramaticky správně utvořenou větou, neznamená to ještě, že by měl artikulovat soud, tj. být pravdivý či nepravdivý. Říkáme-li, že se jedná o soud, pak musíme vysvětlit, jaký rozdíl v něm má být vyjádřen, tedy podle jakých pravidel, případně za jakým účelem má být věta klasifikována jako pravdivá či nepravdivá. Jestliže se nám to povede, což není nijak dopředu vyloučeno, bude výraz (c) soudem. Pokud ne, odkazujeme s jeho pomocí do prázdna, totiž tam, kde žádný soud není. Příslušná věta pak nemá jednoduše smysl a žádná autoreference či bludný kruh s tím obecně nemají opět co do činění, a pokud ano, tak způsobem, jenž může být v jiných případech zcela neškodný, totiž když např. hovoříme sami o sobě nebo o skupině lidí, která nás zahrnuje.

To je případ i posledního z prominentních sémantických paradoxů, jenž byl publikován dvojicí německých filosofů Kurtem Grellingem a Leonardem Nelsonem [1908]. Grelling psal v té době v Göttingen disertaci pod Hilbertovým vedením a vedl s Russellem korespondenci ohledně možného překladu *Principles* do němčiny.[9] Paradox, známý jako PARADOX GRELLINGŮV, zní takto:

> Některé predikáty lze predikovat sobě, např. "slovo" je slovo, "český" je česky. Ty se nazývají AUTOLOGICKÉ. Pro jiné to zase neplatí, např. "dřevěný" není dřevěný, "německý" není německy. Ty se nazývají HETEROLOGICKÉ. Otázka je, ke které z těchto dvou skupin patří predikát "heterologický", a snadným rozborem případů zjistíme, že je heterologický, pokud není heterologický, a *vice versa.*

Ačkoli je opět závěr paradoxu formulován jasně, předpoklady opět již tak jasné nejsou. Podobně jako není nutné předpokládat, že má každá

[9] Viz Grattan-Guinness [2000, s. 336 nn].

gramaticky utvořená věta nějakou pravdivostní hodnotu, není ani důvod předpokládat, že by každý predikát o sobě musel být smysluplně, resp. pravdivě či nepravdivě predikovatelný. Tak třeba již u predikátu "dřevěný", jenž se primárně vztahuje k empirickým výrazům, není jeho aplikace na výrazy přímočará, zvláště když se k nim potřebujeme vztahovat jako k abstraktním *typům*, nikoli *token* napsaným na papíře. Dojde-li k takovému použití, jedná se tedy o tvrzení druhu "čísla nejsou zelená" (viz s. 179 n), jimž není důvod přiřazovat pravdivostní hodnotu. To je starý argument proti všeobjímajícímu univerzu diskurzu. Podstatné ale je, že uvažované výrazy jako "dřevěný" či "zelený" mají alespoň nějaký smysl, tj. že je lze smysluplně predikovat v nějaké oblasti. Teprve tehdy se nazývají predikáty. Zda je to případ výrazu "heterologický", je třeba posoudit podle okolností, v nichž by měl být využíván, přičemž uvedený paradox lze chápat jako náznak, že to nebude snadné.[10]

6.3 Teorie typů

K formulaci teorie typů založené na Poincarého podnětu dospěl Russell v již zmíněném článku [1908] coby přípravě na první díl monumentálních *Principia Mathematica* [1910–1913]. Russellova [1908, s. 163] základní idea je přitom stejná jako u teorie původní, totiž že

> cokoli obsahuje vázanou proměnnou, musí být odlišného typu od možných hodnot této proměnné; řekneme, že je vyššího typu.

Typ (*type*) je v souladu s očekáváním definován jako "obor významu propoziční funkce", nejnižší (0) náleží oboru individuí. Propoziční funkci $\varphi(x)$ proměnné x Russell značí jako

$$\varphi(\widehat{x})$$

z důvodu odlišení od $\varphi(x)$ coby zápisu hodnoty funkce pro argument x. Vztahuje-li se x k oboru nějakého typu, náleží $\varphi(\widehat{x})$ typu vyššímu. V tom ještě není žádná odlišnost od Frega, vyšší typ ale dostane i třída $\{x \mid \varphi(x)\}$, resp.

$$\widehat{x}\varphi(x)$$

v Russellově zápisu, a propozice $(\forall x)\varphi(x)$.[11] — Kdybychom nyní uvedeným výrazům přímo přiřadili typ 1, dospěli bychom iterováním téhož

[10] Výčet a podrobný komentář paradoxů z rozličných oblastí, tj. nejen paradoxů logických, podává Kannetzky [2000]. My jsme v interpretační linii (velmi volně) sledovali Stekelera [1986].

[11] V následujícím výkladu Russellovy teorie typů se v principu držíme prezentace Quinovy [1963]. Velmi podrobný, i když nijak inspirující přehled podává Grattan-Guinness [2000]. Filosofický komentář k vybraným partiím teorie typů lze nalézt in Potter [2000].

postupu k JEDNODUCHÉ (*simple*) TEORII TYPŮ. Russellova původní idea je ale podstatně komplikovanější, neboť dále přihlíží ke struktuře výrazu $\varphi(\widehat{x})$, tj. především k výskytu možných vázaných proměnných. Funkce $(\forall\varphi)\varphi(\widehat{x})$, která by v jednoduché teorii byla typu 1 a jako taková hodnotou proměnné φ, je v rámci Russellovy ROZVĚTVENÉ (*ramified*) TEORIE TYPŮ rozpoznána jako odlišného ŘÁDU (*order*), a tudíž za φ nesubstituovatelná. Russellova expozice této teorie je ovšem velmi nepřehledná a k odlišnostem dochází jak mezi uvozující verzí z roku 1908 a verzí z *Principií*, tak v rámci *Principií* samotných.[12]

V Myhillově [1974] moderní rekonstrukci lze typy chápat jako konečné klesající posloupnosti přirozených čísel a řád jako jejich první člen. Má-li proměnná x ve funkci $\varphi(\widehat{x})$ typ t, pak typ této funkce stejně jako typ výrazu $\widehat{x}\varphi(x)$ získáme zřetězením posloupnosti t s číslem m, které je o 1 větší nežli nejvyšší řád některé z užitých proměnných. Z elementárního výroku (propozice) $f(a)$, tj. výroku bez logických spojek a kvantifikátorů, lze takto získat elementární propoziční funkci

$$f(\widehat{x})$$

typu $\langle 1, 0\rangle$ stejně jako elementární propoziční funkci

$$\widehat{\varphi}(a)$$

typu $\langle 2, 1, 0\rangle$. Je-li typem proměnných x, y, resp. φ posloupnost $\langle 0\rangle$, resp. $\langle 1, 0\rangle$, jsou obě funkce

$$(\forall\varphi)\varphi(\widehat{x}) \qquad\qquad (\forall\varphi)(\forall y)\varphi(\widehat{x}, y)$$

typu $\langle 2, 0\rangle$. Atd. Ačkoli by tomu princip bludného kruhu nebránil, Russell nedovoluje kvantifikovat přes všechny vlastnosti objektů jistého typu, neboť mají různé řády. Stejně tak není možné kvantifikovat přes všechny vlastnosti téhož řádu. Povinnosti explicitně specifikovat typy jednotlivých výrazů se ale Russell v praxi vyhýbal prostřednictvím tzv. SYSTEMATICKÉ, resp. TYPOVÉ VÍCEZNAČNOSTI (*typical ambiguity*) neboli konvence, podle níž je třeba výraz číst v souladu s principy teorie typů, tj. doplnit si typy tak, aby neporušovaly princip bludného kruhu. Výrazy jako $x \in x$, u nichž to možné není, jsou považovány za nesmyslné. U výrazu

$$\psi(\widehat{\varphi}) \rightleftharpoons \neg\widehat{\varphi}(\widehat{\varphi})$$

neboli predikátu "být predikátem, jenž není predikovatelný sám sobě" je paradox blokován hned dvojím způsobem: (i) jednak je agramatický, neboť funkce má vždy vyšší řád než její argument, (ii) jednak nelze dosadit ψ za φ, neboť ψ musí být vždy většího řádu.

[12] Více k tomu říká Potter [2000, s. 140 nn].

Je zřejmé, že aparát systematické víceznačnosti je dnes zastoupen rozdílem výrazu jazyka a schématu výrazů coby objektu jazyka vyššího řádu. Ze stejného soudku je i Russellova vykřičníková konvence, označující jako

$$\varphi!(\widehat{x})$$

ty z funkcí, které jsou pouze o jeden řád vyšší nežli hodnota jejich argumentů, tedy např. typů $\langle 1, 0\rangle$, $\langle 2, 1, 0\rangle$, nikoli $\langle 2, 0\rangle$. Russell je nazývá PREDIKATIVNÍMI. Obojí, tj. název sám a notační konvence, u něho ovšem opět procházejí jistým vývojem.[13]

Termín "predikativní" použil Russell [1906*b*, s. 38] poprvé v rámci expozice své cik-cak teorie řešení paradoxů. Predikativní nazývá ty predikáty (propoziční funkce), které určují třídu. Třídu neurčují pochopitelně ty predikáty φ, u nichž — jako v případě $x \notin x$ — dospíváme ke sporu, což Russell opisuje termíny jejich ireducibility, získané 'cik-cak' přecházením mezi předměty splňujícími φ a $\neg\varphi$. Teorie sama není příliš průhledná, její základní idea nicméně nevybočuje z Cantorova prohlášení některých množin za nekonzistentní, s pleonastickým dodatkem, že se to týká množin komplikovaných.[14] Ve své reakci na Russellovy články označil Poincaré [1906*b*, § 9] bludné definice, přítomné v paradoxech, za IMPREDIKATIVNÍ a vyjádřil podiv, zda má Russell svojí 'cik-cak' teorií na mysli něco podobného. Russell poté přijal myšlenku bludného kruhu za svoji a pojem predikativity začal užívat ve výše uvedeném významu, tj. poněkud specifičtěji nežli Poincaré. Zápisem $\varphi!(\widehat{x})$ navíc zprvu [1910–1913, díl I, *12] označoval pouze elementární funkce, tedy ještě užší obor predikativních výrazů.

Užití kvantifikace přes predikativní funkce umožňuje zmírnit systematickou víceznačnost relativně k typu volné proměnné. Např. u Fregovy definice čísla získáváme výraz

$$N(\widehat{x}) \rightleftharpoons (\forall\varphi)[\varphi!(0) \wedge (\forall y)(\varphi!(y) \rightarrow \varphi!(s(y)) \rightarrow \varphi!(\widehat{x})]$$

typu $\langle 2, 0\rangle$. Vyskytuje se zde ale jiný problém. Z pouhé impredikativity v Russellově smyslu plyne, že nelze N substituovat za φ, přičemž — jak jsme viděli — možnost tohoto dosazení se používá k obhajobě adekvátnosti N jako definice čísla, tj. toho, že skutečně zachycuje všechna a pouze přirozená čísla. V souladu s tím, co jsme řekli v předchozí kapitole, nevypadá tato potíž jako fatální, neboť zmíněné zdůvodnění nemá samo věcný základ a okolnost, že netypizovaná formule N je kritickým příkladem impredikativní definice v Poincarého širším smyslu, na tom již mnoho nezmění. Navíc ani v tomto případě ale žádná hmatatelná škoda

[13] Významovým posunům termínu "predikativní" i mimo kontext Russellovy filosofie se věnuje Feferman [2005].

[14] Pokus o jistou heuristiku lze nalézt in Tiles [1989].

nevzniká, tj. není jasné, jak by šlo z definice N odvodit spor. Vážnější, i když podobný problém představuje Dedekindova definice reálných čísel pomocí řezů.

Řez na racionálních číslech je definován pomocí nějaké vlastnosti $\varphi(\widehat{x})$. Jelikož se racionální čísla definují jako ekvivalenční třídy dvojic čísel přirozených, nebude proměnná x jistě základního typu, ale nějakého řádu $n > 0$. Víme, že Dedekindova konstrukce měla za cíl platnost věty o suprému pro obor řezů suplujících požadovaná reálná čísla. Užíváme-li řezy redukované, je nějaká množina řezů vymezena vlastností $\psi(\widehat{\varphi})$, kterou mohou mít vlastnosti φ vydělující řezy. Důkaz věty o suprému je založen na tom, že výraz

$$(\exists\varphi)(\psi(\varphi) \wedge \varphi(\widehat{x})),$$

odpovídající sjednocení omezené množiny řezů, definuje řez, jenž je požadovaným suprémem. I když ale specifikujeme užité výrazy tak, aby byly predikativní, tj. na

$$\theta(\widehat{x}) \rightleftharpoons (\exists\varphi)(\psi!(\varphi) \wedge \varphi!(\widehat{x})),$$

má výraz $\theta(\widehat{x})$ řád $n + 2$, tedy o 1 vyšší nežli výchozí reálná čísla, a nemůže být tedy jedním z nich, resp. nemůže být číslem téhož typu. Věta o suprému, s ohledem na niž byla Dedekindova konstrukce vymyšlena, tak neplatí a logicistické základy matematiky, jež se Russell pokoušel teorií typů zachránit, dostávají další výraznou trhlinu.

Technickým řešením by opět bylo nalezení formule $\sigma(\widehat{x})$, která je ekvivalentní s $\theta(\widehat{x})$ a má požadovaný nižší řád, speciálně tedy formule takové, že

$$(\forall x)[\sigma!(x) \leftrightarrow \theta(x)].$$

Russell právě a pouze za tímto účelem rozšiřuje svůj systém o AXIOM REDUCIBILITY (*axiom of reducibility*), který existenci extenzionálně ekvivalentní predikativní funkce ke každé funkci postuluje:

$$(\forall\varphi)(\exists\psi)(\forall x)[\psi!(x) \leftrightarrow \varphi(x)].$$

Z diskuze slabých míst Fregova logicismu ale víme, že věcně takové opatření nic neřeší, ba naopak: to, že je musíme explicitně formulovat, celou záležitost ještě více komplikuje. Z hlediska externí plauzibility Russellovy teorie má navíc axiom reducibility další vady. Zaprvé činí zbytečnou její ramifikaci a zadruhé opět aktualizuje otázku, zda je výsledný systém bezesporný. — Russell přesto na rozvětvené teorii trval, již proto, že se zdála bránit paradoxům sémantickým. Heterologický paradox je totiž v rámci jednoduché teorie reprodukovatelný např. takto:[15] Definujme pojem heterologičnosti jako

[15] Zde sledujeme výklad Potterův [2000, s. 155 nn].

$$\mathrm{Het}(x) \rightleftharpoons (\exists\psi)(x \text{ znamená } \psi(\widehat{z}) \wedge \neg\psi(x))$$

a předpokládejme, že

$$\text{“Het” znamená } \mathrm{Het}(\widehat{z}).$$

Dále předpokládejme Het(“Het”). Z pouhého dosazení platí

$$(\exists\psi)(\text{“Het” znamená } \psi(\widehat{z}) \wedge \neg\psi(\text{“Het”})).$$

Předpokládáme-li nyní, že jeden výraz může — nebo by alespoň měl — znamenat pouze jednu jedinou věc, odvodíme výraz

$$\neg\mathrm{Het}(\text{“Het”}).$$

Podobně dostaneme opačný směr. Odvození samo názorně demonstruje, jak významné je v této odrůdě paradoxů užití sémantických obratů a presupozic. V důsledku toho je také mnozí, např. Peano [1906a, s. 157] či Ramsey [1925, s. 184, 206], nepovažovali za dobrý důvod, proč rozvětvenou teorii typů pěstovat v rámci projektu zaměřeného primárně na základy matematiky. Tito kritici mohli také poukázat na fakt, že v rozvětvené teorii typů s axiomem reducibility paradox ve skutečnosti odvoditelný je. Úvaha je následující: Nejprve vezměme predikát

$$\mathrm{Het}(x) \rightleftharpoons (\exists\psi)(x \text{ znamená } \psi!(\widehat{z}) \wedge \neg\psi!(x)).$$

Ten má řád o 1 vyšší nežli proměnná ψ a o 2 vyšší nežli proměnná x, a paradox tedy nelze odvodit výše uvedeným způsobem. Uvažme ale příslušnou predikativní funkci Het!(x). Z ekvivalence

$$(\forall x)[\mathrm{Het}!(x) \leftrightarrow \mathrm{Het}(x)]$$

plyne nejprve

$$\begin{aligned}\mathrm{Het}!(\text{“Het!”}) &\leftrightarrow \mathrm{Het}(\text{“Het!”})\\ &\leftrightarrow (\exists\psi)(\text{“Het!” znamená } \psi!(\widehat{z}) \wedge \neg\psi!(\text{“Het!”})).\end{aligned}$$

Z toho již odvodíme spor

$$\mathrm{Het}!(\text{“Het!”}) \leftrightarrow \neg\mathrm{Het}!(\text{“Het!”}).$$

Potter [2000, s. 156] ve své rekonstrukci paradoxu upozorňuje, že ke sporu dojdeme vlastně jen tehdy, když připustíme, že má příslušná predikativní funkce garantovaná axiomem reducibility jméno. Jelikož moderní logické systémy možnost nepojmenovaných předmětů připouštějí, nejedná se o kontradikci v přísně logickém smyslu, což ostatně dosvědčují i důkazy bezespornosti různých variant teorie typů s axiomem reducibility.[16] Přesto všechno nemá Potterův argument z věcného hlediska velkou váhu. Vysvětleme proč.

[16] Viz Myhill [1951].

Russellova teorie typů na rozdíl od Fregovy *Begriffsschrift* a jeho *Grundgesetze* byla od počátku budována jako intenzionální systém, tj. se systematickým rozlišením mezi grafem či průběhem funkce, jak jej pojímá Frege a standardní logika, a funkcí definovanou skrze strukturovaný výraz. Propoziční funkce je chápána v tomto druhém smyslu, přičemž Russell typicky selhává v rozlišování této funkce samotné a výrazu, který ji definuje. To může být v jistém ohledu chyba, obecně se ale o velký problém nejedná, neboť k propoziční funkci, resp. funkci vůbec, jinak nežli přes definující výraz stejně dojít nelze a vše další je jen otázkou zvolených kritérií ekvivalence, která jsou v intenzionálním případě prostě jemnější než v extenzionálním: v extrémech tak proti sobě stojí prostá shoda hodnot pro daný vstup (rovnost grafu) a stav, v němž každý výraz (*qua* typ, nikoli *token*) určuje skrze svoji strukturu (způsob výpočtu) zcela jedinečnou funkci (rovnost konstrukce).

Jelikož matematici jako Peano, Ramsey či Gödel obvykle nemají příliš pochopení pro 'metafyzické', ve skutečnosti ale jen 'metajazykové' otázky předmětné konstituce, není divu, že se problémy predikativity a logických paradoxů snaží řešit odkazem na to, že (1) sémantické paradoxy nemají žádnou matematickou relevanci a že (2) definovat množinu výrazy, jako jsou $N(x)$ či $(\exists\varphi)(\psi(\varphi) \wedge \varphi(x))$, je jedna věc, a být touto množinou druhá, přičemž formální bludnost první nemůže tu druhou, na ní nezávislou, nijak ohrozit. O tom jsme již mluvili v oddíle 5.9. Problém, jenž si ti, kdo jako Russell přijali více či méně konstruktivní přístup k problematice základů, více či méně uvědomují, spočívá v pozorování, že abstraktní objekty na výrazech jazyka podstatně závisejí, ať už si to přiznáváme nebo nikoli. To je samozřejmě neopravňovalo prohlašovat každý formálně komplikovanější výraz za vnitřně (z čí vůle?!) bludný. Nicméně platí, že argumenty, jako je ten Potterův, odkazující se navíc na nespočetné, a tudíž nepojmenovatelné množství predikativních funkcí nad nekonečným univerzem objektů, netrefují cíl ani omylem.

Ve vztahu k přijetí či nepřijetí axiomu reducibility ale stále trvá určitá schizofrenie. Z interního hlediska realizace logicistického plánu podle dříve načrtnutých linií je jeho zavedení nezbytné. Ani Leibnizův princip

$$x = y \leftrightarrow (\forall\psi)(\psi!(x) \leftrightarrow \psi!(y))$$

bez axiomu totiž nedává smysl, zatímco s ním je hned dokazatelný. Na druhou stranu axiom rozvětvenou teorii externě ničí. Jednak nemá onen jasně konstruktivní charakter jako původní principy a nezdá se, že by jej šlo podle nějakého pravidla označit za analytický. — Russell [1925, s. xiv] ostatně i později jeho zavedení označuje za výhradně pragmatické. — Navíc, jak jsme již zmínili, axiom převádí intenzionální systém rozvětvené teorie typů neprůhledným způsobem na systém extenzionální. K tomu řekneme nyní více.

Predikativní funkce jsou právě ty, které v jistém specifickém smyslu nemají žádnou (resp. žádnou komplikovanou) vnitřní strukturu, a nesou tak společné rysy s množinami coby abstrakty od tvaru definujícího predikátu. Russell vedle hierarchie propozičních funkcí a propozic, které považoval za funkce s nulovým počtem argumentů, uvažoval i hierarchii tříd (*class*). V duchu své dřívější 'no-class theory' o nich ale přemýšlel jako o odvozených entitách, zavedených v kontextu věty

$$x \in \widehat{y}\varphi(y) \leftrightarrow \varphi(x).$$

Později k tomu dodal podmínku predikativity, tj. třídy odpovídaly pouze predikativním funkcím. Tento dodatek se stává zbytečným v kontextu Russellovy jiné, obecnější konvence, vysvětlující užití třídních abstraktů ve větách jako

$$f(\widehat{x}\varphi(x)) \leftrightarrow (\exists\psi)[(\forall x)(\psi!(x) \leftrightarrow \varphi(x)) \wedge f(\psi!\widehat{z})].$$

Propoziční funkce tedy platí o dané množině, jestliže platí pro nějakou predikativní funkci ekvivalentní vydělujícímu predikátu. Jelikož podle axiomu reducibility nějaká taková funkce existuje vždy, říkáme vlastně větou $f(\widehat{x}\varphi(x))$ tolik, že f platí o $\varphi(x)$ nezávisle na její intenzionální struktuře, jinými slovy: že platí i o všech funkcích téže extenze. Řeč o třídách je tedy rozšifrována jako řeč o predikativních funkcích.

Russell ovšem nepředpokládá, že by kritéria identity predikativních funkcí na rozdíl od funkcí obecných byla extenzionální, tj. že by platilo

$$(\forall x)(\varphi!(x) \leftrightarrow \psi!(x)) \leftrightarrow (\forall F)[F!(\varphi!(x)) \leftrightarrow F!(\psi!(x))].$$

Užité konvence nicméně systém zjednodušují tak, že je dokazatelný princip extenzionality pro třídy, a to v tom tvaru, že třídy týchž prvků jsou prvky týchž tříd, neboli

$$(\forall x)(x \in \alpha \leftrightarrow x \in \beta) \wedge \alpha \in \gamma \rightarrow \beta \in \gamma,$$

kde je potlačená kvantifikace přes třídové proměnné α, β a γ kontextuálně vysvětlena jako

$$(\forall\alpha)F(\alpha) \rightleftharpoons (\forall\varphi)F(\widehat{x}\varphi!(x)).$$

Přes vylíčené teoretické komplikace se tedy Russell díky axiomu reducibility mohl v praxi omezit pouze na predikativní funkce a třídy, tedy na objekty konsekutivních řádů. O typech potom hovoří zejména v tomto zjednodušeném smyslu, v němž jsou individua objekty typu 0, množiny individuí objekty typu 1, množiny množin individuí objekty typu 2 atd. Problematické jsou přirozeně relace, které jsme dosud pro jednoduchost vůbec neuvažovali. Stručně je tedy ještě zmíníme.

Russell, věrný svému intenzionálnímu přístupu, rozlišuje dyadické (a víceargumentové) propoziční funkce (*relation-in-intension*) od dyadické (víceargumentové) verze tříd (*relation-in-extension*), které opět zavádí v kontextu věty jako

$$f(\widehat{x}\widehat{y}\varphi(x,y)) \leftrightarrow (\exists\psi)[(\forall x,y)(\psi!(x,y) \leftrightarrow \varphi(x,y)) \wedge f(\psi!(\widehat{x},\widehat{y}))].$$

Tím pádem vedle aparátu abstrakce tříd pěstuje zcela heterogenní aparát abstrakce relací, což systém znovu komplikuje přesto, že byl již simplifikován omezením na predikativní případy. Zjednodušení lze dosáhnout tak, že zavedeme jako Peano primitivní pojem uspořádané dvojice $x;y$ a abstrakci relací definujeme jako

$$\widehat{z}(\exists x,y)(\varphi(x,y) \wedge z = x;y),$$

tj. uchopíme ji, jak je to dnes běžné, jako množinu dvojic (induktivně pak i libovolných n-tic), které danou relaci splňují. Američan Norbert Wiener [1914], jenž přijel k Russellovi roku 1913 na badatelský pobyt, odstranil nakonec i tuto zátěž dalšího primitivního pojmu redukcí uspořádané dvojice na množinu jistého typu, dnešním zápisem

$$\langle x,y\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{\{\{x\},\emptyset\},\{\{y\}\}\}.$$

Casimir Kuratowski [1921] tuto definici zjednodušil do standardní podoby

$$\langle x,y\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x,y\},\{y\}\}$$

a podle Quina [1995, s. 24] tak spolu s Wienerem úspěšně dokonal Russellovu revizi Fregova logicismu. Frege přitom definoval extenzi (průběh hodnot) relace chytrým trikem dvojité abstrakce, tj. aplikací abstraktoru $\widehat{y}$ na funkci $\widehat{x}\varphi(x,y)$ s výsledkem $\widehat{y}\widehat{x}\varphi(x,y)$ coby extenzionálně chápanou funkcí, která argumentům y přiřazuje funkce, které x přiřazují hodnotu $\varphi(x,y)$. Uspořádaná dvojice $\langle x,y\rangle$ prvků je definována dodatečně jako třída všech relací, v nichž se x nachází ve vztahu k y. Výhody a nevýhody tohoto přístupu podrobně diskutuje Heck [1995, s. 301]. První, kdo redukoval dvojici na množiny, byl ovšem Hausdorff [1914, s. 32 n]:

$$\langle x,y\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x,1\},\{y,2\}\}.$$

O skutečné podstatě logicistického úspěchu, tj. redukce všech pojmů na některé základní, lze mít samozřejmě stále pochybnosti, z nichž některé, související s vlastní definicí čísla a rekonstrukcí aritmetiky, zmíníme později. Wienerova reforma nicméně přiblížila simplifikovanou teorii typů ještě o krok blíže Zermelem reformované teorii množin, která ale zprvu také nedisponovala přímým převodem relací (uspořádání) na množiny.[17] Zermelova axiomatizace bude tématem zbývajících stránek kapitoly.

[17] Viz např. Lavine [1994, s. 106], Hallett [1984, s. 256].

6.4 Cantorovo absolutní nekonečno

Axiomatická teorie množin je vedle teorie typů další z reakcí na objev paradoxů, a to z hlediska obecného přijetí reakcí nejúspěšnější. Ačkoli se obě teorie od počátku vyvíjely odděleně, postupem času dospěly do stavu, kdy si byly ontologicky velmi blízké, a to ku prospěchu teorie množin. Pozoruhodné je, že i okolnosti vzniku obou teorií byly podobné. Vraťme se proto zpět do roku 1904 na matematický kongres v Heidelbergu.

Königovo domnělé vyvrácení hypotézy kontinua, jež dalo podnět k formulaci Königova paradoxu, spočívalo na dvou základních tvrzeních. Prvním z nich byla speciální verze toho, co dnes známe jako KÖNIGOVU NEROVNOST, podle níž pro systémy $\{\kappa_i \mid i \in I\}$, $\{\lambda_i \mid i \in I\}$ kardinálů takové, že $\kappa_i < \lambda_i$ pro každé $i \in I \neq \emptyset$, platí

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i.$$

Důkaz: Vztah $\leq$ plyne snadno z úvahy $\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \sum_{i \in I} \lambda_i \leq \prod_{i \in I} \lambda_i$. Platí pak pro $\lambda_i \geq 2$, v důkazu nerovnosti můžeme ale členy $\lambda_j = 1$ a $\kappa_j = 0$ ze součinu a součtu vynechat při zachování jejich mohutnosti. Nechť dále $S := \bigcup_{i \in I} A_i$ a $T := \prod_{i \in I} B_i$ pro nějaké množiny A_i a B_i takové, že $|A_i| = \kappa_i$ a $|B_i| = \lambda_i$, kde A_i, A_j jsou navíc vždy pro $i \neq j$ disjunktní. Chceme ukázat, že žádné zobrazení $f : S \to T$ není surjektivní. Pro každé $i \in I$ je množina $C_i = B_i - \{f(y)(i) \mid y \in A_i\}$ neprázdná, neboť jinak by, v rozporu s předpokladem, funkce $g(y) = f(y)(i)$ určila zobrazení A_i na B_i. Vezmeme tedy nějakou funkci $h \in T$ takovou, že $h(i) \in C_i$. Jelikož tak $h(i) \neq f(y)(i)$ pro všechna $y \in A_i$ a $i \in I$, platí $h \notin rng(f)$. $\square$

Správně se tento vztah nazývá nerovností ZERMELOVOU-KÖNIGOVOU, neboť König [1905*b*] publikoval pouze její speciální verzi pro I spočetné a příslušné zobecnění je až dílem Zermelovým [1908*b*]. Druhým z Königových předpokladů byl dílčí výsledek Bernsteinovy [1901] disertace:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha 2^{\aleph_0}.$$

König vyšel z hypotézy, že se mohutnost $2^{\aleph_0}$ rovná nějakému $\aleph_\beta$ a uvažoval suprémum $\aleph_{\beta+\omega}$ množiny $\{\aleph_{\beta+n} \mid n \in \omega\}$. Podle Bernsteinovy věty platí $\aleph_{\beta+\omega}^{\aleph_0} = \aleph_{\beta+\omega}\aleph_\beta$, což se redukuje na rovnost $\aleph_{\beta+\omega}^{\aleph_0} = \aleph_{\beta+\omega}$. Ta je ale v rozporu s Königovou nerovností. König by takto dokázal, že se $2^{\aleph_0}$ nerovná žádnému alef, tj. ani $\aleph_1$, jak říká silná verze hypotézy $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Tento závěr je ovšem pochybný již proto, že Königův důkaz užívá axiomu výběru (garantuje nekonečný sled neurčitých výběrů), z něhož dobrá uspořádatelnost libovolné množiny plyne.[18] Předpokládá tedy to,

[18] Pokud bychom se užití neurčitého výběru v důkazu nerovnosti chtěli zbavit, museli bychom např. předpokládat, že lze množinu $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ dobře uspořádat. Výběr z C_i lze pak specifikovat jako "ten nejmenší prvek vzhledem k uspořádání U".

co chce vyvrátit. K tomu se dostaneme záhy opět v souvislosti s Zermelovým jménem. S ním souvisí i první zpochybnění Königova argumentu poukazem na to, že Bernsteinův teorém neplatí. Zavedeme-li pojem μ-ROZLOŽITELNOSTI kardinálu κ jako existenci systému kardinálů $\{\lambda_i \mid i \in I\}$ takového, že $|I| = \mu$, $\lambda_i < \kappa$ a $\sum_{i\in I} \lambda_i = \kappa$, pak pro $\aleph_0$-rozložitelný kardinál $\aleph_\alpha$ plyne z Königovy nerovnosti okamžitě, že $\aleph_\alpha^{\aleph_0} > \aleph_\alpha$, a Bernsteinova věta tedy nemůže platit, jestliže $\aleph_\alpha \geq 2^{\aleph_0}$. To diskvalifikuje její užití v Königově argumentu. Z Königovy nerovnosti samotné plyne platnost vztahu

$$2^{\aleph_0} \neq \aleph_\alpha,$$

který chtěl König dokázat pro libovolné alef, pouze pro $\aleph_0$-rozložitelné kardinály, jako je např. $\aleph_\omega$, neboť pro $\lambda_i < 2^{\aleph_0}$ a $|I| = \aleph_0$ platí

$$\textstyle\sum_{i\in I} \lambda_i < \prod_{i\in I} 2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Tím se zdál být dopad Königova negativního výsledku eliminován. Historie ale dokáže být krutá. Cohenovy [1963/1964] metody o mnoho let později překvapivě ukázaly, že Königův závěr představuje vlastně jedinou *pozitivní* informaci o mohutnosti kontinua v tom smyslu, že až na uvedenou výjimku můžeme předpokládat platnost rovnosti $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ pro každé α, aniž bychom se dostali do sporu s obecně akceptovanými axiomy. To vrhá na (Zermelovu-)Königovu nerovnost zcela neočekávané světlo, zejména poté, co si uvědomíme, že Cantorova věta, poskytující do té doby jedinou známou informaci o velikosti kontinua, je vlastně jejím specifickým případem:

$$\sum_{i\in I} 1 < \prod_{i\in I} 2.$$

To vyplynulo už z předvedeného důkazu nerovnosti, který má jasnou diagonální strukturu, a příslušnou specifikací z něho okamžitě dostaneme důkaz Cantorův. Ale to je všechno již docela jiný příběh. Ten náš pokračuje roku 1904 Zermelovým rozhodnutím zabránit podobným pokusům, jako byl ten Königův, přímým důkazem věty o dobrém uspořádání (WO), podle níž každou množinu dobře uspořádat lze.

Přes italsky znějící jméno byl Ernst Zermelo rodilý Němec, s kořeny v severovýchodní části země, odkud také pochází pravděpodobná původní varianta jména “Tormühlen”. Po studiích filosofie, matematiky a fyziky v Berlíně a Halle, která mj. zahrnovala kurzy vedené Cantorem, Diltheyem a Husserlem, nastoupil Zermelo jako asistent Maxe Plancka se specializací na aplikovanou matematiku. Tento zájem mu vydržel celý život a zasáhl tak vzdálené oblasti výzkumu, jako je teorie her (kde byl skutečným pionýrem), letecká navigace či konstrukce automobilových motorů.[19] Prvního věhlasu se dočkal svojí kritikou [1896] Boltzmannova atomistického výkladu zákonů termodynamiky, již podnikl na bázi statistických principů. Jako ještě mnohokrát poté, Zermelův článek vyvolal vášnivou debatu, do níž se zapojil Boltzmann sám a která, ač nakonec vyzněla spíše v prospěch kritizovaného, zajistila Zermelovi hladký přechod do Göttingen a následnou habilitaci z oblasti hydrodynamiky roku 1899. Od této doby se také, zjevně pod vlivem Hilbertovým, začal zabývat otázkami základů, speciálně pak teorií množin. V akademickém roce 1900/1901 realizoval pravděpodobně první kurz, který jí byl věnován jako samostatné disciplíně. Zermelovým prvním významným objevem v této oblasti byl překvapivě Russellův paradox, nazývaný proto někdy také paradoxem Zermelovým-Russellovým.[20] Do dějin teorie množin se ale nesmazatelně zapsal až svým článkem nazvaným přímočaře *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann* [1904].

Při pokusu o dobré uspořádání libovolné množiny se nejprve nabízí brát v nekonečném vyčíslujícím procesu jeden prvek po druhém tak dlouho, dokud se v konstruované řadě neobjeví všechny prvky dané množiny. Cantor [1895/1897, s. 293] touto technikou např. dokázal, že každá nekonečná množina M obsahuje podmnožinu velikosti $\aleph_0$, neboť po vytažení konečně mnoha různých prvků $a_1, \ldots, a_n$ jich musí ještě nekonečně zbývat, lze tedy vybrat nový prvek a_{n+1} a dospět k množině $\{a_n \mid n \in \mathsf{N}\}$. Zermelo — v nejlepší logicistické tradici — odmítl ve svém komentáři takovýto odkaz k vyčíslování či konstrukci jako "neuspokojivý čistě názorně i logicky".[21] Musel se ho tedy zbavit podobnou oklikou, jako to učinili logicisté v důkazech rekurzivního teorému, což se v Zermelově formulaci rovnalo rozhodnutí provést Cantorovy sukcesivní volby najednou, současně.[22] Konkrétní představu o tomto kroku si uděláme ze stručného nárysu původního důkazu inkriminované věty (WO):

Každou množinu lze dobře uspořádat.

Důkaz: K množině M, kterou je třeba dobře uspořádat, uvažujeme její potenci $\mathcal{P}(M)$ a její POKRYTÍ coby libovolnou funkci γ, která každé neprázdné množině $X \in \mathcal{P}(M)$ přiřadí nějaký prvek $\gamma(X) \in X$. K danému pokrytí γ je definován pojem γ-MNOŽINY M_γ jako takové podmnožiny M, která (1) je dobře uspořádaná nějakou relací $<$ a (2) jestliže $a \in M_\gamma$

[19] Detaily viz Zermelova biografie Ebbinghaus [2007]. Za zmínku možná stojí i rozsáhlé zájmy literární, zahrnující uznávané překlady antických básní, včetně reprezentativního výběru z Homérovy *Odyssey*.

[20] Zermelo 'výsledek' nicméně nikdy nepublikoval, doložen je tedy především prostřednictvím Hilbertovy korespondence s Fregem a poznámek v Husserlově pozůstalosti. Viz Grattan-Guinness [2000, s. 216 nn]. Zermelo o svém prvenství referuje později in [1908*a*]. Další podrobnosti viz Ebbinghaus [2007, s. 46 n].

[21] Komentář in Cantor [1932, s. 352].

[22] Komentář in Cantor [1932, s. 451].

a $A = \{x \in M_\gamma \mid x < a\}$, pak $\gamma(M - A) = a$. Všimněme si, že podle definice jsou γ-množinami

$$\{m_1\}, \{m_1, m_2\}, \{m_1, m_2, m_3\}, \ldots$$

pro $m_1 := \gamma(M)$, $m_2 := \gamma(M - \{m_1\})$, $m_3 := \gamma(M - \{m_1, m_2\})$, …, vše tedy odpovídá původnímu ‘intuitivnímu’ plánu. Jelikož takto k danému γ vždy existují nějaké γ-množiny, lze definovat jejich sjednocení

$$L_\gamma = \{x \in M \mid (\exists M_\gamma)(x \in M_\gamma)\}$$

a dokázat, že se jedná o γ-množinu, a to dokonce největší takovou. Toho je dosaženo důkazem mezikroku, podle něhož pro dvě různé γ-množiny platí, že jedna je počátečním segmentem druhé. Závěrečným krokem je důkaz toho, že $M = L_\gamma$. Kdyby ne, vezmeme $m := \gamma(M - L_\gamma)$ a přidáme ho na konec L_γ. Výsledkem bude opět γ-množina, což je ve sporu s důkazem, že je L_γ největší taková.[23] □

Zermelův důkaz vzbudil jednu z nejbouřlivějších polemik, kterou novověké budování základů zažilo a jejíž dopad pociťujeme ještě dnes, když hovoříme o AXIOMU VÝBĚRU jako o problematickém tvrzení teorie množin. Zermelo jej ve svém důkazu použil *de facto* pouze jednou, v explicitně uvedeném předpokladu:

> Pro danou množinu M existuje nějaké γ-pokrytí.

Toto pokrytí se nazývá také VÝBĚROVOU FUNKCÍ na $\mathcal{P}(M)$ a představuje právě onen ‘logicky čistý’ prostředek přechodu od sukcesivního k simultánnímu výběru. Přes celkovou průzračnost Zermelova textu, anebo právě pro ni, se do diskuze postupně zapojili Baire, Borel, Lebesgue, Hadamard, Peano, Russell, Poincaré, J. König, Jourdain, Schoenflies a Bernstein, aby Zermelův důkaz kritizovali ze všech myslitelných pozic.[24]

Poincaré, který např. proti axiomu výběru principiálně nic neměl, obvinil ve stejném článku [1906*b*, § 14], v němž navrhl jako řešení paradoxů princip bludného kruhu, Zermelův důkaz z toho, že se vůči tomuto principu prohřešuje, konkrétně definicí γ-množiny L_γ kvantifikací přes totalitu všech γ-množin množiny M, k níž sama náleží. Bernstein [1905] a Schoenflies [1905] pod vlivem Burali-Fortiho paradoxu napadli poslední krok důkazu, v němž přidáním prvku k dobře uspořádané množině vznikne opět množina, čímž v důsledku zpochybnili operaci sjednocení. A v neposledku Hessenberg [1906, s. 638] (mimo oficiální diskuzi) zdůraznil, že argument stejně jako na existenci výběrové funkce závisí

[23] Důkaz je rozveden in Ebbinghaus [2007, s. 58 n] s odkazem na ještě podrobnější analýzy.

[24] Reprezentativní monografií, mapující celou kontroverzi ohledně Zermelova důkazu, je Moore [1982].

i na faktu, že je potence k dané množině opět množinou. Předpoklad existence výběrové funkce byl ovšem pod nejtěžší palbou. Peano [1906a] kritizoval axiom výběru jako ne-logický, tj. neevidentní. Baire, Borel a Lebesgue jej napadli z obvyklých konstruktivistických pozic, podle nichž nemáme právo na tvrzení existence funkce, aniž bychom věděli, jak dospíváme k jejím hodnotám, zvláště když je těchto nespecifikovaných, libovolných hodnot nekonečně.[25] Podle Borela [1905] Zermelo nedokázal větu o dobrém uspořádání, ale jen její ekvivalenci s axiomem výběru, který je ještě problematičtější než věta sama.

Do jaké míry jsou všechna zmíněná obvinění oprávněná, je samozřejmě diskutabilní. Vzhledem k tomu, jak často byl před zveřejněním důkazu axiom výběru implicitně užíván dokonce těmi, kdo jej kritizovali, aniž by vzbudil jakékoli pochybnosti,[26] je ale nasnadě podezření, že příčinou pozdvižení nebyl axiom sám, ale to, k čemu byl použit, totiž k důkazu možnosti dobrého uspořádání kontinua. Tím se Zermelův výsledek řadí k těm, jejichž prostřednictvím Cantor atakoval tradiční představy o ontologii aritmetiky a geometrie, počínaje zobrazením plochy čtverce na jeho stranu a konče důkazem nespočetnosti kontinua. Russell [1911, s. 33] to celkem bez okolků vyjádřil takto:

> Je také nutno říci, že Zermelův teorém, totiž že je-li axiom [výběru] pravdivý, lze každou třídu dobře uspořádat, představuje důvody k domněnce, že je axiom nepravdivý, neboť tomu, že by každou třídu bylo možné dobře uspořádat, lze uvěřit jen stěží.

Problém tohoto Russellova vyjádření a výše zmíněných kritik Zermelova důkazu spočíval v tom, že si jejich exponenti zpravidla neuvědomovali, jakou roli v Cantorově koncepci pojem dobrého uspořádání hraje a že odmítnutí axiomu v důsledku znamená odmítnutí celé hry, tedy alespoň v její původní podobě. Pro Russella stejně jako Frega je množina (třída) spjata s vydělující podmínkou $\varphi(x)$, a ve své existenci tedy vázána na ZÁKON KOMPREHENZE

$$(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow \varphi(x)).$$

[25] Diskusi zahájil Borel [1905, s. 194] s tím, že mu vadí předpoklad "libovolného výběru provedeného nespočetněkrát". V reakci na to proběhla korespondence, otištěná souhrnně jako Baire *et al.* [1905]. Jediný Hadamard se v ní pokoušel Zermela bránit tvrzením, že problém s nekonečně mnoha výběry vzniká jen tehdy, jsou-li to výběry závislé. V reakci na to Baire podotýká, že Zermelův axiom čelí mnohem větší potíži, když dovoluje "nějaký výběr význačného prvku v KAŽDÉ podmnožině M", čímž útočí na axiom potence a především na nevyjasněný pojem *libovolné* podmnožiny. Lebesgue svůj postoj identifikuje s Kroneckerovým, když zdůrazňuje, že "je nemožné dokázat existenci objektu, aniž bychom jej definovali".

[26] V tomto smyslu je mimo podezření pouze Peano, jenž axiom nejspíš jako vůbec první o čtrnáct let dříve formuloval a každou jeho aplikaci explicitně zmínil. Viz Peano [1890, s. 210].

Ten se v důsledku Russellova paradoxu ukázal být sporný, a následné revize tak mířily k formulaci takového omezení podmínky $\varphi(x)$, která by sporu zabránila. Cantorovo pojetí množiny bylo sice podstatně liberálnější, neobnášelo ale — alespoň v heuristické rovině — prosté uskupování předmětů dohromady, nýbrž jejich postupné vyčíslování, jak to odpovídá výše zdůrazněnému upřednostnění ordinálního čísla před číslem kardinálním. Podstatné pro pochopení Cantorova postoje jsou přitom jeho obecné úvahy o nekonečnu.

Cantor [1883*a*, s. 165 nn] především reformuluje Aristotelovo rozlišení potenciálního a aktuálního nekonečna v rozdíl mezi *nekonečnem nevlastním* nebo též *synkategorematickým*, představujícím pouhý výraz pro neurčitou, zvětšující se, ale stále konečnou proměnnou, a *nekonečnem vlastním*, které je prvnímu pojmově nadřazeno, neboť je v něm již předpokládáno jako to, k čemu se hodnoty dané proměnné blíží. Cantorovo zdůvodnění primátu aktuálního nekonečna v tomto smyslu explicitně schvaluje také Frege [1983, s. 77]. Cantor [1883*a*, s. 205] dále upozorňuje, že aktuální nekonečno bylo tradičně výrazem pro Boha jako cosi absolutního, co "lze pouze uznat, ale ne poznat, a to ani přibližně". Právě v tomto bodě by se jeho teorie ordinálních a kardinálních nekonečen mohla dostat do rozporu s učením církve, a skutečně, Cantorova [1886, s. 372] myšlenka, že něco nekonečného, transfinitního, existuje *in concreto* ve stvořené přírodě, *in natura naturata*, nikoli jen *in natura naturans*, tj. v Bohu, se již výběrem (spinozovské) terminologie zdála evokovat nebezpečí panteismu. Toto podezření také v souvislosti s Cantorovou naukou vyjádřil Johann kardinál Franzelin, papežský teolog prvního vatikánského koncilu, spjatého s vyhlášením papežské neomylnosti.[27]

V reakci na kardinálova slova Cantor ve svém dopise z 22. ledna 1897 znovu pléduje pro rozlišení dvou typů aktuálního nekonečna, totiž absolutního (*Infinitum aeternum increatum sive Absolutum*), kterého "nelze dosáhnout žádnou specifikací", a transfinitního (*Infinitum creatum sive Transfinitum*), "představujícího neomezenou škálu určitých modů, které co do své povahy nejsou konečné, nýbrž nekonečné, lze je nicméně stejně jako konečno popisovat určitými, dobře definovanými a navzájem odlišnými *čísly*". Na rozdíl od absolutního nekonečna podléhá nekonečno transfinitní, přestože je "fixní a ve všech částech určené", jistým modifikacím, např. zvětšování coby procesu získávání dalších a dalších transfinitních nekonečen.[28] Teorie množin je naukou transfinitna a jako taková odlišná od teologie. Kardinála Cantorova slova kupodivu přesvědčila a vyjádřil se v tom smyslu, že pojem transfinitního "nepředstavuje ne-

[27] Viz Cantor [1886, s. 385].

[28] Cantor [1883*a*, s. 176]. Rozlišení je zopakováno v dopise kardinálovi, jenž je otištěn in Cantor [1887/1888, s. 399-400]. Tento polemický článek vyšel spolu se studií Cantor [1886] jako kniha Cantor [1890].

bezpečí pro náboženskou víru”.[29] Podle dochovaných zpráv byl Cantor tímto závěrem neobyčejně potěšen (otiskl ho dokonce v jednom ze svých článků), již proto, že se mu tím dostalo podpory v době, kdy se víc a víc komplikovaly jeho vztahy s matematickou komunitou. Svou roli v tom jistě sehrálo i jeho náboženské založení.

Ačkoli by z čistě matematického hlediska mohl sotvakdo považovat Cantorovu teologickou expozici za relevantní pro výzkum základů, objev paradoxů celou situaci jako mávnutím proutku úplně změnil, neboť se ukázalo, že Cantor měl vhodnou odpověď v podstatě již deset let připravenu: Paradoxy vznikají, jestliže aplikujeme principy modifikace konečna či transfinitního nekonečna na nekonečno absolutní. Nekonzistentní totality, tj. celky, které např. jako uskupení všech předmětů, ordinálních čísel či množin, které nenáležejí samy sobě, vedou ke sporu, jsou právě příklady absolutního nekonečna. Cantor [1932, s. 443] dále říká:

> Když lze naopak totalitu prvků bezesporně myslet jako “jsoucí pohromadě”, takže je její shrnutí do “jedné věci” možné, nazývám ji *konzistentní mnohostí* nebo také “množinou”.

Tato určení by se stále mohla zdát dosti libovolná, kdyby Cantor již dříve nevázal svůj pojem množiny na pojem zobecněného vyčíslení. Jak jinde [1883a, s. 168] říká, rozdíl mezi konečnými a (transfinitně) nekonečnými *množinami* spočívá pouze v tom, že nekonečné množiny lze počítat různým způsobem (pořádat do řady, jíž přísluší různá ordinální čísla). Absolutní totalitu takto tvoří celky, které počítat nelze, tedy odvozeně: které nelze dobře uspořádat. Jelikož jim pak nepatří ani ordinální, ani kardinální číslo, nelze, v aplikaci na ně, odvodit žádný z raných množinových paradoxů, tj. ani paradox Cantorův, ani Burali-Fortiho.

To vše jsou ale samozřejmě stále jen kritéria externí, která nám nedávají dopředu vědět, kdy je nějaká množina inkonzistentní a kdy ne. Cantor si toho byl alespoň do nějaké míry vědom, a navrhl proto nejprve jako prototyp absolutní totality soubor Ω všech ordinálních čísel,[30] aby pak za kritérium nekonzistence souboru X určil prostou zobrazitelnost posloupnosti Ω na část, případně celé X.[31] Tím jsou jako nekonzistentní okamžitě vyloučeny samotné Ω a také totalita všech objektů V. Případ Russellovy množiny $\{x \mid x \notin x\}$ je komplikovanější. Disponujeme-li již von Neumannovou explicitní definicí ordinálních čísel, jak ji blíže popíšeme v oddíle 6.6, jako množin $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, …, platí evidentně

$$\Omega \subseteq \{x \mid x \notin x\}.$$

[29] Cantor [1887/1888, s. 386].

[30] Relevantní citát je obsažen již in Cantor [1883a, s. 205].

[31] Zdůvodnění tohoto čtení Cantorovy nauky na základě Cantorovy korespondence s Dedekindem podává Hallett [1984, s. 168].

K podobnému závěru mohla ovšem vést již Russellova [1906b] raná analýza paradoxů, jež von Neumannovu definici předjímá. Russell se pokouší nalézt kritérium nekonzistence množiny $\{x \mid \varphi(x)\}$, tj. podmínku vyškrtnutí predikátu $\varphi(x)$ z přípustných substituentů zákona komprehenze, zobecněním principu logických paradoxů do následujícího schématu:

> Mějme nějaký predikát $\varphi(x)$ a funkci f na množinách. Množina $\{x \mid \varphi(x)\}$ je sporná, jestliže $\varphi(x)$ a f splňují podmínku:
>
> $(\forall u)[(\forall x)(x \in u \to \varphi(x)) \to (f(u) \notin u \wedge \varphi(f(u)))]$.
>
> Russellův paradox získáme pro $\varphi(x) := x \notin x$ a $f(x) = x$, Burali-Fortiho pro $\varphi(x) :=$ 'x je ordinální číslo' a $f(x) =$ 'nejmenší ordinál větší než ordinály z x'.

Russell ukázal, že pro dané f a $\varphi(x)$, splňující uvedenou podmínku, lze generovat řadu prvků vlastnosti $\varphi(x)$, která má strukturu ordinálních čísel, a to předpisem

$$F(\alpha) = f(\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}).$$

Předpokládána je přitom naivní verze transfinitní rekurze. Úvaha je následující: Vezmeme-li první ordinál 0 (pro Cantora je jím 1), platí $F(0) = f(\emptyset)$, přičemž $f(\emptyset)$ značme jako a. Jelikož $\emptyset \subseteq \{x \mid \varphi(x)\}$, musí podle definice platit $\varphi(f(\emptyset))$, tj. $\varphi(a)$. Tím máme první člen ohlášené řady. Podle definice nyní

$$F(0) = a,$$
$$F(1) = f(\{a\}),$$
$$F(2) = f(\{a, f(\{a\})\}),$$
$$\vdots$$

Tyto prvky musí být odlišné, neboť vznikají aplikací na množinu $u \subseteq \{x \mid \varphi(x)\}$, a platí tedy $f(u) \notin u$; ze stejného důvodu mají vlastnost φ. Nekonzistentní množiny v Russellově smyslu jsou tedy nekonzistentní i ve smyslu Cantorově, tj. lze do nich vnořit ordinální čísla. Russellův argument ale ukazuje víc, totiž že lze ordinální čísla identifikovat s množinami jistého tvaru, které se pro výchozí $a := \emptyset$, $f(x) = x$ a $\varphi(x) := x \notin x$ stanou sobě nenáležejícími von Neumannovými čísly.[32]

Podle Cantorových a Russellových standardů jsou tedy nekonzistentní množiny značně velké, od čehož se pak odvíjí způsob eliminace paradoxů à la 'limitation-of-size'. Z Cantorova pohledu je ale významná i druhá strana mince myšlenky poměřování konzistence ordinálními čísly, totiž že totality konzistentní, množiny, jsou prostě zobrazitelné na nějaké

[32] Argument reprodukuje Hallett [1984, s. 180].

ordinální číslo, a lze je tak dobře uspořádat. Důkaz hypotézy kontinua ve tvaru $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ by se tak mj. stal i důkazem toho, že je soubor reálných čísel v Cantorově smyslu množinou, a nelze z něho tedy odvodit paradox.

Na pozadí rovnopočetnosti kontinua s množinou všech podmnožin přirozených čísel a Cantorovy věty, která konstruuje řadu nekonečných mohutností bez zjevného vztahu k řadě transfinitních ordinálů, si Cantor přestal být jistý nejen evidencí hypotézy kontinua, ale i tím, že by potencí množiny musela být vždy konzistentní totalita. Doufal samozřejmě v jejich pravdivost, zároveň neviděl způsob, jak je dokázat. Tato nejistota zasáhla přirozeně také obecnou srovnatelnost kardinalit,[33] a tím i dobrou uspořádatelnost všech množin. V tomto bodě se ale již nabízelo využít souvislosti obou pojmů (dobrého uspořádání a množiny), a Cantor také v dopise Dedekindovi z 28. července 1899 argumentuje, že kardinální číslo libovolné množiny M musí být ordinál (alef), neboť jinak by byla do M vnořitelná všechna ordinální čísla a M by bylo — v rozporu s předpokladem — nekonzistentní totalitou.[34] Tento důkaz je ovšem opět založen na výběru jednoho prvku, jenž je opakován tak dlouho, dokud nejsou vyčerpány prvky všechny, přičemž na výchozí straně stojí buď počáteční segment řady ordinálních čísel, a totalita je konzistentní, nebo celá Ω, a totalita je nekonzistentní. Zermelo tento postup explicitně odmítl jako závislý na subjektivní představě počítání v čase a nahradil metodami naznačenými výše.[35] Myšlenka je ale v principu stále tatáž a splyne s Cantorovým postupem v okamžiku, kdy budeme mít k dispozici transfinitní verzi Dedekindovy definice rekurzí pro ordinální řadu. Induktivní metodu, stejně jako ordinály, Zermelo v rámci svých pokusů o zcela rigorózní základy zprvu odmítal, čímž jeho reforma nabyla podobně přepjatých rozměrů jako dřívější reforma analýzy Lagrangova, tj. rozhodla se redukovat víc, než bylo nutné a možné.

Náš dosavadní výklad vede k závěru, že útok na axiom výběru byl čistě zástupný, zakrývající odpor k myšlence dobré uspořádatelnosti každé množiny, především kontinua, v posledku pak k teorii množin vůbec. Ten může být v širším filosofickém kontextu docela dobře oprávněný, stejně jako pochybnosti o rovnopočetnosti bodů čtverce a jeho strany či nespočetnosti kontinua. V rámci Cantorovy teorie množin a spřízněné problematiky základů představuje však WO, stejně jako existence výběrových funkcí, plauzibilní předpoklad, který kromě očividného zjednodušení teorie kardinalit zajišťuje teorii množin status nauky o zobecněném čísle, s ordinálním číslem a transfinitní rekurzí coby základem.

Konstruktivní rysy Cantorova přístupu vynikají právě ve srovnání se statickými principy Russellova a Fregova logicismu (zákon komprehenze)

[33] Viz Cantor [1895/1897, s. 285].
[34] Cantor [1932, s. 447].
[35] Viz Cantor [1932, s. 451].

a tím, že byl Cantorův systém v jistém, výše vylíčeném smyslu imunní vůči logickým paradoxům, které jej napadly. Zermelův důraz na přísně logické, neintuitivní metody, stejně jako jím navržená axiomatizace, jsou samozřejmě ústupem od Cantorových standardů ke standardům logicistickým.

Na druhou stranu by bylo neuvážené Cantorovy zásady příliš přeceňovat, jak to např. dělají Hallett [1984, s. 32] i Lavine [1994, s. 77] v jinak vynikající prezentaci Cantorových názorů, když hovoří o Cantorově 'finitismu' či 'kombinatorickém pojetí množiny'. Většina Cantorových rozlišení, absolutním a transfinitním nekonečnem počínaje a myšlenkou nekonečného vyčíslování konče, má bytostně psychologický charakter, jak to ostatně tvrdili Frege [1983, s. 76 nn] i Zermelo. Otázkou je, zda jimi navržený způsob záchrany byl ten nejlepší možný a zda bylo nutné, případně možné ještě vůbec něco zachraňovat.

6.5 Zermelova axiomatizace

V reakci na povyk, který se strhl po zveřejnění důkazu věty o dobrém uspořádání, publikoval Zermelo roku 1908 v rychlém sledu dva články. V prvním, jenž nese název *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung* [1908*a*], předvedl novou verzi důkazu, aby mohl v zápětí reagovat na některé námitky. Celá obhajoba je nesena v dosti ostrém, ironizujícím duchu, jenž Zermelovi později zcela neprávem vynesl pověst komplikované osobnosti. To mělo — spolu se špatným zdravím — vliv na jeho postupnou ostrakizaci, a tím i podíl na dalším vývoji teorie množin. Po věcné stránce jsou ale Zermelovy argumenty jasné, se zřetelně pragmatickým základem: Axiom výběru stejně jako impredikativní definice pronikají obvyklou matematiku a byly dosud implicitně používány bez toho, aby je kdokoli — včetně těch, kdo je nyní napadají — považoval za problematické. U impredikativních definicí navrhuje Zermelo totéž, co později Ramsey a Gödel, totiž rozlišit mezi definicí a definovaným objektem. Spor potom nemůže vzniknout.

Částí Zermelovy odpovědi na kritiku byla sama nová verze důkazu, v níž se pokusil odstranit zbytky skutečných či jen zdánlivých odkazů k názorům času a prostoru. I z těchto důvodů není tentokráte cílový systém budován zdola, sjednocením dobrých uspořádání částí množiny M, ale shora jakožto průnik všech γ-ŘETĚZCŮ, definovaných jako podmnožiny $\Theta_\gamma \subseteq \mathcal{P}(M)$, pro něž platí (i) $M \in \Theta_\gamma$, (ii) $S - \gamma(S) \in \Theta_\gamma$ pro neprázdné $S \in \Theta_\gamma$ a (iii) $\bigcap \Xi \in \Theta_\gamma$ pro neprázdné $\Xi \subseteq \Theta_\gamma$. Ze stejného důvodu Zermelo také reformuloval svůj výběrový princip a nazval jej poprvé "axiomem výběru". Aniž by si toho byl vědom, zopakoval v něm vlastně dva roky staré Russellovo [1906*b*, s. 48 n] tvrzení, známé jako tzv. MULTIPLIKATIVNÍ AXIOM:

> Nechť je M množina vzájemně disjunktních neprázdných množin. Pak je systém $\coprod M$ všech podmnožin $\bigcup M$, které mají s každou množinou z M společný právě jeden prvek, neprázdný.

Multiplikativní se axiom nazývá jednoduše proto, že systém $\coprod M$ připomíná systém $\prod M$ posloupností prvků množin z M, ignoruje ovšem jejich pořadí. Pro každé $X \in \coprod M$ a $Y \in M$ platí, že $X \cap Y$ je jednoprvková. — Na axiomu výběru v multiplikativní formě je vidět jeho již dříve zmíněná souvislost s Königovou nerovností, resp. platnost tvrzení:

> Axiom výběru a Königova nerovnost si jsou ekvivalentní.

Důkaz: Viděli jsme, že platí-li axiom, můžeme dokázat nerovnost. Opačnou implikaci získáme takto: Máme-li nějaký systém $\{A_i \mid i \in I\}$ prázdných množin, pak pro systém $\{B_i \mid i \in I\}$ množin neprázdných platí podle Königovy nerovnosti $0 < \left|\prod_{i \in I} B_i\right|$, tj. $\prod_{i \in I} B_i \neq \emptyset$. □

Axiom výběru má přirozeně řadu dalších formulací a ekvivalentů, z nichž jmenujme alespoň tzv. Zornovo lemma:

> Částečně uspořádaná množina, v níž má každý řetězec (totálně uspořádaná podmnožina) horní mez, má maximální prvek.

Tato věta, známá také jako princip maximality, je z našeho hlediska významná jednak proto, že jejími aplikacemi přispěl Zorn [1935] k praktické obhajobě axiomu před matematickou komunitou, jednak že se jedná o jakýsi extrakt základní techniky obou Zermelových důkazů, jak to můžeme hned nahlédnout na bezprostřední demonstraci srovnatelnosti kardinality dvou množin:

> Pro každé κ, λ platí $\kappa \leq \lambda$ nebo $\lambda \leq \kappa$.

Důkaz: Máme nějaké množiny A, B takové, že $|A| = \kappa$ a $|B| = \lambda$, a uvažujeme systém S všech prostých zobrazení $f : A' \to B$ pro libovolné $A' \subseteq A$. Relace $\subset$ představuje částečné uspořádání na S a je zřejmé, že pro množinu $T \subseteq S$, která je řetězcem, je $\bigcup T$ horní mezí T, která je rovněž v S. Z lemmatu plyne, že existuje prvek g maximální v S. Kdyby neplatilo ani $dom(g) = A$, ani $rng(g) = B$, dostali bychom, stejně jako dříve Zermelo v důkazu WO, spor s maximalitou g. Dokazované tvrzení snadno následuje. □

Další výhoda multiplikativní formulace axiomu spočívá v tom, že nám umožňuje nahlédnout, že s ohledem na liberální pojem podmnožiny, jenž Cantor obhajuje a razí, je axiom výběru truismem, který není možné ani potřebné dokazovat, přesně jak to Zermelo tvrdí vůči svým oponentům. Cantor také, jak jsme již zmínili, možnost neurčitého výběru při svých důkazech předpokládal. Podstatné je tedy především zjištění, že jej nelze přímo odvodit z ostatních principů, což dokázal Fraenkel [1922*a*]. Problematizace role axiomu v rámci teorie množin s sebou tedy nese nadřazování axiomaticko-formálních, deduktivních ohledů těm sémantickým.

Příležitostné pokusy o sémantickou diskreditaci axiomu, např. odkazem na důsledky, jako je BANACHŮV-TARSKÉHO PARADOX, podle něhož můžeme (trojrozměrnou) kouli rozložit na konečně mnoho částí, a ty pak pouhým přesouváním a otáčením složit do dvou identických kopií původní koule, přehlížejí, že se celá teorie množin odvíjí od zprvu neméně kontraintuitivních či paradoxních objevů, jako je rozložení nekonečné množiny na libovolné konečné, ba i nekonečné množství stejně velkých částí, či zjištění, že ve čtverci či krychli je stejně bodů jako na jejich straně. Potud tedy žádné překvapení. Podobně, i když komplikovaněji, se to má s odkazem na 'nekonstruktivní' povahu axiomu, podtrženou tím, že je ho zapotřebí pouze v případech nekonečného sledu výběrů, neboť v konečných případech můžeme příslušné výběry učinit *ad hoc* (a jsou tak i garantovány ostatními axiomy). Takto odůvodněný axiom nám pak vlastně jen supluje ono pravidlo, které — v souladu s velkorysým pojetím množiny — v nekonečných případech obecně k dispozici nemáme, a představuje tak *de facto* jakousi vnější, dodatečnou intenzionalizaci původně čistě extenzionálního systému, neboli přiznání, že nám byl příliš úzký. Tím se, alespoň po heuristické stránce, teorie množin nebezpečně přibližuje intuicionismu Brouwerovu, s jeho tzv. výběrovými posloupnostmi určovanými ve svých hodnotách volnými akty tvůrčího subjektu. To platí samozřejmě i opačným směrem. Vraťme se ale k deduktivní stránce věci.

Je jasné, že něco takového jako deduktivní nezávislost axiomu výběru je možné tvrdit až tehdy, když jsou nějaké axiomy, principy teorie množin dány. Zermelův reformovaný důkaz WO je významný právě tím, že je v zásadě axiomatický, pracuje tedy s omezenou sadou explicitně zmíněných předpokladů. Tu předložil Zermelo ve druhém ze zmíněných článků, nazvaném *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* [1908*b*], a to ve stylu Hilbertových *Grundlagen der Geometrie*, tj. rozhodl se definovat pojem množiny implicitně. Stejně jako Hilbert ale ani on nejprve nepopsal žádné logické axiomy ani logická pravidla. V tomto ohledu měl jejich raný 'axiomatismus' naivní rysy, záhy zdokonalené Hilbertovou novou doktrínou základů, jak ji popíšeme v kapitole 8. Na druhou stranu, Zermelo znal Fregovo dílo, o jeho *Grundgesetze* přednesl dokonce již roku 1903 přednášku. V ní se ale zabýval především Fregovou koncepcí čísla, v jejím srovnání s koncepcí Cantorovou a Dedekindovou, tedy nikoli přidruženou logikou. Nyní již k Zermelově axiomatice samotné.

Prvním principem je varianta Fregovy kontextuální definice třídy, totiž AXIOM EXTENZIONALITY (*Axiom der Bestimmtheit*, *axiom of extensionality*). U Cantora je velmi obtížně vystopovatelný, což lze vysvětlit jeho psychologickým přístupem k abstrakci. Množiny ovšem nejsou u Zermela abstrakty ani v logickém, ani v psychologickém smyslu, nýbrž objekty teorie, pročež píšeme

(B) $(\forall a, b)[(\forall x)(x \in a \leftrightarrow x \in b) \leftrightarrow a = b]$.

Takto formulován se axiom liší od Zermelova původního ve dvou aspektech. Tak zaprvé, Zermelo předpokládá identitu jako nedefinovaný logický pojem, resp. pojem nezávisle definovaný skrze Leibnizův princip. S ohledem na to mu stačí užít v (B) pouze implikaci směrem vpravo, tj. tvrdit, že množiny stejných prvků jsou identické. Alternativní přístup, redukující počet základních symbolů na minimum, považuje ekvivalenci (B) za skutečnou (explicitní) definici symbolu =, přičemž jako axiom extenzionality bere formuli

$$(\forall a, b)(\forall x)[a = b \wedge a \in x \rightarrow b \in x],$$

tedy chybějící instanci Leibnizova principu, kde $a = b$ je zkratka za $(\forall x)(x \in a \leftrightarrow x \in b)$. Tuto cestu zvolil např. Quine [1963, s. 34].[36] Další rozdíl spočívá v tom, že Zermelo v rámci svého univerza důsledně rozlišuje individua a množiny. V (B) je proto nucen omezit proměnné a, b pouze na množiny, jinak by se všechna individua stala identická.

Možnost teorie množin bez individuí (atomů, 'urelementů') byla později zmíněna Fraenkelem [1922*b*, s. 234] a obhajována Skolemem [1923*b*], jenž dokazoval, že axiomy nevylučující individua mají modely s nimi i bez nich. Výsledkem je pak teorie tzv. čistých množin. Fraenkel pro ni argumentoval s tím, že individua nehrají v matematických úvahách větší roli, což je v jistém smyslu paradoxní, neboť individua se implicitně držela v teorii množin především díky Fraenkelovu důkazu nezávislosti axiomu výběru, v němž byla jejich existence předpokládána.[37] To trvalo až do šedesátých let, kdy tentýž výsledek, ale bez zmíněného předpokladu, dokázal Cohen [1963/1964]. Od té doby jsou 'urelementy' uvažovány převážně ve filosoficky motivovaných systémech, jako je Quinův.

Chceme-li udržet existenci prázdné množiny, tj. množiny bez prvků, a zároveň nezavádět speciální proměnné pro individua a množiny, není možné charakterizovat množinu takto:

$$x \text{ je množina} \rightleftharpoons (\exists y)(y \in x).$$

Quine proto zavádí čistě technickou konvenci, podle níž se 'urelementy' na rozdíl od množin rovnají své jednoprvkové množině

$$x \text{ je individuum} \rightleftharpoons x = \{x\}.$$

[36] Obsáhlý rozbor vztahů definice identity a axiomu extenzionality lze najít in Fraenkel *et al.* [1973, s. 26 nn].
[37] Srov. Jech [2002, s. 249 nn].

To má své četné výhody, např. axiom extenzionality může zůstat v uvedené jednoduché podobě. Existence individuí v tomto smyslu je nicméně v obvyklých axiomatizacích ve sporu s tzv. axiomem regularity. Ten ale zase nepatří do původní Zermelovy sady.

Axiomatická metoda, na rozdíl od Fregova konstitutivního přístupu, musí existenci množin postulovat, vyžaduje tedy AXIOM EXISTENCE. Ten může reprezentovat formule

(E) $(\exists c)(c = c)$.

Zermelo ovšem namísto toho předpokládá existenci elementárních množin (*Axiom der Elementarmengen*), a to (1) prázdné $\emptyset$, (2) jednoprvkové $\{a\}$ a (3) dvojice $\{a, b\}$ k daným objektům (individuím či množinám) a, b. Jenom první z nich má nepodmíněný charakter axiomu (E). Nad logikou 1. řádu s rovností je (E) přirozeně tautologií, resp. důsledkem předpokladu, že je univerzum neprázdné.

AXIOM DVOJICE (*Paarmengenaxiom*, *axiom of pairing*) byl později, v Zermelově druhé axiomatizaci, formulován separátně jako

(D) $(\forall a, b)(\exists c)(\forall x)[x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b]$.

Existence jednoprvkové množiny je jeho důsledkem. Naopak existenci prázdné množiny lze získat jako důsledek axiomu (E), resp. libovolného axiomu (nepodmíněné) existence a AXIOMU VYDĚLENÍ (*Axiom der Aussonderung*, *axiom of separation*)

(A) $(\forall a)(\exists c)(\forall x)[x \in c \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x)]$.

Totiž jako $\emptyset \overset{\text{def}}{=} \{x \in a \mid x \neq x\}$, kde a je množina existující z předpokladu. Axiom takto vlastně představuje podmíněnou verzi zákona komprehenze, postulující existenci množiny dané vlastnosti φ. Tu musí ale tentokráte tvořit výhradně prvky nějaké množiny a existující.

Axiom vydělení je nejčitelnějším projevem mechanismu 'omezení velikosti' jako způsobu řešení antinomií, i když Zermelo nikdy explicitně takovou motivaci nepřiznává. V souvislosti s axiomem vydělení ale hovoří [1908*b*, s. 202] o vyloučení "ultrafinitních paradoxů".[38] Skutečná teorie 'limitation-of-size' jako heuristika stávajících axiomatizací je až dílem von Neumannovým, jenž roku 1923 v dopise Zermelovi píše:

> Množina je "příliš velká" tehdy a jen tehdy, je-li ekvivalentní množině všech věcí.[39]

Kritériem nekonzistence je tedy rovnopočetnost třídy s univerzem V diskurzu. Von Neumann sám připisuje ideu omezení velikosti Zermelovi právě s ohledem na diskutovaný axiom.[40]

[38] Termín "ultrafinitní" je Hessenbergův. Srov. komentář in Hallett [1984, s. 240 nn].
[39] Citováno podle Hallett [1984, s. 288].
[40] Viz Lavine [1994, s. 130 n].

Specifikem Zermelova axiomu vydělení přitom bylo nejasné podmínění vydělující vlastnosti φ jako DEFINITNÍ, což podle něho [1908*b*, s. 201] znamená, že "základní vztahy domény, prostřednictvím axiomů a obecně platných zákonů logiky, jednoznačně určují, zda [tato vlastnost] platí či ne". Kolem Zermelova 'jednoznačného určení' se později strhla další živá diskuze a termín "definitní" se podobně jako výraz "predikativní" ujal v různých oblastech základů matematiky, zvláště pak v jejich konstruktivistické odnoži. Problém Zermelova axiomu spočíval nejen v nejasném vymezení 'definitní' vlastnosti, ale i vztahu množin coby objektů teorie k vlastnostem obecně, které takto bylo třeba uvažovat paralelně. To bylo v rozporu s tím, co Hallett [1984, s. 244] nazývá 'Zermelovým redukcionismem', totiž snahou vystačit si s minimem čistě množinových pojmů, např. v redukci Cantorových ordinálních čísel coby typů uspořádání a uspořádání množin samotných na množiny.

Diskuze ohledně adekvátní formulace axiomu vydělení, resp. podmínky kladené na vydělující vlastnost, se ovšem ukázala být kritická, neboť souvisela s určením pojmu podmnožiny. Hermann Weyl [1910] v tomto smyslu poznamenal, že bez upřesnění "definitnosti" nebude možné vyřešit hypotézu kontinua a navrhnul omezit podmínku na predikáty formulované v jazyce teorie množin ($\in$, $=$) v konečně mnoha aplikacích sady základních operací, které ovšem nejprve nespecifikoval. Později je sice v podstatě ztotožnil se základními operacemi predikátové logiky, jelikož ale nebyl schopen eliminovat odkaz k jejich "konečně mnoha" aplikacím, usoudil [1918], že teorie množin není vhodná k založení aritmetiky, a uchýlil se k Brouwerovu intuicionismu.

Skolem [1923*b*] navázal na Weylův podnět a dospěl k definici, která prakticky odpovídá omezení podmínky φ na formule jazyka teorie množin prvního řádu, a činí tedy z axiomu vydělení axiomatické schéma. Zermelo [1929] později tuto alternativu odmítl a přiklonil se *de facto* ke čtení druhořádovému, v němž se na místě schematické proměnné φ objeví proměnná X skutečná.[41] Axiom tím pádem 'tvrdí', že existují 'všechny' podmnožiny dané množiny, a lze ho tedy chápat v Cantorově duchu jako výzvu k maximálně liberálnímu čtení tohoto pojmu. Ve výrazu φ z (A), je-li čten jako schéma, by se neměla vyskytovat proměnná c definované množiny. Připustíme-li ve φ, jak je to obvyklé, kvantifikaci, stane se ovšem schéma impredikativní, nezavedeme-li dodatečnou stratifikaci proměnných. Případné výskyty volných proměnných chápeme jako kvantifikované vně axiomu, což nám později umožní parametrizovat φ již definovanými množinami.

Podíváme-li se na axiom vydělení z hlediska doktríny 'příliš velkého', vidíme, že pracuje stejně jako axiom výběru směrem dolů, tj. postuluje existenci podmnožiny množiny stávající, a nemůže tedy univerzum ohro-

[41] Srov. Moore [1980, s. 121 n].

zit, pokud již ohroženo nebylo. Může tak ovšem učinit ve spolupráci s jinými podmíněnými axiomy, konkrétně axiomem potence, a nepodmíněným axiomem nekonečna. Axiom potence byl přitom stejně jako axiom sjednocení zpochybněn kritiky Zermelova důkazu věty o dobrém uspořádání. Postulát, že potence malé množiny vede opět k množině malé, se již pro Cantora stal problematický, totiž tváří v tvář neúspěšným pokusům o dobré uspořádání mocnin nekonečných množin, speciálně tedy kontinua. Zermelo oproti tomu vyšel jednoduše z toho, že potence množiny (např. kontinuum jako potence přirozených čísel) se zatím nikdy neukázala být nekonzistentní, a dospěl tak k AXIOMU POTENCE (*Axiom der Potenzmenge*, *axiom of the power set*) jako čtvrtému z popisované sady:

(P) $(\forall a)(\exists d)(\forall c)[c \in d \leftrightarrow (\forall x)(x \in c \to x \in a)]$.

Všimněme si, že se v tomto zápisu nejedná o druhořádovou formuli, síla axiomu je tedy, jak bylo řečeno, odvislá od interpretace axiomu (A) vydělení. V univerzu s 'urelementy', jako je to Zermelovo, je navíc třeba na c klást podmínku množinovosti, jinak by d obsahovala všechny 'urelementy', tedy za předpokladu, že nemají prvky. Quinova konvence $x = \{x\}$ pro individua tuto potřebu opět ruší.

Pátým Zermelovým axiomem je další podmíněný axiom existence, a to AXIOM SJEDNOCENÍ (*Axiom der Vereinigung*, *axiom of union*)

(V) $(\forall a)(\exists c)(\forall x)[x \in c \leftrightarrow (\exists d)(d \in a \wedge x \in d)]$.

Potenci, resp. sjednocení množiny a značíme jako dříve $\mathcal{P}(a)$, resp. $\bigcup a$. Šestým axiomem je náš starý známý axiom výběru (*Axiom der Auswahl*, *axiom of choice*)

(C) $(\forall a)[\emptyset \notin a \wedge (\forall x, y \in a)(x \cap y = \emptyset) \to$
$(\exists c \subseteq \bigcup a)(\forall d \in a)(\exists x)(c \cap d = \{x\})]$.

Podmínku $\emptyset \notin a$ je samozřejmě při předpokládané existenci 'urelementů' potřeba zobecnit na neexistenci prvku množiny a, jenž nemá prvky. Existence množiny $c \cap d = \{x \in c \mid x \in d\}$ je dána axiomem vydělení. Ve vydělující podmínce $\varphi(x) := x \in d$ je množina d užita jako parametr.

Posledním z Zermelovy sady je nepodmíněný existenční AXIOM NEKONEČNA (*Axiom des Unendlichen*, *axiom of infinity*). Předchozí axiomy totiž sice garantují existenci nekonečně mnoha různých předmětů, např. Zermelových přirozených čísel $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, ..., nikoli však množiny, která by je měla všechny za prvky. Zermelo proto stanovuje

(U) $(\exists c)[\emptyset \in c \wedge (\forall x)(x \in c \to \{x\} \in c)]$.

Celek Zermelových původních sedmi axiomů (B), (E), (A), (P), (V), (C), (U) značme jako $\mathfrak{Z}$.

V $\mathfrak{Z}$ lze snadno definovat Dedekindův pojem jednoduše nekonečného systému (jednoduchého řetězce) jako průnik všech množin popsaných axiomem (U), tj. obsahujících $\emptyset$ coby význačný prvek 0 a uzavřených na operaci $f(x) = \{x\}$ coby následnickou funkci $s(x)$. Zermelo tento průnik značí jako Z_0. Jeho existence přitom plyne z definice

$$Z_0 \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \{x \in \mathcal{P}(c) \mid \emptyset \in x \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow \{y\} \in x)\},$$

v níž uvažujeme průnik množiny M jistých podmnožin nekonečné množiny c, ve své existenci garantované axiomem (U). Existence množiny M je garantována axiomy (P) a (A), existence průniku $\bigcap M$ je dána jednak tím, že je M díky (U) neprázdný systém (jinak by se jednalo o univerzální třídu), a jednak tím, že obecně platí $\bigcap M \subseteq x$ pro každé $x \in M$, tj. díky (A).

Nekonečná množina c existující podle (U) stejně jako Z_0 jsou evidentně nekonečné množiny v Dedekindově smyslu, tj. existuje k nim prostá funkce zobrazující je na jejich vlastní část. Toto tvrzení ale nejprve činíme vně celé teorie, tj. nevíme, zda ona funkce existuje i na bázi daných axiomů. Disponujeme-li, na rozdíl od Zermela a jeho současníků v roce 1908, pojmem funkce $g : A \rightarrow B$ coby podsystémem systému uspořádaných dvojic $A \times B$ a definicí uspořádané dvojice à la Kuratowski, lze dedekindovskost c, resp. Z_0 v $\mathfrak{Z}$ dokonce dokázat. Platí totiž $g \subseteq A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Funkce f zobrazující Z_0 na vlastní část pak existuje díky tomu, že jsou její definiční obor a obor hodnot množinami, a může být tedy vydělena z jejich kartézského součinu jako nejmenší relace R taková, že platí (1) $\langle \emptyset, \{\emptyset\} \rangle \in R$, a (2) jestliže $\langle x, y \rangle \in R$, pak $\langle \{x\}, \{y\} \rangle \in R$. Podobný argument již ale nelze aplikovat např. u von Neumannových čísel, neboť existence jejich celku neplyne z Zermelovy verze axiomu nekonečna. Toho lze dosáhnout úpravou (U) nebo přijetím dalších axiomů.

Právě pojem nekonečna přitom názorně ukazuje závislost zavedených pojmů na axiomatické výstavbě. Disponujeme-li přirozenými čísly, lze definovat pojem konečnosti nějaké množiny A jako její ekvivalenci (rovnopočetnost) s nějakým přirozeným číslem, nekonečnost pak jako neexistenci takového zobrazení. Nazývejme tyto pojmy N-KONEČNOSTÍ, resp. N-NEKONEČNOSTÍ. Lze ukázat, že N-nekonečnost plyne z dedekindovské nekonečnosti, tj. tvrzení, že na dané množině existuje injektivní a zároveň nesurjektivní funkce. Opačné tvrzení lze ale dokázat jen za použití axiomu výběru,[42] kdy prostřednictvím výběrové funkce g sestrojíme posloupnost odlišných prvků A jako

[42] Takto existuje celá škála definicí (ne)konečnosti, u nichž je typicky jedna část ekvivalence dokazatelná 'snadno', druhá až za předpokladu axiomu výběru. Dedekindova definice nekonečnosti je v tomto smyslu nejsilnější (tj. implikuje ostatní bez axiomu), N-definice neslabší. To je i případ Tarského definice, podle níž je množina A nekonečná (říkejme: T-NEKONEČNÁ), jestliže existuje neprázdná podmnožina $X \subseteq \mathcal{P}(A)$,

$$a_1 := g(A),$$
$$a_{n+1} := g(A - \{a_1, \ldots, a_n\}).$$

Tato posloupnost, tj. funkce z přirozených čísel do A, existuje díky platnosti jednoduché věty o definici rekurzí, kterou lze dokázat podobně jako tu Dedekindovu. Dostaneme se k ní v příštím oddíle. Všimněme si přitom, že odkaz ke všem dosud definovaným hodnotám $\{a_1, \ldots, a_n\}$, tj. nejen k hodnotě předchozí, není v tomto případě podstatný, neboť lze použít funkci

$$h(0) = \emptyset,$$
$$h(n+1) = h(n) \cup \{g(A - h(n))\}$$

a posloupnost definovat skrze $a_n := g(A - h(n))$. Možnost takového odkazu je ovšem podstatná pro funkce definované na ordinálech, tj. nejen na konečných číslech, neboť mnohé z nich předchůdce nemají. K formulaci příslušné rekurze potřebujeme řádnou definici ordinálního čísla. K rozvinutí jejich teorie se ukázalo být rovněž nutné upravit původní axiomatizaci.

6.6 Fraenkelův axiom

Zermelova axiomatizace teorie množin znamenala jednoznačný úspěch. Paradoxy se zdály být zažehnány, bylo možné formulovat a dokazovat množinové teorémy bez dřívějších dvojznačností. Na druhou stranu nedovolovala rekonstruovat Cantorovu nauku v intencích jejího zakladatele. To se týkalo zejména ordinálních čísel a na nich založené transfinitní rekurze, které pro jejich odkaz k počítání považoval Zermelo za nebezpečné. Zermelův druhý důkaz věty o dobrém uspořádání byl veden právě snahou redukovat množství nedefinovaných pojmů na minimum, a zbavit se tedy mimo jiné jakéhokoli jiného odkazu k ordinálům nežli k pouhému "způsobu řeči pro srovnání dvou množin co do podobnosti nebo ekvivalence jejich částí". Zermelo [1908a, s. 193] se tím zcela v souladu se svým přesvědčením držel oficiální definice kardinálního a ordinálního čísla logickou abstrakcí, nikoli Cantorových pokusů o explicitní psychologické zdůvodnění. V této redukcionistické linii pokračovali Fraenkel [1925], [1926] a Kuratowski [1921], [1922], jak to detailně popisuje Hallett [1984, kap. 7]. Jiní, mezi nimi Hausdorff [1914, s. 2], dále používali Cantorovy intuitivní koncepce ordinálu a rekurze a obviňovali Zermela z toho, že je jeho teorie neúplná.

která nemá maximální prvek vzhledem k inkluzi. Množina je T-nekonečná tehdy a jen tehdy, je-li N-nekonečná, a to nezávisle na platnosti axiomu výběru. Mezipřípad představuje např. charakterizace množiny A jako nekonečné v případě, že existuje surjektivní zobrazení $f : A \to A$, které není injektivní.

Rozhodujícím podnětem přispěl do diskuze maďarský matematik John von Neumann [1923], když ukázal, že ordinální čísla lze rigorózně zavést jako objekty dané formální teorie, tj. množiny jistého druhu, a příslušnou transfinitní indukci pak obhájit stejným způsobem, jako to Frege a Dedekind učinili pro indukci prostou. Zároveň dal nepřímo za pravdu Hausdorffovi, když byl nucen do své varianty axiomatického systému přijmout axiom, jenž v Zermelově systému chybí, totiž že obrazem množiny přes funkci je opět množina. Tento tzv. axiom nahrazení ovšem nehraje roli v samotné definici ordinálních čísel, které je možné zavést již v teorii Zermelově, ale v důkazu, že je jich dostatečné množství pro každou dobře uspořádanou množinu. Právě to také zdůraznil von Neumann [1928] v konfrontaci s faktem, že Zermelo ordinální čísla jeho střihu zavedl kolem roku 1916, podle svědectví zdokumentovaných Hallettem [1984, s. 277 nn] dokonce ještě o něco dříve. Na axiomu také stojí platnost věty o definici transfinitní rekurzí, jak to záhy uvidíme.

Autorství axiomu nahrazení je zpravidla připisováno Fraenkelovi [1921] a Skolemovi [1923*b*], kteří oba v letech 1921–1922 nezávisle na sobě zmínili, že je v Zermelově systému sice možné dokázat existenci množin

$$Z_0,\ \mathcal{P}(Z_0),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(Z_0)),\ \ldots,$$

nikoli však množiny

$$\{Z_0, \mathcal{P}(Z_0), \mathcal{P}(\mathcal{P}(Z_0)), \ldots\}.$$

Podobně nemusí existovat množina kardinality $\aleph_\omega$ a větší. Skolem i Fraenkel zmínili axiom nahrazení jako možnost překonání této obtíže, nehájili ale jeho přidání k Zermelově teorii. Skolem proto, že na jejím rozvoji nebyl nijak zainteresován, Fraenkel z obav, že to povede k příliš velkým množinám.

Pozoruhodné je, že axiom, ač Zermelem vynechán, má původ jednak v Cantorově praxi nahrazování prvků konzistentní totality konzistentními totalitami — při zachování její konzistence — a jednak v principu, podle něhož jsou dvě ekvivalentní (rovnopočetné) totality buď množinami (tj. konzistentními totalitami), nebo jsou nekonzistentní, viz Cantor [1932, s. 444]. Před Fraenkelem zmínil podobný axiom ještě Dmitry Mirimanov [1917*a*], [1917*b*] z Ženevy při studiu dobře uspořádaných množin, v němž anticipoval von Neumannovu teorii ordinálů do značných detailů, avšak nikoli ve von Neumannově systematickém, axiomatickém tvaru. Podle Halletta [1984, s. 185 nn, 272 nn] tak může být teprve von Neumann zván pravým autorem nahrazení jakožto axiomu zesilujícího podstatně Zermelovu axiomatizaci ve směru daném kdysi Cantorem.

Přestože von Neumann po Fraenkelovi uvedený axiom nazývá, což se pak promítne i do vzniku tzv. Zermelovy-Fraenkelovy teorie množin, je

Fraenkelovo autorství zpochybněno jednak tím, že se k tvrzení nechoval jako k axiomu, především ale skutečností, že ve své axiomatizaci [1925], [1926] specifikoval užitý pojem funkce tak úzce, že byl jeho axiom nahrazení dokazatelný již v rámci $\mathfrak{Z}$, což von Neumann [1928] záhy předvedl. Ve stejném smyslu náleží von Neumannovi prvenství i ve věci definice ordinálních čísel, kterou, jak jsme již zmínili, kromě Russella a Mirimanova sledoval samotný Zermelo, jenž zjevně postupem času překonal svůj dřívější redukcionistický postoj. V rozvinutí této teorie mu ale patrně zabránila tuberkulóza, na niž se od roku 1907 opakovaně léčil a která také zapříčinila jeho dočasné penzionování v letech 1916–1926.

Nyní ale již k von Neumannovým ordinálním číslům samotným. Zavedeme-li nejprve pojem TRANZITIVNÍ MNOŽINY jako takové množiny a, jejíž prvky jsou i jejími podmnožinami, tj. pro niž platí $x \in a \to x \subseteq a$, neboli $\bigcup a \subseteq a$, pak řekneme:

> Množina b je ORDINÁLNÍM ČÍSLEM tehdy a jen tehdy, je-li tranzitivní a dobře uspořádaná relací $\in$ (přičemž toto uspořádání je silné, tj. antireflexivní).

Pro α, β ordinály definujeme jejich uspořádání jako

$$\alpha < \beta \rightleftharpoons \alpha \in \beta.$$

Geniální jednoduchost von Neumannova návrhu je patrná hned v prvním kroku, kdy z definice samé plyne, že každý prvek ordinálu je ordinálem, což znamená, že ordinální číslo je množinou všech ordinálních čísel předcházejících.

Důkaz: Mějme $x \in \alpha$. Jelikož $x \subseteq \alpha$, je x dobře uspořádán relací $\in$. Platí-li $z \in y \in x \in \alpha$, pak dostaneme $z, y \in \alpha$ z tranzitivity množiny α a z tranzitivity relace $\in$ na α dospíváme k $z \in x$, čili x je tranzitivní. □

Dále platí, že pro (různá) ordinální čísla (1) jsou podmínky $\alpha \in \beta$ a $\alpha \subset \beta$ ekvivalentní a (2) nastává právě jeden z případů $\alpha \in \beta$ nebo $\beta \in \alpha$.

Důkaz: (1) Nechť $\alpha \subset \beta$, pak $\beta - \alpha$ je neprázdná a existuje nejmenší prvek γ, který jí náleží. Prvky β jsou dobře, tedy i lineárně uspořádány relací $\in$. To znamená, že pro jakékoli $\delta \in \alpha \subset \beta$ platí trichotomie $\delta \in \gamma \vee \delta = \gamma \vee \gamma \in \delta$. Prostřední a poslední případ jsou vyloučeny, platí tedy $\alpha \subseteq \gamma$. Kdyby $\gamma - \alpha$ bylo neprázdné, dostali bychom spor s minimalitou γ, platí tedy $\alpha = \gamma$, a tím pádem $\alpha \in \beta$. (2) Pro α a β ordinály je $\alpha \cap \beta$ opět ordinál γ. Dále musí platit $\gamma = \alpha$ nebo $\gamma = \beta$, jinak by podle (1) bylo γ prvkem obou, tj. i sebe sama, což je nemožné vzhledem k antireflexivitě uspořádání. Další aplikací (1) získáme $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$. □

Nyní se věnujme ordinálním číslům jakožto celku. V Zermelově systému jsou příliš velké totality vyloučeny jako neexistující, tj. výrazy $\{x \mid \varphi(x)\}$ jsou použitelné nanejvýš jako pohodlný způsob řeči, který lze ze všech relevantních kontextů eliminovat. Von Neumannův axiomatický systém, podaný v článku *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre* [1925], je zvláštní tím, že za příčinu antinomií nepovažuje velikost totality, ale možnost jejího náležení totalitám jiným. V důsledku toho nezavádí pouze vágní rozlišení mezi množinou a třídou coby konzistentní a nekonzistentní totalitou, ale specifikuje první z nich podmínkou náležení, tj:

$$x \text{ je množina} \rightleftharpoons (\exists y)(x \in y).$$

To mu umožňuje systematicky pracovat s množinami i třídami jako rovnoprávnými objekty bez hrozby antinomie. Všechny množiny jsou třídami, ale ne všechny třídy jsou množinami. Takové pak nazývá VLASTNÍMI TŘÍDAMI. Eventuálně lze říci, že vlastní třídy jsou tak velké, že nemohou být prvky jiných totalit.[43]

V tomto smyslu nám tedy nic nebrání hovořit o třídě všech ordinálních čísel Ord. Z dokázaných vět přímo plyne, že je Ord tranzitivní a dobře uspořádaná relací $\in$, neboť průnik $\bigcap C$ (neprázdné) třídy C ordinálů je nejen jejich infimem, ale třídě C dokonce náleží. Z toho plyne, že třída Ord není množinou, neboť jinak by byla sama ordinálem, tj. platilo by $\mathsf{Ord} \in \mathsf{Ord}$, což je vyloučeno s ohledem na antireflexivitu relace $\in$. Na rozdíl od průniku je sjednocení $\bigcup C$ třídy C ordinálů ordinálem jen tehdy, je-li C množina. Každá množina ordinálů má takto nicméně v Ord suprémum.

Není obtížné ověřit, že pro ordinál α je $\alpha \cup \{\alpha\}$ nejmenší ordinál větší, tj. $\inf\{\beta \mid \alpha < \beta\}$, a můžeme tedy stanovit

$$\alpha + 1 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \cup \{\alpha\}.$$

Ordinál α, pro nějž existuje ordinál β takový, že $\beta+1 = \alpha$, se nazývá IZOLOVANÝ, v opačném případě LIMITNÍ. Pak platí $\alpha = \sup\{\beta \mid \beta < \alpha\} = \bigcup \alpha$. Definici limitního ordinálu splňuje také $\emptyset$, obvykle o ní tak ale nehovoříme, tj. díváme se na ni jako na ordinál *sui generis*. Jako dodatek k zavedení operace $x + 1$ stanovujeme:

$$0 \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset.$$

Existence limitního ordinálu plyne z axiomu nekonečna, avšak nyní již nikoli v Zermelově původním tvaru, ale jeho patřičné úpravě na

(U') $(\exists c)[\emptyset \in c \wedge (\forall x)(x \in c \rightarrow x \cup \{x\} \in c)]$.

[43] Srov. Fraenkel *et al.* [1973, s. 135 nn].

Tato reformulace je ovšem zbytečná právě díky AXIOMU NAHRAZENÍ (*Ersetzungsaxiom*, *axiom of replacement*):

(R) $(\forall a)(\exists c)(\forall y)[y \in c \leftrightarrow (\exists x)(x \in a \wedge F(x) = y)]$.

V dnešním prvořádovém čtení, v němž se z axiomu stává schéma, je třeba chápat $F(x) = y$ jako zkratku za libovolnou formuli $\varphi(x, y)$ uvažovaného jazyka, která se chová funkcionálně, nemusí být ale totální. Původní čtení kolísalo podobně jako v případě axiomu vydělení. Ten je v každém případě axiomem nahrazení implikován, a tedy zbytečný, neboť k dané vydělující formuli $\psi(x)$ stačí vzít formuli $\varphi(x, y) := \psi(x) \wedge x = y$ pro y nové a aplikovat nahrazení. Podobně, tentokráte však navíc s pomocí axiomu potence, se lze zbavit i axiomu dvojice, kdy pro dané množiny a, b uvažujeme formuli $(x = \emptyset \wedge y = a) \vee (x = \{\emptyset\} \wedge y = b)$. Tato formule je funkcionální, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ je množina díky (P), tudíž i $\{a, b\}$ díky (R).

Význam axiomu nahrazení pro teorii ordinálů názorně ukazuje základní věta, podle níž každé dobře uspořádané množině odpovídá (měří ji) právě jeden ordinál. K tomu je ovšem potřeba dokázat to, co dokázal již Cantor [1895/1897], totiž:

> (1) Dobře uspořádaná množina není izomorfní se svým počátečním úsekem a (2) pro každé dvě dobře uspořádané množiny platí následující trichotomie: buď jsou izomorfní, nebo je první izomorfní s počátečním úsekem druhé či *vice versa*.

Důkaz: Nejprve dokažme jednoduché lemma. Pro dobře uspořádanou množinu $\langle A, < \rangle$ a nějaké zobrazení $f : A \to A$, které je rostoucí, tj. $x < y \to f(x) < f(y)$, platí

$f(x) \geq x$ pro každé $x \in A$.

Nechť ne. Pak existuje nejmenší y takové, že $f(y) = z < y$. Z předpokladu monotónnosti $z < y \to f(z) < f(y) = z$ plyne spor s minimalitou y. Nyní k dokazované větě. (1) Izomorfismus na uspořádané množině $\langle A, < \rangle$ je rostoucí zobrazení. Nechť $rng(f) = A_{<a}$ pro nějaké $a \in A$. Pak $f(a) < a$ v rozporu s lemmatem. (2) Mějme dvě dobře uspořádané množiny $\langle A, < \rangle$, $\langle B, < \rangle$ a uvažme množinu

$$f = \{\langle x, y \rangle \in A \times B \mid A_{<x} \cong B_{<y}\}.$$

Podle předpokladu (1) se musí jednat o prostou funkci zachovávající uspořádání. Pokud $dom(f) = A$ a $rng(f) = B$, máme případ $A \cong B$. Pokud $rng(f) \neq B$, pak pro nejmenší prvek b náležející $B - rng(f)$ platí $rng(f) = B_{<b}$, neboť z $x < y$ a $y \in rng(f)$ již plyne, že $x \in rng(f)$. Nyní musí platit, že $dom(f) = A$, jinak bychom vzali opět nejmenší a takový, že $A - dom(f)$, a rozšířili f o $\langle a, b \rangle$, což nelze z definice. Platí tedy

$A \cong B_{<b}$. Podobně v inverzním případě dostaneme $B \cong A_{<a}$. Z bodu (1) plyne, že se tyto tři případy vylučují. □

Nyní již ohlášená věta:

> Každá dobře uspořádaná množina je izomorfní právě s jedním ordinálním číslem.

Důkaz: Ordinální čísla jsou také dobře uspořádané množiny, jedinečnost tedy plyne z předchozí věty. Nyní k existenci. Předpokládejme, že pro dobře uspořádanou množinu $\langle A, < \rangle$ věta neplatí. Definujme $F(x) = y$ jako předpis, který $x \in A$ přiřadí $\alpha \in \mathsf{Ord}$ takové, že $\alpha \cong A_{<x}$, pokud toto existuje. Z výše uvedených důvodů platí, že se jedná o předpis funkcionální, z nahrazení pak, že je $F[A]$ množinou ordinálů. Jelikož podle předpokladu není $\langle A, < \rangle$ izomorfní s žádným ordinálem β, ani s jeho počátečním úsekem, protože to je opět nějaký ordinál, musí být podle předchozí věty β izomorfní s počátečním úsekem $\langle A, < \rangle$, a tedy $\beta \in F[A]$. V důsledku toho platí $\mathsf{Ord} \subseteq F[A]$, a tudíž $F[A] = \mathsf{Ord}$. To ale znamená, že $F[A]$ není množinou. Spor. □

Všimněme si, že stejně jako se $F[A]$ díky nahrazení stane množinou, je-li množinou A, stane se množinou, tj. existujícím objektem příslušné teorie, i funkce $F|A$, určená jako podmnožina kartézského součinu svého definičního oboru a oboru hodnot. To bude významné pro správné čtení níže uvedené transfinitní verze rekurzivního teorému. Té přirozeně předchází PRINCIP TRANSFINITNÍ INDUKCE, jenž formulujeme takto:

> Mějme nějakou třídu $C \subseteq \mathsf{Ord}$ a předpokládejme, že platí:
>
> (1) $0 \in C$,
>
> (2) jestliže $\alpha \in C$, pak $\alpha + 1 \in C$,
>
> (3) jestliže $\{\beta \mid \beta < \alpha\} \subseteq C$ pro α limitní, pak $\alpha \in C$.
>
> Pak již platí:
>
> (4) $C = \mathsf{Ord}$.

Důkaz: Sporem. Stačí vzít nejmenší prvek $\beta \in \mathsf{Ord}$, který v C není, rozlišit, zda je 0, izolovaný, či limitní, a podle podmínek (1), (2), resp. (3) pak odvodit spor. □

Formulaci principu by šlo samozřejmě zjednodušit vynecháním podmínek (1), (2) při reformulaci podmínky (3) na

> jestliže $\beta \in C$ pro všechna $\beta < \alpha$, pak $\alpha \in C$.

První formulace má výhodu jisté názornosti, v některých kontextech se ukazuje jako praktičtější. Rekurzivní teorém má stejně jako v Dedekindově případě, tj. v omezení na první limitní ordinál ω, mnoho verzí, důkaz pak podobnou strukturu. Podstatný rozdíl spočívá v tom, že hodnoty definované funkce *mohou* záviset na všech hodnotách předchozích. To lze (s patřičným upozorněním na čtení třídových termů F, G) vyjádřit ve VĚTĚ O TRANSFINITNÍ REKURZI takto:

> Nechť je G funkcionální na V. Pak existuje právě jedno zobrazení $F : \mathsf{Ord} \to \mathsf{V}$ takové, že $F(\alpha) = G(F|\alpha)$.

Důkaz: Všimněme si, že teorém dává smysl právě proto, že je $F|\alpha$ díky (R) množinou, a lze na ni tedy aplikovat G. Zobrazení $f : \alpha \to \mathsf{V}$ pro $\alpha \in \mathsf{Ord}$ nazveme α-rekurzí (podle G), jestliže platí

$$f(\beta) = G(f|\beta) \text{ pro každé } \beta < \alpha.$$

Nejprve (1) dokážeme, že pro každé $\alpha \in \mathsf{Ord}$ je příslušná α-rekurze určena jednoznačně, neboli pro každé dvě α-rekurze g, h platí $g = h$. Postupujeme indukcí, tj. předpokládáme, že pro všechna $\gamma < \beta \in dom(g)$ platí $g(\gamma) = h(\gamma)$. To znamená, že $g|\beta = h|\beta$, a tudíž i $g(\beta) = G(g|\beta) = G(h|\beta) = h(\beta)$. Dále (2) potřebujeme dokázat, že pro každé $\alpha \in \mathsf{Ord}$ existuje nějaká α-rekurze. Postupujeme indukcí. (i) Pro $\beta = 0$ je 0-rekurzí $\emptyset$. (ii) Předpokládáme, že pro α existuje α-rekurze g, a definujeme $h := g \cup \{\langle \alpha, G(g) \rangle\}$ jako požadovanou $(\alpha+1)$-rekurzi. (iii) Předpokládáme, že pro všechny $\beta < \alpha$, kde α je limitní, existuje β-rekurze g_β, která je navíc podle bodu (1) určena jednoznačně. Předpis $h := \bigcup_{\beta \in \alpha} g_\beta$ pak popisuje α-rekurzi h.

Pro $\alpha \in \mathsf{Ord}$ stanovíme $F(\alpha)$ jako $g(\alpha)$ pro jednoznačně určenou $(\alpha+1)$-rekurzi g, tj. uchopíme F jako sjednocení všech α-rekurzí pro libovolné $\alpha \in \mathsf{Ord}$. Z konstrukce je jasné, že platí $F(\alpha) = G(F|\alpha)$. Jednoznačnost plyne z bodu (1), neboť pro $F_1(\alpha) = G(F_1|\alpha)$ a $F_2(\alpha) = G(F_2|\alpha)$ jsou $F_1|\alpha$ a $F_2|\alpha$ α-rekurze pro všechna $\alpha \in \mathsf{Ord}$. □

Transfinitní rekurze nyní ospravedlňuje 'intuitivní' vedení důkazů vyčerpáváním dané množiny, jak jsme ho diskutovali v oddíle 6.4 v souvislosti s Zermelovým důkazem věty o dobrém uspořádání. V alternativním důkazu WO využijeme zjednodušenou verzi věty o rekurzi $F(\alpha) = G(F[\alpha])$, kterou z té dokázané dostaneme jednoduše uvažováním předpisu $H(x) := G(rng(x))$. Nyní již k důkazu WO:

Důkaz: Mějme množinu A a výběrovou funkci f na $\mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$. Pro libovolné $x \in \mathsf{V}$ definujme $G(x) = f(A - x)$ tehdy, když $A - x \neq \emptyset$, jinak nechť $G(x) = a$ pro nějaké pevně zvolené $a \notin A$. Podle věty o rekurzi existuje jednoznačně určená funkce $F(\alpha) = G(F[\alpha])$. Jelikož jsou všechny hodnoty, kterých F nabývá v A, různé, musí pro nějaké β platit $F(\beta) = a$, jinak bychom prostě zobrazili do množiny vlastní třídu Ord. Pro nejmenší γ takové platí $F[\gamma] = A$ a $F|\gamma$ určuje dobré uspořádání A. $\square$

S ordinálními čísly po ruce můžeme podat explicitní definici KARDINÁLNÍHO ČÍSLA jako ordinálu α, pro nějž $|\beta| \neq |\alpha|$ pro všechna $\beta < \alpha$. Systém Card všech kardinálů je rovněž uzavřen na supréma podmnožin, z čehož pod hrozbou Cantorova paradoxu vyplývá, že se jedná o vlastní třídu. Jako podmnožina Ord je Card dobře uspořádaná, což zajišťuje jednoznačnou existenci rostoucí ordinální funkce, která je izomorfismem obou tříd. V omezení na ω, tj. konečné kardinály, se jedná o identitu, proto je zvykem začít až číslováním kardinálů nekonečných. To zachycuje známá $\aleph$-notace $\aleph_\alpha$. Původní notace ω_α se zpravidla používá tehdy, uvažujeme-li příslušný kardinál také jako ordinál.

Transfinitní rekurze nám umožní zavést ordinální operace $f(x, y)$ obvyklým fixováním hodnot pro 0 a následníka, rozšířeným o limitní případ jako

$$f(\alpha, \beta) = \sup \{f(\alpha, \gamma) \mid \gamma < \beta\},$$

což je někdy sugestivně značeno také jako

$$f(\alpha, \beta) = \lim_{\gamma \to \beta} f(\alpha, \gamma).$$

V případech sčítání a násobení zde máme ‘aritmetický’ pendant k již zmíněnému ‘geometrickému’ zdůvodnění, v němž je součet $\alpha + \beta$ chápán jako ordinál přiřazený napojení prvků β na prvky α a součin $\alpha \times \beta$ jako typ podobně poskládaných β kopií α. V odchylce od běžného násobení pak zjevně neplatí komutativní zákon $2\omega = \omega \neq \omega 2 = \omega + \omega$.[44] Na druhou stranu lze dospět k jakési variantě p-adického zápisu přirozených čísel, tentokráte pro transfinitní základ. Každé $\alpha > 0$ lze jednoznačně zapsat v tzv. CANTOROVĚ NORMÁLNÍ FORMĚ:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} k_n,$$

kde $\alpha \geq \beta_1 > \cdots > \beta_n$ a n, k_1, …, $k_n \in \mathsf{N}$. Téhož lze dosáhnout pro libovolný základ $\gamma \geq 2$. Cantor [1895/1897, § 19] dokázal uvedené tvrzení pro speciální případ spočetných ordinálů, mezi nimiž je vhodné zmínit

$$\epsilon_0 \stackrel{\text{def}}{=} \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

coby první případ ordinálu typu $\omega^\alpha = \alpha$. Dalšími výsledky ordinální a kardinální aritmetiky se již zabývat nebudeme a vrátíme se k popisu vývoje axiomatizace teorie množin, konkrétně podnětům Skolemovým.

[44] Nekomutativitu sčítání jsme již zmínili v oddíle 2.8.

6.7 Skolemův paradox

Jméno norského matematika Thoralfa Skolema jsme v souvislosti s vývojem axiomatické teorie množin zmínili několikrát, a ačkoli je jeho příspěvek nepopiratelný, je s ním spjata i jistá dvojznačnost, neboť Skolem všechny své studie z (axiomatické) teorie množin považoval za důkaz, že se za základ matematiky nehodí. Na tom nic nemění fakt, že svůj názor později modifikoval. Není proto náhodou, že jeho článek *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre* [1923*b*], v němž předkládá již zmíněnou revizi Zermelova pojmu 'definitního', tj. proměnu axiomu vydělení ve schéma a zavedení axiomu nahrazení rovněž ve formě schématu, obsahuje také zjednodušenou verzi důkazu Löwenheimovy-Skolemovy věty (dále LST), podle níž má každá prvořádová teorie s nekonečným modelem také model v přirozených číslech.

Samotný teorém a rozlišení teorií prvního a vyšších řádů je zásluha Leopolda Löwenheima [1915], jenž je rozvinul v rámci studia Schröderova relačního kalkulu, do níž byla již inkorporována Peircova obecná algebra logiky, v podstatě odpovídající logice kvantifikátorů. Löwenheim od sebe zřetelně odlišil výrazy, v nichž se kvantifikuje přes individua (*Zählausdrücke*), od těch, v nichž se kvantifikuje také přes relace (*Relativausdrücke*), což by nebylo tak významné (Fregova logika to umožňuje v čistší formě), kdyby právě pro logiku výrazů prvního typu nedokázal zmíněný teorém, a nedal tím podstatný důvod pro jejich oddělené zkoumání. Jelikož zastaralý způsob prezentace zastřel význam Löwenheimova výsledku, podal Skolem [1920] o pět let později zjednodušenou verzi jeho důkazu s využitím Skolemovy normální formy. Navíc ukázal i některé důsledky a aplikace teorému. Ve zmíněném článku [1923*b*], založeném na přednášce z roku 1922, předvedl další zjednodušení, spočívající v eliminaci axiomu výběru z důkazu LST. Jeho krátká studie tak pokrývá hned několik témat relevantních pro náš výklad. Ocitujeme-li jejich seznam, jak jej Skolem podává v úvodu, jsou to:

(1) Zvláštní okolnost, že k tomu, abychom se zabývali "množinami", musíme začít "obory", které jsou konstituovány jistým způsobem;

(2) žádoucí definice zpřesňující Zermelův pojem "definitního";

(3) okolnost, že v každé adekvátní axiomatizaci jsou pojmy teorie množin relativní;

(4) okolnost, že Zermelův systém neposkytuje dostatečné základy pro obvyklou teorii množin;

(5) potíže plynoucí z nepredikativnosti definicí při pokusech o důkaz konzistence axiomů;

(6) nejednoznačnost domény B [tj. modelu Zermelových axiomů];

(7) okolnost, že v logických zkoumáních abstraktně daných axiomatických systémů potřebujeme matematickou indukci;

(8) poznámka k axiomu výběru.

Bod (2), bod (3), jenž se týká LST, a bod (4), diskutující axiom nahrazení, jsme již nějakým způsobem zmínili, ke zbylým, zvláště k otázce relativnosti množinově-teoretických pojmů, se dostaneme ve zbytku kapitoly. Rozhodující je zde bod (3), obsahující tzv. SKOLEMŮV PARADOX, jejž lze ve zvláště přesvědčivé, naivní verzi, formulovat takto:

> V každém modelu $\mathfrak{Z}$ musí s ohledem na axiom nekonečna existovat nekonečná množina Z_0 a s ohledem na axiom potence množina $\mathcal{P}(Z_0)$. V $\mathfrak{Z}$ je přitom odvoditelná Cantorova věta, podle níž je $\mathcal{P}(Z_0)$ nespočetná. To je v rozporu s existencí spočetného modelu, který podle LST existuje, jestliže $\mathfrak{Z}$ nějaký model má.

Nepoučeného čtenáře nejspíš nejprve napadne, že z této formulace problému by se dalo přímo usoudit na neexistenci modelu pro $\mathfrak{Z}$, kdyby ovšem všechny uvedené předpoklady platily tak samozřejmě, jak se nám argument snaží sugerovat. Berme je jeden po druhém. Zaprvé si je třeba uvědomit, že LST tvrdí pouze existenci nekonečného spočetného modelu. Takový model má $\mathfrak{Z}$ již bez axiomu nekonečna, nemusí v něm ale být množina, která má nekonečně, a tím spíše nespočetně mnoho prvků. V $\mathfrak{Z}$ to první zajišťuje (U), druhé pak (A), skrze nějž a (P) dostaneme existenci množin $\mathcal{P}(Z_0)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(Z_0))$, ... Těchto množin ale může být opět jen spočetně, což byla právě pointa Skolemova bodu (4) o potřebě axiomu nahrazení z téhož článku. Průběžným závěrem je, že $\mathfrak{Z}$ může mít spočetný model s nespočetnými prvky, o nichž ale LST nic neříká. Tím se zdá být paradox neutralizován. Vyvstane nicméně z jiné strany.

Podle axiomu (A) vydělení je pro každou množinu každá její podmnožina prvkem množinového univerza. Tyto podmnožiny jsou pak axiomem (P) potence shrnuty v jeden celek, který je podle Cantorovy věty nespočetný. Nespočetné ale tím pádem musí být již celé univerzum, což je v rozporu s LST. Je tedy LST chybný? Nikoli, neboť se do hry opět dostává otázka, co je to 'každá podmnožina'. Jelikož Skolem namísto axiomu vydělení užívá *prvořádové* schéma, pro něž právě LST platí, je těch nutně existujících podmnožin Z_0 pouze spočetně mnoho, spočetné tedy může být jak univerzum modelu, tak jeho prvek $\mathcal{P}(Z_0)$. Teprve teď ale začíná být paradox vážný, neboť právě o množině $\mathcal{P}(Z_0)$ je v $\mathfrak{Z}$ dokázáno, že je nespočetná.

Nežli přejdeme k náčrtu Skolemova vlastního řešení, zaměřme se na okamžik na původní formulaci LST, v níž se hovoří o existenci modelu v přirozených číslech. To nám totiž opět připomíná, že $\mathfrak{Z}$ je jako axiomatická teorie Hilbertova typu teorií formální, což znamená, že jejími modely nejsou jen ty zamýšlené (ať již je jimi cokoli), ale všechny takové, které splní vztahy vyjádřené axiomy. V ohlášeném modelu $\langle \mathsf{N}, \in_{\mathsf{N}} \rangle$ tedy není 'samotná' množina Z_0 či $\mathcal{P}(Z_0)$ (ať již je to cokoli), ale čísla z, p, která je reprezentují a která jsou dávána do vztahu nějakou aritmetickou relací $\in_{\mathsf{N}}$ simulující relaci $\in$. Tím není ještě paradox nijak vyřešen, neboť od takovéhoto modelu není problém přejít k modelu množinovému, jak jsme to v oddíle 4.5 naznačili v souvislosti s přechodem od vícesortové logiky prvního řádu k henkinovským interpretacím řádu druhého, když jednoduše číslo b nahradíme množinou všech těch a, která jsou s ním ve vztahu $\in_{\mathsf{N}}$ (a, b). Na bázi této konstrukce pak můžeme argumentovat, že mají-li $\mathfrak{Z}$, resp. jeho rozšíření o Fraenkelův axiom nějaký nekonečný model jistých 'standardních' vlastností, mají i takový nekonečný spočetný model, jehož prvky jsou množiny, konstanta $\in$ je definována podle očekávání a prvky prvků modelu jsou opět jeho prvky.[45] Podstatná je ale až formulace Cantorovy věty, tedy tvrzení, že *neexistuje funkce*, která by jedno-jednoznačně přiřazovala prvky Z_0 a $\mathcal{P}(Z_0)$, s důrazem na slova "neexistuje" a "funkce". Jelikož se pohybujeme v rovině prvního řádu, nemá totiž Cantorova věta podobu

$$\neg(\exists f)\varphi(f, z, p),$$

kde z a p jsou reprezentanti příslušných jedno-jednoznačně (ne)přiřazených množin, ale

$$\neg(\exists x)\varphi(x, z, p).$$

Uvažovaná funkce je zde tedy tolik co prvek x (číslo) základního univerza takový, že všechny prvky y, pro něž platí $\in_{\mathsf{N}}$ (y, x), jsou 'uspořádané dvojice', vůči nimž je x 'jednoznačný vpravo'.

Pointa tohoto rozkladu je, že z a p mohou reprezentovat spočetné množiny (mít vztah $\in_{\mathsf{N}}$ ke spočetně mnoha prvkům univerza) a Cantorova věta ve formě $\neg(\exists x)\varphi(x, z, p)$ může stále platit jednoduše proto, že žádné x, které by dosvědčovalo spočetnost p, v univerzu není. V případě $\neg(\exists f)\varphi(f, z, p)$, jež je formulí druhého řádu, něco takového není možné, neboť při standardní interpretaci předpokládáme, že f probíhá přes všechny 'skutečné' funkce na daném univerzu. 'Nebýt v univerzu' (druhého řádu) tentokráte znamená 'nebýt ve skutečnosti'. Prvek z také

[45] Jádrem tvrzení je tzv. Mostowského lemma o kolapsu, podle něhož k interpretaci jazyka teorie množin, v níž je relace $\in$ interpretována jako fundovaná (definice viz s. 427) a splňující axiom extenzionality, existuje izomorfní interpretace, jejíž nosič je tranzitivní množina a $\in$ je interpretováno jako náležení. Z důkazu LST plyne, že k danému fundovanému modelu prvořádové teorie množin existuje také spočetný model, jenž je rovněž fundovaný, protože byl zkonstruován jako jeho (elementární) podstruktura. Požadovaný výsledek následuje.

teď reprezentuje 'skutečnou' množinu $\mathcal{P}(Z_0)$, tj. je ve vztahu k nespočetně mnoha prvkům univerza reprezentujícím každou podmnožinu Z_0, a to díky druhořádově interpretovanému axiomu vydělení, případně nahrazení. V tomto smyslu Zermelo chápal Skolemův paradox jako výzvu číst své axiomy v duchu logiky vyšších řádů. Situace, jako obvykle, není tak jednoduchá.

Skolemovo [1923*b*, § 3] vlastní vysvětlení odpovídá tomu, co se k paradoxu obvykle dodává: argument není paradoxem (sporem), neboť musíme rozlišit mezi tím, co existuje 'uvnitř' a co 'vně' teorie. Jeho závěr ale všeobecně sdílený není, totiž že "axiomatizace teorie množin vede k relativitě množinových pojmů, a tato relativita je neoddělitelně spjata s každou důkladnou axiomatizací". To se nezdá být ani tak kritika teorie množin, jako její axiomatizace, jíž slouží Skolemův paradox jako *reductio ad absurdum*. Skolem toto své mínění později zcela obrátil, když v souladu s Hilbertovým finitistickým programem přijal metodu axiomatického formalismu jako adekvátní pro potřeby matematiky. LST se pro něj stal tím pádem důkazem, že matematické pojmy jsou vnitřně a nutně relativní, závisející na zvoleném axiomatickém systému. Říká:

> Skutečnost, že axiomatizace vede k relativismu, se někdy považuje za slabinu axiomatického systému. Avšak bezdůvodně. Analýza matematického myšlení a zachycení fundamentálních hypotéz a způsobů usuzování nemůže vědě neprospívat. Není slabinou vědecké metody, že nám nemůže dát nemožné.[46]

Pojmový relativismus je pro Skolema doktrínou, jež je "jasnější nežli absolutismus a platonismus, dominující klasické matematice". Právě o tomto názoru hovoří Zermelo [1932, s. 85], po svém návratu do vědeckého života koncem dvacátých let, v reakci na Skolemovy rané články jako o SKOLEMISMU coby nebezpečné nauce, která pramení z přesvědčení, že

> všechny matematické pojmy musí být reprezentovatelné ve *fixním konečném systému znaků.*

Podle Zermela je tato ultrafinitistická doktrína zodpovědná již za Richardův paradox, což je i celkem adekvátní analýza, jak jsme výše viděli, a navrhuje ji proto nahradit neschematickou "logikou nekonečného".[47]

[46] Citát je uveden in George [1985, s. 85] a pochází z roku 1941.

[47] Zermelo v úplnosti říká: "Předpoklad, že všechny matematické pojmy musí být reprezentovatelné ve *fixním konečném systémů znaků*, vede nevyhnutelně k '*Richardovu paradoxu*'. Dlouho poté, co se zdál být mrtev a pochován, vstal nedávno tento paradox šťastně z mrtvých ve *skolemismu*, doktríně, že *každá* matematická teorie, speciálně teorie množin, je splnitelná ve *spočetném modelu*. Jak je známo, ze sporných premis lze odvodit cokoli. Dokonce i ty nejpodivnější důsledky, které Skolem a jiní odvodili ze svých základních předpokladů, např. 'relativita' pojmu potenční množiny a rovnopočetnosti, je neodradily od doktríny, která se v mínění mnohých proměnila

V jeho axiomatické praxi to znamená aplikaci druhořádových metod s příslušným silným čtením původních axiomů, tedy jakousi kombinaci finitistických metod (užití axiomů) s infinitistickými (velkorysé užití proměnných). To mj. znamená také odmítnutí původní verze Hilbertova programu, jak se k tomu ještě vyjádříme v souvislosti s Gödelovými výsledky v kapitole 8.

Skolem ovšem v mnoha ohledech nezůstává Zermelovi nic dlužen. V reakci na článek, v němž Zermelo [1929] reviduje svůj dosavadní pojem 'definitního', Skolem [1930, s. 338] upozorňuje, že Zermelo, eliminující z vymezení definitní vlastnosti odkaz ke konečnému (konečné aplikaci jistých operací, např. v rekurzivní definici formule prvního řádu), tedy i přirozenému číslu, by měl správně eliminovat i odkaz k podmnožině, jenž se skrývá v jeho užití axiomu vydělení, resp. v druhořádové kvantifikaci vůbec, tím spíše, že jeho teorie měla primárně právě k axiomatizaci pojmu množiny sloužit. Tím je vedle bodu (2) významně rozvinut také bod (1) výše uvedeného seznamu. Tato slabina činí druhořádovou teorii množin podstatně problematičtější než druhořádovou aritmetiku či analýzu, které měly relativně pevnou preaxiomatickou bázi. Zvláště po objevu paradoxů je existence takovéto báze (tzv. 'naivní teorie množin') více než pochybná.

Teorii množin můžeme sice bez obav stále ještě pěstovat jako jednu z mnoha formálních teorií, sotva se dá ale doufat, že se pro ni — jako pro aritmetiku — podaří najít uspokojivý model, což je zase téma bodu (5). Ve věci základů matematiky o ní tedy tím spíše platí to, co jsme dříve řekli o údajném znovuvzkříšení Fregova a Dedekindova logicismu a co Skolem [1923*b*, § 7] v bodu (7) vyjádřil takto:

> Množinoví teoretici jsou obvykle toho názoru, že by pojem čísla měl být definován a princip indukce dokázán. Je ale jasné, že nemůžeme dokazovat ani definovat *ad infinitum*; dříve nebo později dospějeme k něčemu nedefinovatelnému či nedokazatelnému. Naší jedinou starostí by pak mělo být, aby první základy byly bezprostředně jasné, přirozené a nezpochybnitelné. Tato podmínka je splněna u pojmu čísla a induktivních úsudků, avšak nikoli u axiomů teorie množin Zermelova nebo jiného typu; kdybychom akceptovali redukci prvních pojmů na druhé, musely by být pojmy teorie množin jednodušší než matematická indukce, a usuzování s nimi méně zpochybnitelné; to vše je ale v rozporu se současným stavem věcí.

Tento postřeh staví do zvláště podivného světla moderní praxi teorie modelů: ta chce totiž na jednu stranu zakotvit logickou sémantiku v teorii

v dogma stojící mimo veškerou kritiku. Zdravá 'metamatematika' a skutečná 'logika nekonečna' se nicméně stanou možnými, jakmile se *definitivně vzdáme* předpokladů popsaných výše, jež nazývám *finitistickým předsudkem*."

množin, kterou zase na druhou stranu chápe jako axiomatickou teorii, která tím, že užívá kalkulu predikátové logiky v naději, že je korektní a úplný, tuto sémantiku předpokládá. Pro axiomatickou metodu by přitom bylo možné najít ospravedlnění v rámci axiomatismu tvrdého, v němž nejsou užité pojmy axiomatizovány, ale zdůvodňovány. K tomuto pohledu později inklinoval Skolem, což je ovšem možné právě při vědomí značného relativismu, který s sebou volně ukotvené teorie, jako je ta množin, ale i teorie pevnější, jako je matematická analýza, nesou. Zermelovi je pak zase třeba dát za pravdu, že za těchto pravidel hry není důvodu uchylovat se k metodám prvního řádu, s kvantifikací omezenou na predikáty popsané ve "fixním konečném systému znaků".

Pozoruhodné je, že převládající zdůvodnění aplikace axiomatické metody v teorii množin mělo a má dodnes konstruktivní rysy, když v axiomech vidí popis principů generujících množinové univerzum z 'urelementů' coby prostředek eliminace paradoxů. Toto čtení je přímo spjato s myšlenkou 'omezení velikosti' coby heuristikou axiomatizace.[48] My jsme ovšem zmínili, že myšlenka omezení velikosti nehrála při Zermelově formulaci axiomů větší význam, ve skutečnosti byla roku 1906 popsána Russellem a mezi množinovými teoretiky se rozšířila až pozvolna. Rovněž tvrzení, vyslovené např. Quinem [1963, s. 284], že axiom nahrazení byl přidán hlavně proto, aby se nevyloučily množiny 'rozumně velké', není zcela případné, vezmeme-li v úvahu dříve řečené, totiž že byl jako nezávislý axiom formulován von Neumannem především pro potřeby adekvátní teorie ordinálů. Na druhou stranu, původcem axiomu nahrazení byl Fraenkel, jenž jej chápal právě v kontextu doktríny 'příliš velkých' množin a stal se i jejím systematickým hlasatelem.[49] Konstruktivní čtení axiomů pochází rovněž od něho.

V jistém smyslu připomíná Fraenkelovo zdůvodnění axiomatizace Hilbertovu ideu, že axiomy, resp. jejich bezespornost, zajišťují existenci popisovaných předmětů. Problém je, že ve Fraenkelově případě jsou požadavky na průběžné vytváření množin výhradně z množin dosud vytvořených v nesouladu se statickou povahou axiomů, jejichž proměnné tuto kvalitu nemají, tj. chovají se k množinovému univerzu již jako k preexistujícímu celku. V parametrech vydělení nějaké podmnožiny z univerza dosud generovaných množin tak může figurovat odkaz k množinám, které ještě vytvořené nejsou, a příslušné axiomy coby definice pojmu množina jsou proto bytostně impredikativní, což především znamená potenciální

[48] Ve standardních učebnicích či přehledech, jako je Fraenkel *et al.* [1973, s. 135], bývá vyjadřována takto: "V Zermelově-Fraenkelově systému spočívá vůdčí princip formulace axiomů v doktríně omezení velikosti, tj. nepřipouštíme příliš obsáhlé množiny, abychom se vyhnuli paradoxům."

[49] Srov. citace uvedené in Hallett [1984, s. 200 n]. Výmluvné je, že se omezení velikosti jako motiv axiomatizace vyskytuje až v pozdějších vydáních Fraenkelova *Einleitung in die Mengenlehre*, tj. v letech 1923 a 1928, nikoli 1919.

příslib dalších paradoxů. Později, konkrétně na straně 548, zmíníme, že toto míchání konstruktivního se statickým čtením proměnné lze označit za nejobecnější původ množinových antinomií, přesně v duchu Russellova požadavku na uspokojený ‘common sense’.

Fraenkel se ovšem svým výkladem axiomů coby implicitní definice ocitl ještě před jiným problémem, totiž jak zajistit, aby jeho axiomy nebyly splněny také modely, jejichž prvky nejsou generovány uvedeným iterativním procesem. Na možnost takovýchto neizomorfních modelů $\mathfrak{Z}$ upozornil opět Skolem [1923*b*], totiž v dosud nezmíněném bodu (6) svého seznamu, když uvažoval modely s nekonečnými klesajícími (vůči $\in$) posloupnostmi prvků. Množiny, které tuto vlastnost nemají, nazval Mirimanov [1917*a*] ŘÁDNÝMI, přičemž obráceně:

> MIMOŘÁDNÁ množina je taková množina y, pro niž existuje nekonečná posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ množin taková, že
>
> $\cdots \in x_3 \in x_2 \in x_1 \in y.$

Skolem poznamenal, že $\mathfrak{Z}$ neumožňuje mimořádné množiny vyloučit, tj. jestliže má model bez nich, má jej i s nimi. Fraenkel [1922*b*] se tomu snažil zabránit přidáním dalšího axiomu, který tyto množiny explicitně vylučuje a jejž nazývá AXIOM OMEZENOSTI (*Axiom der Beschränktheit*, *axiom of limitation*). Podle tohoto principu neexistují žádné jiné množiny než ty specifikované danou axiomatickou sadou.[50] Tento axiom rovněž připomíná původní Hilbertův axiom úplnosti (viz s. 306), včetně jeho problematické povahy. V případě Hilbertovy (druhořádové!) axiomatizace geometrie šlo ovšem uvedený axiom proměnit ve větu o kategoričnosti, tj. ukázal se být pravdivým metatvrzením o celé axiomatické sadě. V případě $\mathfrak{Z}$ to nelze učinit právě s ohledem na existenci modelů nechtěné vlastnosti, tj. s prvky propadajícími se vzhledem k náležení do nekonečna.

Jako možné řešení se namísto Fraenkelova problematického omezení, kladeného na celý axiomatický systém, nabízí omezení kladené přímo na univerzum. Možnost takovéhoto axiomu zvažuje von Neumann [1925], nepřidává ho ale do své axiomatizace s tím, že to stejně nezajistí její kategoričnost s ohledem na výsledek Löwenheimův-Skolemův. Poznamenává nicméně, že přijetí axiomu nepovede ke sporu, nebyla-li sporná již axiomatizace předchozí, což pak také dokazuje [1929]. Zermelo [1930] záhy reviduje svou původní axiomatizaci teorie množin a nově do ní zařazuje tzv. AXIOM FUNDOVANOSTI (*Axiom der Fundierung*, *axiom of foundation*):

(F’) (Klesající) řetězec, jehož každý člen je prvkem předchozího, má konečnou délku.

[50] Viz také Fraenkel [1928].

Zároveň tvrdí, že je tento axiom ekvivalentní tvrzení, že každá neprázdná podmnožina univerza má prvek, který nemá v této podmnožině prvky, tj. je minimální z hlediska náležení. To lze reformulovat následovně:

(F”) $(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\exists x)[\varphi(x) \wedge (\forall z)(z \in x \rightarrow \neg\varphi(z))]$.

Podle interpretace výrazu φ se opět jedná o axiom nebo schéma. Nazveme-li RELACI R na množině (třídě) A FUNDOVANOU tehdy, jestliže má každá neprázdná podmnožina X množiny A nějaký R-minimální prvek, tj. existuje-li $a \in X$ takové, že pro žádné $x \in X$ neplatí $\langle x, a\rangle \in R$, pak Zermelo tvrdí, že jsou množiny, na nichž je relace $\in$ fundovaná (nazývejme je dále MNOŽINAMI FUNDOVANÝMI), totéž, co Mirimanovovy řádné množiny. K tomu je ovšem třeba číst (F”) druhořádově, neboť, jak víme, konečnost řetězce je druhořádový pojem a věta o kompaktnosti pro logiku prvního řádu zajišťuje, že teorie, kterou splňují modely s řetězci libovolné konečné délky, má také model, v němž je nějaký řetězec nekonečný. Přechod od (F’) k (F”) navíc předpokládá axiom výběru.[51] Dokažme ekvivalenci obou verzí axiomu fundovanosti za těchto předpokladů:

Důkaz: Mějme neprázdnou množinu X, která nemá minimální prvek vzhledem k $\in$, tj. pro každé $x \in X$ existuje $y \in x$ takové, že $y \in X$. Klesající posloupnost $(a_n)_{n\in\omega}$ prvků X konstruujeme následovně: a_0 je možno vzít libovolně. Máme-li a_n, pak a_{n+1} je nějaký prvek množiny $\{y \in X \mid y \in a_n\}$. Existence této posloupnosti je ve sporu s (F’). Přechod od (F”) k (F’) je jednoduchý. □

V rámci prvořádové teorie množin je obvykle místo schémat (F’), (F”) užívána formule

(F) $(\forall y)[(\exists x)(x \in y) \rightarrow (\exists x)(x \in y \wedge x \cap y = \emptyset)]$.

To je ospravedlněno tím, že z ní lze schéma (F”) dokázat, což znamená, že jsou si ekvivalentní, neboť (F) je zároveň speciálním případem (F”) pro $\varphi(x) := x \in y$. (F) lze ale použít i v druhořádové axiomatizaci, neboť z něho plyne druhořádová verze (F”) za použití druhořádové verze axiomu (R) nahrazení. Ten byl dalším a posledním přídavkem Zermelovy revize, kterou Zermelo nazývá systémem Zermelovým-Fraenkelovým. Název ovšem pochází od von Neumanna [1928], jenž tak označil patřičně upravený prvořádový fragment Zermelovy původní teorie. V tomto smyslu je ono označení užíváno i dnes. Axiomu (F) se také někdy říká AXIOM REGULARITY.

[51] Viz Fraenkel *et al.* [1973, s. 90] a Shapiro [1991, s. 108].

6.8 Kumulativní hierarchie

V rámci revize svých axiomů v článku *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche* [1930] Zermelo rozlišuje mezi Zermelovým-Fraenkelovým systémem, jenž je tvořen axiomy $\mathfrak{Z}$ spolu s axiomem (R) nahrazení a jejž značí jako ZF, a rozšířeným systémem, značeným jako ZF', do něhož není zařazen axiom (U) nekonečna, protože "nenáleží 'obecné' teorii množin", a naopak je vedle (R) přidán ještě axiom (F') fundovanosti, protože [1930, § 1]:

> axiom, jenž vylučuje všechny 'cyklické' množiny, a tedy 'množiny, které obsahují samy sebe', a obecně i všechny 'bezedné' množiny, byl splněn ve všech praktických aplikacích teorie.

Zde Zermelo naráží na fakt, že množiny typu '$x \in x$' či '$x \in y \in x$' atd. jsou rovněž mimořádné v Mirimanovově smyslu, a tedy vyloučené axiomem fundovanosti z příslušného univerza.

Zermelův, stejně jako Mirimanovův postoj k fundovanosti byl explicitně praktický, tj. oba nenamítali nic proti existenci mimořádných množin *per se*, rozhodli se ale studovat zejména množiny řádné. Mirimanov právě díky tomuto zaostření rozpracoval svoji teorii ordinálů, neboť dobře uspořádané množiny (vzhledem k $\in$) jsou speciální případ množin fundovaných. Mirimanovovy [1917*a*] ordinály jsou tranzitivní řádné množiny, na nichž je relace $\in$ lineární, končící v jediném 'urelementu' e.[52] Práce s 'urelementy' se přidržel Zermelo i ve své druhé axiomatizaci. V ní dále nahradil axiom (E) elementárních množin axiomem (D) dvojice, formuloval silnou verzi axiomu (A) vydělení, přidal podobně silnou verzi axiomu (R) nahrazení a vynechal axiom (C) výběru s tím, že je již součástí užité logiky, tj. předpokládán jako platný na metaúrovni. Úhrnem je ZF' tvořen axiomy (B), (D), (A), (P), (V), (R) a (F). Zermelo také podotýká, že je (A) odvoditelný z (R), a (D) z (P) a (R), tj. nejedná se o systém nezávislý.

Jako Zermelovu-Fraenkelovu axiomatizaci, nadále značenou $\mathfrak{ZF}$,[53] dnes označujeme prvořádovou teorii sestávající z axiomů a schémat (B), (P), (V), (U'), (F) a (R). Eventuálně lze pro větší pohodlí přidat (E),[54] (D) a (A). Její rozšíření o axiom (C) výběru značíme $\mathfrak{ZFC}$. Druhořádovou variantu $\mathfrak{ZF}$ značíme $\mathfrak{ZF}_2$, kdy (R) je jediný její druhořádový axiom. Axiom výběru obvykle také předpokládáme jako platný logicky,

[52] Srov. Hallett [1984, s. 273].

[53] Gotický způsob značení namísto obvyklého (*ZF*, ZF) jde opět na vrub potřebě odlišit formální od materiálních teorií.

[54] Status axiomu (E) je ovšem mírně komplikovaný. Na jednu stranu by se neměl vynechat, protože garantuje existenci prázdné množiny, která je použita v (U'). Na druhou stranu se jedná o logický axiom, neboť nějaký prvek existuje v každém univerzu z definice.

tj. na úrovni sémantiky. Na úrovni syntaktické ho můžeme přidat mezi užité axiomy logiky druhého řádu, např. jako formuli

$$(\forall X)[(\forall x)(\exists y)X(x,y) \to (\exists f)(\forall x)X(x,f(x))].$$ [55]

Příslušný systém $\mathfrak{ZF}_2$ je nicméně deduktivně slabý, např. neumožňuje odvodit větu o dobrém uspořádání.[56] Sémantická stránka věci je oproti tomu uspokojivější, což je i původní výsledek Zermelův [1930]. Klíčem je Zermelův popis toho, co se dnes nazývá kumulativní hierarchií a co, jak přímo ukázal, při fixování jistých parametrů 'zachycují' jeho revidované axiomy 'až na izomorfismus'. Ilustrativní je zde rovněž spojitost s univerzem teorie typů, neboť ukazuje pozvolnou konvergenci obou původně mimoběžných konceptů.

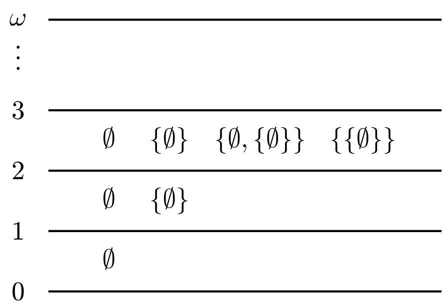
Podle prosté teorie typů je třeba univerzum stratifikovat do vzájemně disjunktních vrstev, tvořících obory kvantifikace specifických proměnných. Tyto vrstvy jsou závislé na vrstvě základní, vrstvě individuí, atomů či 'urelementů', majících typ 0. Typ 1 tvoří všechny množiny objektů typu 0, atd., obecně tedy typ $n+1$ tvoří množiny objektů typu n. S ohledem na požadovanou disjunktnost vrstev povolíme vytvoření prázdné množiny pouze na úrovni 1, tj. jedná se vždy o prázdnou množinu individuí, viz obrázek 6.1. Jinou možností je prázdné množiny indexovat, o čemž se zmíníme v následujícím oddíle. Podstatné je, že je teď každý typ konečný, nepředpokládáme-li nekonečnost báze. Probíhá-li n přes celé ω, tj. necháváme-li proces iterace typů pokračovat neomezeně, je samozřejmě objektů (např. Zermelových čísel) v takto popsaném univerzu nekonečně mnoho, procházejí ovšem vertikálně celou hierarchií a nelze přes ně kvantifikovat, jak by to vyžadovala logická teorie čísla. Russell je proto nucen přijmout axiom nekonečna jako dodatečný (a jak zdůrazňuje) mimologický princip, který umožní definovat číslo v duchu Fregovy explicitní definice, totiž jako množinu všech rovnopočetných množin individuí. Takto definovaná čísla se nacházejí na úrovni 2 hierarchie.

$\vdots$					
3	$\{\{\emptyset\}\}$	$\{\{\{a\}\}\}$	$\cdots$		
2	$\{\emptyset\}$	$\{\{a\}\}$	$\{\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\cdots$
1	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	
0		a	b		

Obrázek 6.1: Hierarchie typů

[55] Viz Shapiro [1991, s. 66 nn, 201].
[56] Viz Shapiro [1991, s. 106 n].

Ačkoli jsme i tak Russellovu ontologii mírně zjednodušili (v její prospěch), je zřejmé, že je značně nepohodlná, neboť každá vrstva může obsahovat jen homogenní množiny, tj. množiny, jejichž prvky náleží vrstvě těsně předcházející, nikoli všem předcházejícím, což např. vylučuje množiny typu von Neumannových ordinálů. Toto omezení je přitom zbytečné, neboť nebezpečný je pouze odkaz k vrstvám, které ještě nebyly zkonstruovány. Idea je učinit hierarchii kumulativní, aby typ n obsahoval množiny prvků všech typů menších, jak to ukazuje obrázek 6.2. Russellovi byla



Obrázek 6.2: Kumulativní typy

tato úprava navržena již roku 1908 bývalým studentem Ralphem Hawtreyem, jenž si při korekturách *Principií* uvědomil, že se tak — díky inkluzivnosti typů — nabízí sjednotit typy $n \in \omega$ do prvního transfinitního typu ω, jenž má pak automaticky nekonečně mnoho předmětů, a iteraci lze provádět dále.[57] Russell tuto myšlenku odmítl, realizována tedy byla až Zermelem jako dodatečný pokus o popis množinového univerza.

Zermelo byl ovšem, jak jsme zmínili, příliš opatrný na to, aby svoji kumulativní hierarchii prohlásil za popis toho, co existuje. Nechával např. otevřenu jak otázku počtu 'urelementů', které měl Russell za empiricky dané, tak problém nefundovaných množin. Na druhou stranu byl natolik realistou, aby věřil, že je systém všech podmnožin nějaké množiny určen již touto množinou samou, nikoli existencí jiných (ještě nezmíněných) množin, které mohou při vydělování figurovat jako parametry. To mu dovolilo popsat KUMULATIVNÍ HIERARCHII v nekonstruktivním duchu jako klasifikaci řádných množin do vrstev podle následujícího schématu: Vrstvu indexovanou ordinálem 0 tvoří množina U 'urelementů', která může být eventuálně prázdná:

$$V_0(U) = U.$$

Další vrstvy vznikají aplikací operace potence a kumulováním předchozích vrstev podle ordinálů jako

[57] Viz Potter [2000, s. 146].

$$V_{\alpha+1}(U) = V_\alpha(U) \cup \mathcal{P}(V_\alpha(U)).$$

Pro limitní α stanovujeme

$$V_\alpha(U) = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta(U).$$

Pro univerzum bez 'urelementů', tj. $U = \emptyset$, se vše zjednodušuje na

$$V_0 = \emptyset \qquad\qquad V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \qquad\qquad V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta,$$

kde poslední α je limitní. Zjevně platí nejen $V_\alpha(U) \subseteq V_\beta(U)$, pro $\alpha < \beta$, ale i $V_\alpha(U) \in V_{\alpha+1}(U)$. Každé $V_\alpha(U)$ je také tranzitivní, fundovanou množinou.

Problematickým rysem popisu hierarchie by samozřejmě byla její závislost na třídě ordinálů Ord, indexující celou hierarchii a představující v celém procesu jakýsi cizorodý element, jehož se chtěl Zermelo původně zbavit. Po von Neumannově příspěvku tomu tak ale do značné míry není, neboť ordinály jsou množiny jistého typu, jenž se v hierarchii vyskytuje a tvoří jakousi její kostru, neboť platí $\alpha \subseteq V_\alpha$, a tudíž $\alpha \in V_{\alpha+1}$. Zermelo tak může psát

$$V(U) = \bigcup_{\alpha\in\mathsf{Ord}} V_\alpha(U).$$

Na rozdíl od jednotlivých $V_\alpha(U)$ je $V(U)$ vlastní třída. Zavedeme-li pro každý prvek $a \in V(U)$ jeho typ (*rank*) jako

$$r(a) \overset{\text{def}}{=} \text{nejmenší ordinál } \alpha \text{ takový, že } a \subseteq V_\alpha(U),$$

můžeme při kvantifikaci užívat jedinou proměnnou x s vědomím, že se vždy vztahuje k nějakému prvku hierarchie, tj. prvku nějakého typu, jimiž jsou i jednotlivá $V_\alpha(U)$ s $r(V_\alpha(U)) = \alpha$, nikdy ne k hierarchii $V(U)$ celé, případně k uskupením jako Ord, která jí prostupují, a nemají tedy žádný typ.[58] Platí

$$r(a) = \alpha \leftrightarrow a \in V_{\alpha+1} - V_\alpha,$$

$$a \in b \rightarrow r(a) < r(b).$$

Kumulativní hierarchie je pro Zermelovu axiomatizaci tím, čím byla přirozená čísla pro Peanovu aritmetiku a reálná čísla pro axiomatizaci analýzy, totiž standardní model. Jelikož báze 'urelementů' není určena, nedisponuje Zermelo jedním standardním modelem, ale modely, které nazývá [1930, § 3] NORMÁLNÍMI DOMÉNAMI. 'Urelementy' nicméně nejsou

[58] Všimněme si, že podle definice mají 'urelementy' stejný typ jako prázdná množina, přestože se vyskytují na různých úrovních.

jedinou příčinou víceznačnosti. V dalším výkladu proto již musíme střídavě kombinovat Zermelův realistický přístup se Skolemovým relativismem, což není nijak přirozené a nejspíš ani korektní, patří to ale k pravidlům hry, jimž se postupem času axiomatická teorie množin podřídila.

Za těchto předpokladů vidíme, že modelem ZF' je díky vynechání axiomu nekonečna již $M = \langle V_\omega, \in_M \rangle$, kde je $\in_M$ interpretováno 'normálně', což z relativního hlediska znamená, že množinu ordinálů Ord_M v M tvoří pouze prvky ω, a tento ordinál tedy představuje z hlediska M vlastní třídu, která (v něm) neexistuje. (Základní) nosič modelu $\mathfrak{Z}$ potom s ohledem na nepřítomnost axiomu nahrazení může tvořit již $V_{\omega+\omega}$. Případ $\mathfrak{ZF}_2$ je odlišný z několika důvodů. Zermelo dokázal, že

$V_\alpha \models \mathfrak{ZF}_2$ tehdy a jen tehdy, je-li α silně nedosažitelný kardinál.

Pojem silně nedosažitelného kardinálu je rovněž Zermelův [1930, § 2] a jedná se vlastně o ono "Grenzzahl", po němž se jeho axiomatický článek nazývá. Definujeme-li nejprve pojem KOFINÁLU $\mathrm{cf}(\alpha)$ pro (limitní) ordinál α jako nejmenší kardinál κ ($> \omega$) takový, že pro nějakou množinu ordinálů $A \subseteq \alpha$ platí $\kappa = |A|$ a $\alpha = \sup A$,[59] je SILNĚ NEDOSAŽITELNÝM KARDINÁLEM každý (1) REGULÁRNÍ KARDINÁL, definovaný podmínkou

(1) $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$,

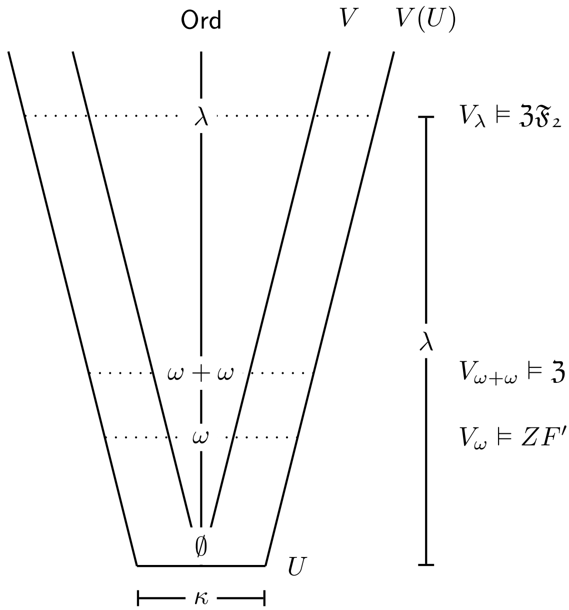
jenž je navíc (2) SILNĚ LIMITNÍ, tj. větší než potence kteréhokoli předchozího kardinálu, neboli

(2) $(\forall \lambda < \kappa)(2^\lambda < \kappa)$.

Uvědomíme-li si, že regularita kardinálu vyjadřuje jeho nedosažitelnost posloupností menších ordinálů indexovanou ordinálem menší mohutnosti, je platnost Zermelovy věty rámcově jasná. Regularita kardinálu plyne z (1) axiomu nahrazení; to, že je silně limitní, z (2) axiomu potence. Na silně nedosažitelný kardinál se lze primárně dívat jako na nejmenší ordinál, jehož existenci axiomy teorie množin nezaručují, protože se k němu

[59] Pojem kofinálu lze nejobecněji zavést prostřednictvím pojmu kofinální podmnožiny lineárně uspořádané množiny $\langle A, < \rangle$, což je množina B taková, že pro každé $a \in A$ existuje $b \in B$ takové, že $a \leq b$. Kofinalita ordinálu α je nejmenší ordinální typ (ordinál) $\mathrm{cf}(\alpha)$, který má nějaká jeho kofinální podmnožina. Lze ukázat, že takový ordinál musí být kardinál. Pro následnické ordinály $\alpha + 1$ platí, že $\{\alpha\}$ je kofinální podmnožina, tj. $\mathrm{cf}(\alpha) = 1$, proto jsme definici v textu zjednodušili uvedeným způsobem. Ordinály se rozpadají na REGULÁRNÍ, pro něž platí $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$, a SINGULÁRNÍ, pro něž to neplatí. Každý regulární ordinál je kardinál. Kofinalitu kardinálu můžeme eventuálně spojit s pojmem jeho μ-rozložitelnosti, jak jsme jej zavedli v oddíle 6.4 v souvislosti s Königovou nerovností. Platí totiž, že pro kardinál κ je $\mathrm{cf}(\kappa)$ nejmenší μ takové, že je κ μ-rozložitelný. Neplatnost vztahu $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ pro kardinály kofinality $\aleph_0$ je pak možné vidět jako důsledek obecnějšího výsledku $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$ pro $\kappa \geq \aleph_0$.

nelze z postulovaných množin povolenými operacemi dostat, aniž by byl přitom sám nápomocen, a jeho existenci je proto případně třeba zajistit axiomaticky. Modelem teorie rozšířené o tvrzení existence nedosažitelných kardinálů je pak nějaké V_β pro další nedosažitelný kardinál β. Takto lze pokračovat dál specifikací počtu existujících nedosažitelných



Obrázek 6.3: Kumulativní hierarchie

kardinálů. Zermelo v rozporu s dnešním územ zahrnul mezi silně nedosažitelné kardinály i ω, jenž výše popsané charakterizaci nedosažitelnosti zjevně vyhovuje, což je technicky ospravedlněno vyloučením axiomu nekonečna ze základní sady, a tedy platností tvrzení $V_\omega \models ZF'$. Na věcné rovině lze říci, že (nespočetný) nedosažitelný kardinál se ke kardinálům menším chová jako ω ke kardinálům konečným.

Ačkoli se Zermelo evidentně smířil s tím, že jeho teorie co do struktury nemá jeden jediný model, ukázal zároveň, že už nehrozí jiné výchylky než ty, které jsme uvažovali, jinými slovy, že (až na izomorfismus) nemusíme opustit kumulativní hierarchii. Platí totiž:

> Každý model $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}_2$ (jenž je sám množinou) je izomorfní nějakému V_α pro α silně nedosažitelný kardinál.

V tomto smyslu není sice Zermelova teorie kategorická, ale alespoň KVAZIKATEGORICKÁ. Uvažujeme-li ‘urelementy’, je její kategoričnost dána relativně ke dvěma parametrům κ, λ, tvořeným kardinalitou κ ‘urelementů’ neboli ‘šířkou’ modelu, a λ nedosažitelným rankem coby jeho ‘výškou’, jak to vidíme na obrázku 6.3. My se dále omezujeme pouze na modely bez ‘urelementů’. Tvrzení lze pak alternativně formulovat také takto:

> Každé dva modely $\mathfrak{ZF}_2$ jsou si buď izomorfní, nebo je jeden z nich izomorfní počátečnímu segmentu druhého.

Důkaz tvrzení nebudeme předvádět, neboť to, proč se podaří, vyplyne dosti přímočaře z diskuse toho, proč v prvním řádu selže. Axiom nahrazení v druhořádové formě je přitom zodpovědný již za to, že je pro $V_\alpha \models \mathfrak{ZF}_2$ ordinál α nedosažitelný kardinál, neboť u prvořádových teorií může vztah platit i pro silně limitní kardinály α, které nejsou regulární. V případě $\mathfrak{ZF}_2$ by takovýto neregulární kardinál implikoval existenci posloupnosti prvků α, která je v něm neomezená a jejichž množina má kofinalitu $\beta < \alpha$. To, jinými slovy, znamená, že existuje funkce $f : \beta \to \alpha$ taková, že $\bigcup\{f(\gamma) \mid \gamma \in \beta\} = \alpha$. Jelikož $\beta \in V_\alpha$, musí díky nahrazení (a sjednocení) platit $\bigcup\{f(\gamma) \mid \gamma \in \beta\} \in V_\alpha$, a tudíž i $\alpha \in V_\alpha$, což není možné. Problém v případě prvního řádu spočívá v tom, že funkce f nemusí být prvořádově definovatelná, a argument tudíž nezabrání nestandardním modelům uvažovaného typu. Takovéto modely ale vzhledem k postulované kvazikategoričnosti, zvláště v její poslední formě, nepůsobí až tak nestandardně, a drastičtějším případem jsou proto teprve modely nefundované.

Legenda je přitom jedna a tatáž, i když druhořádovost axiomu nahrazení se nyní projevuje nepřímo, skrze axiom fundovanosti. Existence řetězce $\cdots \in x_3 \in x_2 \in x_1$ je v modelu M teorie $\mathfrak{ZF}_2$ vyloučena proto, že s ohledem na axiom nekonečna je množina užitých indexů ω prvkem M a příslušná funkce, která skrze *fiat* ‘skutečně’ existuje v univerzu příslušné druhořádové proměnné, spolu s axiomem nahrazení zajišťují, že je $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ množinou univerza M. To je ve sporu s axiomem fundovanosti. Je vhodné připomenout, že model $\mathfrak{ZF}_2$ coby druhořádové teorie má obecný tvar $\langle M, \mathcal{P}(M), \in_M\rangle$, kde $\mathcal{P}(M)$ symbolizuje všechny obory druhořádových proměnných, tj. nejen obor unárního X. I dříve jsme měli vlastně psát $M = \langle V_\alpha, V_{\alpha+1}, \in_M\rangle$, učinilo by to ale výklad nepřehledným.

V $\mathfrak{ZFC}$,[60] v němž axiom nahrazení vystupuje jen jako schéma, je situace jiná tím, že funkce f aplikovaná na indexy ω musí být daná formulí prvního řádu. To není obecně možné, tzn. řetězec může v modelu existovat, soubor jeho členů však nemusí tvořit prvek modelu, a my ho tím pádem nejsme s to axiomem fundovanosti vyloučit. Máme-li přitom nějaký model $M \models \mathfrak{ZFC}$, můžeme onen nenormální, nefundovaný model

[60] Axiom výběru zařazujeme, neboť figuruje v sémantice $\mathfrak{ZF}_2$.

získat snadno přidáním nekonečného množství konstant $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ k jazyku a množiny formulí $S = \{c_2 \in c_1, c_3 \in c_2, \ldots\}$ k $\mathfrak{ZFC}$. Každá konečná podmnožina $T \subseteq \mathfrak{ZFC} + S$ má evidentně model, např. když realizujeme všech konečně mnoho konstant z C v T nějakým dostatečně dlouhým fragmentem přirozených čísel (konečných ordinálů) v M. Podle věty o kompaktnosti má tedy model i $\mathfrak{ZFC} + S$, přičemž jeho prvky, přidělené konstantám z C, tvoří onen prvořádově neuchopitelný řetězec.

Mezi nestandardními modely $\mathfrak{ZF}$, případně $\mathfrak{ZFC}$ (z hlediska $\mathfrak{ZF}_2$, nikoli toho, jak se tento termín dnes používá) jsme tedy rozlišili nefundované a fundované, přičemž k druhým patřila taková V_α, kde α nebyl regulární kardinál. Ve skutečnosti pod ně patří ještě další případ, totiž části hierarchie, které nevyčerpají V, resp. nějaké V_α v celé šíři, a představují tak jakási jejich tranzitivní zúžení. Zde je příčinou opět axiom nahrazení, jenž v prvořádové verzi dovoluje chápat operaci potence, a tedy vytváření dalšího stupně hierarchie, omezeně, ve vztahu k podmnožinám vydělitelným prvořádovou formulí. O nestandardních modelech tohoto typu se stručně zmíníme v dalším oddíle.

Samotný důkaz kvazikategoričnosti se obvykle odvíjí od toho, že lze k modelu $M \vDash \mathfrak{ZF}_2$ sestrojit jeho ‘množinovou’ variantu, která je, vzhledem k fundovanosti $\in_M$ na M, izomorfní s tranzitivní částí M' kumulativní hierarchie. Tato část důkazu koinciduje s již dříve zmíněným Mostowského lemmatem o kolapsu. Nefundované modely jsou tedy vyloučeny důkazem předpokladu, že je $\in_M$ na M fundovaná, jenž se podaří díky axiomu nahrazení. Ten dále zajišťuje, že má M' nedosažitelný rank α (z tranzitivity plyne, že se ordinály M' shodují se ‘skutečnými’ ordinály hierarchie) a že (skrze axiomy vydělení a potence) vyčerpává V_α v celé jeho šíři. Z hlediska analogie s předchozími důkazy kategoričnosti aritmetiky a analýzy by bylo instruktivnější najít nejprve pro dané modely M_1, M_2 (skoro) izomorfní jádro lokální verze ordinálů (po nějaké α) a rozšířit ho postupně na lokální segmenty kumulativní hierarchie (po dané α). Vyhnuli bychom se tak především odkazu ke kumulativní hierarchii *per se*, jenž má být v nejlepší tradici strukturalistických definic axiomy $\mathfrak{ZF}_2$ teprve založen.

Jak ale víme z předchozích případů, nemá tento pokus tak jako tak valnou naději na úspěch, neboť nakonec stejně musíme, např. právě v důkazu (kvazi)izomorfie lokálních verzí ordinálů, užívat pojem transfinitní indukce, který je s absolutními pojmy ordinálu a množiny vůbec bytostně spojen. První verze důkazu tento beznadějný kruh jenom podtrhuje. Situace strukturalistických zdůvodnění přirozených či reálných čísel navíc nebyla ani zdaleka tak dramatická, neboť ty pojmu množiny pouze využívaly (jako součást logicko-sémantického aparátu) a nečinily ho současně předmětem svého výzkumu. V předvedených úvahách tedy máme až do krajnosti dovedenou ukázku míšení explicitního s implicitním.

6.9 Množina a číslo

Kvazikategoričnost $\mathfrak{ZF}_2$ se zdá být neobyčejně silným výsledkem také proto, že mnohé základní problémy teorie množin, např. hypotéza kontinua, musí být rozhodnuty již na relativně nízkém úseku V_α hierarchie, konkrétně v rámci $V_{\omega+\omega}$ (po jistých přípravách již $V_{\omega+2}$), neboť se jedná o tvrzení existence či neexistence jedno-jednoznačné funkce mezi $\mathcal{P}(\omega)$ a množinou všech (typů) dobrých uspořádání A množiny ω. $V_{\omega+\omega}$ samozřejmě není modelem $\mathfrak{ZF}_2$, ale je fragmentem každého modelu, což znamená, že se ve větách uvedeného typu všechny modely $\mathfrak{ZF}_2$ shodují. Hypotéza nebo její negace je tedy sémantickým důsledkem $\mathfrak{ZF}_2$.

Právě zde se ale ukazuje slabina celého podniku. Vezmeme-li elementární aritmetiku, víme, že nám pravdivost jejích vět není často také známa, přesto však, jak to ještě zdůvodníme v oddíle 7.1, máme důvod věřit, že je — byť neefektivně – určena. U teorie množin je ale takováto důvěra nepodložená s ohledem na fiktivní, nedourčený charakter hierarchie V, konkrétně tedy operace $\mathcal{P}(x)$. K tomu směřují i některé interní výsledky a rozlišení teorie množin, např. Gödelova [1938] KONSTRUKTIVNÍ HIERARCHIE L jako model $\mathfrak{ZF}$, jenž sice formálně kopíruje Zermelovu hierarchii V, staví ale příslušný induktivní krok $L_{\alpha+1}$ na souhrnu těch podmnožin L_α, které jsou vydělitelné formulemi s parametry i proměnnými omezenými na prvky L_α. Značíme-li tuto parametrizovanou potenci jako $\mathcal{P}_{Def}(a)$, máme následující definice:

$$L_0 = \emptyset \qquad\qquad L_{\alpha+1} = \mathcal{P}_{Def}(L_\alpha) \qquad\qquad L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta,$$

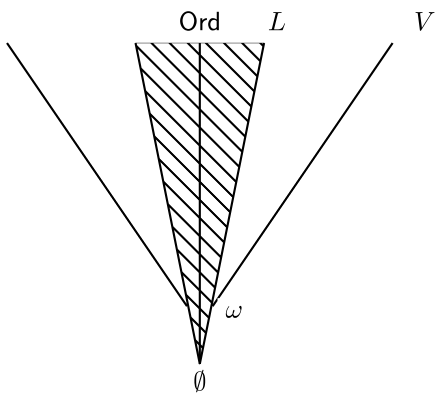
kde poslední α je limitní. Takto získaná hierarchie by měla být plně predikativní, až na volné užití libovolných ordinálů, nepredikativně definovaných podmínkou dobrého uspořádání (*každá* neprázdná podmnožina má nejmenší prvek). Feferman [2005] v této souvislosti uvádí, že se L má vůči V jako Russellova rozvětvená teorie typů k jeho teorii prosté.

L obsahuje všechny ordinály, platí i $L_n = V_n$ pro $n \in \omega$, a tudíž i $L_\omega = V_\omega$. Pro $\alpha \geq \omega$ nicméně z úvahy nad vytvářením prvků $\mathcal{P}_{Def}(L_\alpha)$ dostáváme $|L_\alpha| = |\alpha|$. To znamená, že ve srovnání s exponenciálním růstem V roste hierarchie L lineárně, a tvoří tedy jakési minimální jádro univerza, přesněji: L je nejmenší tranzitivní model $\mathfrak{ZF}$ obsahující všechny ordinály. V tom všem samozřejmě předpokládáme, že je L vlastní částí V, jak to zachycuje obrázek 6.4. Tzv. AXIOM KONSTRUOVATELNOSTI $V = L$ tvrdí něco jiného, přičemž výraz “tvrdí” je zvláště zde třeba brát s rezervou, neboť se jedná o formuli daného formálního jazyka. Z jejího přidání k $\mathfrak{ZF}$ již plyne jak axiom výběru, tak zobecněná hypotéza kontinua, neboť třídu L lze relativně snadno dobře uspořádat a platí $\mathcal{P}(\omega_\alpha) \subseteq L_{\omega_{\alpha+1}}$, přičemž víme, že $\left|L_{\omega_{\alpha+1}}\right| = |\omega_{\alpha+1}|$. Stejně jako CH je i GCH nezávislá na $\mathfrak{ZFC}$.

To vše se zdá ukazovat na vítězství Skolemova relativismu, s tou výhradou, že tato relativita není pojmu množiny inherentní, nýbrž daná tím, že zůstává nedourčen, a jména jako $\mathcal{P}(\omega)$ tedy mají silně *fiktivní* charakter ve smyslu Stekelerovy [1986, s. 355] poznámky, že

> o vlastnostech fikcí můžeme *vědět* nanejvýš to, co jsme předtím — právě fiktivně — postulovali.

Otázka "kolik má ω podmnožin?" se takto může podobat problému "kolik měl Othello na hlavě vlasů?" víc, než bychom si byli zprvu ochotni připustit. Mnohé můžeme samozřejmě předpokládat (že měl vlasy tmavé) a mnohé postulovat (že nebyl plešatý), těžko lze ale živit naději, že se dozvíme, jak se měl 'skutečný' stav věcí, zvláště, když na tom z praktického hlediska zase tak moc nesejde. Právě proto se po celé anabázi,



Obrázek 6.4: Konstruktivní hierarchie

kterou jsme prošli, zdá být najednou axiomatická metoda adekvátním způsobem pěstování teorie množin, neboť existence materiálních modelů, které by situaci — byť neefektivně — rozhodly, zůstává nejistá. Zbývají nám tedy především fiktivní, hypotetické interpretace daných axiomů a zkoumání jejich deduktivních důsledků.

Schizofrenii, k níž jsme tak při líčení úlohy teorie množin v historii snah o vymezení a rozšíření pojmu čísla došli a jež se nyní potácí mezi 'naivně' konstruktivním přístupem Cantorovým a relativismem axiomatických formalismů, s problematickými pokusy o usmíření obou v rámci druhořádových teorií, vhodně ilustrují Stekelerova [1986, s. 356 n] slova, týkající se otázky existence množinových jsoucen:

> Naivní teorie množin zde nevidí žádný problém; jednoduše dělá, jako by bylo jasné, co je množina čísel, takže může být považován za 'daný' jak obor 2^{N}, tak hierarchický obor V 'všech

> množin' a 'přirozený' vztah $\in$. Avšak tento postoj připomíná — obrazně řečeno — chování zoologa, jenž věří na existenci jednorožců (= standardní model) a 'zkoumá' jejich vlastnosti. Formalista pak sice také věří na jednorožce, ale ne na jedinečnost druhu. [...] Oba, platonista i formalista ale zakládají své popisy vlastností jednorožců na vlastnostech věcí, které známe: na vlastnostech koní (konečných nebo rozhodnutelných množin nebo množin získaných 'abstrakcí' z korektně vystavěných a sémanticky ohodnocených větných forem) a zvířat s jedním rohem (na existenci potenčních a výběrových množin v patřičně 'neškodných', např. konečných oborech). Tyto vlastnosti pak slučují do pojmu jednorožce, množinového modelu teorie množin. Jeho 'existence' je *historicky* zdůvodněna tím, že neexistence jednorožců nebyla dodnes — přes intenzivní pátrání — dokázána a že se ještě mohou objevit např. na Marsu nebo na vzdálené hvězdě. Kromě toho se koncept jednorožce (teorie množin) báječně osvědčil při vyvozování pravdivých soudů o koních a nosorožcích (v aritmetice a analýze).

Jak je to s externí plauzibilitou množinových základů aritmetiky, jsme již několikráte naznačili, s tím, že si nevede o mnoho lépe nežli Fregův a Dedekindův logicismus, v jehož nenázorné, nekonstruktivní tradici se Zermelo rozhodl pokračovat. Počínaje Cantorovými pozdními spisy nicméně teorie množin sama opustila oblast základů přirozeného a reálného čísla a stala se doménou výzkumu čísel transfinitních. O jejich externím významu si musí každý udělat obrázek sám, některé interní potíže jsme již naznačili v této kapitole. Ve zbytku oddílu, a tím i celé kapitoly, načrtneme čistě pro pořádek obvyklé způsoby zachycení přirozeného čísla u Fregových a Cantorových následníků.

Zatímco axiomatická teorie množin měla své vlastní problémy, dané Cantorovým dílem, byla teorie typů na počátku zaměřena především na rehabilitaci a rozvinutí Fregova logicismu, počínaje jeho logikou a definicí přirozeného čísla. Místo historického systému Russellova, jejž jsme představili dříve, uvažujme její modernizovanou prostou variantu, jejímiž autory jsou podle Quina [1963, s. 261], jehož expozici částečně sledujeme, Tarski [1931] a Gödel [1931]. Pojem množiny je zde stále vázaný na abstrakci od výrazu, tedy zákon komprehenze, jenž ovšem nabývá podobu dvojnásobného schématu

$$(1)\quad (\exists y_{n+1})(\forall x_n)[x_n \in y_{n+1} \leftrightarrow \varphi(x_n)],$$

s instancemi pro každé n a formuli $\varphi(x_n)$. Třída formulí je přitom vymezena pravidly, podle nichž jsou $x_m = y_n$, resp. $x_m \in x_n$ správně utvořeny (smysluplné) pouze tehdy, když $m = n$, resp. $n = m + 1$. Tím je sice efektivně blokován paradox, systém se ale stává notačně přetížený, čemuž odpomáhá pouze nepatrně Russellovo zavedení systematické víceznačnosti, tj. vynechávání indexů s tím, že se podle potřeby doplní tak, aby byla splněna gramatická pravidla. Tato pravidla jsou ovšem obtížně formulovatelná, neboť např. $x \in y$ a $y \in x$ jsou správně utvořené formule, zatímco jejich konjunkce $x \in y \wedge y \in x$ již nikoli.

Výskyt individuí typu 0 mírně komplikuje formulaci zákona extenzionality. Chápeme-li identitu objektů typu m jako jejich náležení stejným třídám typu $m + 1$, tj. ve smyslu stratifikovaného Leibnizova principu, lze extenzionalitu zachytit takto:

(2) $(\forall y_{n+1}, z_{n+1})[(\forall x_n)(x_n \in y_{n+1} \leftrightarrow x_n \in z_{n+1}) \rightarrow y_{n+1} = z_{n+1}]$.

Dříve zmíněná redukce relací na třídy pomocí aparátu uspořádané dvojice $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ ovšem systém pouze nezjednodušuje, neboť definice $\{x, y\}$ jako $\{z \mid z = x \vee z = y\}$ vyžaduje, aby x a y byly stejného typu, což znamená vyloučení heterogenních relací. Tomu lze v praxi odpomoci dorovnáním typů x_m a y_n pro $m \neq n$ opakovanou aplikací operace jednoprvkové třídy na menší typ, kdy např. pro relaci mezi x_3 a y_4 budeme uvažovat relaci mezi $\{x_3\}$ a y_4, apod.

Vzpomeneme-li si nyní na popis univerza prosté teorie typů z minulého oddílu, jak ho zachytil obrázek 6.1, lze si v uvážení principů (1) a (2) všimnout, že situace je podstatně komplikovanější. Díky instancím zákona komprehenze pro formule $x_n = x_n$ a $x_n \neq x_n$ má každý typ $n + 1$ vlastní prázdnou a univerzální třídu $\emptyset_{n+1}$ a V_{n+1}. Viz obrázek 6.5. Jelikož čísla Zermelova druhu náleží různým typům a von Neuman-

$\vdots$	
3	$\emptyset_3 \quad \cdots \quad \{\{\emptyset_1\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a, b\}\}, \emptyset_2\} = \mathsf{N}_3 \quad \cdots \quad \mathsf{V}_3$
2	$\emptyset_2 \quad \{\emptyset_1\} \quad \{\emptyset_1, \{a\}\} \quad \cdots \quad \{\emptyset_1, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} = \mathsf{V}_2$
1	$\emptyset_1 \quad \{a\} \quad \{b\} \quad \{a, b\} = \mathsf{V}_1$
0	$a \quad b$

Obrázek 6.5: Hierarchie typů

nova pro svoji nehomogennost ani typ netvoří, musel Russell zužitkovat definici Fregovu v její explicitní verzi, podle níž je číslo třídou všech množin daného počtu. Výrazem "všech" musíme ovšem mínit "všech množin jistého typu", což nám počínaje typem $n = 2$ dává v každé vrstvě speciální verzi aritmetiky, tj. číslo 4 se podobně jako prázdná třída vyskytuje v indexovaných variantách 4_n. Omezit se na vrstvu jedinou, např. tu nejnižší, není z věcného hlediska správné, neboť, jak zdůrazňoval Frege, i čísla mohou být počítána.

S umístěním čísel na vyšší než základní 'level' je ovšem spjata další potíž, kterou Frege řešil v souvislosti s tím, zda jsou čísla pojmy, či předměty, totiž otázka konečnosti báze. Opět platí, že je-li typ 0 konečný, např. o m prvcích, je konečný každý typ vyšší a každé číslo $p > m$ typu 2 je rovno $\emptyset_2$, tj. množinu N_3 čísel tvoří pouze $m+2$ odlišných prvků. Abychom byli co nejkonkrétnější: Nechť má báze, jako na obrázku 6.5, jen dva předměty a, b, pak dostáváme $0_2 = \{\emptyset_1\}$, $1_2 = \{\{a\}, \{b\}\}$, $2_2 = \{\{a, b\}\}$ a $m_2 = \emptyset_2$ pro $m > 2$.

Množina N_n je přitom definována standardním fregovským způsobem přes relaci přímého následníka S a její uzávěr, tedy čistě logickými prostředky. Pokud je báze nekonečná, vede S v počáteční aplikaci na nulu stále k novým předmětům. Russell a Whitehead [1910–1913, díl II, *120] proto mohou formulovat potřebný axiom nekonečna v principu jako

(3) $\emptyset_2 \notin \mathsf{N}_3$.

Méně specifickou variantu uvádí Tarski [1933, s. 243] jako požadavek existence neprázdné množiny typu 2, v níž ke každému jejímu prvku existuje jiný, jehož je vlastní inkluzí, symbolicky

(4) $(\exists z_2)[(\exists x_1)(x_1 \in z_2) \wedge (\forall x_1)(x_1 \in z_2 \rightarrow (\exists y_1)(x_1 \subset y_1 \in z_2))]$.

Je zřejmé, že se axiom v této horizontální podobě liší od vertikálního axiomu Zermelova, neboť se vyjadřuje k počtu předmětů základního typu, jenž je na pojmovém aparátu teorie množin a zužitkované logiky nezávislý. Russell o něm také hovoří jako o empirickém, nikoli logickém, což v praxi znamená, že jej explicitně zmiňuje [1910–1913, díl II, s. 281] jako premisu v případech, kdy je jeho užití potřeba. To je ovšem právě v případě vět aritmetiky, z čehož okamžitě plyne, že se logicistická hypotéza zhroutila. Zermelova teorie množin je Fregovu plánu blíže tím, že čísla popisuje jako čisté množiny.

Viděli jsme přitom, že Frege i Cantor oscilovali mezi pokusy zavést kardinální operátory jako $\mathcal{N}_x G(x)$, resp. $|X|$ implicitně, v rámci principů, jako jsou

$$\mathcal{N}_x F(x) = \mathcal{N}_x G(x) \leftrightarrow \ \mathcal{E}\mathcal{Q}_{x,y}(F(x), G(y)),$$

$$|X| = |Y| \leftrightarrow (\exists f)(f : X \leftrightarrow Y),$$

a mezi podezřením, že je tato definice nedostatečná a měla by být nahrazena definicí explicitní, ztotožňující číslo přímo s nějakou (čistou) množinou. Frege se rozhodl pro systém všech množin rovnopočetných s množinou $\{x \mid G(x)\}$, což je z hlediska dalšího vývoje teorie množin neakceptovatelné, neboť již v případě čísla 1 je tento systém ekvivalentní vlastní třídě skrze zobrazení $F(x) = \{x\}$. Vzniká také problém s platností vztahu $\{1\} \in 1$. Zermelova a von Neumannova explicitní definice jsou v tomto smyslu bezproblémové, mají ovšem zase punc jisté libovolnosti, jejímž důsledkem mj. je, že jejich čísla získají některé dodatečné vlastnosti, které se případ od případu liší. Jistá výhoda von Neumannovy definice spočívá v tom, že je množina přiřazená výrazu $\mathcal{N}_x G(x)$ s množinou $\{x \mid G(x)\}$ rovnopočetná, a je tedy jakýmsi kompromisem mezi Zermelovým a Fregovým návrhem.

Jiný takový kompromis lze udělat, přijmeme-li myšlenku kumulativní hierarchie jako standardního modelu. Pak lze vyjít z toho, že pro neprázdnou třídu $A \subseteq V$ musí existovat nějaké α takové, že $V_\alpha \cap A$ je neprázdná množina. Vezmeme-li nejmenší takové α, lze toto $A_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} V_\alpha \cap A$ považovat za množinovou reprezentaci třídy A. V případě fregovských definic čísel tak číslu 1 odpovídá $\{\{\emptyset\}\} \subseteq V_1$, číslu 2 množina $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \subseteq V_2$, číslu ω odpovídá podmnožina $V_{\omega+1}$, která obsahuje všechny nekonečné podmnožiny V_ω atd. Idea této redukce pochází od Tarského [1955] a Scotta [1955].[61]

Ačkoli Zermelo trval na možnosti 'urelementů' v množinovém univerzu, byla od počátku vůdčí idea axiomatizace zaměřena vertikálně, směrem k vyšším a vyšším nekonečnům. Z pohledu teorie typů to vyžaduje především zjednání jejich kumulativnosti, což, jak jsme zmínili, nepředstavuje žádný prohřešek proti myšlence bludného kruhu. Vertikální axiom nekonečna je ostatně možný pouze za tohoto předpokladu. Druhou významnou úpravou je přechod k jediné předmětné proměnné, implicitně se vztahující k prvkům hierarchie, tj. nikoli k hierarchii samé či souborům, které jí prostupují, tj. nejsou omezeny nějakým úsekem V_α. Detaily tohoto přechodu od prosté přes kumulativní teorii typů k teorii množin, v níž je kumulativní hierarchie fixována jako standardní model, se nebudeme dále zbývat. Podává je např. Quine [1963].

Jelikož se ve zbytku knihy budeme věnovat především kritikům logicismu a teorie množin, zdůrazněme již teď při uvážení všech výhrad, které jsme k Fregovu a Cantorovu programu měli, že o nich do značné míry platí Zermelova [1930, § 5] slova, jimiž uzavřel svou druhou axiomatizaci teorie množin a důkaz její kvazikategoričnosti:

> Množinové 'antinomie', jsou-li správně pochopeny, nemusí vést k omezení či zmrzačení matematiky, ale spíše, jako dosud, k nepředvídatelnému rozvíjení a obohacování této vědy.

V tomto citátu je obsažena i námi obhajovaná úloha paradoxů ve vývoji vědy, totiž vyznačení okamžiku, v němž je třeba učinit rozhodnutí, jak pokračovat dál. Zermelův citát odpovídá pozorování, že se rozhodnutí vést teorii množin axiomaticky ukázalo být v horizontu několika desetiletí jako plodné, tedy přinejmenším z jistých pozic.

[61] Více viz Potter [2004, s. 60 nn].

7 Řídit se pravidlem

I když lze Russellův paradox alespoň pomocně označit za podnět, jenž vedl k revizi matematiky pěstované na logicko-množinových principech, zůstává stále pochybnost o tom, zda se nejednalo pouze o projev nepřímý, jakýsi znak hlubšího omylu, jenž vyrostl z přebujelé abstrakce užitých pojmů a důkazových forem, tj. ze ztráty kontaktu s vlastní matematickou praxí. Kdyby tomu tak bylo, mohla by být totiž za podstatně významnější symptom změny označena vášnivá polemika následující po Zermelově důkazu věty o dobrém uspořádání, a to pro akcentování fiktivnosti postulátu o výběrové funkci, který byl sice zcela v souladu s Cantorovým liberalizovaným pojmem množiny, odporoval ale obvyklé představě výběru jakožto aktu podle jasně daného *pravidla*. Postulování existence příslušné výběrové funkce speciálním axiomem ale na druhou stranu potřebu takovéhoto pravidla nepřímo přiznává, kritiku axiomu lze tedy číst i jako napadení klasické představy o možnosti tvrzení existence objektu bez bližší specifikace toho, o který objekt se jedná.

Francouzští konstruktivisté, Borel, Lebesgue a Baire, požadovali, aby bylo za existující považované pouze to, co je definovatelné konečně mnoha slovy. V souladu s tím např. Borel [1914, s. 175] popírá, že by postačujícím kritériem existence byla konzistence, jak si to kromě raného Hilberta myslel i konstruktivisticky naladěný Poincaré (viz oddíl 5.8). Hilbertův pozdější finitistický program, se svojí redukcí ideálních tvrzení o nekonečných objektech na výroky o objektech konečných, je ale *de facto* pokračováním obdobného projektu Kroneckerova, zbaveného zbytečného radikalismu: Kronecker chtěl uznávat pouze objekty zkonstruovatelné v konečně mnoha krocích, v důsledku čehož odmítal všechna transcendentní (reálná) čísla, o Cantorových transfinitních číslech nemluvě.[1] Francouzští konstruktivisté tento postoj kultivovali, po-

[1] Podle některých názorů, reprodukovaných např. in Hesseling [2003, s. 6 n], ovšem Kronecker nepředpokládal, že by šlo pěstovat analýzu bez iracionálních čísel, jenom je, na rozdíl od čísel racionálních, považoval za pouhé symboly. Těžko říci, jaký je mezi tím rozdíl.

žadujíce, aby konečné bylo pouze definující pravidlo, jako je tomu třeba u rozvoje čísel $\sqrt{2}$ a π.

Z toho všeho je vidět, že v oblasti základů neexistovala žádná jednotná opozice vůči převládajícím trendům a že principy, s nimiž šel Brouwer a jiní do boje proti platonistickým principům Cantora a Frega, akceptovali někteří Brouwerovi oponenti a Fregovi pokračovatelé, jako třeba Hilbert, v mnohem větší a rigoróznější míře. A naopak, že mnozí kritici svévole Cantorových definicí a Fregových jazykových konvencí skončili v pozicích tak svévolných, že je byl jen málokdo schopen následovat.

Brouwerův případ je přitom o to zajímavější, že důraz na *konstrukci* jakožto primární projev matematické aktivity kombinuje s jejím totálním *rozvolněním*, kdy se volba dalších členů konstruované posloupnosti stává závislá na nepředvídatelném rozhodnutí tvůrčího subjektu (ideálního matematika). Tím se na jednu stranu přibližuje Cantorově liberální koncepci, na druhou stranu ji novátorsky upravuje vlastními 'intuitivními' principy, jejichž výsledkem je kontinuum radikálně odlišné od toho, na co si matematický svět zvyknul od Weierstrasse, a co se, alespoň formulací, zdá shodovat s antickou koncepcí Aristotelovou. Významný je zde také rozchod s logikou.

7.1 Nespolehlivost logických principů

V této kapitole bych chtěl zužitkovat Brouwerovy podněty k filosofii matematiky stejně, jak to kdysi učinil Wittgenstein, když ho Brouwerova vídeňská přednáška 'probudila z dogmatického spánku' a uvedla do druhé části jeho filosofických aktivit, jíž dominuje právě problém pravidla a řízení se jím.[2] Prvním a nejvýznamnějším podnětem nám bude Brouwerova teze, že

> matematika je více činností nežli teorií,[3]

která otevřela kapitolu snah o pragmatické základy matematiky a logiky, později vyvrcholivší v operativním a dialogickém projektu Lorenzenově. Dalším podnětem je nám zde Brouwerova odvážná změna pravidel hry

[2] Přednáška se konala roku 1928 a Wittgenstein, jenž předtím přestal být filosoficky činný, na ni byl pozván z podnětu členů vídeňského kroužku. Ti také (viz van Dalen [2005, s. 564]) zaznamenali jeho bezprostřední reakce. Podle Karla Mengera: "Wittgenstein, nehybný od počátku do konce, pozoroval nejprve přednášejícího s lehce udiveným výrazem, jenž později přešel ve slabý úsměv uspokojení." Po přednášce, podle Herberta Feigla: "Wittgenstein začal být extrémně výřečný a načrtával myšlenky, které byly začátkem jeho pozdějších spisů. Ten večer znamenal jeho návrat k filosofii." Jak moc Brouwer Wittgensteina skutečně ovlivnil, zůstává nejasné. Podle Brouwerova sdělení z roku 1953 (viz van Dalen [2005, s. 566]) se měli s Wittgensteinem potkat na nějakém ostrově a diskutovat celý den právě onu vídeňskou přednášku.

[3] Toto je poněkud působivější Weylova [1921, s. 157] parafráze textu Brouwerovy disertace [1907, s. 61], kterou později přejímá i Wittgenstein.

s ustanovenými pojmy, balancující sice na hraně srozumitelnosti, zároveň však poukazující na jejich konvenčnost a volitelnost, samozřejmě potud, je-li chápána jako další z alternativ, nikoli jediné — intuitivní — řešení. Brouwerův důkaz spojitosti každé totální funkce na kontinuu hraje v našem výkladu stejnou roli, jakou hrál v dřívějších kapitolách Bolzanův důkaz věty o mezihodnotě a Dedekindův rekurzivní teorém.

Třetí podnět je *negativní* a týká se samotného pojmu pravidla jako něčeho, čím se musíme být schopni řídit, resp. následovat to, jak zní nelibý, ale instruktivní překlad německého "Regelfolgen" či anglického "rule-following". Brouwerův pojem svobodné volby (*free choice*) není totiž v tomto ohledu příliš odlišný od Cantorovy představy preexistujícího celku *libovolných* posloupností, neboť jsou oba mimo intersubjektivní, tj. jazykovou kontrolu. To se významně týká i samotného pojmu 'pojmu', jenž je v kantovské filosofii vázán na osvojení si konkrétního pravidla aplikace, nikoli na (pasivní) nahlédnutí ideje, participaci na ní, lhostejno zda v hyperobjektivní říši platónských idejí, jak se to děje např. při výuce otroka v *Menónovi*, či subjektivitě naší mysli.

Z druhé strany podotkneme, že je zcela nemístné vyčerpat pojem pravdivosti efektivním konceptem důkazu (konstrukcí), neboť tak přehlížíme fakt vět, které nejsou pravdivé aktuálně, ale v principu, tj. jejichž pravdivost může být ještě prokázána. K tomu je třeba akceptovat velkorysejší pojetí pravidla (pravdivostních podmínek), jež sice umožňuje ohodnotit systém vět jednoznačně, leč ne efektivně. Tak je tomu u (klasické) elementární aritmetiky. V důsledku toho jsme s to zavést rozdíl mezi skutečností a fikcí, ohlášený v minulé kapitole, i v rámci abstraktních disciplín, jako je matematika (aritmetika vs. teorie množin), a zavřít tak dveře radikálnímu realismu Cantorovu na straně jedné a radikálnímu idealismu Brouwerovy školy na straně druhé.

Všechny hlavní body Brouwerovy vzpoury proti tehdejší situaci v základech matematiky jsou v principu obsaženy již v jeho disertaci, obhájené pod názvem *Over de grondslagen der wiskunde* (*O základech matematiky*) [1907]. V osobitém, obtížně srozumitelném stylu s mystickým přídechem, manifestovaným zvláště silně v eseji *Leven, Kunst en Mystiek* (*Život, umění a mystika*) [1905], nechává Brouwer matematiku vyvstat z původní intuice (*Urintuition*, *basal intuition*), která je pro něj identická s mentálně interpretovaným Kantovým názorem času. Názor prostoru byl podle Brouwera [1912, s. 85] právě v tomto subjektivním duchu vyvrácen možností neeukleidovských geometrií a jejich aplikací na svět. Obecně dokonce platí [1907, s. 61], že

> jediný apriorní prvek vědy je čas.

Jelikož "konstrukce intuitivní matematiky o sobě je čin, nikoli věda", je matematika primárně nezávislá na jazyku, a tedy i na logice. Jazyk k ní, říká Brouwer [1912, s. 86], přistupuje až dodatečně, jako "nematematický prostředek, jak pomoci matematické paměti či umožnit různým osobám vytvoření" téhož objektu. Matematika tedy [1907, s. 72 nn] nejenže není na logice závislá, ale naopak, logika je odpozorována z popisu matematického jednání v jazyce (jenž sám není matematikou) jako souhrn jistých pravidelností, které se v něm vyskytují. Problém logicismu, k jehož představitelům Brouwer počítá vedle Russella i Cantora a Hilberta, spočívá v obrácení přirozeného sledu věcí, totiž v aplikaci nedokonalé jazykové struktury na prvotní matematickou intuici. Konzistence jako kritérium existence matematického systému je nejmarkantnějším projevem tohoto obratu. Zde se Brouwerova [1907, s. 76] kritika Hilbertova a Dedekindova axiomatismu pozoruhodně kryje s kritikou Fregovou, jak jsme ji vylíčili v oddílu 5.2. Brouwer jde ale mnohem dál.

O rok později, v článku *De onbetrouwbaarheid der logische principes* (*Nespolehlivost logických principů*) [1908, s. 109], Brouwer rozvíjí jednu z tezí své disertace a za zvláště nespolehlivou jazykovou transformaci označuje zákon vyloučeného třetího jako úsudkový princip, v němž se od nepravdivosti non-A přechází k pravdivosti A. Ne všechny logické zákony si vysloužily tento verdikt. Klasický sylogismus např. údajně kopíruje skutečnou mentální konstrukci, a je tedy matematickou tautologií. Podobně zákon sporu. Vyloučený třetí je ale podle Brouwera jako pravidelnost vysledován pouze na konečných totalitách, jeho aplikace na totality nekonečné je neoprávněná a může vést nejen k nezdůvodněným tvrzením, ale i k paradoxům a vyloženým nepravdám. Brouwer [1908, s. 108] říká:

> Všechny paradoxy zmizí, jestliže se omezíme na ty systémy, které mohou být vystavěny explicitně ze základní intuice, jinými slovy, když chápeme matematiku jako předpoklad logiky, nikoli naopak.

Jako řešení situace základů je toto tvrzení samozřejmě pochybné, tj. buď je nepravdivé, nebo je to truismus, který nelze vyvrátit žádným pozorováním, a to právě pro nejasný status oné 'základní intuice'. Brouwer [1912, s. 85] ji považuje za charakteristický znak své koncepce matematiky, kterou nazývá neointuicionismem, a to jak v odlišení od Kantovy filosofie, tak od pre- či polo-intuicionistů, jako byli Kronecker a zmínění francouzští matematici,[4] pro něž byla matematickou konstrukcí především konstrukce symbolická, tj. veřejná, opírající se o manipulaci s konečnými objekty jazyka. Z této tradice vyrůstá i tradice konstruktivismu Weylova a pozdní finitismus Hilbertův. Brouwerovo východisko je tedy od počátku jiné, a tudíž obtížně zařaditelné, tím spíše, že se systematicky snaží o to, aby nikam zařaditelné nebylo. V tom je možné vidět další afinitu Brouwerovy filosofie s filosofií Wittgensteinovou.

[4] Název "halbintuitionistisch" pochází od Heytinga [1934].

Brouwer obviňuje Hilbertův axiomatismus z toho, že není schopen zajistit ideální stav okamžitého potvrzení či vyvrácení libovolného tvrzení matematiky, ačkoli to na metaúrovni vyžaduje jím akceptovaný klasický princip vyloučeného třetího. Kdyby toho totiž schopen byl, neexistovala by dosud nerozhodnutá tvrzení jako např. GOLDBACHOVA DOMNĚNKA, u níž ani po stovkách let od doby, kdy byla Christianem Goldbachem formulována, není známo, zda je, jak tvrdí, každé sudé číslo > 2 součtem dvou prvočísel, či nikoli.[5] Pro konkrétní číslo nám přitom nečiní problém příslušné tvrzení (efektivně, tj. v konečně mnoha krocích) ověřit, vše proto vychází z faktu, že je čísel nekonečně mnoho, a že tedy z toho, že jsme při průchodu jejich řadou zatím nenarazili na protipříklad, neplyne, že takový protipříklad neexistuje, neboli: z dosavadního neúspěchu non-A nelze usoudit na A. Toto je jedna část Brouwerova argumentu proti spolehlivosti vyloučeného třetího, kterou lze formulovat také jako skepsi ohledně tvrzení, že lze každou matematickou větu dokázat či vyvrátit.

Hilbert je zde přitom přímým a zmíněným terčem již proto, že tuto tezi explicitně formuloval jako ‘axiom’ ve své pařížské přednášce o dosud nevyřešených, aktuálních problémech matematiky. Z textu [1900*b*, s. 298] je nicméně patrno, že tím ani náhodou nemyslel cosi jako popisný metavýrok, věštbu či metafyzické tvrzení, ale spíše vyjádření regulativní ideje každého vědeckého bádání:

> Toto přesvědčení o řešitelnosti jednoho každého matematického problému je mohutný podnět naší práce; uvnitř neustále slyšíme volání: *Tady je problém, hledej řešení. Můžeš na něj přijít čistě rozumem, neboť v matematice neexistuje žádné ignorabimus.*

Jako výraz optimistického přesvědčení o poznatelnosti světa je takový výrok plně v pořádku, připojme k němu ale následující komentář, který nám poslouží i jako vodítko v dalším výkladu.

(1) To, že se většinu dosud formulovaných matematických tvrzení podařilo zodpovědět (kvadratura kruhu, Fermatova věta atd.), nezakládá samozřejmě platnost věty, že se podaří vyřešit každý problém. Okolnost, že se o takové řešení snažíme, ale předpokládá, že má příslušný problém, resp. s ním spjaté tvrzení, smysl, neboli: že byly dostatečně jasně formulovány podmínky, za nichž bude platit či platí, a za nichž nikoli, a my tedy rozpoznáme příslušný důkaz jako důkaz pravdivého tvrzení a příslušné vyvrácení jako důkaz jeho negace. Stav, kdy námi užívané věty mají smysl, i když si nejsme jisti jejich skutečnou pravdivostní hodnotou, je běžně znám z všedního života, specificky např. z tvrzení historických

[5] Goldbachova domněnka byla formulována roku 1742. Vinogradov dokázal v minulém století její tzv. slabou variantu, podle níž je dostatečně velké liché číslo součtem tří prvočísel. Onu dostatečnou velikost specifikoval jeho student Borodzin jako $3^{14348907}$.

("Mozart byl otráven" či Bolzanova 'věta o sobě': "na tom a tom stromě bylo v tom a tom roce tolik a tolik listí"), u nichž je zpravidla jen nepatrná šance, že budou dokázána či vyvrácena. Podstatné ale je, že víme, jak posuzovat případná svědectví v jejich prospěch či neprospěch. Chtít naprostou jistotu typu Descartova [1637*a*] "myslím, tedy jsem" či Moorova [1925] "vím, že toto je má ruka" je neopodstatněným mícháním problémů pravdivosti (logického či epistemologického) a jistoty (psychologického), které spolu nemají mnoho společného právě proto, že věci, kterými jsme si jisti, nemusí být pravdivé a *vice versa*. Něco k tomu řekneme ještě v oddíle 8.2.

(2) Z bodu (1) plyne, že od počátku systematicky rozlišujeme mezi dosud nepoznanou, leč v principu poznatelnou pravdou nějaké věty a důkazem jakožto konkrétním svědectvím toho, jak se věci touto větou popsané mají. Tyto dvě složky poznání se zdá Brouwer od počátku slučovat, tj. pravdivost věty ztotožňuje s (mentální) konstrukcí, která tuto pravdivost dosvědčuje. Ona konstrukce navíc musí být nějakým způsobem aktuální, což znamená, že např. Fermatova věta nebyla před rokem 1993 ani pravdivá, ani nepravdivá. To se nezdá být obecně únosné, stejně jako Wittgensteinovo [1983, s. 200, § 166] ztotožnění pravdivosti s verifikací, které lze vysledovat již v *Tractatu*, explicitně vyjádřeno je ale až ve výrocích jako:

> Verifikace není *nějakým* příznakem pravdy, nýbrž *konkrétním* smyslem věty.

Tomu lze samozřejmě rozumět více způsoby. Typicky lze aktuální verifikaci nahradit pojmem principiální verifikovatelnosti, čímž se přiblížíme naší pozici vyjádřené v bodě (1).

(3) Na druhou stranu, v Hilbertově seznamu matematických problémů, dokonce v jejich čele, figurují tak kontroverzní tvrzení, jako je hypotéza kontinua, u nichž není jasné, zda artikulují byť jen principiálně řešitelný problém. Vnucuje se nám pak stará otázka, zda jsme do celé věci dali tolik, abychom byli s to takové problémy vůbec rozhodnout, tj. zda není celý problém nejen efektivně, ale i pojmově nedourčen. Brouwerův požadavek jiných nežli čistě konvenčních, jazykových kritérii se na tomto pozadí zdá být zcela oprávněný. Věc se ale dále komplikuje.

(4) Hilbert i Brouwer si byli oba vědomi toho, že platonistův předpoklad, že se věci nějak mají, i když je našimi lidskými silami nejsme s to byť jen hypoteticky dokázat, není odpovědí na otázku, zda je hypotéza kontinua v principu pravdivá či nepravdivá. První z nich se proto pokusil převést záležitost existence ideálních matematických předmětů, jako jsou Cantorovy vyšší mohutnosti, na otázku konzistence příslušné (Zermelovy) axiomatizace. Brouwer nepovažoval axiomatizaci za řešení. Ke zdůvodnění existence matematického objektu či pravdivosti matematického tvrzení podle něho nestačí jazyková konstrukce (axiomatický sys-

tém, deduktivní odvození), ale konstrukce založená na primární intuici. Tato intuice je pak značně velkorysá, zajišťuje např. existenci všem spočetným ordinálům, včetně transfinitních, a kontinuu; viz Brouwer [1907, s. 83]. Podle (pozdního) Hilberta naopak nekonečno ve světě neexistuje, a vše, co máme, jsou jenom konečné posloupnosti symbolů a náš specifický způsob práce s nimi; viz oddíl 8.2. To je zcela v duchu jiného Wittgensteinova [1983, s. 26, § 135] tvrzení, totiž:

> "Nekonečno známe pouze z popisu." Pak tedy existuje pouze tento popis, a nic jiného.

Tato teze je projevem transcendentálně-analytického pohledu na svět, jehož zpochybnění je nemožné právě proto, že je lze opět vést pouze (v konečném) jazyce. Znovu je ale zapotřebí jisté opatrnosti.

(5) Brouwer má pravdu v tom, že některé tradiční matematické postupy pojmově předcházejí postupům logické matematiky, jak jsme to podrobně sledovali v kapitole 5. Jde především o konstrukci číselné řady a na ní založený důkaz indukcí. Tyto postupy se ale nezdají být nezávislé na jazyku, ba naopak, vedou v první řadě k produkci jazykových artefaktů, číslovek 1, 2, 3, ..., z nichž lze teprve sekundárně, logickou (tj. jazykově-závislou) abstrakcí, získat čísla. Čísla a číslovky samotné samozřejmě neexistují aktuálně, přinejmenším ne od jisté meze, o mentálních objektech to ale platí dvojnásob, ve smyslu, jejž jasně popsal Frege [1918*a*, s. 65]. Parafrázuji: Mentální stavy, představy, jsou něco, co jistý člověk *má*, co ale právě proto nemůže sdílet s jinými. Obsah, význam našich slov je oproti tomu veřejným statkem, totiž výsledkem stanovení kritérií identity, znovurozpoznání, na jejichž základě považujeme jistá slova za reprezentanty téhož obsahu, a tento následně za (objektivně) existující. Pro představu, kterou mám já a kterou máš ty, je něco takového zhola nemožné, nejedná-li se o typ, intersubjektivně manifestovatelný kresbou či zvukem. Tím je ale pořadí soukromého a veřejného obráceno ve prospěch druhého z nich. K ujasnění se může hodit následující Davidsonův citát:

> Empiristé [...] se domnívají, že člověk nejprve ví, co je v jeho vlastní mysli, pak, má-li štěstí, co je ve vnějším světě, a pak, má-li ještě větší štěstí, zjistí, co je v mysli někoho jiného. Já to vidím jinak. Nejprve zjistíme, co je v mysli někoho jiného, a tím máme i vše ostatní.[6]

(6) Jelikož je posloupnost číslovek dobře popsána, stačí k zavedení čísel ve Fregově objektivním, resp. jazykově-intersubjektivním duchu doplnit obor přípustných výrokových forem a jejich ohodnocení v souladu s Fregovými sémantickými principy. Konkrétně to znamená, že

[6] Citováno podle Borradori [1994, s. 50].

(I) třídu T_{N} substituovatelných termů tvoří (i) báze elementárních termů 1, 2, 3, ... a (ii) komplexní termy získané induktivním krokem: jsou-li M, N termy, pak i $(M + N)$ a $(M \times N)$,

(II) třídu S_{N} vět tvoří (i) induktivní báze E všech elementárních vět $M = N$ a $M < N$ pro libovolné $M, N \in T_{\mathsf{N}}$ a (ii) třída K komplexních vět získaná aplikací operátorů PL.

Z tohoto materiálu lze již snadno vyrobit to, čemu říkáme model (formální) aritmetiky neboli model $\mathsf{N} = \langle T_{\mathsf{N}}, S_{\mathsf{N}} \rangle$ standardní, uvážíme-li, že jednoznačné pravdivostní ohodnocení báze E je zajištěno již čistě mechanicky, transformačními algoritmy osvojenými na základní škole, a induktivní krok pak garantuje Tarského definice, rozšiřující platnost pravdivostního principu z elementárních vět na věty komplexní. K celé věci se ještě vrátíme v příští kapitole v souvislosti s pragmatickými pokusy o založení aritmetiky.

(7) Brouwer a konstruktivisté obecně útočí pochopitelně na druhý krok tohoto argumentu, totiž představu, že je každému výrazu z S_{N} Tarského definicí přiřazena právě jedna pravdivostní hodnota, se speciálním důrazem na nekonečnost oboru T_{N} kvantifikace. My přitom víme, že je pravdivostní hodnota přiřazena každému prvku $A \in E$ báze, z čehož a obecně substitučního principu usoudíme, že je buďto pro každé $M \in T_{\mathsf{N}}$ věta $A(M)$ pravdivá, nebo existuje $N \in T_{\mathsf{N}}$ takové, že byla $A(N)$ přiřazena nepravda, *tertium non datur.* — Lorenzen [1987, s. 69] takováto ospravedlnění klasických pravdivostních podmínek odmítá s tím, že vlastně jen opakují na metaúrovni to, co mají na úrovni objektu obhájit, a točí se tedy v kruhu. To je ale omyl, stejně jako tvrzení, že jsou Tarského podmínky pravdivosti redundantní! Jak jsme již řekli, platí to pouze pro jejich elementární část:

"A" je pravdivá právě tehdy, když A,

kterou jsme ale nyní v bodě (II.i) nezávisle dovysvětlili, což znamená, že dostala formu skutečné definice:

"A" je pravdivá právě tehdy, když B.

V případě komplexních vět se může mít samozřejmě věc tak, že mají ony, resp. slova, která je spojují ($\wedge$, $\exists$), ještě nějaký externí, přirozený význam ('a', 'existuje'), resp. pravdivostní podmínky. To ale nevadí, neboť naše definice má za úkol tento význam, resp. podmínky normovat, což znamená, že *de facto* začínáme se sadou obsahuprázdných znaků, jimž přidělujeme významy podle námi zvolených pravidel. K žádnému významovému cyklu na úrovni metajazyka dojít nemůže, neboť na úrovni objektu ještě žádný význam není a externí význam užitých slov slouží až později k projekci logického systému na nějaký výsek přirozeného jazyka.

(8) Brouwerův či Lorenzenův radikalismus ohledně vyloučeného třetího, přinejmenším v rámci elementární aritmetiky, nesdílejí ani někteří konstruktivisticky naladění matematici, např. Weyl [1921, s. 156], který v opozici k Brouwerovi napsal:

> Ve svém vlastním pokusu o základy analýzy jsem přijal ten názor, že není důležité, zda jsme schopni rozhodnout nějakou otázku pomocí jistých prostředků, jako jsou inferenční mody formální logiky. Spíše je důležité, *jak se věci skutečně mají.* Podle mě jsou posloupnost přirozených čísel a jejich existence základem matematiky *takovým* způsobem, že je pro každou vlastnost E, která má v oboru čísel smysl, určeno, zda v ní existují čísla vlastnosti E či nikoli.

Podobný rozchod s Brouwerem vyhlásil později Markov, v jehož konstruktivním konceptu analýzy je akceptován tzv. MARKOVŮV PRINCIP. Podle tohoto principu plyne z toho, že není možné, aby daný algoritmus neterminoval, že terminuje, což je instancí intuicionisticky neplatného principu $\neg\neg A \rightarrow A$. Brouwer zde bude argumentovat známým selháním příslušné důkazové techniky, totiž že z nepřímého důkazu věty A, tj. odvození sporu z non-A, ještě neplyne přímý důkaz A. Podobné 'protipříklady' k Markovovu principu lze samozřejmě najít i v jiných efektivních kontextech, s nimiž jsme se dokonce seznámili, např. když z toho, že nám algoritmus pro daný vstup (množinu splnitelných formulí) dokazatelně nedá odpověď NE, nemůžeme usoudit, že nám dá odpověď ANO (množina formulí je splnitelná), protože problematika rozhodnutelnosti není jen otázkou objektivních faktů (strom má splnitelnou větev), ale i naší schopnosti tyto fakty ověřit. Podobné úvahy vedou k teorii algoritmů a otázkám vyčíslitelnosti, o nichž se v této kapitole také zmíníme.

(9) Weylem anticipovaný postoj, v němž rozlišujeme mezi námi danými pravdivostními podmínkami vět jistého kontextu na straně jedné a možnostmi jejich reálné kontroly na straně druhé, nazývá Stekeler-Weithofer [1992*b*] SÉMANTICKÝM PLATONISMEM, a to jak v opozici k platonismu ontologickému, podle něhož na nás pravdivost vět jazyka vůbec nezávisí, tak v opozici k radikálnímu konstruktivismu či mentalismu Brouwerově, v němž není pravdivosti mimo možnost okamžitého ověření. Nezdravé rysy poslední pozice lze ještě radikalizovat, když jako tzv. ultraintuicionismus popřeme existenci čísel, jako je $10^{10^{10}}$, třeba proto, že na světě není tolik křídy a nejspíš ani molekul, aby je šlo vůbec vyčíslit, natož si představit v naší mysli.[7] Podobně bychom ale mohli popírat existenci věcí, které právě nevidíme či které se jako zemská osa, NATO

[7] Prakticky jediného serióznějšího rozpracování se ultraintuicionismus, resp. ultrafinitismus dočkal v díle Alexandra Jesenina-Volpina, významného ruského disidenta, syna básníka Sergeje Jesenina. Ani on se však nedostal dále nežli k přípravné fázi.

či přátelství nikde v uvedeném silně empirickém smyslu nevyskytují, tj. nelze si na ně sáhnout. Ve vztahu k abstraktním předmětům matematiky, konkrétně přirozeným číslům, je podstatné právě to, že jsou skrze svoji definici potenciálně zvětšitelné, nemohou mít tedy největšího reprezentanta omezeného třeba stavem současného světa.

(10) Náš příklad (6) oboru elementární aritmetiky, který si v protikladu k analýze právě pro svoji 'uzavřenost' vynesl od Weyla, jeho současníků a následovatelů přízvisko "definitní", nám dává odpověď na Brouwerovu [1908] oprávněnou a velevýznamnou otázku, jakým právem se spoléháme na užití logických principů v oborech, jako je matematika nebo přírodní vědy, které v principu s jazykem nesouvisejí. Brouwer [1908, s. 109] se doslova ptá:

> Lze připustit, abychom v čistě matematických konstrukcích a transformacích na určitou dobu opustili ideu konstruovaného matematického systému a operovali v odpovídající struktuře jazykové, následujíce principy *sylogismu*, *sporu* a *vyloučeného třetího*, a mohli se spolehnout, že lze každou část argumentu ospravedlnit zpřítomněním si příslušné matematické konstrukce v mysli?

Opakují se tím vlastně staré námitky proti užití nepřímých (apagogických) metod 'sofistů' v názorné (epagogické) disciplíně, jako je matematika, jak se poprvé objevily v antice a jak byly později zobecněny Descartem, viz třeba [1637a, s. 18 n], [1701, s. 405 n], identifikujícím znak pravé vědecké metody s psychologickým kritériem 'jasného a zřetelného'.

Náš postoj by měl být v tuto chvíli zřejmý. Logická pravidla, jako vyloučený třetí, stejně jako čistě matematická pravidla, jako indukce, můžeme na obor N aplikovat právě proto, že byl s jejich pomocí normován, tj. vytvořen tak, aby platila. Nic nám samozřejmě nebrání tuto okolnost změnit, tj. vytvořit alternativní systém aritmetiky či analýzy, bude-li to jen trochu dávat nějaký praktický smysl. Brouwerova skepse, následovaná idiosynkratickým návrhem, nám právě pro jeho drasticky odlišnou povahu zvláště názorně ukázala, že je takováto alternativa možná, a nahradila tak v této pozitivní, dějinně-dialektické roli negativní platonismus Fregův, jenž postuluje existenci třetí říše významů pouze na základě postřehu, že nemohou být subjektivní. Frege sice věřil v možnost a nutnost (jazykové) specifikace apriorních principů našeho matematického poznání, stejně jako v ně věřil Kant v oblasti empirické, měl ale — nejspíš také podobně jako Kant — za to, že jsou nějak fixovány předem, tj. že nám nezbývá mnoho prostoru pro jejich změnu. Proto je dříve zmiňovaný pragmatický aspekt Fregova jazykového obratu ještě příliš slabý a v plném rozsahu může být připisován až Wittgensteinovi. Ten k němu ovšem dospěl vstřebáním Brouwerovy pojmové revoluce.

7.2 Zákon a volba

Nyní již můžeme pokročit v odpovědi na otázku po rozdílu fikce a skutečnosti v rámci abstraktních oborů, jako je matematika, nakousnutou v závěru předchozí kapitoly. Nejprve několik poznámek k rozšířenému zvyku označovat za fiktivní cokoli, co není empiricky vykazatelné v nějakém užším slova smyslu (nedá se to prodat nebo sníst). Ty plynou z obecnějšího postřehu, že na logicko-sémantické úrovni nemají pojmy jako "fiktivní", "skutečný", podobně jako "abstraktní" či "konkrétní", charakter absolutních, ale jen relativních rozlišení. Abstraktní je nějaký diskurz pouze vůči jinému, z něhož byl abstrakcí — tj. uskupením jistých objektů diskurzu původního do ekvivalenčních tříd — odvozen, jako např. obor racionálních čísel z přirozených, obor čísel reálných z racionálních, či obecně obor množin prvků nějakého oboru. Za jistých podmínek lze takto získané obory sloučit s obory výchozími nebo, jako v případě čísel, sestrojit vnoření prvních do druhých. Jak ale víme z Fregových *Grundgesetze*, nejsou takováto sloučení, a tím pádem ani myšlení v absolutních kategoriích toho, co je (skutečné, případně možné), obecně přípustná, neboť mohou vést k dalekosáhlým problémům, jak se to stalo právě Fregovu systému nebo teorii množin. Plošná, absolutizující řeč o všem, co je, se takto právě tváří v tvář množinovým paradoxům opět ukazuje buďto jako naivní, nebo triviální, ve stejném smyslu, v jakém je triviální Cantorovo označení problematických množin za nekonzistentní. To, co nás zajímá, jsou přirozeně kritéria této konzistence, tj. existence v tom kterém problémovém okruhu.

Zcela analogicky, jako jsou některé obory abstraktní vůči jiným, se některé obory řeči chovají vůči jiným jakožto fiktivní, tj. např. diskurz řeckých bájí či mytologie k řecké historii, a my pak v případném sloučení či prolínání obou můžeme vykázat některé ze zdánlivých jmen jako určité deskripce. Variabilita možných vztahů je zde ale značná, jak to ukazují případy vět jako "Sherlock Holmes bydlí v Baker Street", "Albert Einstein obdivuje Sherlocka Holmese" či "Albert Einstein hraje na housle lépe než Sherlock Holmes", a je otázkou té které problémové situace, jak tyto věty logicky analyzovat, přičemž v posledku není určující opět nic jiného nežli příslušné inferenční vztahy: co považujeme obecně za přípustný úsudek a co nikoli. Označení diskurzu za fiktivní je tedy smysluplné pouze lokálně, v relaci k nějakému konkrétnímu diskurzu, který za fiktivní nepovažujeme. V absolutním užití se rovná trivialitě, neboť i oblast toho, co podle nepoučeného tazatele skutečně existuje, je definována fiktivním kondicionálem

> co bych mohl zažít, kdyby ....

Podobně se to má s konkrétností definovanou třeba možností okamžité verifikace dané věty. — Zatímco věta jako "103 je prvočíslo" je ověřitelná v podstatě na místě a hned, věta “z Andělského hradu je možné skočit do Tibery” ode mě vyžaduje dosti komplikovanou rutinu zakupování letenek a letního oblečení, přičemž je jasné, že v době dosažení cíle se změní čas, a tedy i pravdivostní podmínky původního výroku. Nezpochybňujeme samozřejmě, že obě věty mají dobře popsané pravdivostní podmínky, a jsou tedy v tomto smyslu nezávislé na tom, co si o jejich pravdivosti jakožto jednotlivec (!) myslím. Upozorňujeme pouze na vágnost kritérií fiktivnosti a konkrétnosti, a to právě na příkladě matematiky. Aritmetické objekty totiž, díky praxi měření a počítání, z níž vzešly, důvěrně známe od první třídy základní školy; o většině tzv. skutečných věcí, na druhou stranu, víme jen to, že o nich platí jisté věty, tj. nikdy jsme je neviděli a ani neuvidíme, protože jsou obvykle již dávno zničené nebo mrtvé. Co je tedy více fiktivní?!

Předchozí poznámky se týkaly použití klasifikátoru “fiktivní” na obory, které byly korektně sémanticky konstituovány, a z logického hlediska mezi nimi tedy není žádného ‘ontologického’ rozdílu. V oblasti aritmetiky se nyní nabízí zavést další rozlišení ve vztahu k této konstituci samé. Rozdíl aritmetiky a teorie množin totiž spočívá právě v oné definitnosti uvažované třídy objektů, dané přesným vymezením třídy substituovatelných termů a následným stanovením kritérií identity vzhledem k oboru možných predikátů a podmínek pravdivosti z nich utvořených elementárních vět, úhrnem tedy popisem toho, přes co se kvantifikuje, k čemu se odkazuje v užitých proměnných. V případě teorie množin nebyl obor proměnné vůbec popsán, resp. není vůbec jasné, jak by intersubjektivně popsán být mohl. — Namísto prvotní materiální teorie, standardního či zamýšleného modelu, máme pouhou teorii formální, se všemi omezeními, která to s sebou nese a která jsme popsali v oddíle 5.3. V teorii množin to znamená, že řeč o iterativní hierarchii a jiných ‘modelech’ této axiomatice nepředchází, ale je skrze ni teprve definována a v tomto smyslu *fiktivní*, nedourčená, stejně jako nejsou ve svých vlastnostech a vztazích dourčeni Othello a jednorožec. V aritmetice oproti tomu funguje jako požadovaný obor ohodnocení proměnných výše popsaný model standardní. Všimněme si, že s rozdílem formální a materiální teorie se mění i chápání principu indukce, kterému v prvním případě rozumíme jako mimologickému axiomu, zatímco v druhém se jedná o platné úsudkové pravidlo, které z toho, že $A(x)$ platí pro všechna čísla, vyvozuje platnost obecnou $(\forall x)A(x)$, neboť je dopředu implicitně vymezen obor všech substituovatelných termů jako T_{N}. To v prvním případě, v němž se obor kvantifikace mění, není z definice možné.

Případ analýzy představuje jakýsi mezistupeň mezi oběma zmíněnými, neboť, jak víme díky Cantorovu diagonálnímu argumentu, na rozdíl od schematicky popsaného oboru přirozených čísel obor čísel reálných systematicky fluktuuje, je ‘indefinitní’, proměnný, tj. obor jeho jazykových reprezentací nelze vyčerpat jediným (definitivním) popisem. To samo není nijak špatná zpráva, neboť se tím zdá být podchycen kategoriální rozdíl mezi diskrétním a spojitým při zachování konstruktivního úhlu pohledu, čímž míníme především fixování reálného čísla coby *nekonečné* posloupnosti čísel přirozených, resp. čísel racionálních, nějakým *konečným* předpisem, pravidlem jejich generování. Z hlediska vývoje analýzy zde ale došlo k pozoruhodnému střetu interpretací Cantorova diagonálního argumentu. Preintuicionisté, zcela určitě však raný Brouwer, jej sice zprvu četli ve výše uvedeném, jazykově-analytickém tvaru, totiž jako doklad neuzavřenosti, indefinitnosti kontinua, těžiště jejich práce ale spočívalo v oborech, kterým Cantorova teorie množin pomohla v rozkvětu, speciálně v teorii funkcí, míry a topologii. To obnášelo v první řadě porovnávání nekonečných množin co do velikosti. Kontinuum vzešlé z definovatelných posloupností bylo sice nyní indefinitní, ve své hierarchické konstrukci konsekventních úrovní (ω ordinálních úrovní mohutnosti ω, tj. ω^2, jak to odhadl Brouwer [1907, s. 83]) ale přesto nejvýše spočetné. V rozporu s očekáváním si tak jednak udrželo atomický charakter čísel a definicí, z nichž bylo utvořeno, jednak nemohlo sloužit obvyklým účelům, neboť by, jak podotkl později Brouwer [1930, s. 3], mělo podle všeho míru 0, tj. bylo by pokrytelné posloupností intervalů velikostí součtu ϵ pro libovolné $\epsilon > 0$.

V tomto problému je samozřejmě již zakomponována Cantorova představa (ne)spočetnosti jakožto absolutní charakteristiky množiny, nezávislé na daném vymezení pojmu funkce, přesně v duchu Wittgensteinovy kritiky, podle níž se na Cantorovy závěry unáhleně díváme jako na přírodní jev, tedy něco, co nepodléhá další interpretaci. V opačném případě by totiž šlo snadno poukázat na relativní neexistenci vyčíslení v rámci předem daného oboru funkcí, jak se to mnohem později stalo v oblasti rekurzivní analýzy, a my bychom před sebou neměli nic jiného nežli obdobu Löwenheimova-Skolemova paradoxu: množina všech reálných čísel je sice teoreticky vyčíslitelná, ovšem nikoli funkcí požadovaného typu, tj. toho typu, jenž byl užit k vymezení pojmu reálného čísla. Pointu tohoto obratu si ukážeme později na jednodušším, leč prototypickém případě z teorie rekurze, v níž neplatí, že by každá spočetná (principiálně vyčíslitelná) množina byla množinou spočetnou rekurzivně (efektivně vyčíslitelnou).

Momentálně je významné to, na co upozorňují Troelstra a van Dalen [1988, s. 640 n], totiž že již v rámci Borelovy teorie míry bylo možné dokázat, a dokonce Borelem nepřímo i dokázáno bylo v rámci tzv. Heineho-Borelova teorému, že *definovatelné* prvky kontinua nelze pokrýt *definovatelnou* posloupností intervalů libovolné míry. Borel [1914, s. 16] přesto jako oficiální 'rozřešení' dilematu spočetnosti a nespočetnosti kontinua navrhnul rozlišit tzv. KONTINUUM GEOMETRICKÉ, plně jištěné mimojazykovou a dále neexplikovatelnou intuicí, z níž měla prýštit jeho nespočetnost, od kontinua diskrétního, ARITMETICKÉHO, sestávajícího z posloupností racionálních čísel. Aritmetické kontinuum v Cantorově liberálním smyslu není spočetné, ale s ohledem na užití principu nekonečně opakovaného volného výběru je mírně pochybná jeho existence jako celku, byť Borel [1914, pozn. IV] nezapomíná zdůraznit, že případ nespočetné volby je ještě pochybnější. Toto kontinuum má nicméně dobře definovanou spočetnou část, kterou Borel [1914, s. 166] vzhledem k tomu, že má sloužit obvyklým matematickým potřebám, nazývá KONTINUEM PRAKTICKÝM. Jedná se právě o systém všech konečně definovatelných čísel.

Brouwerův postoj k uvedenému dilematu je v mnohém podobný Borelovu, nabývá ale komplexnějších a méně průhledných podob. Vše započalo slibně, když ve své disertaci [1907, s. 82] tvrdil, že definovatelné body kontinua tvoří speciální typ kardinality, kterou nazývá SPOČETNĚ NEDOKONČENOU (*abzählbar unfertig*, *denumerably unfinished*):

> Spočetně nedokončenou množinou rozumím takovou, v níž může být nějakým dobře definovaným způsobem vyznačeno pouze spočetné množství, z něhož lze pak ale nějakým dříve definovaným způsobem odvodit nové prvky náležející dotyčné množině.

To mohlo vést k hlubší analýze Cantorova pojmu nespočetnosti, zvláště, když se z některých Brouwerových poznámek [1912, s. 91 n] zdá, že souhlasí s identifikací "existujícího" s "definovatelným", a vylučuje tedy dopředu možnost volného výběru jako nepřípustnou. Bohužel, v souladu se svojí základní tezí o nezávislosti matematiky na jazyce, dospěl Brouwer [1907, s. 83] již dříve k názoru, že definovatelné body kontinuum v žádném případě nevyčerpávají, a 'spojitost' je tedy třeba uznat jako další, vedle spočetnosti a nedokončené spočetnosti již třetí, nekonečnou kardinalitu.[8]

Na rozdíl od Borela, jehož pojmům geometrického a praktického kontinua nechává [1930, s. 4 n] následovat pojmy KONTINUA PLNÉHO a REDUKOVANÉHO, se Brouwer pokouší sféry diskrétního a spojitého, aritmetického a geometrického, od počátku postavit na společný základ. Kontinuita reálné osy tak podle něho [1907, s. 17] není zajištěna novým (např. geometrickým) zdrojem poznání, ale touže základní intuicí coby

> jednotou spojitého a diskrétního, možností současného myšlení několika jednotek, spojených prostřednictvím 'mezi', avšak nikdy nevyčerpanou vložením nových jednotek.

Vlastním principem, spojujícím to, co je atomické, zkrocené pravidelnostmi jazyka, s tím, co je volně rostoucí, měnící se, není nicméně nakonec — pro značnou vágnost — primární intuice, ale pojem nového

[8] K otázkám vývoje pojmu kardinality u Brouwera srov. van Dalen [1999, s. 115 nn].

typu posloupnosti, tzv. posloupnosti výběrové, založené právě na konceptu volného výběru, jenž byl odmítnut Borelem. Tímto tahem mělo zůstat kontinuum pevně ukotveno v aritmetice, nepřímo tedy v tradici Weierstrasse a Cantora. To není na jednu stranu žádné překvapení, již proto, že se k pojmu výběrové posloupnosti dostal Brouwer právě recepcí Cantorova díla. Výše popsané preintuicionistické dilema, nedořešené, ba prohloubené Borelem, se tím ale prohloubilo ještě více.

Ačkoli do povědomí širší veřejnosti pronikl především svými neotřelými názory v oblasti základů, těžiště Brouwerovy matematické práce spočívalo v topologii, jejímuž rozvoji dal brzy po obhájení své disertace četné impulsy. V letech 1908–1912 publikoval přes čtyřicet topologických prací, k jejichž nejvýznamnějším výsledkům patří důkaz zobecněné Jordanovy věty a několik vět o pevném bodě, např. pro spojité zobrazení celého kruhu do sebe sama.[9] Brouwer se brzy proslavil takovou měrou, že byl roku 1914, ve svých třiatřiceti letech, kooptován za editora Kleinových *Mathematische Annalen*, jednoho z nejprestižnějších časopisů té doby. O pět let později, roku 1919, mu byla Hilbertem nabídnuta profesura v Göttingen, aby současně dostal pozvánku do Berlína, jenž si s Göttingen v oboru matematické slávy konkuroval. Brouwer sice nakonec obě nabídky odmítl, protože mu univerzita v Amsterdamu nabídla podstatné zlepšení pracovních podmínek, zmíněná fakta jsou ale velmi výmluvná, zvláště na pozadí pozdějších ideových sporů s Hilbertem, známých jako tzv. *Grundlagenstreit*.[10] Ukazuje to především, že byl Brouwer zakotven ve vládnoucí tradici více, než si byl ochoten sám připustit. Pomalu se ale již přesuňme k samotné podstatě Brouwerovy revoluce, s předchozím vylíčením několika technických prerekvizit.

Řekli jsme, že to byl Cantor, kdo ztotožněním přímky s množinou bodů (speciálně definovaných čísel) proměnil matematickou analýzu ve studium struktury reálné osy, tedy jejích topologických a metrických vlastností. Podobně, jako jsme v oddíle 5.12 zavedli pojem metrického prostoru, mohli jsme již dříve zavést pojem PROSTORU TOPOLOGICKÉHO jako libovolnou dvojici $\langle X, T\rangle$, sestávající ze základní množiny X a systému T jejích podmnožin takových, že platí

(1) $\emptyset \in T$ a $X \in T$,

---

[9] Další detaily viz van Dalen [1999, kap. 4, 5].

[10] Viz van Dalen [2005, kap. 15]. Tato aféra vyvrcholila roku 1928 bezprecedentním vyškrtnutím Brouwera ze seznamu editorů *Annalen*. Podstatou sporu bylo rozhodnutí těžce nemocného Hilberta zbavit se Brouwera v obavě, aby po jeho smrti nemohl prostřednictvím vlivného časopisu ohrozit další vývoj matematiky. Tento krok neměl sice žádný právní základ, většina členů rady však nechtěla Hilbertovi odporovat (jednou z mála výjimek byl Einstein, který se od celé akce od počátku distancoval), a jelikož se Brouwer zarputile bránil, byla nakonec na základě dohody s nakladatelem (Springer) rada rozpuštěna a časopis vydáván na principu hlavního editora, Hilberta, a několika spolupracovníků.

(2) když $U, V \in T$, pak $U \cap V \in T$,

(3) když $Q \subseteq T$, pak $\bigcup Q \in T$,

tj. systém T je uzavřen na konečné průniky a libovolná sjednocení. Prvkům T se říká OTEVŘENÉ MNOŽINY, jejich doplňkům MNOŽINY UZAVŘENÉ. Již z bodu (1) definice plyne, že množina může být uzavřená i otevřená zároveň.

Podmnožina $B \subseteq T$ se nazývá BÁZÍ TOPOLOGIE $\langle X, T\rangle$, jestliže lze každý prvek $U \in T$ získat jako sjednocení prvků z B, tj. $U = \bigcup\{V \in B \mid V \subseteq U\}$. Tak např. systém otevřených intervalů na přímce, či obecně na uspořádané množině $\langle X, <\rangle$, jak jsme je uvažovali v kapitole 2, tvoří bázi tzv. TOPOLOGIE USPOŘÁDÁNÍ (*order topology*). Ta je nezávisle definována podmínkou, podle níž je $Y \subseteq X$ otevřená, jestliže pro libovolný bod $y \in Y$ existuje otevřený interval $(a, b) \subseteq Y$, takový, že $y \in (a, b)$. OKOLÍ bodu x, značené $U(x)$, je libovolný prvek T, jemuž x náleží. Z libovolného metrického prostoru $\langle X, d\rangle$ lze vytvořit prostor topologický tak, že vezmeme jako bázi systém všech tzv. OTEVŘENÝCH KOULÍ

$$U(x, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

se středem $x \in X$ a poloměrem $\epsilon \in \mathsf{R}$, kde $\epsilon > 0$. Koule je vlastně naše známé ϵ-okolí bodu x.

Významné příklady topologických prostorů, souvisejících úzce s reálnými čísly, jsou tzv. BAIRŮV a CANTORŮV PROSTOR všech posloupností přirozených čísel N^{N}, resp. jedniček a nul 2^{N}. Bázi topologie zde tvoří množiny těch posloupností, které mají společný nějaký počáteční úsek. Ekvivalentně lze říci, že se množina Y nazývá otevřená, jestliže pro každé $y \in Y$ existuje n takové, že do Y náleží všechny posloupnosti, které se s y shodují v prvních n členech. Oba prostory lze reprezentovat formou stromu, jehož uzly tvoří počáteční segmenty (aproximace) daných posloupností, které jsou jeho celými větvemi. Bairův strom se přitom v každém uzlu větví nekonečněkrát, zatímco strom Cantorův má pouze konečná větvení. Alternativní způsob zavedení topologie je přes definici metriky

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } x = y, \\ \frac{1}{2^n} & \text{jestliže } x \neq y \text{ a k rozdílu došlo v } n\text{-tém členu.} \end{cases}$$

Definice je přirozená, jak to lze snadno nahlédnout třeba na případě libovolného (netriviálního) n-adického rozvoje reálného čísla z intervalu $(0, 1)$: čím delší je shoda počátečních úseků, tím menší je vzdálenost obou bodů, tedy i velikost příslušného okolí. Aby ale nedošlo k mýlce: Bairův ani Cantorův prostor nejsou přímo topologicky ekvivalentní (homeomorfní) s prostorem R, ale s jeho podprostory, např. všech iracionálních čísel v případě prvním a s diskontinuem v případě druhém. Přitom:

> Dva topologické prostory $\langle X_1, T_1 \rangle$ a $\langle X_2, T_2 \rangle$ nazýváme HOMEOMORFNÍ, jestliže existuje bijekce $f : X_1 \leftrightarrow X_2$ taková, že pro každé $U \subseteq X_1$ platí: $U \in T_1$ tehdy a jen tehdy, když $f[U] \in T_2$.

O to nám ale nyní nejde.[11] Podstatné je, že máme v principu prvky kontinua opět reprezentovány nekonečnými posloupnostmi přirozených čísel, navíc v jisté vizuálně přitažlivé formě. Dále je zřejmé, že některým z nich odpovídají konečná konstruktivní schémata, předem popisující konstruovanou větev stromu. Odpovídající posloupnost se pak nazývá ZÁKONNÁ (*gesetzartig*, *given by a law*). Cantorův diagonální argument ovšem otevřel možnost uvažovat posloupnosti, které zákonem dané nejsou, jsou zcela libovolné, 'určené' náhodou (např. hodem kostky) či okolnostmi, které neznáme. O nich budeme hovořit jako o posloupnostech VOLNÝCH (*gesetzlos*, *lawless*). Brouwerův termín VÝBĚROVÉ POSLOUPNOSTI (*choice sequence*, *Wahlfolge*), dost možná inspirovaný skandálem kolem Zermelova axiomu (svobodného) výběru, obvykle zahrnuje oba typy. První odkaz k výběrové posloupnosti jakožto součásti intuicionistické matematiky se nachází v jedné z Brouwerových recenzí, konkrétně [1914*b*, s. 79].

Všimněme si, že z naší interpretace Cantorova diagonálního argumentu z oddílu 6.2 nijak neplyne, že by nutně existovaly jiné než zákonné posloupnosti, což je ostatně právě východisko konstruktivistické interpretace kontinua. Brouwer sám, jak jsme zmínili, tento názor zprvu sdílel, např. když ve své inaugurační přednášce [1912, s. 92] připisoval pojetí reálného čísla založené na volném výběru svému nepříteli — formalismu, zatímco intuicionismus charakterizoval omezením na posloupnosti zákonné. Stejně jako Borel však o této alternativě pochyboval, jednak z čistě technických, byť ne vždy oprávněných důvodů (spočetné kontinuum má míru 0), jednak z důvodů vnitřních, ideových, které jej stále více přibližovaly Cantorovu metafyzickému stanovisku jazykem nespoutané matematiky. Jelikož Brouwer sám byl na rozdíl od Cantora silně antiplatonisticky zaměřen, rozhodl se najít třetí cestu v příklonu k radikálnímu subjektivismu.

Zatímco podle Cantora je celek reálných čísel neuchopitelný, nezávislý na jazyce, neboť existuje před ním, v platónské říši idejí, je podle Brouwera tato nezávislost dána svobodnou vůlí tvůrčího subjektu, tedy naopak subjektivitou lidské mysli, která jazyku v jeho intersubjektivitě předchází a je mu nadřazena, "neboť nikdo ještě nebyl s to sdělit svoji duši prostřednictvím jazyka".[12] Brouwer i Cantor tak stojí na opačných

[11] Vlastnosti zmíněných prostorů jsou popsány např. in Truss [1997, kap. 10] či Deiser [2007, část 2].

[12] Tento citát je trochu zákeřně převzat z Brouwerova mystického spisu [1905].

stranách základní teze analytické filosofie, artikulované později Wittgensteinem, totiž že není poznání mimo jazyk a že jazyk je (jediným) médiem intersubjektivity, tj. neexistuje žádný jazyk soukromý, natož pak možnost soukromého, jazykem neartikulovatelného objevu na straně jedné, ani v principu nepopsatelná, hyperobjektivní říše preexistujících věcí a faktů na straně druhé. Tato teze sama není na rozdíl od zprvu zmíněných metafyzická, chápeme-li ji jako výraz postřehu, že není žádný praktický důvod předpokládat existenci či poznání tam, kde ho z definice nelze dosáhnout. Z důvodů přílišné popularity termínu se to stydím nazývat Occamovou břitvou.

Ačkoli tedy byla Wittgensteinovi v přechodu od *Tractatu* [1922] k *Filosofickým zkoumáním* [1953] Brouwerova filosofie bezesporu mocnou inspirací, její vlastní podoba včetně důsledků, které má, pouze ukazuje, že extrémy platonismu a psychologismu jsou nakonec vždycky jen dvě strany téže mince. V praxi totiž zůstávají veškeré jejich rozdíly pouze verbální, kdy jedna strana připisuje autorství svých objevů Bohu, zatímco strana druhá panteisticky věří v tajemnou sílu intuice. Názorně to demonstruje závěrečný slogan Brouwerovy disertace [1907, s. 97], až nápadně podobný Cantorovu prohlášení citovanému v oddíle 2.8:

> Matematika je svobodný výtvor, nezávislý na zkušenosti; vyvíjí se z jediné apriorní pra-intuice, kterou lze nazývat *konstantou ve změně* a *jednotou v mnohosti.*

S přihlédnutím k takovýmto deklaracím lze říci, že pravda je někde mezi platonismem a mentalismem, zpravidla však blíže k platonismu, jehož (antropomorfní) Bůh má menší sklony k svévoli nežli subjektivistův vnitřní démon. Brouwerova matematika je toho nepochybným důkazem.

Brouwer přitom chápal pojem výběrové posloupnosti jako rozšíření pojmu posloupnosti plně určené zákonem do posloupnosti, která je zákonem určena jen z části a povolený prostor pokračování dosud zkonstruované řady je plně v kompetenci svobodného rozhodnutí ideálního matematika, tj. subjektu prostého matematicky irelevantních vlastností. K výběrovým posloupnostem dospěl Brouwer v kontextu toho, co zprvu nazýval 'matematickou množinou' jako protikladu k množině získané jazykovou komprehenzí, tj. logicky.[13] Z tohoto pojmu se záhy vyvinul základní a vlastně ustanovující pojem intuicionistické teorie množin a matematiky, tzv. *rozložení* (*spread*).[14] Klasickému pojmu množiny přiřazuje Brouwer termín *species*, z kapitol, které jsme věnovali teorii mno-

[13] V poznámkách na okraji rukopisu svých přednášek z roku 1917. Viz van Dalen [1999, s. 240].

[14] V češtině, je-li mi alespoň známo, se pro Brouwerův původní termín "spreiding" ještě neuchytilo žádné pojmenování, a je tedy otázka, zda by mnou zvolený překlad nebylo možné nahradit něčím sugestivnějším. V němčině se nicméně užívá mnohem fádnější "Menge", případně "Ordnung", viz Heytingův rejstřík in Brouwer [1975].

žin, ale plyne, že to odpovídá spíše pojmu množiny ve smyslu Fregově nežli Cantorově, neboť Cantor podobně jako Brouwer vyžaduje ještě dodatečně jistá vágně-konstruktivní specifika (obecnou vyčíslitelnost). Tato vágnost spjatá s balíčkem údajně 'intuitivních' principů je tím, čím se liší Brouwerův intuicionismus od matematického konstruktivismu.

Jestliže je podle Cantora množina dána zároveň se svým ordinálním vyčíslením, tj. jako výsledek nekonečné konstrukce kopírující nějaký fragment ordinální řady, je Brouwerova množina, tj. *spread*, v základní formě definována jako zákon, jenž pro danou, dosud zkonstruovanou posloupnost čísel určí neprázdný obor možností, jak pokračovat, a vede tedy ke konstrukci nekonečného stromu. Jeho větve, výběrové posloupnosti, jsou pak prvky daného rozložení. Je-li možnost výběru omezena vždy na jedinou volbu, máme před sebou zákonnou posloupnost. V opačném případě je rozložení vlastně množina více či méně determinovaných možností — volných posloupností, Brouwerem přirovnávaná k živému, podle možností se rozvíjejícímu organismu, jehož duší je tvůrčí subjekt. Strom N^{N} představuje opačný extrém ke zcela determinovanému rozložení, totiž množinu, na jejíž rozvoj či růst ('spread') nebyly kladeny žádné dodatečné požadavky.[15] Podstatná zůstává nicméně zásada, že kromě příslušného zákona je rozvoj v tom kterém uzlu určen vždy konečným sledem uzlů předchozích. Na ní je totiž vystavěn Brouwerův převrat Cantorovy koncepce, jehož podstatu můžeme naznačit již nyní.

Podstata Brouwerova principu konečné manipulace s nekonečnými posloupnostmi čísel, jenž z nich teprve dělá posloupnosti výběrové, je obvykle ilustrována na případě aritmetických operací. Chceme-li např. sčítat dvě reálná čísla coby Cauchyho posloupnosti čísel racionálních, nemusíme znát přímo zákon jejich rozvoje, ale vždy jenom jejich počáteční úseky s tím, že na jejich základě dokážeme nějak vyprodukovat další členy. Ty nás již dovedou k dalšímu členu součtu, neboť sčítání bylo definováno po částech, viz oddíl 2.1.[16] K zásadnímu průlomu ve volbě pojmů nejspíše došlo tehdy, když si Brouwer v rámci svého pravidelně se opakujícího kurzu teorie množin v akademickém roce 1916/1917 uvědomil,[17] že mu pojem výběrové posloupnosti dává možnost nahradit Cantorův diagonální důkaz nespočetnosti kontinua důkazem jiným, jenž má také dalekosáhlé důsledky, ovšem naprosto jiného, nečekaného druhu. Tím proměnil svůj dosud negativistický program 'mírného' popí-

[15] Brouwerovy původní definice nejsou příliš jasné a jednoznačné, náš popis odpovídá pozdější cizelaci, kterou předvedeme v následujících oddílech.

[16] Tento příklad je uveden in Heyting [1956, s. 33]. Všimněme si, že nutně neplatí, že bychom z počátečních úseků kanonického, např. desetinného rozvoje čísel dokázali vypočíst počáteční úsek kanonického tvaru součtu: máme-li třeba $0,33333$ a $0,66666$, pak není zřejmé, zda psát $0,99999$ nebo $1,00000$ s ohledem na další členy, které ještě neznáme.

[17] Viz van Dalen [1999, s. 242 n].

rání klasických matematických vět a logických principů (odkazem na jejich nespolehlivost) v program pozitivní: jsou dokazovány teorémy nové, z nichž mnohé přímo protiřečí těm klasickým. Předveďme proto hlavní myšlenku Brouwerovy varianty důkazu věty:

Bairův prostor N^{N} je nespočetný.

Důkaz: Předpokládejme, že existuje zobrazení $f : \mathsf{N}^{\mathsf{N}} \to \mathsf{N}$, přiřazující každé posloupnosti $\alpha \in \mathsf{N}^{\mathsf{N}}$ nějaké přirozené číslo. Jelikož s výběrovými posloupnostmi lze pracovat pouze na základě konečného počátečního fragmentu, znamená to, že hodnota $f(\alpha)$ musí být vypočítána na bázi hodnot $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, $\ldots$, $\alpha(n)$ pro nějaké n. Tím pádem je ale všem posloupnostem tohoto počátku funkcí f přiřazeno totéž přirozené číslo, což znamená, že f není injektivní. $\square$

To vše, ač nezvyklé, stále ještě nepůsobí nijak kontroverzně. Rychlá inspekce základních topologických pojmů, zejména pojmu okolí v N^{N}, ale záhy ukáže, že v důkazu nespočetnosti Bairova prostoru máme zároveň důkaz věty, že je každá totální funkce z kontinua do přirozených čísel spojitá, ba dokonce konstantní, což jistě neplatí klasicky. Na bázi dalších 'jednoduchých' principů dokáže Brouwer v průběhu času jak tezi, že je spojitou i každá totální funkce na kontinuu, jak si to přáli zakladatelé novověké analýzy, tak tvrzení, že kontinuum nejde rozdělit na dvě disjunktní neprázdné části, jak si to přál Aristotelés. Než se k tomu dostaneme, vraťme se ještě k některým negativním částem Brouwerova programu a přesnější formulaci užitých pojmů.

7.3 Slabé protipříklady

Zpochybnění zákonů klasické logiky, k němuž sáhl Brouwer ve své disertaci, bylo založeno na specifické interpretaci logických konstant, díky níž se z klasických tautologií stala aritmeticky pochybná tvrzení. Brouwer a jeho následovníci se ovšem zdráhají dopředu říci, jakáže interpretace to je, nechávajíce ji "vyvstat z matematické intuice a zkušenosti",[18] pročež se ani nelze divit, že — jak kdosi poznamenal — existuje tolik konstruktivismů co konstruktivistů.[19] Na druhou stranu má tento přístup přinejmenším tu výhodu, že problematizuje představu o přirozených zákonech jediné možné logiky a přivádí nás ke konceptu jazykové hry, kterou je třeba odlišit od smysly vnímatelné formy jazyka, jakožto něčeho primárního, podstatného. Herní příměr je ale Brouwerovi v jiném smyslu nepříznivý, neboť každá hra aspirující na širší, nikoli jen lokální či

[18] Bridges & Richman [1987, s. 11].

[19] Kniha Bridges & Richman [1987], z níž je uvedený citát převzat, se příznačně jmenuje *Varieties of Constructive Mathematics*.

zcela soukromé užití (je-li něco takového vůbec možné, tj. je-li pouze soukromá hra vůbec ještě hrou) vyžaduje jasně formulovaná, a tudíž obecně následovatelná pravidla, tj. především není záležitostí jednotlivce a jeho subjektivních stavů.

Z Brouwerovy kritiky vyloučeného třetího, jejíž obětí se stal prominentně Hilbertův axiom obecné řešitelnosti matematických úloh, můžeme vyčíst některé jednoduché zásady, které později shrnul Brouwerův student Arend Heyting [1930a] do kánonu intuicionistické logiky. Brouwer [1925, s. 253] sice průběžně označoval některé zákony za intuicionisticky platné, např. $\neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$, obecně se ale držel devízy, že se jedná spíše o pravidelnosti důkazů, které užívá, nežli o zákony, jež by nějak systematicky respektoval. Jednu z takových pravidelností artikuluje zásada, že důkaz disjunkce $A \vee B$ vyžaduje důkaz alespoň jednoho z členů, jak to právě v případě $A \vee \neg A$ nejsme velmi často s to zajistit. Podobně jsme při zdůvodnění věty $(\exists x)A(x)$ coby zobecněné disjunkce zavázáni k udání instance n, pro niž $A(n)$ platí, což znamená, že existenční kvantifikace je systematicky čtena efektivně, ve smyslu: "umím najít takové x, že $A(x)$". To narušuje běžné chápání kvantifikátoru coby notační zkratky, neboť za frází "existuje x takové, že …" se mohou skrývat velmi odlišné pravdivostní podmínky. Ukázkou konstruktivně neplatného zdůvodnění, používanou snad ve všech úvodech věnovaných tématu,[20] je důkaz následující věty:

Existují iracionální čísla x, y taková, že je x^y racionální.

Důkaz: $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je racionální *nebo* iracionální. Pokud je racionální, jsme hotovi, pokud ne, vezmeme číslo $a^{\sqrt{2}}$. $\square$

Názorně zde vidíme, že smysl neboli pravdivostní podmínky syntakticky identických vět se v klasické a konstruktivní logice podstatně liší. Zvláště markantní je to u tvrzení formy $(\forall x)(\exists y)A(x, y)$, jejíž efektivní čtení — možná paradoxně — indukuje axiom výběru

$$(\forall x)(\exists y)A(x, y) \rightarrow (\exists f)(\forall x)A(x, f(x))$$

jako intuicionisticky akceptovatelný princip. Některé jeho obecnější varianty se nicméně dostávají do sporu s jinými konstruktivistickými principy.[21] Vraťme se ale zpět k logickým operátorům.

Implikace bývá čtena jako vyjádření toho, že jsme schopni transformovat důkaz antecedentu na důkaz konsekventu. Negací $\neg A$ se obvykle míní transformace důkazu A na důkaz sporu $\perp$, jenž může konkrétně zastupovat třeba věta $0 = 1$. To odpovídá větě $A \rightarrow \perp$. Prohlášení

[20] Viz třeba Dummett [1977, s. 6] a Wolf [2005, s. 321].
[21] Viz Bridges & Richman [1987, s. 11, 106 nn].

tohoto čtení za kanonické ovšem vede k některým otázkám ohledně dalších možných konstruktivních výkladů negace, kdy se např. v případě $A := (\forall x)B(x)$ nabízí interpretovat vyloučený třetí silněji jako tvrzení

$$(\forall x)B(x) \vee (\exists x)\neg B(x),$$

což není ekvivalentní s $(\forall x)B(x) \vee \neg(\forall x)B(x)$, neboť z (nepřímého) vyvrácení $(\forall x)B(x)$ ještě neplyne vyvrácení konstruktivní, přímé, předvádějící konkrétní instanci n takovou, že $\neg B(n)$. První případ ovšem již implikuje druhý, tj. $(\exists x)\neg B(x) \rightarrow \neg(\forall x)B(x)$ je tautologií intuicionistické logiky. Brouwer občas užívá také další, tentokráte oslabenou verzi negace ve smyslu aktuální nerozhodnosti problému. Věta $A \rightarrow \perp$ se tak rovná tvrzení principiální nerozhodnutelnosti ("absurdity")[22] a nejsilnější verzi popření představuje vyvrácení doložené konstruktivním protipříkladem. Tyto protipříklady je třeba odlišit od tzv. PROTIPŘÍKLADŮ SLABÝCH (*weak counterexamples*), jimiž není platnost nějakého zákona vyvrácena, ale zpochybněna.

Brouwer později, v rámci přednášek v Berlíně a Vídni,[23] kanonizoval metodu svých raných protipříkladů tím, že klíčové prvky obvyklé konstrukce pojmenoval. Základem byla tzv.

> PRCHAJÍCÍ VLASTNOST (*fliehende Eigenschaft*, *fleeing property*) B, což je vlastnost (i) rozhodnutelná, tj. $(\forall x)(B(x) \vee \neg B(x))$, o níž ale (ii) zatím není známo ani zda $(\exists x)B(x)$, ani zda $(\forall x)\neg B(x)$.

Příkladem takové vlastnosti je např.

> x je sudé číslo větší než 2, které není součtem dvou prvočísel,

která je základem dosud nerozhodnuté Goldbachovy domněnky, podle níž takové číslo neexistuje. Prchající byla donedávna vlastnost

> x je místo rozvoje čísla π, na němž začíná posloupnost číslic 0123456789.

První číslo k, pro něž platí $B(k)$, se nazývá KRITICKÉ (*Lösungszahl*, *critical number*) a pro posledně zmiňovanou vlastnost bylo nedávno objeveno jako 17387594880.[24] Tzv. KYVADLOVÉ číslo (*Pendelzahl*, *pendulum number*) $a := (a_n)_{n \in \mathsf{N}}$ může být pak např. definováno následovně:

$$a_n = \begin{cases} (-\frac{1}{2})^n & \text{jestliže } (\forall m \leq n)\neg B(m), \\ (-\frac{1}{2})^k & \text{jestliže } k \leq n \text{ a } k \text{ je kritické.} \end{cases}$$

[22] Viz Brouwer [1923].

[23] Berlínské přednášky se konaly roku 1927 a byly vydány teprve nedávno jako Brouwer [1992]. Byly opakovány ve Vídni o rok později a tiskem vydány jako Brouwer [1929] a Brouwer [1930].

[24] Viz Borwein [1998].

Předpokládáme-li, že je reálné číslo, nebo, jak intuicionisté rádi říkají, GENERÁTOR REÁLNÉHO ČÍSLA (*real number generator*), definováno stejně jako jistá Cauchyho posloupnost čísel racionálních, s rozdílem v efektivním čtení kvantifikátorů, není obtížné zjistit, že uvedená posloupnost a této definici vyhovuje, tj. že jsme pro dané m s to najít člen a_q, od něhož dále rozdíly mezi členy nepřekračují hodnotu $\frac{1}{m}$. Posloupnost a pak podle konstrukce v pravidelných, zužujících se výkyvech osciluje kolem nuly, dokud se eventuálně nezastaví na kritické mocnině a stane se konstantní. Kdyby nyní, při Brouwerově čtení logických spojek, platilo

$$a = 0 \vee a \neq 0,$$

znamenalo by to, že umíme rozhodnout Goldbachovu domněnku nebo jakékoli jiné tvrzení, které se za $B(x)$ skrývá. To je ale v rozporu s předpokladem, což dělá z kyvadlového čísla slabý protipříklad k zákonu vyloučeného třetího. Ze stejného důvodu neplatí trichotomie

$$a < 0 \vee a = 0 \vee a > 0.$$

Brouwer [1921] také sestrojil slabý protipříklad proti tvrzení, že má každé reálné číslo desetinný (obecně: p-adický) rozvoj. To může zpočátku vyhlížet jako konstruktivně neúnosné, neboť definice Cauchyho posloupnosti od nás vyžaduje, abychom se od určitého členu dostali pod libovolnou, předem zvolenou hranici přesnosti, tedy i hranici vzniklou rozdělením výchozího intervalu na deset (resp. p) stejně velkých částí. Problém mohou nicméně způsobit právě posloupnosti oscilující na hranicích pomyslného dělení, u nichž bude člen a_q, nalezený pro dané m, vždy tak blízko zvolené mřížky, že ji interval, v němž se mají nacházet všechny členy následující, překryje, tj. nebude jasné, na jakou z jejích stran se další vývoj posloupnosti vychýlí.

Pozoruhodné je, že přes výslednou neurčitost jsou ve svém rozvoji kyvadlová čísla popsána zcela deterministicky, tj. jedná se o posloupnosti zákonné, nikoli obecně výběrové či volné. K zobecnění své metody tímto směrem dospěl Brouwer v rámci berlínských přednášek, kdy nechal další vývoj posloupnosti, jako je a, určovat mentálními stavy tvůrčího subjektu.[25] Domníval se tak podat skutečně 'silný' protipříklad vůči zákonům klasické logiky, neboť slabé protipříklady závisely na vnějších okolnostech, a mohly tedy protipříklady přestat být. Na slabých protipříkladech jsou také založené slabé verze matematických vět, které klasicky neplatí, jmenovitě

(1) každá totální funkce na kontinuu je spojitá,

(2) kontinuum nelze rozdělit na dvě neprázdné části.

[25] "Metodou tvůrčího subjektu" nazval tento postup ale až později in [1948].

První tvrzení se přitom zdá být z klasického hlediska snadno vyvratitelné, uvážíme-li funkce definované po částech, jako

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{když } x \leq 0, \\ +1 & \text{když } x > 0. \end{cases}$$

Podle Brouwerovy 'logiky' ale k úspěšné definici této funkce v bodě x musí být znám jeho vztah k 0, tj. jedna z podmínek $x \leq 0$, $x > 0$. V případě kyvadlového čísla tomu tak zjevně není, a funkce f tedy není totální. Podobně se proti druhému tvrzení nabízí uvážit systém množin (řez)

$$A = \{x \mid x \leq 0\} \qquad\qquad B = \{x \mid x > 0\}.$$

Stejný argument ale ukáže, že se nejedná o rozklad množiny R na dvě disjunktní a vyčerpávající části, neboť kyvadlové číslo a nenáleží (alespoň zatím) ani jedné z nich. — Právě tomuto relativizujícímu dodatku ("alespoň zatím") chtěl Brouwer zabránit tím, že nechal a systematicky nedourčené, tj. nevázané na nějakou konkrétní prchající vlastnost, případně ponechal vývoj její extenze libovůli tvůrčího subjektu. Nežli přejdeme k pozitivním důkazům teorémů (1), (2), naznačme ještě pro kontrast, jak se s nimi vypořádává klasická analýza.

Je zřejmé, že první z nich v ní jednoduše neplatí, tj. na kontinuu existují totální funkce, které nejsou spojité dokonce v žádném bodě, třeba tzv. FUNKCE DIRICHLETOVA

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x \text{ je racionální}, \\ 0 & \text{když } x \text{ je iracionální}. \end{cases}$$

Co se týče případu nerozdělitelnosti (klasického) kontinua na dvě části, zde si, jako již nejednou, vypomáhá Cantorova teorie topologickým trikem. Cantorovo kontinuum lze samozřejmě rozdělit na dvě disjunktní části libovolným bodem, který mu náleží, již ale neplatí, že by ho šlo rozložit na dvě otevřené a přitom disjunktní a neprázdné množiny. Vzhledem k tomu, že rozklad topologického prostoru na dvě neprázdné otevřené části implikuje, že v něm kromě nosiče a prázdné třídy existují ještě jiné množiny, které jsou současně uzavřené a otevřené, jedná se vlastně o dvě ekvivalentní podmínky, tj. výskyt dalších uzavřených a současně otevřených množin kromě dvou právě zmíněných je měrou (ne)souvislosti prostoru:

> Topologický prostor $\langle X, T \rangle$ se nazývá SOUVISLÝ (*connected*, *zusammenhängend*), jestliže v něm s výjimkou množin $\emptyset$ a X neexistuje množina $A \subseteq X$, která by byla otevřená a uzavřená zároveň.

Termín souvislosti jsme přitom, následujíce Cantora, použili v oddíle 2.10 pro jiný, i když spřízněný metrický pojem. To si nyní dovolujeme změnit tím, že stanovíme:

> Metrický prostor $\langle X, d \rangle$ se nazývá ZŘETĚZITELNÝ (*chainable*, *verkettet*), jestliže pro libovolné dva body $a, b \in M$ a kladné číslo $\epsilon \in \mathsf{R}$ existuje konečná posloupnost bodů $c_1, c_2, \ldots, c_n \in M$ taková, že $a = c_1$, $b = c_n$ a $d(c_i, c_{i+1}) < \epsilon$ pro $1 \leq i < n$.

Lze dokázat, že každý souvislý metrický prostor je zřetězitelný. Opačné tvrzení platí až pro tzv. prostory kompaktní:

> Topologický prostor $\langle X, T \rangle$ se nazývá KOMPAKTNÍ, jestliže ke každému jeho pokrytí existuje konečné podpokrytí, kde POKRYTÍM $\langle X, T \rangle$ myslíme takovou množinu $M \subseteq T$, že $\bigcup M = X$, a PODPOKRYTÍM pokrytí M každé $M' \subseteq M$, které je opět pokrytí.

Věta o kompaktnosti pro výrokovou a predikátovou logiku převzala své jméno právě odtud. Vzpomeneme-li dále na avizovanou souvislost věty o kompaktnosti s Königovým lemmatem, a toho zase s větou Bolzanovou-Weierstrassovou, nahlédneme snadno spřízněnost uvedené definice kompaktnosti (1) s jinou obvyklou definicí, podle níž je topologický prostor kompaktní, (2) má-li v něm každá nekonečná množina alespoň jeden hromadný bod, případně (3) jestliže v něm má každá nekonečná posloupnost konvergující podposloupnost. Tyto definice jsou si ale ekvivalentní pouze nad metrickými prostory, což nám s ohledem na další výklad nevadí. Pro ilustraci ukažme přechod od (1) k (2), jenž platí obecně:

Důkaz: Předpokládejme, že v topologickém prostoru $\langle X, T \rangle$ existuje nekonečná množina $A \subseteq X$, která nemá v X žádný hromadný bod, tj. ke každému bodu $x \in X$ existuje okolí $U(x)$, které neobsahuje více než konečně mnoho prvků A. Tato okolí dávají dohromady pokrytí M celého X, k němuž existuje nějaké konečné podpokrytí M'. To přirozeně pokrývá i A. Jelikož má každý prvek M, a tedy i M', konečný průnik s A, znamená to, že je A také konečné, což je v rozporu s předpokladem. □

Z dříve řečeného je přitom zřejmé, že kontinuum R kompaktní není, lze je ale snadno kompaktním udělat přidáním největšího a nejmenšího prvku. R je nicméně tzv. LOKÁLNĚ KOMPAKTNÍ, což znamená, že pro každý jeho bod x existuje okolí $U(x)$ a kompaktní množina V taková, že $U(x) \subseteq V$. Pojem kompaktnosti množiny $Y \subseteq X$ získáme přirozeně tak, že se na ni podíváme jako na PODPROSTOR $\langle Y, T|Y \rangle$ výchozího prostoru $\langle X, T \rangle$, kde $T|Y \stackrel{\text{def}}{=} \{U \cap Y \mid U \in T\}$. Příkladem kompaktního prostoru je Cantorův prostor 2^{N} a každý uzavřený interval $[a, b] \subseteq \mathsf{R}$. Samotný prostor R, jak jsme řekli, je jen lokálně kompaktní a Bairův prostor N^{N} není dokonce ani to.

7.4 Rozložení a species

Vzhledem k tomu, že má být Brouwerův pojem množiny základem vlastní intuicionistické matematiky, potřebujeme jeho přesnou formulaci. Začněme ale pro zajímavost Brouwerovou [1918, s. 3] původní definicí:

> *Rozložením* [Menge] rozumím *zákon*, na jehož základě, kdykoli je opakovaně zvolen libovolný člen posloupnosti ξ komplexů číslovek, generuje tato volba buďto určitý znak, nebo nic, nebo se zablokuje celý proces a výsledek je zrušen, přičemž pro každé n po nezastavených $n-1$ volbách existuje alespoň jeden komplex číslovek, jenž v případě, že bude vybrán jako n-tý, *nepovede* k zablokování procesu. Každá tímto způsobem vytvořená posloupnost symbolů (kterou tedy v obecném případě nelze prezentovat jako ukončenou) se nazývá *prvkem rozložení*. Společný způsob vzniku prvků rozložení M budeme rovněž označovat jako *rozložení* M.[26]

To je jen dokladem faktu, že Brouwerův toporný vyjadřovací styl rozhodně nepomohl šíření jeho myšlenek, neboť ani ti, kdo jim byli přátelsky nakloněni, případně proti nim nebyli nijak zaujati, jako např. Abraham Fraenkel, nebyli s to pochopit jeho terminologii.[27] Z tohoto důvodu budeme dále užívat pojmosloví a notaci reformovanou později Kleenem (a Vesleyem) [1965] a Dummettem [1977]. V dalším textu se proto držme písmen α, β, ... pro výběrové posloupnosti z $\mathsf{N_0}^{\mathsf{N}}$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, ... pro členy posloupnosti α a $\bar{\alpha}(n)$ pro počáteční úsek $\langle\alpha(1),\alpha(2),\ldots,\alpha(n)\rangle$. Symbol $\bar{\alpha}(0)$ můžeme užívat ve významu prázdného sekventu $\langle\rangle$.

Idea je, že uzly konstruovaného rozložení jsou konečné posloupnosti $\vec{u}=\langle u_1,\ldots,u_k\rangle$, $\vec{v}=\langle v_1,\ldots,v_l\rangle$ přirozených čísel, včetně posloupnosti $\langle\rangle$ prázdné. Označíme-li jejich spojení jako $\vec{u}\star\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \langle u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_l\rangle$, dospíváme v terminologii stromů k následujícím definicím:

$$\vec{u} <_B \vec{v} \rightleftharpoons (\exists e)(\vec{u}\star\langle e\rangle=\vec{v}) \qquad\qquad \vec{u}\leq\vec{v} \rightleftharpoons (\exists\vec{w})(\vec{u}\star\vec{w}=\vec{v}).$$

[26] Originál zní: "Eine *Menge* ist ein *Gesetz*, auf Grund dessen, wenn immer wieder ein willkürlicher Ziffernkomplex der Folge ξ gewählt wird, jede dieser Wahlen entweder ein bestimmtes Zeichen, oder nichts erzeugt, oder aber die Hemmung des Prozesses und die definitive Vernichtung seines Resultates herbeiführt, wobei für jedes n nach jeder ungehemmten Folge von $n-1$ Wahlen wenigstens ein Ziffernkomplex angegeben werden kann, der, wenn er als n-ter Ziffernkomplex gewählt wird, *nicht* die Hemmung des Prozesses herbeiführt. Jede in dieser Weise von der Menge erzeugte Zeichenfolge (welche also im allgemeinen nicht fertig darstellbar ist) heisst ein *Element der Menge*. Die gemeinsame Entstehungsart der Elemente einer Menge M werden wir ebenfalls kurz als *die Menge M* bezeichnen."

[27] Viz van Dalen [1999, s. 314]. Na konferenci v Nauheimu roku 1920, kde Brouwer přednesl svůj článek [1921] o neexistenci desetinného rozvoje pro každé reálné číslo, se údajně Edmund Landau vyjádřil v tom smyslu, že by bylo vhodné zavést sekci patologické matematiky a včlenit ji do lékařské sekce. Viz van Dalen [1999, s. 327].

Označíme-li obecně systém všech konečných posloupností množiny A včetně $\langle\rangle$ jako $A^{<\mathsf{N}}$, pak rozložení je v principu definováno jako jistá podmnožina systému ${\mathsf{N}_0}^{<\mathsf{N}}$ splňující jisté doplňující podmínky. Následujíce Brouwerovo *dictum* řekneme:

> Rozložení S je ve své existenci určeno tzv. zákonem rozložení (*spread-law*) Λ_S, jenž rozděluje prvky ${\mathsf{N}_0}^{<\mathsf{N}}$ na přípustné ($\vec{u} \in S$) a nepřípustné ($\vec{u} \notin S$) ve vztahu k Λ_S a respektuje vždy soubor následujících globálních podmínek: (1) S je rozhodnutelná, tj. $(\forall \vec{u} \in {\mathsf{N}_0}^{<\mathsf{N}})(\vec{u} \in S \vee \vec{u} \notin S)$, (2) $\langle\rangle \in S$, (3) každý přípustný prvek má nějakého přípustného přímého následníka, tj. $(\forall \vec{u} \in S)(\exists e)(\vec{u} \star \langle e \rangle \in S)$ a (4) každý přípustný prvek má přípustné všechny své předchůdce, tj. $(\forall \vec{u}, \vec{v})(\vec{u} \leq \vec{v} \wedge \vec{v} \in S \rightarrow \vec{u} \in S)$.

Tyto podmínky dělají z Λ_S evidentně popis stromu, ve vztahu k němuž samotnému se S nazývá nahým rozložením (*naked spread*). Brouwerova původní definice vede ale k podstatně komplexnějšímu pojmu, jejž popíšeme takto:

> Ošacené rozložení (*dressed spread*) S_C je rozložení S, k němuž navíc přistupuje komplementární zákon (*complementary law*) Γ_S, přiřazující každému prvku $\vec{u} \in S$ nějaký prvek $\Gamma_S(\vec{u})$ komplementární množiny C.

Řekneme, že posloupnost α je prvkem (nahého) rozložení, symbolicky $\alpha \in S$, jestliže $(\forall n)(\bar{\alpha}(n) \in S)$. Na S se tedy díváme dvojím způsobem: (1) jako na systém nekonečných posloupností a (2) jako na korespondující systém jejich konečných fragmentů; odlišení je obvykle zajištěno na úrovni notace ($\alpha \in S$ vs. $\vec{u} \in S$). Každému prvku $\alpha \in S$ lze navíc snadno přiřadit posloupnost

$$\Gamma_S(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \langle \Gamma_S(\bar{\alpha}(0)), \Gamma_S(\bar{\alpha}(1)), \ldots \rangle$$

prvků z C, o níž pak můžeme hovořit jako o prvku S_C. V dalším textu budeme pokud možno vynechávat indexy zákonů Λ a Γ. Nyní několik příkladů.

Jednoduchý příklad nahého rozložení je takové rozložení, jehož zákon Λ neklade žádné omezení na přípustné posloupnosti. Tím pádem jsou podmínky (1–4) splněny automaticky a my máme před sebou tzv. rozložení univerzální, jež odpovídá Bairovu prostoru. Omezíme-li zákon Λ na libovolný výběr z množiny $\{0, 1\}$ a stanovíme-li

$$\Gamma(\langle u_1, \ldots, u_k \rangle) = \sum_{n=1}^{k} \frac{u_n}{2^n},$$

získáme generátory všech reálných čísel mezi čísly 0, 1, která mají binární rozvoj. Naznačili jsme dříve, že to z Brouwerova hlediska nemohou být všechna.[28] Tento příklad nás dovede ke speciálnímu případu Brouwerovy množiny:

> Rozložení, v němž zákon Λ přiřazuje každé přípustné posloupnosti pouze konečně mnoho následníků, se říká ROZLOŽENÍ FINITÁRNÍ (*finitary spread*) nebo také VĚJÍŘ (*fan*).

O možnost reprezentovat (všechna!) reálná čísla (nějakého intervalu) tímto finitárním způsobem se bude opírat mnoho Brouwerových pozitivních teorémů. My ale nejprve uveďme obecnější popis kontinua, kdy za C vezmeme množinu všech racionálních čísel a uvážíme nějaké jejich vyčíslení r_1, r_2, ... Zákon Λ popíšeme tak, že pro každé $n \in \mathsf{N}_0$ platí $\langle n\rangle \in S$, a platí-li $\vec{u} = \langle u_1, \ldots, u_k\rangle \in S$, pak $\vec{u}\star\langle e\rangle \in S$ tehdy a jen tehdy, když $|r_{u_k} - r_e| < \frac{1}{2^k}$. Komplementární zákon je pak stanoven jednoduše jako $\Gamma(\langle u_1, \ldots, u_k\rangle) = r_{u_k}$, čehož výsledkem je rozložení S_C generátorů (kladných) reálných čísel. Z definice rovnosti dvou generátorů (Cauchyho posloupností) $a = (a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ a $b = (b_n)_{n\in\mathsf{N}}$, rozepsané jako:

$$a = b \rightleftharpoons (\forall m \in \mathsf{N})(\exists p \in \mathsf{N})(\forall q \in \mathsf{N}, q \geq p)\left(|a_q - b_q| < \frac{1}{m}\right),$$

snadno plyne, že každé (kladné) reálné číslo lze reprezentovat nějakým výše popsaným prvkem S_C.

Definice reálného čísla skrze ekvivalenci generátorů s sebou přináší další rozštěpení ("splitsing" v Brouwerově [1923] terminologii) klasických pojmů, nejprve pojmu množiny. Reálné číslo coby množina všech ekvivalentních generátorů totiž není popsáno (generujícím) zákonem rozložení, ale (statickou) podmínkou, kterou mohou jisté předměty splnit, a upomíná tak na klasické vydělování množiny komprehenzí. Brouwer [1918, s. 3 n] v této souvislosti zavádí pojem SPECIES, která pak s ohledem na princip bludného kruhu dělí do řádů, podle toho, ve které fázi konstrukčního procesu byla vytvořena. Všechna rozložení patří mezi *species* nejnižšího řádu. K dalším komplikacím dojde s ohledem na vícero možných čtení negace.

Zde je třeba rozlišovat mezi prostým popřením $a \neq b$ rovnosti dvou generátorů, ve smyslu toho, že $a = b$ vede ke sporu, a nerovností prokázanou efektivně, nazývanou ODLOUČENOSTÍ (*Entfernung*, *apartness*) a definovanou [1919, s. 3], resp. [1925, s. 253 n], jako

$$a\#b \rightleftharpoons (\exists m, p \in \mathsf{N})(\forall q \in \mathsf{N}, q \geq p)\left(|a_q - b_q| > \frac{1}{m}\right).$$

[28] To je dáno dodatečnou podmínkou, podle níž má x binární (a obecně p-adický) rozvoj tehdy, jestliže jsme s to pro každé y tvaru $\frac{a}{2^n}$ dokázat buď, že neplatí $y > x$, nebo $y < x$. Viz Heyting [1956, s. 36].

Z $a\#b$ samozřejmě plyne $a \neq b$, ale nikoli naopak. Podobně je rozlišováno mezi pozitivním $a < b$, resp. $a \leq b$, a negativním $a \not> b$, zachycujícím pouhou nemožnost $a > b$. Z $a \not> b$ např. neplyne, že $a < b \vee a = b$, jak lze snadno ukázat vhodně zvoleným slabým protipříkladem.

V oblasti elementárních pojmů teorie množin (*species*) je podobně třeba rozlišovat negativní pojem NEPRÁZDNOSTI množiny $\neg(\forall x)(x \notin X)$ v opozici k pojmu pozitivnímu, podle něhož je množina OBYDLENÁ (*inhabited*), jestliže $(\exists x)(x \in X)$. Opět není obtížné uvést slabý protipříklad k některým klasickým tvrzením, např. že má každá neprázdná podmnožina N_0 nejmenší prvek. Množina

$$\{1\} \cup \{x \mid x = 0 \wedge A\}$$

pro nerozhodnuté tvrzení A je dokonce obydlená, její nejmenší prvek ale nelze efektivně určit. Definice množinových operací a relací $\cup$, $\cap$, $\subseteq$, $-$, $=$ zůstávají stejné, tedy alespoň co do formulace. Čteme-li $x \notin X$ ve smyslu nemožného (sporného) $x \in X$, nemusí pro $Y \subseteq X$ nutně platit

$$X = Y \cup (X - Y),$$

třeba s ohledem na protipříklad $\mathsf{Q} \subseteq \mathsf{R}$, kde $\mathsf{R} - \mathsf{Q}$ značí *species* (dokazatelně) iracionálních čísel, a kyvadlové číslo $(a_n)_{n \in \mathsf{N}}$:

$$a_n = \text{fragment čísla } \pi \text{ délky} \begin{cases} n & \text{když } (\forall m \leq n)\neg B(m), \\ k & \text{když } k \leq n \text{ a } k \text{ je kritické.} \end{cases}$$

O množinách X a $X' = Y \cup (X - Y)$ lze nicméně říci, že jsou si rovné v negativním slova smyslu, totiž že X nemůže obsahovat prvek, který nenáleží X', a *vice versa*. V tomto významu hovoří Brouwer [1924*c*, s. 246] o KONGRUENCI. Dále definuje následující pojmy:

> *Species* či *podspecies* $Y \subseteq X$, pro něž platí $X = Y \cup (X - Y)$, se nazývá ODDĚLITELNÉ (*abtrennbar*, *detachable*, *removable*). O X pak říkáme, že je ROZDĚLITELNÉ na dvě části Y a $X - Y$.

Nyní samozřejmě směřujeme k intuicionistické variantě věty o souvislosti kontinua, totiž že kromě množin R a $\emptyset$ neexistuje žádná jeho oddělitelná podmnožina. Lze také tušit, že oddělitelnost je jen jiný termín pro rozhodnutelnost množiny. Tento oddíl zakončeme definicí tzv. kanonického generátoru reálného čísla a náznakem důkazů dvou pomocných vět, které využijeme v oddílech příštích.

Poznamenali jsme, že obvyklé kanonické způsoby reprezentace, jimiž se v oboru reálných čísel tradičně snažíme umenšit nadbytek různých reprezentací téhož, v intuicionistickém kontinuu selhávají. Cauchyho definice čísla (číselného generátoru) je nicméně tak obecná, že se stále nabízejí, ba vnucují cesty, jak její představitele zkrotit, zejména co se týče rychlosti konvergence, která není v definici samé nijak specifikována. To znamená, že prvky posloupnosti předtím, než se dostanou pod požadovanou mez, mohou nabývat hodnot libovolně vzdálených od limity, a to po libovolně dlouhou dobu. — Jak jsme ukázali na jednom z příkladů, lze popsat takové (ošacené) rozložení, v němž je $(n+1)$-ní člen posloupnosti racionálních čísel od členu n vzdálen méně než o $\frac{1}{2^n}$, takže posloupnost konverguje relativně rychle. Volba dalších členů je ale neomezená, takže se zcela jistě jedná o rozložení nefinitární. To bychom chtěli v případě kanonických generátorů změnit. Základní definice je proto následující:

> Kanonickým generátorem je generátor reálného čísla tvaru $(\frac{a_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$, kde $a_n \in \mathsf{N}_0$ a platí $\left|\frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Nyní potřebujeme dokázat větu:

> Každý prvek $x \in \mathsf{R}$ má kanonický generátor.

Důkaz: Pro dané $n \in \mathsf{N}$ najdeme k $x = (x_m)_{m\in\mathsf{N}}$ nejprve z definice Cauchyho posloupnosti x_k takové, že $|x - x_k| < \frac{1}{2^{n+3}}$. Nyní specifikujeme $a_n \in \mathsf{N}_0$ takové, že $\left|x_k - \frac{a_n}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, což v součtu znamená, že

$$\left|x - \frac{a_n}{2^n}\right| < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+3}} = \frac{5}{2^3}\frac{1}{2^n}.$$

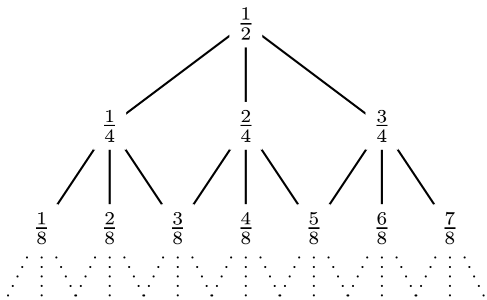
Tento vztah využijeme i v dalších důkazech. Zopakujeme-li předvedený postup pro každé $n \in \mathsf{N}$, získáme generátor $a = (\frac{a_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$ takový, že $a = x$. Navíc platí $\left|\frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}\right| < \frac{5}{2^3}\frac{1}{2^n} + \frac{5}{2^4}\frac{1}{2^n} = \frac{15}{16}\frac{1}{2^n}$, což ale již — vzhledem k tvaru porovnávaných členů posloupnosti — znamená, že $\left|\frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. To jsme chtěli dokázat. □

K pochopení předchozího i následujícího důkazu možná pomůže následující vizualizace: Konstrukce kanonického generátoru nás vybízí představovat si reálnou osu rozdělenu do políček o velikosti $\frac{1}{2^n}$ s rostoucí jemností pro každý krok n. V prvním kroku si vybereme některý z celočíselných násobků $\frac{1}{2}$, v $(n+1)$-ním kroku se můžeme pohnout přesně o $\frac{1}{2^{n+1}}$ vpravo či vlevo, případně zůstat stát. To znamená, že pro fixované x_n jsou vždy k dispozici (nejvýše) tři možnosti volby x_{n+1}. Z toho již dostáváme následující teorém:

> Každý uzavřený interval kontinua lze reprezentovat vějířem.

Důkaz: Vezměme daný interval $[a, b]$ a sestrojme kanonickou formu jeho okrajů $(\frac{a_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$, $(\frac{b_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$ jako v předchozím důkazu. Můžeme předpokládat platnost vztahu $a_n \leq b_n$, neboť kdyby $a_m > b_m$ pro nějaké m, platilo by díky $\left|b - \frac{b_m}{2^m}\right| < \frac{5}{2^3}\frac{1}{2^m}$ i $\left|b - \frac{a_m}{2^m}\right| < \frac{5}{2^3}\frac{1}{2^m}$, tj. b_m by mohlo být v konstrukci generátoru skrze a_m bez újmy na obecnosti nahrazeno. Kýžené rozložení konstruujme následovně: Platí $\langle x_1 \rangle \in S$ pro všechna

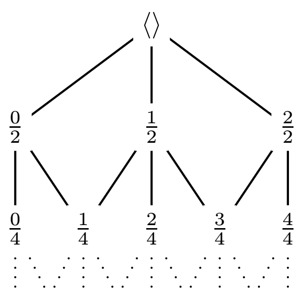
$a_1 \leq x_1 \leq b_1$; těch je evidentně pouze konečně. Volbu x_{n+1} opakujeme pro každé n, přičemž pro pevné x_n jsme, jak bylo zmíněno, omezeni nejvýše třemi možnostmi a vztahem $a_{n+1} \leq x_{n+1} \leq b_{n+1}$. Nějaká možnost zjevně existuje vždy. Komplementární zákon má podobu



Obrázek 7.1: Kanonické rozložení intervalu $[0, 1]$

$\Gamma(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) = \frac{x_n}{2^n}$. Výsledkem je ošacené rozložení S_C pro množinu C čísel tvaru $\frac{x_n}{2^n}$, kde $a_n \leq x_n \leq b_n$. Poslední vztah triviálně zajišťuje, že každý prvek S_C reprezentuje nějaký prvek v $[a, b]$. Máme-li naopak prvek $x \in [a, b]$, můžeme předpokládat jako dříve, že má kanonický rozvoj $(\frac{x_n}{2^n})_{n \in \mathsf{N}}$ s podmínkou $a_n \leq x_n \leq b_n$. Tím pádem koinciduje s nějakým prvkem S_C. $\square$

Uvážíme-li pro ilustraci speciální případ intervalu $[0, 1]$, máme před sebou ternární rozložení, v němž je uzlu $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ pro $0 < x_n < 2^n$ přiřazena trojice uzlů $\langle x_1, \ldots, x_n, 2x_n - 1 \rangle$, $\langle x_1, \ldots, x_n, 2x_n \rangle$, $\langle x_1, \ldots, x_n, 2x_n + 1 \rangle$. Tuto situaci zachycuje obrázek 7.1. Ve skutečnosti má ale výše popsané



Obrázek 7.2: Jiné kanonické rozložení intervalu $[0, 1]$

rozložení ještě okraje odpovídající číslům 0 a 1, z nichž vede vždy po dvou hranách k uzlům ohodnoceným $\frac{0}{2^n}$ a $\frac{1}{2^n}$, resp. $\frac{2^n - 1}{2^n}$ a $\frac{2^n}{2^n}$; v kořeni stromu je prázdná posloupnost $\langle \rangle$. To zachycuje obrázek 7.2. Dříve uvedený ternární vějíř by mohl zjevně k reprezentaci intervalu sloužit také, popsaná konstrukce by ale musela být revidována.[29]

7.5 Princip spojitosti a závorová indukce

V základech intuicionistické matematiky stojí několik silných principů, které Brouwer objevil a aplikoval. My se zde omezíme na dva nejelementárnější, a to princip spojitosti a speciální princip indukce na stromech, tzv. indukce závorové. Princip spojitosti, jemuž se také někdy říká princip Brouwerův, jsme přitom už částečně poznali a při té příležitosti poznamenali, že se v něm zvláště výrazně odráží Brouwerovo rozhodnutí pracovat s Cantorovými libovolnými posloupnostmi ‘jinak’, totiž jako posloupnostmi výběrovými. Není tedy divu, že právě na tomto pojmu leží tíha či zásluha totálního rozchodu intuicionismu s klasickou matematikou, tedy nikoli jen pouhého zdržení se jistých nespolehlivých úsudků, jak se tomu děje v některých odnožích konstruktivismu.

Princip spojitosti, explicitně formulovaný Heytingem [1930*b*], vyjadřuje základní charakteristiku výběrových posloupností, totiž že se s nimi bude pracovat vždy na bázi nějakého jejich konečného úseku. Zavedeme-li značení $\alpha \in \vec{u}$ ve významu toho, že má posloupnost α počáteční úsek $\vec{u}$, neboli konvenci

$$\alpha \in \vec{u} \rightleftharpoons (\exists n)(\bar{\alpha}(n) = \vec{u}),$$

můžeme PRINCIP SPOJITOSTI formulovat třeba takto:

$$\mathsf{CP} \quad (\forall\alpha)(\exists n)R(\alpha, n) \rightarrow (\forall\alpha)(\exists m, n)(\forall\beta \in \bar{\alpha}(m))R(\beta, n),$$ [30]

ve smyslu tvrzení, že přiřazuje-li nějaký vztah R každé výběrové posloupnosti (nějakého rozložení) nějaké číslo, pak k dané posloupnosti α existuje nějaký její počáteční úsek $\bar{\alpha}(m)$, na jehož základě se tak děje, tj. všechny posloupnosti β téhož počátečního úseku jsou ve vztahu R k témuž číslu.

Nejprve se nabízí vysvětlit název uvažovaného principu, což je relativně přímočaré. Zobrazení $f : X_1 \to X_2$ topologického prostoru $\langle X_1, T_1\rangle$ do topologického prostoru $\langle X_2, T_2\rangle$ nazýváme SPOJITÉ V BODĚ $x \in X_1$ právě tehdy, když ke každému okolí $V(f(x)) \in T_2$ existuje okolí $U(x) \in T_1$ takové, že $f[U(x)] \subseteq V(f(x))$. O f říkáme, že je spojitá na prostoru $\langle X, T\rangle$, jestliže je spojitá v každém jeho bodě. — Uvažujeme-li nyní funkci z topologického prostoru A, daného nějakým rozložením,

[29] Definice kanonického generátoru a oba důkazy byly převzaty z Heyting [1956, s. 41 nn]. V modifikaci je lze najít in Dummett [1977, s. 84 nn].

[30] Principu v této verzi, která odpovídá původní Heytingově formulaci, se někdy říká princip lokální spojitosti, čímž se odlišuje od verzí obecnějších. O nich a jejich vztazích lze získat přehled in Troelstra & van Dalen [1988, s. 206 nn].

např. Bairovým prostorem N^{N}, je zřejmé, že o okolích jeho prvku α můžeme hovořit v slovníku přirozených čísel, kdy každé n určuje množinu prvků β společného počátečního úseku $\bar{\alpha}(n)$, což jsou všechna β taková, že $d(\alpha, \beta) < \frac{1}{2^n}$. Uvažujeme-li speciální případ funkcí z A do N, je požadovaná spojitost takové funkce f dána jednoduše tím, že ke každému $f(\alpha) = n \in \mathsf{N}$ dokážeme najít m takové, že $f(\beta) = n$ pro každé $\beta \in \bar{\alpha}(m)$, což ale není nic jiného, nežli obsah CP pro jednoznačné (funkcionální) R. Modifikací této úvahy dostaneme větu:

Každá totální funkce $f : \mathsf{R} \to \mathsf{N}$ je spojitá.

Důkaz: Modifikace je založena na možnosti transformovat prvky N^{N} na prvky R způsobem g, který zaručuje spojitost funkce f na R za předpokladu, že je $g \circ f$ spojitá na N^{N}. Jelikož z předvedené úvahy plyne, že funkce $g \circ f : \mathsf{N}^{\mathsf{N}} \to \mathsf{N}$ spojitá je, je spojitá i f.[31] □

To je první a nejjednodušší případ pozitivního tvrzení intuicionistické matematiky, které je v rozporu s matematikou klasickou. Jelikož kontinuum R tvoří souvislý topologický prostor, tj. nelze je rozdělit na dvě disjunktní otevřené neprázdné (obydlené) množiny,[32] dostáváme navíc větu:

Každá totální funkce $f : \mathsf{R} \to \mathsf{N}$ je konstantní.

Důkaz: Hodnoty funkce f v N jsou určeny otevřenými okolími v R, tj. počátečními úseky daných posloupností. Kdyby tedy f konstantní nebyla, bylo by možné rozložit R do systému nejméně dvou otevřených disjunktních neprázdných množin podle různých hodnot, kterých f v N nabývá. Jelikož sjednocením množiny otevřených množin je opět otevřená množina, získali bychom tak rozklad kontinua na dvě neprázdné obydlené množiny, což je v rozporu s předpokladem. □

Jako korolár k tomuto tvrzení zároveň dostáváme fakt, že je R nerozdělitelné na dvě části A, $\mathsf{R} - A$ jiné než R a $\emptyset$, neboť takovéto rozdělení by s sebou neslo existenci totální funkce $f : \mathsf{R} \to \{0, 1\}$ takové, že

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x \in A, \\ 0 & \text{když } x \notin A, \end{cases}$$

která není konstantní. Toto vše mělo ale spíše ilustrativní význam, neboť jsme jednak některé kroky důkazů pouze naznačili, jednak nevíme,

[31] Detaily in Bridges & Richman [1987, kap. 5].

[32] Bairův a Cantorův prostor jsou ovšem TOTÁLNĚ NESOUVISLÉ, tj. nemají žádné souvislé podmnožiny kromě množiny prázdné a všech jednoprvkových.

zda některý z předpokladů není intuicionisticky neakceptovatelný. Uvedená tvrzení dostaneme záhy jako speciální případy silnější verze věty o spojitosti funkcí, totiž z R do R, jejíž důkaz povedeme výhradně podle Brouwerových představ.

K tomu je zapotřebí druhý významný princip, s nímž se Brouwer potýkal mnoho let, ačkoli se z klasického hlediska jedná o svého druhu ‘trivialitu’, totiž konverzi Königova lemmatu a zobecněný princip indukce pro stromy, tj. Brouwerova rozložení. Důvodem byla právě snaha podat skutečně ‘intuitivní’ důkaz tohoto centrálního výsledku. — Jak víme, Königovo lemma je tvrzení, podle něhož má konečně se větvící strom v případě nekonečně mnoha uzlů nekonečnou větev. To lze eventuálně formulovat jako implikaci:

> Neexistuje-li horní mez na délku větví konečně se větvícího stromu, je alespoň jedna z jeho větví nekonečná.

Jak jsme rovněž zmínili, je toto tvrzení přes značnou míru evidence z hlediska efektivní, a tedy i intuicionistické matematiky nezdůvodněné, neboť nám v obecném případě neposkytuje návod, jak příslušnou nekonečnou větev zkonstruovat, tj. nedává nám vhodný substituent N pro postulované $(\exists x)A(x)$. Provedeme-li však klasickou konverzi lemmatu, získáme implikaci:

> Jestliže konečně se větvící strom neobsahuje nekonečnou větev, tj. má-li každá jeho větev nějakou horní mez, existuje jedna horní mez společná pro všechny jeho větve.

Ta se z efektivního hlediska zdá být uspokojivá, neboť jsou-li všechny větve konečně se větvícího stromu konečné, není problém změřit jejich délky a vybrat maximum. Chceme-li nyní přenést tento tvar Königova lemmatu do Brouwerova pojmového rámce, tj. nahradit pojem konečně větvícího se stromu pojmem vějíře, narazíme nejprve na problém, že vějíř byl coby speciální případ rozložení od počátku definován jako nekonečný strom, tj. všechny jeho prvky (větve) jsou nekonečné. Proto je zapotřebí zavést několik pomocných rozlišení:

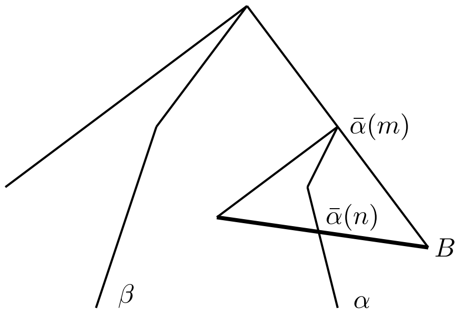
> *Species* B uzlů rozložení S se nazývá ZÁVOROU UZLU $\vec{u} \in S$ (*bar*), jestliže pro každé $\alpha \in S$ takové, že $\alpha \in \vec{u}$, platí, že $\bar{\alpha}(n) \in B$ pro nějaké $n \in \mathsf{N}$. Alternativně říkáme, že *species* B uzel $\vec{u}$ UZAVÍRÁ (*bars*). Jestliže *species* B uzavírá uzel $\langle\rangle$, říkáme, že je B ZÁVOROU ROZLOŽENÍ.

Především pro větší názornost můžeme zavést další pomocné pojmy:

> CESTAMI rozložení S budeme rozumět jeho prvky jak ve smyslu α, β, …, tj. cesty nekonečné, tak ve smyslu $\vec{u}$, $\vec{v}$, …, tj. cesty

konečné. Řekneme, že *species* B PROTÍNÁ cestu c (v bodě n), jestliže v něm leží nějaký její počáteční fragment (délky $\leq n$). Cesta c MÍJÍ *species* B, jestliže v něm neleží žádný její fragment.

Tyto situace jsou ilustrovány v obrázku 7.3, v němž cesta α protíná *species* B v bodě n, cesty $\bar{\alpha}(m)$ a β je míjí a B sama je závorou uzlu $\bar{\alpha}(m)$, nikoli celého rozložení. Z toho je především zřejmé, že závora rozložení



Obrázek 7.3: Závora (uzlu) rozložení

protíná všechny jeho nekonečné cesty, závora uzlu všechny nekonečné cesty, které jím procházejí. Původní, nekonstruktivní varianta Königova lemmatu se v této poloobrazné řeči rovná tvrzení, že *species* B vějíře, jež míjí konečné cesty libovolných konečných délek, míjí i nějaká cesta nekonečná. Konstruktivní varianta lemmatu pak vypadá následovně:

$$\mathsf{FT} \quad (\forall\alpha)(\exists n)(\bar{\alpha}(n) \in B) \rightarrow (\exists m)(\forall\alpha)(\exists n \leq m)(\bar{\alpha}(n) \in B),$$

a obvykle nese název VĚTA O VĚJÍŘI (*fan theorem*), kdy předpokládáme, že se kvantifikátor $(\forall\alpha)$ implicitně vztahuje k prvkům nějakého vějíře a B je oddělitelné (rozhodnutelné) *species.*[33] Všimněme si, že tvrzení můžeme také formulovat tak, že pro závoru B vějíře existuje bod m, v němž byla závorou protnuta každá cesta této a větší délky. Tím pádem lze ale obecnou závoru vějíře nahradit nějakou závorou konečnou, což se rovná tvrzení, že příslušný vějíř představuje kompaktní prostor, neboť ke každému pokrytí (systému uzlů reprezentujících otevřené množiny a protínajících každou nekonečnou cestu) existuje konečné podpokrytí! Tím je dodatečně osvětleno, proč je Cantorův prostor (2^{N}) na rozdíl od prostoru Bairova (N^{N}) kompaktní. Lokální kompaktnost R plyne z výše ukázané reprezentovatelnosti uzavřeného intervalu vějířem.

[33] Existují opět různé varianty věty o vějíři s různými dodatečnými požadavky, jimiž se ale zabývat nebudeme. Podrobnosti in Troelstra & van Dalen [1988, s. 217 nn]. Na těchto podmínkách ovšem závisí kompatibilita věty o vějíři s dalšími principy konstruktivní matematiky, např. Churchovou tezí. Viz také oddíl 7.9.

Věta o vějíři se (zatím pod názvem "hlavní vlastnost konečných množin") objevuje v Brouwerově článku *Beweis, dass jede volle Funktion gleichmässig stetig ist* [1924*b*], a to jako produkt obecnějšího teorému, jenž je znám jako věta o závoře (*bar theorem*). Oba názvy jsou ovšem až poválečné, z článku [1954]. Obsah věty tvoří zdůvodnění specifické verze matematické indukce na rozloženích (stromech), přičemž jak zmíněný článek [1924*b*], tak jeho rozpracování [1927] pro *Mathematische Annalen* svědčí o tom, že jí v hierarchii intuicionistických principů přísluší mimořádné místo. Brouwerovy opakované a velmi originální způsoby důkazu věty[34] již samy poukazují k faktu, že se zde, stejně jako o několik desítek let dříve v případě rekurzivního teorému, naprosto změnila pravidla hry. Stejně jako u rekurzivního teorému je navíc předmětem důkazu něco velmi elementárního, totiž oprávněnost induktivního zdůvodnění. To by na jednu stranu mohlo vést k závěru, že jako u Dedekinda a Frega, kteří chtěli rekurzivní definici nahradit definicí explicitní, nejsou Brouwerova východiska čistě konstruktivní. Brouwerův delší argument je nicméně důkazově-teoretický, má tedy stejný základ jako Hilbertova idea metamatematiky,[35] ovšem v rozšíření o transfinitní metody Gentzenovy, jinými slovy: balancuje na hraně toho, co se obvykle počítá ke konstruktivním metodám. Toto téma ještě rozvedeme v příští kapitole.

Obsahem VĚTY O ZÁVOŘE je v její intenzionální formulaci princip, podle něhož z toho, že prvky závory nějakého rozložení S mají vlastnost A, plyne, že ji má také prázdná posloupnost $\langle\rangle$, jestliže je A dědičná směrem ke kořeni. Dědičností vlastnosti zde rozumíme okolnost, podle níž z toho, že ji mají všichni bezprostřední následníci uzlu, plyne, že ji má i on. Úhrnem tedy dostáváme:

$$\mathsf{BI} \quad B \subseteq A \wedge [(\forall k)(\vec{u} \star \langle k\rangle \in A) \to \vec{u} \in A] \to \langle\rangle \in A,$$

kde B je závora, kvantifikátor $(\forall k)$ je přirozeně omezen těmi uzly, které přicházejí v úvahu, a na B jsou kladené případné další požadavky.[36] Úsudkový princip, který je v této formuli vyjádřen, se nazývá ZÁVOROVÁ INDUKCE (*bar induction*) a obvykle se mezi ním a teorémem, který tvrdí jeho platnost (*bar theorem*), nerozlišuje. Nejprve ukážeme, jak lze BI použít při důkazu FT.

[34] Různé verze argumentu lze kromě zmíněných článků [1924*b*] a [1927] najít v komentáři k článku [1924*a*], Brouwerových berlínských přednáškách [1992] z roku 1927 a konečně článku [1954].

[35] Není bez zajímavosti, že podle Brouwerova [1928, s. 375 n] vyjádření pochází rozlišení formalistické matematiky a (meta)matematiky, která ji 'intuitivně' zkoumá, tedy jakési "matematiky druhého řádu", z jeho pera, a bylo tak i roku 1909 sděleno v ústní konverzaci Hilbertovi, který je, podle Brouwera, postupně dovedl *ad absurdum*.

[36] Tato omezení jsou významná a záleží na nich kompatibilita věty s dalšími intuicionistickými principy. Z nedostatku prostoru čtenáře odkazuji na knihy Troelstra & van Dalen [1988, s. 229 nn] a Dummett [1977, s. 54 nn]. Brouwer ovšem uvažuje princip pouze ve výše uvedené holé formě.

Důkaz: Mějme závoru B vějíře S, tj. platí $(\forall\alpha)(\exists n)(\bar{\alpha}(n) \in B)$, a zvolme A tak, že

$$\vec{u} \in A \rightleftharpoons (\exists m)(\forall\alpha \in \vec{u})(\exists n \leq m)(\bar{\alpha}(n) \in B).$$

Je zřejmé, že $B \subseteq A$. Dokážeme-li nyní dědičnost, dostaneme $\langle\rangle \in A$, a tedy i požadovaný závěr FT. Předpokládejme tedy, že $(\forall k)(\vec{u} \star \langle k \rangle \in A)$ v omezení na $\vec{u} \star \langle k \rangle$ z S. Pro každé k nyní existuje nějaké $m(k)$ takové, že $(\forall\alpha \in \vec{u} \star \langle k \rangle)(\exists n \leq m(k))(\bar{\alpha}(n) \in B)$. Těchto k, a tedy i $m(k)$, je ale jen konečně, lze tedy vybrat jejich maximum p, pro něž již platí $(\forall\alpha \in \vec{u})(\exists n \leq p)(\bar{\alpha}(n) \in B)$. To znamená, že $\vec{u} \in A$, a my jsme hotovi. Všimněme si, že jsme při definici $m(k)$ použili (velmi slabou a věcně nepodstatnou) verzi axiomu výběru, což má v tomto případě hlavně didaktické důvody. □

Podstata Brouwerova důkazu samotné věty o závoře je důkazově-teoretická, přesně v duchu intuicionistické interpretace implikace, vyskytující se v BI:

"$A \to B$" platí, jsme-li důkaz A s to převést na důkaz B.

Nejprve je ovšem nutno vyjasnit, co je to důkaz. Podle Brouwera se jedná o strukturu, která má — stejně jako rozložení — charakter stromu a může být, v rozporu s finitistickou doktrínou Hilbertovou (alespoň v některém z jejích čtení) a tradicí založenou Fregem, i nekonečná. Obrátíme-li znázorňování struktury stromů tak, jak je to přirozené, tj. kořenem dolů s větvemi rostoucími nahoru, můžeme odpovídajícím způsobem zaznamenávat i úsudková pravidla, přičemž kandidátem na prototyp pravidla v uvažovaném rozšířeném smyslu bude

$$\frac{A(1), A(2), \ldots}{(\forall x)A(x)},$$

jímž se coby tzv. ω-PRAVIDLEM budeme ještě zabývat později. Z toho již přirozeně plyne koncepce důkazu jako nekonečného stromu, s uzly odpovídajícími nekonečně mnoha premisám $A(1)$, $A(2)$, ... Nutno ale předem podotknout, že v Brouwerově pojetí jsou na tyto premisy kladeny dodatečné požadavky efektivní zvládnutelnosti, tj. nemůže se jednat o nekonečnou skupinu zcela náhodnou. K tomu se ještě vyjádříme později v souvislosti s interpretacemi Gödelova důkazu. Významným rysem ω-pravidla oproti dosud uvažovaným přechodům je také jeho specificky aritmetický charakter.

V aplikaci Brouwerova pojetí důkazu na BI je nyní třeba ukázat, jak z toho, že je B závorou rozložení dědičné vlastnosti A, dostat důkaz tvrzení, že $\langle\rangle \in A$. Jelikož Brouwerova argumentace není ani zvláště průhledná, ani přesvědčivá a celý argument je zpravidla uváděn jako kuriozita, případně jako předchůdce Gentzenových transfinitních důkazových metod, zmíníme pouze některé jeho klíčové body. Nejprve zaveďme zkratku $\vec{u} \hookrightarrow B$ ve významu "B je závora $\vec{u}$". Nyní předpokládejme, že máme důkaz $\langle\rangle \hookrightarrow B$, tj. faktu, že je B závorou rozložení. Podle Brouwera v něm mohly být použity pouze inference trojího typu, totiž

(η) $\dfrac{\vec{u} \in B}{\vec{u} \hookrightarrow B}$,

(ζ) $\dfrac{\vec{u} \hookrightarrow B}{\vec{u} \star \langle k\rangle \hookrightarrow B}$,

$(\mathcal{F})$ $\dfrac{\vec{u} \star \langle 0\rangle \hookrightarrow B, \vec{u} \star \langle 1\rangle \hookrightarrow B, \ldots}{\vec{u} \hookrightarrow B}$,

kdy v inferencích typu $(\mathcal{F})$ opět předpokládáme, že se v premisách vyskytují uzávěry všech přímých následníků uzlu $\vec{u}$, tj. uvažujeme pouze relevantní případy formulí $\vec{u} \star \langle k\rangle \hookrightarrow B$.

V dalším kroku Brouwer argumentuje, že všechny inference typu (ζ) jsou z důkazu eliminovatelné, a to indukcí podle délky uzlu, k důkazu jehož uzavřenosti byly použity: Závěrem (kořenem) důkazu je tvrzení $\langle\rangle \hookrightarrow B$. Na ně lze (v netriviálním případě $\langle\rangle \notin B$) usoudit pouze aplikací pravidla typu $(\mathcal{F})$ na tvrzení již dokázaná. To ale znamená, že všechna tvrzení $\langle k\rangle \hookrightarrow B$ pro k libovolné přípustné musela být nějak dokázána bez použití pravidla (ζ). Induktivním opakováním tohoto argumentu pro posloupnosti délky 2, 3, … dokážeme eliminovat aplikaci pravidla (ζ) z celého důkazu, v němž se pak tedy vyskytují pouze inference (η) a $(\mathcal{F})$. Jelikož podle předpokladu platí $B \subseteq A$, můžeme nyní každou inferenci (η) v důkazu $\langle\rangle \hookrightarrow B$ nahradit přechodem

$$\frac{\vec{u} \in B}{\vec{u} \in A},$$

tj. zcela korektně přepíšeme $\vec{u} \hookrightarrow B$ na $\vec{u} \in A$. Každou $(\mathcal{F})$-inferenci přepíšeme dále na

$$\frac{\vec{u} \star \langle 0\rangle \in A, \vec{u} \star \langle 1\rangle \in A, \ldots}{\vec{u} \in A},$$

což je korektní díky předpokladu dědičnosti A. Jelikož se jiné nežli uvedené inference podle předpokladu v důkazu $\langle\rangle \hookrightarrow B$ nevyskytují, získali jsme touto transformací korektní odvození tvrzení $\langle\rangle \in A$.[37]

[37] Důkaz v této formě lze najít in Dummett [1977, s. 68 nn] a v principu také in Heyting [1956, s. 43 n]. Podkladem jsou zde Brouwerovy články [1927] a [1954].

Díváme-li se na větu o závoře jako na implikaci, v jejímž antecedentu se vyskytuje pouze tvrzení “B je závora” a v konsekventu (mírně modifikované) zbylé podmínky, lze ji také chápat jako popis dvou způsobů definice množiny uzlů a tvrzení jejich ekvivalence (druhá implikace je triviální). První množina, značme ji C, je tvořena těmi uzly rozložení, které jsou uzavřeny závorou B, ale zatím ji míjí nebo ji právě protnuly. Na názorné úrovni jim odpovídá jednoduše strom pod závorou B včetně. Druhá je popsána induktivně jako sjednocení D systému množin B_n, kde: (1) B_0 obsahuje ty uzly, které jsou v B, (2) B_{n+1} obsahuje uzel $\vec{u}$, jestliže $\vec{u} \star \langle k \rangle \in B_n$ pro každé k přípustné. Pokud se, jako Brouwer, nějak přesvědčíme, že C a D koincidují a že v případě vějíře lze D navíc získat konečně mnoha iteracemi B_n, musí existovat nějaké m takové, že $\langle\rangle \in B_m$, což vede přímo k důkazu věty o vějíři, tj. tvrzení, že každá nekonečná cesta vějíře protne B nejpozději v bodě m. V případě obecného rozložení nelze D získat konečně mnoha kroky a k důkazu věty o závoře je zapotřebí užít transfinitní (leč spočetné) ordinály, jak to později udělá Gentzen ve svých důkazech bezespornosti aritmetiky.[38]

7.6 Brouwerovo kontinuum

Brouwer byl na větu o závoře a její aplikaci ve větě o vějíři velmi pyšný, což je pochopitelné, neboť umožňuje odvození silných intuicionistických teorémů, nekompatibilních s matematikou klasickou. Dalším důvodem mohl být fakt, že jeho důkaz věty o vějíři [1924*b*] předcházel důkazu Königova lemmatu [1926], a mohl tak být intuicionistům dokladem, že jejich výsledky nevznikají pouhým osekáváním, případně deformací etablovaných výsledků klasické matematiky. Sloučíme-li nyní princip spojitosti a větu o vějíři do poučky, které se někdy v literatuře, viz třeba Heyting [1956, s. 42], také říká věta o vějíři, získáme podstatně silnější tvrzení:

$$\mathsf{FC} \quad (\forall\alpha)(\exists n)R(\alpha,n) \rightarrow (\exists m)(\forall\alpha)(\exists n)(\forall\beta \in \overline{\alpha}(m))R(\beta,n),$$

v němž implicitně kvantifikujeme přes prvky α, β, ... vějíře. Věta říká, že k relaci R, která každý prvek α vějíře spojuje s nějakým přirozeným číslem nebo čísly, existuje m takové, že lze některé z takto přiřazených čísel vypočíst již na základě úseku délky m, a to pro libovolné α. Bez zbytečných okolků nyní přejděme k důkazu (lokální verze) dlouho ohlašované VĚTY O SPOJITOSTI TOTÁLNÍ FUNKCE NA KONTINUU:

> Funkce $f : \mathsf{R} \rightarrow \mathsf{R}$ definovaná v každém bodě uzavřeného intervalu je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

[38] Uvedené čtení důkazu, spolu s četnými odkazy na Brouwerovy původní texty, propaguje Kleene & Vesley [1965, s. 43 nn]. Užitečné poznámky poskytují Bridges & Richman [1987, s. 110 nn].

Důkaz: Nejprve ale ještě pro jistotu oprašme definici stejnoměrné spojitosti, která v aplikaci na metrické prostory popisuje zobrazení $f : X_1 \to X_2$ prostoru $\langle X_1, d_1\rangle$ do prostoru $\langle X_2, d_2\rangle$ jako STEJNOMĚRNĚ SPOJITÉ, jestliže

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in X_1)[d_1(x_1, x_2) < \delta \to d_2(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon].$$

Nyní již k samotnému důkazu. Podle dříve dokázaného tvrzení víme, že uzavřený interval lze reprezentovat nějakým vějířem S_C. Uvažujme jeho nahou verzi S. Jejím prvkům α funkce f přiřazuje nějaký generátor a v kanonickém tvaru $(\frac{a_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$. Pro fixní p definujme vztah R jako $F(\alpha) = a_p$, tj. jako zobrazení S do N. Podle FC musí existovat $m(p) \in \mathsf{N}$ takové, že pro každé $\alpha \in S$ lze hodnotu $F(\alpha) = a_p$ vypočíst na základě úseku $\bar{\alpha}(m(p))$. Máme-li nyní nějaká $\beta, \gamma \in S$ taková, že $d(\beta, \gamma) < \frac{1}{2^{m(p)}}$, shodují se z definice d na úseku délky $m(p)$, což znamená, že platí $F(\beta) = F(\gamma)$. Jelikož podle naší konstrukce kanonického generátoru platí pro $a = (\frac{a_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$ vztah $d(a, \frac{a_n}{2^n}) < \frac{5}{2^3}\frac{1}{2^n}$, dostáváme pro $f(\beta) = b = (\frac{b_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$ a $f(\gamma) = c = (\frac{c_n}{2^n})_{n\in\mathsf{N}}$ a dokázané $b_p = c_p$ vztah $d(b, c) < \frac{5}{4}\frac{1}{2^p}$, což ale znamená, že jsme hotovi, neboť pro dané p dokážeme najít $m(p)$ tak, že z $d(\beta, \gamma) < \frac{1}{2^{m(p)}}$ plyne $d(f(\beta), f(\gamma)) < \frac{5}{4}\frac{1}{2^p}$ pro libovolné β, $\gamma \in S$. □

Z věty o spojitosti totálních funkcí dostáváme jako korolár větu, že každé oddělitelné *podspecies* uzavřeného intervalu je buďto prázdné, nebo identické s intervalem samotným, a to výše naznačeným způsobem, totiž uvažováním příslušné charakteristické funkce a postřehem, že jinak nemůže být spojitá. Intuicionistické kontinuum, jak dokázal Brouwer [1927, s. 66], je takto nerozdělitelné, tedy alespoň v tom smyslu, který onomu pojmu dal. — Podrobné či alespoň podrobnější předvedení některých Brouwerových pojmů a výsledků v předchozích oddílech snad dostatečně ukázalo, že se v jeho intuicionismu skrývá na jednu stranu více, než má za to čtenář, jenž se s jeho principy seznámil především skrze Heytingovo oslabení klasické logiky, na druhou stranu méně, než si obvykle myslí Brouwerovi stoupenci.

Weyl, jenž po seznámení s Brouwerem oficiálně opustil svou vlastní koncepci predikativní analýzy, podanou ve spisu *Kontinuum* [1918],[39] a slavnostně se manifestem *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* [1921] připojil k intuicionistickému táboru, neboť [1921, s. 158] “Brouwer — to je revoluce!”, popsal Brouwerovo kontinuum neobyčejně barvitě jako “médium svobodného vzniku” (*Medium freien Werdens*),

[39] Stručný rozbor Weylova počinu lze najít in Mancosu [1998]. Podrobnou studií je Feferman [1988] a Fefermanova a Scholzova kapitola in Hendricks *et al.* [2000].

pohybu a změny. Je to tekoucí kaše (*fliessender Brei*), z níž jsou jednotlivé body vybírány, ona se z nich ale neskládá, jak se domnívá atomistická koncepce [1921, s. 177]: "'bod' je idea *limity* dělení rozkládajícího se *ad infinitum*", a jeho existence, resp. existence všech bodů přímky, je potenciálního, nikoli aktuálního charakteru. A dále [1921, s. 173]: "Pravé kontinuum je něco souvislého v sobě a nemůže být rozděleno na odlišné části; to odporuje jeho povaze." Vedle předpovězené spojitosti každé funkce na kontinuu tu tak máme i Aristotelovu původní nauku o spojitosti kontinua, podle níž dvě věci nemohou být souvislé, jestliže hranice, jíž se dotýkají, není jedna a tatáž.

To vše jsou ale jen slova, která mohou být snad ještě ospravedlnitelná v Aristotelově 'naivní', preteoretické dikci, nikoli však na pozadí Brouwerových technických definicí, které vycházejí z definicí Cantorových, především tedy z jeho pojmu posloupnosti a množiny, při důvtipné změně způsobů, jak s nimi zacházet. Tyto způsoby jsou nicméně stále způsoby atomistického kontinua, jež se pokoušíme učinit spojité zmrzačením jistých rozdílů. Z teoreticko-filosofického hlediska je proto odchylka od Cantora nepatrná, neboť vše zůstává ve vzduchu metafyzických postulátů a subjektivních rozhodnutí. Z hlediska matematicko-praktického má potom Cantorova teorie jasně navrch, neboť přes původní proklamace o nezávislosti množin na jazyce respektuje jednoduchá inferenční pravidla, a činí tak příslušnou oblast do velké míry přehlednou a kontrolovatelnou.

To samozřejmě nemění nic na dříve zmíněné fiktivnosti některých partií Cantorova ráje, pramenící z toho, že nám chybí specifikace jmen jeho obyvatel, tj. potenciálních reprezentací, a s nimi spojená kritéria identity. Cantor avšak alespoň nepřímo, skrze užité úsudkové principy (vyloučený třetí), předstírá, že jeho svět nějaké objektivní obyvatele má, tj. že existuje obor splňující jím navrženou sadu postulátů. K tomu v důsledku potřebuje výpomoc Hilbertova axiomatismu a jeho implicitní definice. Zdá se, že to vše má na mysli také Wittgenstein [1983, s. 33, § 174], když říká:

> Teorie množin staví na prázdném symbolismu, a tedy nesmyslu. Jako kdyby v logice existovalo něco, co nemůžeme vědět, co ale může být věděno.

Naše pointa, na rozdíl od té Wittgensteinovy, spočívá v tom, že "prázdný symbolismus" je pořád přece jen symbolismus, a tudíž lepší než jakákoli mentální gymnastika. Brouwerova systematická nechuť podat jakékoli závazné pravidlo se nám v tomto kontextu jeví jakožto větší ze dvou zel, neboť je nakonec cestou *difúzních* předmětných oborů a komplikovaných úsudkových principů, které jsou pro svůj *ad hoc* charakter obtížně, pokud vůbec následovatelné. Intuicionistická matematika se tak svým pohrdáním pro jazyk a zálibou v mentálních konstrukcích stává intelektuálním dobrodružstvím několika mála matematiků, nikoli veřejným statkem, v intencích rozdílu mezi všeobecně oblíbenou hrou s jasnými, transparentními pravidly (šachy) a lokálním rituálem, vázaným na nějaký užší typ spřízněnosti účastníků.

Rozdíl potenciálního a aktuálního nekonečna je přitom příliš vágní na to, aby mohl sám o sobě osvětlit specifika klasického a konstruktivního přístupu k matematice, natož pak aby zachytil rozdíly spojitého a diskrétního. Zcela nezávisle na tom, co o nekonečnu říkají filosofové minulosti, platí, že nekonečno známe pouze skrze jeho konečný popis. To z něho ovšem nedělá nekonečno nedokončené, potenciální, neboť v řeči běžně užíváme a zjevně potřebujeme užívat odkaz k (aktualizovanému) *celku* předmětů nějakého typu, tedy např. ke *všem* bodům přímky (zkonstruovatelným pravítkem a kružítkem), ke *všem* přirozeným číslům (získatelným iterovaným přičítáním jedničky) apod. Jejich totality proto v tomto logicko-sémantickém smyslu existují, resp. neexistují stejně jako empirické předměty, totiž coby možné — a proto již abstraktní — předměty řeči.

Rozdíl možných přístupů k nekonečnu a potažmo matematice samé tak nemůže spočívat v pravidlech, jimiž je nekonečná totalita definována, ale v inferencích, které si nad nimi povolíme, např. v principu vyloučeného třetího. To naznačuje, že matematické a možná i jiné pojmy jsou inferenčně, nikoli ontologicky podmíněné, což je zdaleka nejradikálnější verze jazykového holismu, k níž se ještě vrátíme v úvahách nad Hilbertovým axiomatismem. S inferenční podmíněností přirozeně souvisí i podmíněnost pragmatická.

V tomto aspektu zůstává ovšem Brouwerův postoj a jeho přínos k dalšímu vývoji značně ambivalentní. Jeho metoda slabých protipříkladů např. poukazuje na některé neefektivní rysy klasické matematiky a logiky: jsou nespolehlivé nikoli ve smyslu sporu, ale praktické neověřitelnosti. Tento vhled však zůstává omezen výhradně na první fázi Brouwerova myšlení, před ustanovením metody tvůrčího subjektu, v níž byly protipříklady pomocí zákonných posloupností nahrazeny protipříklady operujícími s posloupnostmi volnými. Veden mentalistickým bludem se takto Brouwer dobrovolně rozhodl sledovat cestu, která musela být atraktivní pro člověka jeho talentu, nemohla ale právě pro obecnou neuchopitelnost vést k úspěchu. Brouwerova filosofie tak přestala být revolucí a stala se neúspěšným pučem.[40] Alternativou byla přitom od

[40] Užití revoluční terminologie v souvislosti s Brouwerovým intuicionismem mělo zajímavý vývoj. První podnět je bezesporu Weylův ("Brouwer —- das ist die Revolution"). Na základě tohoto výroku hovořil Ramsey [1925, s. 219] o Brouwerovi a Weylovi jako o "bolševické hrozbě" ("Bolshevik menace"), což mu zase na oplátku vyneslo od Wittgensteina [1994*b*, s. 473] označení "buržoazní filosof". O puči hovoří v souvislosti s Brouwerem a v reakci na Weylova slova Hilbert [1922, s. 160]: "Brouwer

počátku a zcela přirozeně matematika zákonných, jazykem uchopitelných posloupností a možností naší práce s nimi, již proto, že se v ní nabízela spolupráce s úspěšně se rozvíjejícími partiemi logiky, kterou však Brouwer *a priori*, a tedy dogmaticky odmítal. Této možnosti se později chopili Skolem a Gödel, a ve spolupráci s dalšími praktičtěji orientovanými logiky, jako byli Church a Turing, tak umožnili vznik teorie vyčíslitelnosti a moderní informatiky.

Není přitom divu, že Brouwerův argument, jenž vedl k odmítnutí cesty zákonné matematiky, a jímž tedy anabáze intuicionistické matematiky započala, byl převzat přímo od Cantora: čísla definovaná zákonem nepostihují kontinuum v jeho nespočetnosti. Matematický konstruktivismus jakožto ideový následník první fáze Brouwerova převratu odmítá tuto desinterpretaci diagonálního argumentu a snaží se revizi klasické analýzy postavit na méně fantastických podnětech, nežli je tvůrčí duch a volná posloupnost. Variabilita skromnosti těchto podnětů samozřejmě kolísá: velkorysejší linie vede od Weyla přes Hilberta k Lorenzenově operativní škole, nejskromnější větev staví na teorii rekurzivních funkcí. Skromnost je zde ovšem jen úhlem pohledu, jak ještě uvidíme. — Do později zmíněné, rekurzivní části spektra patří prominentně především Markovova ruská konstruktivní škola a Bishopova rekurzivní analýza. Všechna zmíněná hnutí se nicméně vyhraňují vůči ‘intuitivnímu’ dogmatismu Brouwerovy školy. Bishopova [1985, s. 9] charakteristika Brouwerova programu je zvláště přesná:

> Brouwera zjevně sužovala představa, že se bez jeho osobní intervence kontinuum stane diskrétním. Za tímto účelem zavedl metodu volných výběrových posloupností, jejímž důsledkem bylo, že kontinuum nemůže být diskrétní, protože není dobře definované. To udělalo matematiku tak bizarní, že se stala pro matematiky nestravitelnou, a Brouwerův program tím byl odsouzen ke zkáze. Je to škoda, protože Brouwer měl hluboký vhled do nedostatků matematiky a učinil heroický pokus o jejich nápravu.

Markovova kritika se zpravidla omezuje na věcné pozorování, že není možné “brát ‘intuitivně jasné’ za kritérium pravdy v matematice, neboť toto kritérium by znamenalo naprostý triumf subjektivismu a konec chápání vědy jakožto formy společenské činnosti”.[41] Někteří konstruktivisté jako Lorenzen [1955, s. 3 nn] proto explicitně navazují na Hilbertův finitistický projekt.

---

není, jak se domnívá Weyl, revoluce, ale opakování pokusu o puč starými prostředky, pokusu, jenž kdysi v mnohem ráznějším provedení přece na celé čáře prohrál a je i nyní odsouzen k neúspěchu, tím spíš, že je moc státu díky Fregovi, Dedekindovi a Cantorovi dobře zajištěna a opevněna.”

[41] Citát uveden in Troelstra & van Dalen [1988, s. 27].

Nosná idea rekurzivní alternativy přitom již byla naznačena. Základních výsledků analýzy, jako je nespočetnost kontinua či jeho souvislost, nemusí být nutně dosahováno fiktivními postuláty, jako je celek Zermelových axiomů či Brouwerův princip spojitosti. Vše je jen záležitostí adekvátní interpretace, přičemž stačí vyjít z Brouwerem tematizované a Řeky odhalené neefektivnosti teorie reálných čísel, skryté v nekonečné povaze zákonných posloupností, doplněné eventuálně, nikoli však nutně, o fakt jejich indefinitnosti. Negativní stránku věci, např. to, že v obecném případě nelze efektivně rozhodnout ani zda jsou dva zákony jmény téhož čísla, lze totiž proměnit ve stránku pozitivní, např. když dokážeme 'lokální' nespočetnost jistého oboru funkcí či neoddělitelnost jejich podmnožiny v rámci tohoto oboru samotného.

Na rozdíl od elitářství Brouwerova znamená ovšem tento interpretační krok skutečný převrat, neboť (1) eliminuje jak subjektivní přístup jeho intuicionismu, tak (2) metafyzické konsekvence množinového platonismu, a to (3) při zachování zdravého jádra dosažených výsledků. Navíc se mu (4) daří dosáhnout do té doby těžko představitelných aplikací, především v otázkách (ne)řešitelnosti některých matematických problémů (problém zastavení, axiomatizace aritmetiky, nerozhodnutelnost logiky a aritmetiky a dalších). Dialektickým produktem Brouwerova puče, jakési antitezi k logicistické a množinově-teoretické tezi, tak byla řada zcela nových disciplín právě na pomezí matematiky a logiky, především tedy samotná metamatematika coby dílo Brouwerova dřívějšího mentora a pozdějšího arcinepřítele Hilberta. Za tím vším se samozřejmě skrývala vážná, a mnohdy již zapomenutá rozhodnutí, např. definovat pojem efektivity, což znamená v důsledku pojem funkce, velmi specifickým způsobem. I zde ovšem hrozil a stále hrozí opačný extrém, totiž prohlášení naší volby za jedinou možnost, jak to v oboru rekurzivních funkcí dělá Churchova teze. Také k tomu se nějakým způsobem vyjádříme ve zbytku kapitoly.

7.7 Rekurzivní funkce

Dosud jsme používali pojmu 'efektivního' v dosti vágním smyslu 'zvládnutelného nějakým algoritmem', tj. konečným návodem, jak v konečně mnoha krocích dospět od konečného vstupu k nějakému konečnému výstupu. Tyto vstupy a výstupy nyní explicitně omezíme na přirozená čísla. Podmnožina čísel je přitom *rozhodnutelná* (*decidable*, *entscheidbar*), existuje-li algoritmus, jenž pro dané číslo v konečně mnoha krocích napíše odpověď ANO, jestliže číslo množině náleží, resp. NE, je-li tomu naopak. Množina je *polorozhodnutelná* (*semidecidable*, *semi-entscheidbar*), máme-li algoritmus alespoň pro první, pozitivní případ. V oddíle 5.10 jsme ukázali, že je polorozhodnutelnost množiny čísel ekvivalentní její *efektivní vyčíslitelnosti* (*enumerability*, *effektive Aufzählbarkeit*), tj. uspořádatelnosti v řadu. Ve vztahu k obecnému pojmu funkce můžeme ještě stanovit:

> Vlastnost EFEKTIVNÍ POČITATELNOSTI (*effective computability*, *effektive Berechenbarkeit*) náleží funkci f, jestliže existuje algoritmus, jenž pro vstup x vydá v konečně mnoha krocích výstup y právě tehdy, když $f(x) = y$.

Obecně přitom nebudeme mít problém zdůvodnit, že nějaká funkce či množina *je* efektivně zpracovatelná, ale ukázat, že takovou není, a to proto, že k tomu si již nevystačíme s vágní či, chceme-li, otevřenou definicí užitých pojmů. Stejně jako v případě antických problémů konstruovatelné veličiny se zde musíme explicitně omezit na schematicky popsaný obor toho, co budeme nazývat efektivním algoritmem, případně funkcí, jinými slovy: zvolit nějaké to 'pravítko a kružítko'. V relativně krátkém časovém horizontu se přitom zjistilo, že zase tak mnoho možností není, resp. že všechny, které se zdály být nasnadě, jsou nakonec v nějakém smyslu ekvivalentní. Nevyhnutelnost této ekvivalence je právě předmětem Churchovy teze, která se proto stává tvrzením mimomatematickým.

Od počátku bylo přitom zřejmé, že navrhované algoritmické koncepty jsou efektivní v jistém velmi idealizovaném smyslu, v němž říkáme, že je něco proveditelné v principu, nikoli aktuálně. To celý projekt, speciálně tedy teorii rekurze, řadí dnes již spíše do teoretické nežli praktické (aplikované) matematiky. Abychom byli zcela konkrétní: Funkce f, přiřazující číslu $n > 1$ jeho nejmenší prvočíselný dělitel, je jistě principiálně počitatelná, neboť víme, že stačí jednoduše procházet čísla menší než n, ba dokonce menší než $\sqrt{n}$, jichž je tedy jen konečně mnoho, a dělit jimi číslo n, což rovněž zabere pouze konečně mnoho místa a času. Existuje k ní tedy algoritmus ve výše popsaném konečném smyslu slova. Vezmeme-li ale již číslo skládající se ze sta číslovek, které je snadno zapsatelné na čtvrtku papíru, potřebujeme v obecném případě provést takřka 10^{50} dělení, což při počítačích provádějících jako dnes či ještě nedávno 10^{10} dělení za sekundu vyžaduje 10^{32} let, tedy delší dobu, nežli existuje svět. Uvědomíme-li si přitom, že drastická není ani tak velikost (výpočtu) výstupu, jako její poměr k velikosti vstupu, můžeme jeho uvažováním dospět k tzv. výpočtové složitosti, představující zkoumání efektivity v jejím praktičtějším, antropomorfním smyslu. V tomto kontextu se někdy zavádí pojem proveditelné (*feasible*) funkce či procedury, který akceptuje nanejvýš polynomiální nárůst, nikoli nárůst exponenciální, jehož jsme byli svědky. Teorie efektivních funkcí v našem — rekurzivním — smyslu tyto rozdíly ignoruje. Obecně platí, že "efektivním" v této knize rozumíme vždy něco jako "mechanicky", případně "algoritmicky počitatelné", nikoli "počitatelné v reálném čase".

Název rekurzivní funkce přitom naznačuje, že se bude jednat o funkce definované rekurzí, tedy způsobem, s nímž jsem se setkali v oddíle 5.7 v souvislosti s Dedekindovou aritmetikou. Dedekind je také zodpovědný za obecnou formulaci rekurzivní procedury:

Jsou-li g a h funkce o n, resp. $n+2$ proměnných, je funkce

(i) $f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x})$,

(ii) $f(\vec{x}, s(y)) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y))$

o $n+1$ proměnných DEFINOVÁNA (PRIMITIVNÍ) REKURZÍ.

Pro specifické operace ji již dříve artikuloval Grassmann [1861]. V souvislosti s interpretací role rekurzivního teorému v logicismu jsme přitom argumentovali, že definice rekurzí je čistě konstruktivní prostředek zavádění funkcí, a nepotřebuje být tedy obhajována, nemáme-li již nějaký obecnější pojem, jak tomu bylo právě u Dedekinda a Frega.

Proklamovaná efektivita uvažované konstrukce, díky níž víme, jak z daných vstupů získat rekurzivním voláním požadovaný výstup, se ale omezuje na samotný proces získání výsledku. Při volbě neefektivně daných vstupů, tj. konkrétně: při neefektivních funkcích g, h, výpočetní algoritmus, skrytý za uvedeným popisem, kolabuje, resp. přestává být efektivní. Co se nyní nabízí, je popsat celý obor efektivních funkcí také rekurzivně, při takové volbě induktivní báze, v níž se vyskytují pouze efektivní funkce, a proces definování dalších funkcí tak nemůže vést k funkcím neefektivním, za předpokladu, že užívá striktně efektivních definičních principů, jako je definice primitivní rekurzí. Takto dojdeme nejprve k pojmu primitivně rekurzivní funkce, jak jej v anticipaci Skolemově [1923a] zavedl Kurt Gödel [1931]. Ten jim zprvu říkal rekurzivní, což se později vyhradilo pro obecnější pojem, jejž zavedeme záhy. Mezi ZÁKLADNÍ FUNKCE, tvořící bázi oné indukce, přitom budeme počítat funkci následnickou, konstantní nulu a j-tou projekci, neboli

(a) $s(x) = x + 1$,

(b) $z(x) = 0$,

(c) $p^n_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ pro $1 \leq j \leq n$.

Nyní je třeba specifikovat ony efektivní způsoby — induktivní krok definice —, jak ze zavedených funkcí odvozovat další. Jedním z nich je již zmíněná rekurze, druhým pak definice substitucí:

Je-li g n-argumentová funkce a $h_1, \ldots, h_n$ funkce o m proměnných, pak je funkce $f(\vec{x}) = g(h_1(\vec{x}), \ldots, h_n(\vec{x}))$ o m proměnných DEFINOVÁNA SUBSTITUCÍ.

PRIMITIVNĚ REKURZIVNÍ FUNKCE je pak libovolná n-ární funkce na N_0, která je definována ze základních funkcí konečným počtem aplikací. Jejich třídu značme prf. Je zřejmé, že všechny tyto funkce jsou totální a efektivně počitatelné ve výše uvedeném smyslu. Je věcí běžné rutiny ukázat, že většina známých aritmetických funkcí, např. sčítání, násobení, mocnění apod., leží v prf. Dále je zvykem předvést, že jsou jisté běžné definiční způsoby připustné, tj. že je na ně prf uzavřena. Nejprve ale zaveďme další definici:

> Množina (relace) A se nazývá PRIMITIVNĚ REKURZIVNÍ, jestliže má primitivně rekurzivní charakteristickou funkci; podobně hovoříme o predikátu (podmínce) P takovém, že $A = \{\vec{x} \mid P(\vec{x})\}$.

Třídu primitivně rekurzivních množin (relací, podmínek) značme PR. Tak např. relace $=$, $<$ a $\leq$ jsou PR. Platí také uzavřenost PR-podmínek na konjunkci, disjunkci, negaci a omezenou kvantifikaci $(\exists y < z)P(\vec{x}, y)$ a $(\forall y < z)P(\vec{x}, y)$. Díky tomu je v PR např. vlastnost prvočíselnosti. Funkce definovaná po částech jako

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} g(\vec{x}) & \text{když } P(\vec{x}), \\ h(\vec{x}) & \text{jinak} \end{cases}$$

je primitivně rekurzivní, jsou-li primitivně rekurzivní i funkce g, h a podmínka P. Z toho úhrnem dostáváme i možnost DEFINOVAT prf-funkci tzv. OMEZENOU MINIMALIZACÍ, tj. předpisem

$$f(\vec{x}, z) = \mu y < z(R(\vec{x}, y)),$$

kde zápis $\mu y P(y)$ obecně čteme jako "nejmenší y takové, že $P(y)$", přičemž v omezení na $y < z$ zcela konvenčně předpokládáme, že v případě neexistujícího $y < z$ s vlastností $P(y)$ platí $f(\vec{x}, z) = z$. Tím pokryjeme právě ten nepříjemný případ, který by v případě neomezené minimalizace mohl nastat, totiž že by definovaná funkce v daném argumentu zůstala neurčena.

Omezenou minimalizací lze např. definovat prf-funkci $p(x)$, která vyčísluje všechna prvočísla, a to proto, že pro každé x platí $p(x+1) \leq p(x)! + 1$, tj. existuje horní mez pro délku hledání dalšího prvočísla, které je, jak víme, dáno PR-podmínkou, a rovněž faktoriál je prf-funkcí. Vedle totality je to přitom právě předem daný odhad délky výpočtu, co odlišuje primitivně rekurzivní funkce od šíře pojaté skupiny efektivních funkcí. Důvod je snadno vizualizovatelný: Primitivní rekurze obsahuje explicitní parametr, kolikrát se musí opakovat rekurzivní volání, aby bylo dosaženo výpočtu. V programovacích jazycích tomu odpovídá obvyklý `for`-cyklus neboli příkaz

`for` x `do` S,

kde x označuje počet opakování, pro něž se má provádět procedura S. V kontrastu k němu existuje neomezený `while`-, resp. `until`-cyklus

`while`/`until` C `do` S,

podle něhož má být procedura S prováděna opakovaně do té doby, než přestane, případně začne platit podmínka C. To vede již k dříve zmíněné (neomezené) minimalizaci, a tedy i k rozšíření pojmu funkce. Argument, že je toto rozšíření nutné, přitom kopíruje Cantorův diagonální důkaz nespočetnosti kontinua, a má proto pro naši věc mimořádný význam. Ve stručnosti jej tedy předveďme.

Podstatné je, že pojem primitivně rekurzivní funkce byl (přinejmenším do tohoto okamžiku) dán čistě syntakticky. Tím pádem nemůžeme narazit na ten typ problémů, které jsme diskutovali v oddílu 6.2 v souvislosti s Richardovým paradoxem, neboť u každého výrazu daného jazyka nezávisle na významu výrazů ostatních poznáme, zda je jménem primitivně rekurzivní funkce či nikoli, neboli: systém prf je rozhodnutelný. O tomto způsobu popisu jsme také hovořili jako o schematickém, přičemž Cantorův diagonální důkaz lze číst tak, že systém všech jmen reálných čísel schematický není, protože vykazuje situačně-závislé rysy (je podstatně závislý na tom, co bylo definováno dříve). U prvků prf je tomu jinak. Zde můžeme z předem dané řady všech výrazů aritmetického jazyka, rozšířeného o prostředky definice prf-funkcí, postupným procházením získat vyčíslení

$$f_1, f_2, \ldots$$

všech primitivně rekurzivních funkcí a pouze jich. Uvažujeme-li tedy např. jen všechny funkce jednoargumentové, máme nějakou dvojargumentovou funkci

$$F(x, y) = f_x(y),$$

která je zjevně efektivně počitatelná, tj. víme, jak pro dané vstupy dostat v konečně mnoha krocích příslušný výstup. Totéž ovšem musí platit i pro diagonálu $d(x) = F(x, x)$ a její deformaci $d'(x) = d(x) + 1$, která ale nemůže být prf, neboť jinak by měla nějaký index e, tj. platilo by $f_e(x) = d'(x)$ a z rovnice $f_e(e) = d'(e) = f_e(e) + 1$ bychom dostali spor. Z definice prf nemůže být tím pádem primitivně rekurzivní ani diagonála $d(x)$, ani funkce $F(x, y)$, představující tzv. UNIVERZÁLNÍ (jednoargumentovou) prf-FUNKCI, neboli funkci, z níž vznikne každý (jednoargumentový) prvek prf dosazením nějakého čísla (indexu) za x.

Jestliže tedy definicí prf sledujeme formální zachycení neformálního pojmu efektivní počitatelnosti a uznáváme-li, že funkce $F(x, y)$ efektivně počitatelná je (ani k jednomu nás nikdo nenutí!), pak musíme uznat i existenci počitatelné funkce, která není prf, a naše preteoretické ztotožnění efektivní funkce s prf je prokázáno jako příliš úzké. Samozřejmě můžeme také usoudit, že třída prf je v nějakém (primitivně rekurzivním) smyslu nespočetná, z hlediska sledovaných úmyslů to ale nemá žádnou hodnotu, tedy zatím.

Co hodnotu má, je analýza příčiny selhání spatřená v omezenosti `for`-cyklu. Při počítání funkce $F(x, y)$ se totiž nezdá být dopředu zajištěna ani mez pro hledání jména prf-funkce odpovídajícího vstupu x, ani to, kolik bude tato funkce potřebovat kroků při výpočtu hodnoty pro vstup y. Nabízí se tedy vzít operaci minimalizace

$$f(\vec{x}) = \mu y(g(\vec{x}, y) = 0)$$

a přidat ji k rekurzivní definici efektivní funkce. Aby se jednalo stále o funkce totální, můžeme chtít přidat ještě podmínku

$$(\forall \vec{x})(\exists y)(g(\vec{x}, y) = 0),$$

tím se ale náš pojem jména stane okamžitě ‘sémantickým’, tj. potenciálně neefektivním, neboť se odvolává na existenci *hodnot* pro každý argument, což nemusí být podmínka syntakticky ověřitelná, zvláště když vezmeme v úvahu nekonečnost oboru příslušné proměnné. Alternativním postupem je nechat definici tak, jak je, tj. připustit i funkce parciální, částečné, za současného vyjasnění několika detailů.

Tak především, funkce definovaná minimalizací $\mu y(g(\vec{x}, y) = 0)$ se může stát nedefinovanou v nějakém vektoru argumentů $\vec{x}$ z dvojího důvodu. V prvním, přirozeném případě jednoduše neexistuje y takové, aby platilo $g(\vec{x}, y) = 0$. V druhém případě takové y sice existuje, zároveň však existuje nějaké $z < y$, pro něž není $g(\vec{x}, z)$ vůbec definováno, a při postupném výpočtu se algoritmus skrývající se za příslušnou efektivní funkcí zacyklí. Označíme-li okolnost, že je funkce f v argumentu $\vec{x}$ definována, jako $f \downarrow (\vec{x})$, a symbolem $f(\vec{x}) \cong g(\vec{x})$ rovnost částečných funkcí (to, že jsou příslušné hodnoty buď obě nedefinovány, nebo jsou obě definovány a rovnají se), dostaneme následující reformulaci naší operace:

> Je-li g funkce o $n + 1$ argumentech, je n-argumentová funkce f, pro niž platí
>
> $$f(\vec{x}) = z \rightleftharpoons g(\vec{x}, z) = 0 \wedge (\forall y < z)(g \downarrow (\vec{x}, y) \wedge g(\vec{x}, y) \neq 0),$$
>
> DEFINOVÁNA MINIMALIZACÍ jako
>
> $$f(\vec{x}) \cong \mu y(g(\vec{x}, y) = 0).$$

Funkce, které vzniknou ze základních funkcí primitivní rekurzí, substitucí a minimalizací, nazýváme ČÁSTEČNĚ REKURZIVNÍ. Jejich systém značíme crf. Je zřejmé, že ne všechny funkce této třídy jsou totální a že tak odpovídají neformálnímu konceptu částečné počitatelnosti, tj. představují zobecněný algoritmus, jenž buďto dospěje k výsledku v konečně mnoha krocích, nebo se zacyklí. Výhodou je, že mají opět syntakticky popsaný obor reprezentací, a lze je tedy efektivně vyčíslit. Z tohoto vyčíslení pak můžeme *sémantickou* podmínkou totální definovanosti vydělit jejich vlastní podtřídu tzv. FUNKCÍ (OBECNĚ) REKURZIVNÍCH, symbolicky orf, odpovídajících algoritmu terminujícímu pro každý vstup.

Ověření toho, že daný algoritmus terminuje pro daný vstup, je známo jako tzv. problém zastavení a bylo dokázáno, že je obecně algoritmicky neřešitelný. Množina všech netotálních funkcí tak není rozhodnutelná a, jak vyplyne z vět dalších, ani polorozhodnutelná, což se zdá naznačovat, že prosté vyškrtání netotálních funkcí z daného vyčíslení funkcí částečně rekurzivních nebude tentokráte schůdnou cestou, jak dospět k vyčíslení funkcí rekurzivních. V důsledku toho nepůjde použít diagonální argument ke konstrukci efektivní totální funkce, která by nebyla rekurzivní, odkud již můžeme argumentovat pro (lokální) nespočetnost orf. K tomu, abychom ale takto silné negativní výroky mohli tvrdit a dokazovat, je třeba dokončit proces vymezování, schematizace užitých pojmů. Teprve pak půjde z toho, že něco nejde učinit nějakým způsobem, usoudit, že to nejde způsobem žádným.

Tak zaprvé: s pojmem rekurzivní funkce po ruce můžeme dospět k formálnímu pendantu neformálního pojmu rozhodnutelnosti, když řekneme:

> Množina (relace) A se nazývá (OBECNĚ) REKURZIVNÍ, jestliže má (obecně) rekurzivní charakteristickou funkci; přeneseně tak rovněž hovoříme o vydělujícím predikátu.

Systém rekurzivních relací a podmínek značíme OR. Je zřejmé, že rekurzivní relace je rozhodnutelná v dříve užívaném širším smyslu. O skládání rekurzivních funkcí a relací platí vše, co jsme dříve řekli o funkcích a relacích primitivně rekurzivních, jak se o tom lze celkem rychle přesvědčit na poloformální úrovni. Speciálně platí, že pro R rekurzivní podmínku je funkce

$$f(x) \cong \mu y R(\vec{x}, y)$$

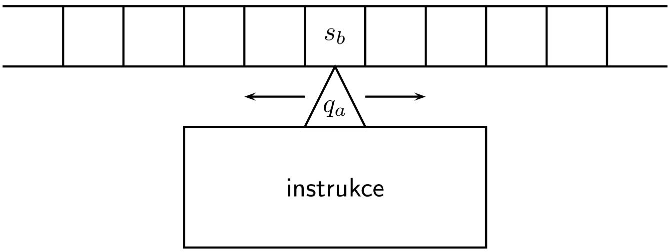
crf a v případě, že $(\forall \vec{x})(\exists y) R(\vec{x}, y)$, dokonce orf. Co nám zbývá formalizovat nyní, je především pojem efektivní vyčíslitelnosti. Zde je ovšem lépe namísto malých kroků udělat jeden veliký, spočívající v převedení částečně rekurzivních funkcí na kanonický tvar. Právě to nám umožní dokazovat silná tvrzení o jejich celku, včetně tvrzení negativních, aplikujících na tyto funkce tytéž formalizované pojmy, k jejichž definici byly použity. Takto budeme moci dokázat, že systém všech rekurzivních funkcí není rekurzivní, bez toho, abychom využívali preteoretický pojem rozhodnutelnosti, a točili se tak v hermeneutickém kruhu. V pojmu rekurzivní spočetnosti pak nalezneme formální protějšek efektivní vyčíslitelnosti na straně jedné a preformální, preteoretický protějšek spočetnosti na straně druhé.

7.8 Rekurzivní spočetnost

(Částečně) rekurzivní funkce nejsou jen prosté korespondence mezi čísly, ale strukturované návody, jak od daného argumentu efektivně přejít k výsledku. Z heuristických důvodů jsou proto často uváděny některé jejich algoritmicky transparentnější ekvivalenty, prominentně tzv. Turingův stroj coby princip současných počítačů. Jedná se o teoretický model jednoduchého mechanismu, jenž pomocí čtecí a zapisovací hlavy prohlíží a upravuje potenciálně nekonečnou (v praxi: dostatečně dlouhou) pásku, rozdělenou na diskrétní pole. Hlava se nachází vždy v jednom z konečně mnoha stavů, podle něhož a obsahu čteného pole pak provádí jednu z konečně mnoha instrukcí, na něž je napojena. Ve vztahu k této množině definujeme:

> Turingův stroj je systém sestávající z (1) konečné abecedy $A = \{s_1, \ldots, s_n\}$, (2) konečné množiny vnitřních stavů $Q = \{q_1, \ldots, q_m\}$ s vyznačenými stavy (3) q_1 coby počátečním a q_m coby finálním a z (4) konečné sady I instrukcí jednoho z následujících tvarů (i) $q_a s_b s_c q_d$, (ii) $q_a s_b L q_d$ a (iii) $q_a s_b P q_d$. Na prvky I je kladen požadavek konzistence, podle něhož se pro žádné $q_a s_b$ v I neobjevují dvě různé instrukce.

V mechanickém příměru, zachyceném na obrázku 7.4, odpovídá části $q_a s_b$ instrukce momentální stav hlavy a obsah čteného pole, zatímco druhá část říká, (i) že bude s_b přepsáno na s_c, (ii) že se hlava pohne o políčko vlevo, resp. (iii) vpravo. Ve všech případech se pak momentální stav



Obrázek 7.4: Turingův stroj

změní na q_d. Výpočet začíná vždy ve stavu q_1, jeho výstupem je obsah pásky poté, co se stroj dostal do stavu q_m.[42] Stejně jako byla dokázána

[42] Další detaily in Odifreddi [1989], případně Lewis & Papadimitriou [1998].

ekvivalence programovacích jazyků obsahujících varianty příkazů `for` a `while` s teorií částečně rekurzivních funkcí, byla dokázána i její ekvivalence s Turingovými stroji, neboli teze, že Turingův stroj počítá funkci f tehdy a jen tehdy, jestliže je f crf. Podstatné je v každém případě to, že Turingův stroj i částečně rekurzivní funkce jsou konečné, schematicky dané objekty, které lze právě proto snadno kódovat přirozenými čísly, a to efektivně, pomocí primitivně rekurzivních funkcí.

Základem toho je možnost kódovat posloupnosti čísel čísly, opírající se standardně o jednoznačnost prvočíselného rozkladu. Takto lze zkonstruovat injektivní funkci z $\mathsf{N}_0{}^{<\mathsf{N}}$ do N_0, např. předpisem

$$c(\langle x_0, \ldots, x_n \rangle) = p(0)^{x_0+1} p(1)^{x_1+1} \cdots p(n)^{x_n+1}.$$

Exponent je zde zvyšován o 1 s ohledem na případy, kdy je v kódované posloupnosti 0. Funkce c není zjevně surjektivní, což ale nepředstavuje vážnější problém, zvláště když je vlastnost "být kódem posloupnosti čísel" PR. Kód posloupnosti $x_1, \ldots, x_n$ budeme dále značit jako $\|x_1, \ldots, x_n\|$. Není obtížné nahlédnout, že zavedené kódy lze snadno a jednoznačně dekódovat, tj. definovat prf-funkce takové, že

$$(x)_i = x_i, \text{ jestliže } x = \|x_1, \ldots, x_n\| \text{ a } 1 \leq i \leq n.$$

Další detaily vynecháme a přejdeme ke kódování částečně rekurzivních funkcí, resp. jejich jmen. Vzhledem k jejich induktivní výstavbě můžeme rovněž postupovat induktivně, tj. přidělit nějaké kódy základním funkcím, a na tomto základě pak i funkcím složeným. Tak např. vedle kódů $\|0\|$ a $\|1\|$ pro s, resp. z, bude projekce p^n_j kódována jako trojice $\|2, n, j\|$ zachycující typ funkce, počet argumentů a typ projekce. Kód $\|4, a, b\|$ může značit funkci vzniklou primitivní rekurzí z funkcí o kódech a a b apod.[43] Na základě řečeného je zřejmé, jak efektivně ověřit, zda je dané číslo kódem částečně rekurzivní funkce. Příslušný predikát "být kódem crf" je dokonce PR. Dalším krokem je kódování výpočtů.

Výpočtem rozumíme průběh algoritmu skrývajícího se za crf-funkcí v aplikaci na konkrétní vstup, neformálně řečeno: to, co si zaznamenáváme na papír, když příslušnou funkci pro dané argumenty počítáme, alternativně tedy záznam činnosti Turingova stroje. Detaily kódování tohoto procesu jsou četné, věcně ale nepředstavují vážnější problém, takže nakonec máme tzv. TURINGŮV PREDIKÁT

$$T_n(e, x_1, \ldots, x_n, z),$$

který říká, že z je kódem výpočtu hodnoty n-ární funkce kódu e v aplikaci na argumenty $x_1, \ldots, x_n$. Tento predikát je PR, stejně jako funkce $U(z)$, vybírající z kódu výpočtu jeho výstup. Nyní již můžeme formulovat tzv.

[43] Další detaily viz třeba Odifreddi [1989, s. 90 nn].

VĚTU O NORMÁLNÍ FORMĚ, dokázanou Kleenem [1936*a*] pro speciální případ rekurzivních funkcí a později [1943] obecně, podle níž ke každé částečně rekurzivní funkci f o n proměnných existuje číslo e takové, že

$$f(\vec{x}) \cong U(\mu z T_n(e, \vec{x}, z)),$$

tj. každý prvek crf lze prezentovat ve tvaru, v němž byla jedinkrát použita minimalizace, a to až v předposledním kroku. Pro každé n zde tak máme UNIVERZÁLNÍ (n-argumentovou) crf-FUNKCI

$$\Psi_n(e, \vec{x}) \cong U(\mu z T_n(e, \vec{x}, z)),$$

která je z definice rovněž částečně rekurzivní. Univerzální primitivně rekurzivní funkce je definována jako

$$\Pi_n(e, \vec{x}) = \begin{cases} U(\mu z T_n(e, \vec{x}, z)) & \text{když } e \text{ je kód } \mathsf{prf}, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

přičemž z toho, že sama nemůže být prf (jak bylo ukázáno v předchozím oddíle) a že musí být crf, a to dokonce totální, usoudíme, že je orf. Zde je ovšem důležité uvědomit si podstatnou změnu, ke které došlo po rozšíření pojmu primitivně rekurzivní funkce na pojem funkce částečně rekurzivní. Jelikož funkce jako význam jména je definována skrze ekvivalenční třídu přípustných reprezentací, v tomto případě shodou průběhů hodnot, může prvku z prf odpovídat jméno, v němž byla použita neomezená minimalizace. Tím pádem je celek jmen funkcí z prf, stejně jako těch z orf, definován sémanticky (shodou průběhů hodnot), a tedy perspektivně nerozhodnutelný. Že je skutečně nerozhodnutelný, je důsledkem tzv. Riceovy věty, s níž naši exkurzi do teorie rekurzivních funkcí ukončíme, nicméně argument pro efektivní vyčíslitelnost všech primitivně rekurzivních funkcí platí v tom smyslu, že jsme s to zkonstruovat řadu jmen, která jsou jmény všech prvků z prf a pouze jich. To je dáno tím, že existuje rozhodnutelná podtřída jmen částečně rekurzivních funkcí, která pokrývá celou prf, totiž všech těch funkcí popsatelných bez užití minimalizace. V podmínce kladené na výše popsanou funkci $\Pi_n(e, \vec{x})$ by tedy správně mělo být uvedeno "e je primitivně rekurzivní kód", nikoli "e je kód prf", neboť to první, nikoli druhé, je rekurzivní podmínkou.

Predikát "e je kód prf" byl přitom dříve rekurzivní podmínkou hlavně proto, že jsme ještě jiné než primitivně rekurzivní funkce nezavedli, tj. obor indexů prf fungoval stejně jako standardní numerály 1, 2, 3, ... v roli kanonického designátoru, systému reprezentací, jež dláždí a zcela pokrývají prostor konstituovaného oboru. Již v rámci úvodních úvah o tom, zda je některá ze známých aritmetických funkcí, jako je sčítání či mocnění, prf, jsme se ovšem ocitli v situaci, kdy byla primitivní rekurze dílčím definitorickým prostředkem. Pak se, stejně jako nyní, stal pojem prf spoluzávislý na sémantické podmínce totožnosti průběhů hodnot, a tedy potenciálně neefektivní. V rámci teorie rekurze, v němž se nyní pohybujeme, je ale podstatné, že jsou indexy prf, tj. aparát primitivní rekurze, stále součástí množiny kanonických designátorů oboru uvažovaných funkcí, nikoli jejich určitou deskripcí, jak je tomu u Frega a Dedekinda.

Vraťme se ale k normální formě částečně rekurzivních funkcí. Na bázi Kleenovy věty a rovnosti

$$\varphi_e^n(\vec{x}) \cong \Psi_n(e,\vec{x})$$

snadno provedeme enumeraci $\varphi_0^n(\vec{x})$, $\varphi_1^n(\vec{x})$, ... všech crf-funkcí daného počtu proměnných. Jelikož ne všechna čísla kódují funkce, můžeme je buď vyškrtat, nebo říci, že kódují funkci s prázdným definičním oborem. S enumerací částečně rekurzivních funkcí dostáváme zároveň enumeraci jejich definičních oborů:

$$W_e^n = \{\langle\vec{x}\rangle \mid (\exists z)T_n(e,\vec{x},z)\}.$$

Právě a pouze tyto množiny nazýváme rekurzivně spočetné, neboli:

> Množina $A \subseteq (\mathsf{N}_0)^n$ je REKURZIVNĚ SPOČETNÁ (*recursively enumerable*, *rekursiv aufzälhbar*) tehdy a jen tehdy, když $A = W_e^n$ pro nějaké e.

Příslušné množiny a predikáty budeme značit RS. Předtuchu, že technický pojem rekurzivní spočetnosti odpovídá pojmu polorozhodnutelné množiny, potvrzuje tzv. VĚTA O PROJEKCI, podle níž rekurzivně spočetné množiny jsou právě ty, pro něž platí

$$A = \{\langle\vec{x}\rangle \mid (\exists y)R(\vec{x},y)\},$$

kde R je OR. Jedna strana důkazu přitom plyne přímo z definice, druhou dostaneme uvažováním funkce $f(\vec{x}) \cong \mu y R(\vec{x},y)$, která je zjevně crf a má definiční obor shodný s A. Rekurzivní predikát R představuje bázi příslušného algoritmu polorozhodnutí, neboť v případě, že $\vec{x}$ množině A náleží, existuje číslo y, které toto náležení dosvědčí a na něž lze, s ohledem na rekurzivitu R, přijít v konečně mnoha krocích, testujících po řadě čísla 0, 1, 2 atd. V opačném případě takovéto číslo neexistuje a algoritmus se zacyklí. Významná je rovněž uzavřenost RS-podmínek na existenční kvantifikaci, která plyne z ekvivalence vztahů

$$(\exists x)(\exists y)R(x,y,z) \qquad\qquad (\exists w)(\exists x \leq w)(\exists y \leq w)R(x,y,z).$$

Souvislost rekurzivní spočetnosti s efektivní vyčíslitelností ozřejmují následující ekvivalentní podmínky:

(a) A je RS,

(b) $A = rng(\varphi_e^n)$ pro nějaké e,

(c) $A = \emptyset$ nebo $A = rng(\varphi_e^n)$ pro nějaké e rekurzivní funkce.

Důkaz ekvivalence nebudeme předvádět, povšimneme si ale, že poslední podmínka v podstatě odpovídá tomu, co potřebujeme, totiž efektivnímu vyčíslení rekurzivně spočetné množiny, až na to, že uvažovaná rekurzivní funkce nemusí být prostá. Toho lze snadno dosáhnout v případě nekonečných RS postupnou kontrolou dosud vyčíslených prvků. Pro rekurzivní množiny platí elegantnější ekvivalence

(a) A je OR,

(b) $A = \emptyset$ nebo $A = rng(\varphi_e^n)$ pro nějaké e neklesající rekurzivní funkce.

Pro nekonečné OR lze dosáhnout rekurzivního vyčíslení rostoucího. Nyní již můžeme přistoupit k prvním negativním výsledkům, konkrétně k tvrzení, že existuje RS-množina, která není OR, ba co víc, že existuje množina, která není ani RS. Předtím dokažme jeden pozitivní výsledek, obsažený v tzv. Postově větě:

A je OR tehdy a jen tehdy, když A i její doplněk $-A$ jsou RS.

Důkaz: Směr vpravo je triviální, dokážeme proto jen opačnou implikaci. Pro A i $-A$ existují algoritmy polorozhodnutí, nemáme tedy zajištěno, který z nich pro daný vstup skončí, víme však, že jeden z nich to bude. Oficiálně vezmeme rekurzivní predikáty R, S, existující z věty o projekci, a definujeme funkci $f(\vec{x}) = \mu y(R(\vec{x}, y) \vee S(\vec{x}, y))$, která je zjevně rekurzivní. Funkce

$$c_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{když } R(\vec{x}, f(\vec{x})), \\ 0 & \text{když } S(\vec{x}, f(\vec{x})) \end{cases}$$

je charakteristickou funkcí A, která je totální, a tedy orf. □

Nyní již ke slíbeným negativním výsledkům, resp. k jejich bázi. V reminiscenci na Russellův paradox uvažme množinu indexů (jednoargumentových) funkcí, případně Turingových strojů, které se na svém indexu zastaví, tj. jsou pro něj definovány, a označme ji jako

$$K = \{x \mid x \in W_x\} = \{x \mid (\exists z)T(x, x, z)\}.$$

Z poslední rovnosti plyne, že se jedná o RS-množinu. Kdyby byla K rekurzivní, musel by být rekurzivní i její doplněk $-K$. Pak by dále pro nějaké e platilo

$$W_e = -K = \{x \mid x \notin W_x\}.$$

Podobně jako v případě Russellovy množiny se nyní ptáme, zda platí $e \in W_e$ nebo $e \notin W_e$, a dostáváme vždy inverzní odpovědi, tedy spor. Množina K takto není OR.

Všimněme si, že v argumentu bylo sporu dosaženo na základě předpokladu, že je $-K$ rovno nějakému W_e. To v důsledku znamená, že $-K$ nemůže být ani RS. Totéž při znalosti nerekurzivity K dostáváme přímo z Postovy věty. Na případ dokázané nerekurzivity K můžeme nyní převést také již zmíněný PROBLÉM ZASTAVENÍ (*halting problem*), formulovatelný jako otázku po rekurzivitě množiny

$$K_0 = \{\langle x, y\rangle \mid y \in W_x\} = \{\langle x, y\rangle \mid (\exists z)T(x, y, z)\}.$$

Problém $x \in W_x$ je ovšem speciálním případem problému $y \in W_x$, rozhodnutelnost K_0 by tak znamenala i rozhodnutelnost K, což, jak víme, není možné. Tím pádem je problém zastavení negativně vyřešen.

Dále můžeme dokázat konstruktivní variantu Cantorovy věty, podle níž neexistuje rekurzivní vyčíslení systému všech rekurzivních funkcí v tom smyslu, že by se mezi seřazenými indexy objevily všechny funkce z orf alespoň jednou a žádné jiné. Podle výše uvedených ekvivalencí to znamená, že platí:

orf je nejen nerozhodnutelná, ale i rekurzivně nespočetná.

Důkaz: Předpokládejme, že máme nějakou rekurzivní funkci f, v jejímž oboru hodnot je pro každou (jednoargumentovou) orf alespoň nějaký její index a žádný jiný index nežli funkce z orf se tam nevyskytuje. Předpis $g(x) = U(\mu z T(f(x), x, z))$ určuje částečně rekurzivní funkci, která je totální podle předpokladu a platí $g(x) = \varphi_{f(x)}(x)$. Tím pádem je totální i částečně rekurzivní funkce $g'(x) = g(x) + 1$, která se ovšem liší od libovolné funkce ve vyčíslení daném f, což znamená, že uvažovaná f nemůže existovat. □

Z toho okamžitě plyne, že ani množina $\{x \mid \varphi_x \text{ je totální}\}$ nemůže být RS. Tento negativní výsledek lze zobecnit ve formě tzv. RICEOVY VĚTY, kterou lze považovat za jistou variantu Brouwerovy věty o souvislosti (nerozdělitelnosti) kontinua:

Nechť je A množina částečně rekurzivních funkcí. Není-li A triviální, tj. $A \neq \emptyset$ a $A \neq$ crf, pak množina $B = \{x \mid \varphi_x \in A\}$ není rekurzivní.

Důkaz: Neformální idea důkazu je následující. Máme funkci $\varphi_a \in A$ a předpokládáme, že totálně nedefinovaná funkce $\emptyset$ je prvkem $-A$. Okolnost, že je to bez újmy na obecnosti, vysvětlíme záhy. Víme, že ve jménu částečně rekurzivní funkce není skryt jenom její průběh hodnot, ale také algoritmus výpočtu. Vezměme proto funkci f takovou, která pro vstup u

nejprve počítá hodnotu funkce $\varphi_x(x)$ pro nějaké předem dané x a v případě úspěchu výsledek zahodí a vypočte hodnotu $\varphi_a(u)$, pokud tato existuje. Je zřejmé, že se jedná o funkci částečně rekurzivní, která se v případě $x \in K$ extenzionálně shoduje s funkcí φ_a, jinak s funkcí $\emptyset$, a je tedy *de facto* definována jako

$$f(u) \cong \begin{cases} \varphi_a(u) & \text{když } x \in K, \\ \emptyset & \text{jinak.} \end{cases}$$

Není také těžké uvěřit, že index, zachycující přímo její konstrukci, musí být rekurzivní funkcí zvoleného x. Platí tedy $f = \varphi_{h(x)}$ pro nějakou rekurzivní funkci h. Nyní ale zcela triviálně platí ekvivalence

$$x \in K \leftrightarrow \varphi_{h(x)} = \varphi_a \leftrightarrow h(x) \in B,$$

a z rekurzivity h proto plyne, že kdyby bylo B rekurzivní, dokázali bychom pro dané x rozhodnout, zda $x \in K$, což, jak víme, nelze. Tím pádem jsme hotovi. Předpoklad, že $\emptyset \in -A$, nevadí z toho důvodu, že v opačném případě můžeme uvažovat nějakou funkci $\varphi_b \in -A$ a jinak postupovat zcela stejně, resp. dokázat nerekurzivitu $-B$, z níž již nerekurzivita B plyne. V rigorózní verzi důkazu je existence pomocných funkcí zajištěna dalšími teorémy, které se nám nevyplatí formulovat. □

Podle Riceovy věty je množina indexů každé netriviální třídy funkcí (rekurzivně) neoddělitelná (v Brouwerově smyslu). Z Postovy věty dokonce plyne, že není ani rekurzivně spočetná, přinejmenším jestliže je rekurzivně spočetný její doplněk, tj. jeden z případů A, $-A$ pro A netriviální je jistě rekurzivně nespočetný. Případem rekurzivně nespočetné množiny indexů je již zmíněná $\{x \mid \varphi_x \text{ je totální}\}$. Totéž platí o množině všech indexů $\{x \mid \varphi_x = f\}$ dané funkce f a jejím doplňku. Rovněž indexy všech funkcí z prf nenáležejí RS.

7.9 Churchova teze

S Riceovou větou náš krátký výlet do teorie rekurzivních funkcí naplnil svůj účel, a my se tedy můžeme věnovat vyvozování filosofických závěrů. Možnost schematického uchopení pojmů efektivity přitom není jediným a z momentálního hlediska ani nejvýznamnějším výsledkem celého výkladu, přestože ho později ještě s úspěchem využijeme v souvislosti s Gödelovými výsledky o neúplnosti. Co nás především zajímá, je demonstrovaná možnost simulovat Cantorovy, a potažmo i Brouwerovy výsledky způsobem, jenž je prost ontologických konotací, a nevede tedy k pluralitě protichůdných a z analytického hlediska neakceptovatelných interpretací. To se týká v první řadě otázky nespočetnosti systému všech funkcí, v jeho omezení na funkce rekurzivní a v upřesnění pojmu spočetnosti na rekurzivní spočetnost. Tyto specifikace přitom nejsou nijak svévolné, tj. není zde rozpor mezi Cantorovým liberálním pojmem funkce a následnou restrikcí na jeho *species*, neboť Cantorův diagonální argument má v první řadě preteoretický charakter, tj. je ho třeba číst jako zdůvodnění toho, proč je třeba pojem funkce rozšířit, nikoli jako tvrzení, že je funkcí na přirozených číslech v nějakém smyslu více nežli přirozených čísel. Vzpomeňme znovu, že vztah mezi relací "větší než", aplikovanou na nekonečné totality, a možností jedno-jednoznačného přiřazení prvků těchto totalit, byl zprvu více než problematickou konvencí, kterou jsme nyní velmi elegantním a neproblematickým způsobem přistřihli, aniž bychom ztratili výhody, které plynuly z jejího zavedení.

Jako první ilustraci toho, o jaký typ proměny se nám jedná, můžeme zmínit transformaci Cantorova nekonstruktivního argumentu pro existenci transcendentních čísel v konstruktivní argument pro rozšíření kartézského kontinua, jak jsme o tom již mluvili v oddíle 2.6. Vezmeme-li totiž efektivní vyčíslení všech racionálních polynomů, jsme s to, např. pomocí Newtonovy aproximační metody výpočtu reálných kořenů, definovat posloupnost $(a_n)_{n \in \mathsf{N}}$ všech (reálných) algebraických čísel takovou, že existuje rekurzivní funkce g, jejíž hodnotou $g(k,l)$ pro dané k a l je l-té místo rozvoje k-tého čísla a_k. Diagonalizací pak můžeme efektivně popsat číslo, které ve vyčíslení $(a_n)_{n \in \mathsf{N}}$ není, a je tedy transcendentní. Navíc je jasné, že takovýchto čísel lze s ohledem na možnost různých deformací diagonály sestavit více, ba dokonce 'více', než kolik je čísel v původním kontinuu.

Cantorova liberalizace pojmu funkce skrze diagonální konstrukci je přitom problematická již v tom, že sama vychází z liberalizovaného pojmu spočetnosti ve smyslu idealizované možnosti uspořádat tyto funkce v řadu. To nemusí být 'možné' nejen z praktického (efektivního), ale i z teoretického hlediska, jak to názorně ukazuje Richardův paradox, v němž toto uspořádání nesmyslně předpokládá svoji existenci jakožto předem ustanovenou, a nemůže být tedy provedeno ani při abstrahování od problémů neefektivity jistých pojmů: otázka smysluplnosti jistého jména není jenom efektivně nerozhodnutelným (nerekurzivním) problémem, ale problémem, jenž nejde rozhodnout bez závislosti na kontextu. Ten je v případě Richardova paradoxu dán právě existencí jistého vyčíslení nějakých jmen, v odkazu na něž je popsáno jméno jiné, které se proto — ze sémantických, nikoli rekurzivně-syntaktických důvodů — v této posloupnosti nemůže vyskytovat.

Tím jsme v situaci Cantorovy teorie množin znovu upozorněni na fakt, že funkce a samotný pojem spočetnosti jsou primárně vázány na možnost výpočtu, resp. vyčíslení. V následné revizi užitých pojmů tak přicházíme k pojmu funkce rekurzivní, kdy na úrovni primitivně rekurzivních funkcí můžeme zopakovat Cantorovu konstrukci se vším všudy, právě proto, že uvažovaná řada všech prvků prf je skutečně konstruována, nikoli předpokládána jako daná. Z nemožnosti provedení téhož pro (obecně) rekurzivní funkce pak dospíváme k závěru jejich rekurzivní nespočetnosti jakožto skromného analogonu Cantorova metafyzického rozlišení, nyní již bez možnosti usoudit na vyšší mohutnost jejich celku. Cesta k nekonečným hierarchiím je takto blokována hned od počátku.

Zároveň se tím řeší dilema prvních konstruktivistů neboli otázka zdánlivě nemožné volby mezi 'teoretickou' nutností spočetného kontinua a 'praktickou' potřebou jeho nespočetnosti, neboť tou je nyní míněna nespočetnost rekurzivní. Každá podmnožina přirozených čísel, částečně rekurzivních funkcí, případně jejich indexů je triviálně spočetná, ne však rekurzivně spočetná, jak ukazuje zvláště drasticky Riceova věta. Celá situace až příliš nápadně připomíná Löwenheimův-Skolemův paradox, nic paradoxního na ní ale není, a to nikoli proto, že jsou matematické pojmy bytostně relativní, že je zde nějaké 'vně' a 'uvnitř', ale proto, že jejich volba jednoduše závisí na nás. Volba rekurzivních funkcí jakožto měřítka spočetnosti je navíc velmi přirozená, neboť odpovídá původní představě o spočtení něčeho jakožto algoritmické proceduře. Navíc se nám zde nabízí možnost rozvinout zdravé jádro Brouwerovy matematiky při eliminaci jejích subjektivních rysů, neoddělitelně spjatých s pojmem výběrové posloupnosti, když např. Riceovu větu pochopíme jako přímý ekvivalent Brouwerovy věty o nerozdělitelnosti kontinua. Podobně lze simulovat i další Brouwerovy výsledky v rámci rekurzivní teorie reálných čísel, známé také pod názvem REKURZIVNÍ ANALÝZA.

Vedle příspěvků Goodsteinových a Speckerových patří k hlavním představitelům tohoto směru reformy základů Markovova škola ruského konstruktivismu. Hlásí se k ní ale i jiná hnutí.[44] Podstatné je, že mají pro teorémy rozcházející se s klasickou matematikou jiné zdůvodnění nežli Brouwerovu prvotní intuici, totiž praktické ohledy. Např. věta o mezihodnotě, postulující pro spojitou funkci f s hodnotami opačných znamének $f(a)$ a $f(b)$ na uzavřeném intervalu $[a, b]$ existenci x takového, že $f(x) = 0$, není efektivně platná, neboť neukazuje, jak zmíněné x zkonstruovat. V rámci rekurzivní analýzy je ovšem možné dokázat praktickou verzi tohoto tvrzení:

> Je-li f spojitá na intervalu $[a, b]$ a $f(a)$, $f(b)$ mají opačná znaménka, pak pro každé $\epsilon > 0$ lze najít $x \in [a, b]$ takové, že $|f(x) - 0| < \epsilon$.

Jelikož v Markovově systému lze dokázat i spojitost všech funkcí (totálně definovaných) na intervalu, můžeme tuto podmínku z formulace věty dokonce vynechat.[45]

[44] Základní vymezení podává třeba Odifreddi [1989, s. 213 nn].
[45] Viz Bridges & Richman [1987, s. 56 n].

Za hlavní princip rekurzivní analýzy se přitom považuje již zmíněná Churchova teze, které je ale v tomto kontextu třeba rozumět jakožto explicitnímu vymezení pojmu funkce rekurzivními prostředky, což obnáší chápání funkcí coby programů (algoritmů) nějakého schematického jazyka a explicitní uznání možnosti jejich vyčíslení ve smyslu univerzálního programu, z něhož lze ostatní dostat dosazením vhodného parametru.[46] Obvyklý výklad Churchovy teze oproti tomu odpovídá tvrzení:

> Pojem efektivně počitatelné funkce je adekvátně vystižen pojmem (částečně) rekurzivní funkce.

Tento názor vyslovil Church roku 1934 ve vztahu k vlastnímu pojmu λ-definovatelnosti funkcí, jenž spolu se svým studentem Stephenem C. Kleenem vyvinul v rámci tzv. λ-kalkulu. Gödel prakticky v tomtéž období zavedl jiný koncept efektivní funkce, jemuž se v literatuře říká Herbrandova-Gödelova počitatelnost a jenž vznikl jistým zobecněním původní ideje primitivně rekurzivních funkcí, vybudované v rámci důkazu věty o neúplnosti.[47] Důvodem pro tuto alternativu bylo Gödelovi mj. to, že v obecnost Churchova přístupu nevěřil. Pochybnosti měl nicméně i ohledně své vlastní definice.

Záhy na to však Kleene [1936*a*], [1936*b*] rozpracoval pojem (částečně) rekurzivní funkce v námi předvedeném smyslu, čímž se najednou ukázala být evidentní ekvivalence všech předložených koncepcí. Church, podle vyjádření Kleenova, se ještě narychlo pokusil vyvrátit svoji tezi tím, že na Kleenův koncept aplikoval diagonalizaci, tj. stejným postupem, jakým byla potvrzena omezenost pojmu prf. Když zjistil, že je v tomto případě neproveditelná, formuloval tvrzení ve výše uvedeném tvaru, byť ještě relativně opatrnou dikcí.[48] Ne náhodou se tak stalo ve slavném článku *An unsolvable problem of elementary number theory* [1936*b*], obsahujícím důkaz nerozhodnutelnosti aritmetiky. — Byla to nicméně Turingova [1936] nezávislá analýza, co Churche [1937], stejně jako již dříve Gödela, přesvědčilo svojí elementární, komputativně čistou formou definitivně o tom, že

> počitatelnost takto definovaná může být identifikována s pojetím efektivity, jak se objevuje v jistých matematických problémech. Rozhodně není méně obecná.

Jelikož Turing [1936, § 1] již dříve věřil, že při vlastním počítání není zapotřebí jiných operací, nežli jaké provádí jeho stroj, totiž čtení a přepisování sukcesivních buněk pásky, pohybu vlevo, vpravo a přechodu k dalším

[46] Viz Bridges & Richman [1987, s. 51].
[47] Viz Odifreddi [1989, s. 36].
[48] Viz Smith [2007, s. 319].

instrukcím, nazývá se uvedená teze také TEZÍ CHURCHOVOU-TURINGOVOU.

Přes tento bezpochyby fascinující vývoj, jenž vyvrcholil *de facto* v průběhu jediného roku (1936), není k tezi samotné z obecně filosofického hlediska mnoho co dodat, jen že se na ni — podobně jako na Gödelův teorém — váží velmi pochybné závěry z oblasti fyziky, počítačové vědy a umělé inteligence.[49] Přitom již samotným zacházením s tezí jako s potenciálně pravdivou se dopouštíme stejné chyby, jakou vytýká Wittgenstein Cantorovi, totiž zaměňování matematických rozlišení za přírodovědná fakta. Teze v této podobě nemůže být ničím víc nežli empirickým pozorováním, a liší se tedy zásadně od Markovova preteorického rozhodnutí chápat pojem funkce výhradně v rekurzivním smyslu.

Část konstruktivistů, např. Bishop ve své konstruktivní analýze či Lorenzen [1955, s. 5, § 18] ve svém operativismu, však nepřijímá ani tento výklad a zůstává ve věci konkrétní podoby efektivních algoritmů spjatých s užitým pojmem funkce agnostická, tj. odmítá se vázat jakoukoli předem danou schematizací. To má své výhody i nevýhody, neboť na jednu stranu to je právě přesné vymezení pojmu efektivity, co umožňuje dokazovat teorémy, jako je nerozhodnutelnost problému zastavení, případně logiky a aritmetiky, na stranu druhou je třeba brát uvedené výsledky se stejnou rezervou, s níž jsme se vyjádřili k důkazu nerealizovatelnosti kvadratury kruhu, která byla vyřešena již v antice, nicméně prostředky, které byly *ad hoc* vůči metodě oficiální.

Víme-li díky Churchovi, že neexistuje rekurzivní algoritmus, který by pro libovolnou formuli predikátové logiky dokázal rozhodnout, zda je tautologická (vzhledem k polorozhodnutelnosti dané úplností systému se vlastně jedná jen o obecnou nemožnost potvrzení negativního případu, tj. důkazu, že něco tautologií není), neznamená to, že pro libovolnou formuli nedokážeme v konečně mnoha krocích dospět k adekvátnímu závěru. Takto není vyloučeno, a z jisté perspektivy se zdá být dokonce nevyhnutelné, že to nakonec dokážeme vždy, pokud je totiž jedinou jinou alternativou existence jakési superformule, o níž by nebylo ani v principu, tj. žádnými myslitelnými prostředky možné rozhodnout, zda je tautologií či nikoli. Churchova věta přitom říká něco mnohem skromnějšího, totiž že nejsme schopni podat *rekurzivní algoritmus*, který by dokázal adekvátní rozhodnutí provést uniformně, pro všechny formule najednou. Na tomto rozdílu, ve formě artikulované samotným Gödelem, bude spočívat i čtení Gödelových vět, jak ho diskutujeme v oddíle 8.10.

To, že někteří konstruktivisté odmítají Markovův přístup k vymezení pojmu efektivity, může být ale vykládáno i tak, že nejsou intereso-

[49] Některé z nich shrnuje Odifreddi [1989, s. 101 nn]. Podstatně rozumnější interpretace s některými logicko-aritmetickými souvislostmi předvádí Smith [2007, s. 315 nn]. Vlivnými eseji hodnotícími Churchovu tezi jsou např. Kalmár [1959] či Gandy [1978].

váni na přímých aplikacích, např. v informatice, a mohou si tedy dovolit zůstat na podstatně teoretičtější, nesvázanější rovině. Právě z tohoto hlediska není totiž závazek k Churchově tezi nijak neškodný, neboť s sebou přináší nekompatibilitu s jinými konstruktivistickými principy, typicky s větou o vějíři, položíme-li na ni dodatečný požadavek na rozhodnutelnost závory.[50] Ve světle toho, že se věta o vějíři coby varianta krotké formulace Königova lemmatu zdála být efektivně zvláště spolehlivá, vypadá nyní omezení na rekurzivní funkce přinejmenším z teoretického hlediska jako neadekvátní.

Na druhou stranu, po přijetí Churchovy teze je rekurzivní analýza schopna pozitivně vyvrátit (míněno samozřejmě: v patřičně upraveném pojmovém rámci) některá nekonstruktivní klasická tvrzení, jako je např. Bolzanova-Weierstrassova věta, čímž napodobuje Brouwerovo zesílení metody slabých protipříkladů do metody tvůrčího subjektu, opět ale bez nežádoucí subjektivní příměsi. Východiskem je přitom důkaz věty:

> Existuje tzv. SPECKEROVA POSLOUPNOST čili monotónní omezená posloupnost $(r_n)_{n\in\mathsf{N}}$ racionálních čísel, která není Cauchyho.

Důkaz: Uvažujme nějakou injektivní rekurzivní funkci f s nerekurzivním oborem hodnot, např. s K (viz s. 497), bez opakování, jak to umožňují dříve uvedená tvrzení. (Podrobněji: K je RS, tudíž oborem hodnot nějaké orf-funkce, z níž lze vzhledem k nekonečnosti K vydestilovat orf-funkci injektivní.) Posloupnost samu definujme předpisem

$$r_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^{f(i)}}.$$

Posloupnost $(r_n)_{n\in\mathsf{N}}$ je zjevně monotónní a s ohledem na injektivitu i omezená. Kdyby byla nyní i Cauchyho, mohli bychom náležení čísla m oboru hodnot f efektivně testovat tak, že bychom našli k, od něhož se členy $(r_n)_{n\in\mathsf{N}}$ liší o méně než $\frac{1}{2^m}$, a vypočetli prvních k hodnot f, neboť pokud žádné z nich není m, nevyskytne se m ani později. To je ale v rozporu s nerekurzivitou K.[51] □

Důkaz existence Speckerovy posloupnosti představuje silný protipříklad vůči elementárnímu tvrzení klasické analýzy. Ve skutečnosti ho lze ještě zesílit, když ukážeme, že existuje Speckerova posloupnost odlišná (odloučená) od libovolného daného reálného čísla.[52] Z toho plyne, že v rekur-

[50] Viz třeba Troelstra & van Dalen [1988, s. 221].
[51] Detaily viz Troelstra & van Dalen [1988, s. 268], případně Beth [1965, s. 146] pro obecný komentář. Předvedený důkaz není Speckerův, ale Riceův.
[52] Troelstra & van Dalen [1988, s. 311 n].

zivním kontinuu neplatí věta o suprému. Z neúplnosti vzhledem k uspořádání ale ještě neplyne neúplnost metrická. Naopak, s ohledem na efektivní interpretaci kvantifikátorů zůstává tento typ úplnosti obecně v platnosti.[53]

V konkrétním případě predikativní analýzy Lorenzenovy coby rozvinutí některých idejí Weylových jsou nicméně na sekvenční úplnost kladeny další podmínky, speciálně musí být posloupnost reálných čísel, k níž chceme postulovat limitu, omezena na prvky nějaké z predikativně budovaných hierarchií, aby se pak limita mohla ocitnout v hierarchii vyšší. Na první pohled to samozřejmě může vypadat jako dosti neelegantní omezení, ideově ani technicky to ale není o nic komplikovanější nežli myšlenka iterativní hierarchie, v níž systémy prostupující všechny úrovně nemohou tvořit celek, a nepřísluší jim tak ani ordinální, ani kardinální číslo, neboť jsou 'příliš velké', aby mohly konzistentně existovat. Lorenzen [1955, s. 196] k tomu pouze dodává, že v této verzi vyhovuje jeho teorém všem aplikacím.[54]

Pro náš další výklad je přitom podstatné, že se v otázce konstruktivního přijetí či nepřijetí Churchovy teze nejedná ani tak o spor mezi teorií (aritmetiky) a praxí (její implementací), ale teorií a jejími konstitutivními předpoklady, které musí být *prakticky* založené, má-li tato teorie splnit svůj účel. Tento aspekt podcenili Cantor i Brouwer, vedeni mylnou představou o potřebě kotvení pravdivosti v mimosmyslové realitě nezávisle existujících objektů na straně jedné a v privátních strukturách mysli jednotlivce na straně druhé. Wittgensteinova kritika obou, tj. Cantorova srovnávání mohutností a Brouwerova konceptu výběrové posloupnosti, je přitom vedena právě vědomím významu praktických ohledů při konstituci teoretických pojmů nejen matematiky, ale vůbec. Při posloupnosti vznikající na bázi náhodných vrhů kostkou, poznamenává Wittgenstein [1983, s. 218, § 179], je z aritmetického hlediska relevantní právě ona systematická nerozhodnutost, nikoli samotný výsledek, který proto nemůže být číslem, tj. sám předpis "číslo určené vrhy touto kostkou" není správně sestavenou deskripcí.

Garantem smysluplnosti či pravdivosti toho, o čem mluvíme a co děláme, nemůže být hodnotově neutrální, lhostejná objektivita ani hodnotově labilní, nedospělá subjektivita, ale intersubjektivita prakticky sdíleného, toho, co je 'dobré' a 'pravdivé' pro všechny. Užití etických termínů po boku logických je zde důvodné, neboť mají společný kořen právě v prvotní normativitě, říši toho, co by být mělo, z níž teprve vystává oblast toho, co je a co lze jako takové popsat. Coby sféra morálních předpisů, konvencí, je oblast normativního z definice lidská, a tedy 'neobjektivní' v platonistickém či náboženském smyslu, na druhou stranu však právě

[53] Viz Troelstra & van Dalen [1988, s. 266 n].
[54] Srov. také Beth [1965, s. 149 n].

pro svoji smluvní povahu zůstává nezávislá na libovůli jedince, a je tedy nesubjektivní, veřejná, ve smyslu přístupnosti všem účastníkům námi sdíleného diskurzu. Zbývá samozřejmě vysvětlit, kdo jsme to 'my', což je ale otázka pro jinou knihu. Pro naše účely stačí, zapamatujeme-li si, že 'pravdivost' je zvláštní případ 'správnosti'.

Závislosti teoretických pojmů na pojmech praktických, normativních, si přitom povšiml již Kant, když zdůraznil nutnou souhru apriorního, pojmového, a aposteriorního, smyslového, v procesu poznání světa. Ve smysluplné větě jakožto jeho manifestaci se setkává pojem coby konvenční, zděděné, a proto apriorní rozlišení se smyslovou hmotou, a teprve v této kombinaci je překročena jak bezobsažnost analytických pravd, které jsou pouhými produkty reflexe jazykových konvencí, tak nesdělitelnost privátních představ či vjemů, k nimž se právě pro nemožnost veřejné kontroly nemůže vztahovat predikát pravdivosti či omylu, dobrého či špatného. Apriorním ale není míněno biologicky zděděné, podmiňující naši živočišnou existenci, nýbrž naši existenci společenskou, jinými slovy: soubor podmínek vymezující svět našich smyslů a vztahů, jak se do něho rodíme, resp. rodím. To, že se tento svět zároveň rodí se mnou, tj. že je to také můj svět, není paradoxně projevem přepjatého racionalismu nebo idealismu, ale naopak druhou, radikálně empirickou, či chcete-li: fenomenologickou stranou mince, kdy k objektivnímu poznání světa musím přispět i já svými subjektivními smysly. Podstatné je ale právě to, že poznání vzniká až v okamžiku, kdy se z mého světa stává náš svět, a že se v případě 'mého světa' vlastně ještě o žádný svět nejedná, jak to výstižně vyjadřuje Davidson v citátu uvedeném na straně 449. To vše je možné teprve v jazyce, jehož formy patří právě ke zděděným, apriorním rysům poznání, které se matematika pokouší popsat na rovině objektu.

Jazyk jako médium nutné intersubjektivity poznání, ač takto vykazatelný již u Kanta, se stává živým tématem filosofie v rámci Fregova obratu k jazyku, kdy si na otázky po poznání jistých předmětů, konkrétně čísel, odpovídáme lingvisticky: jsou to předměty řeči, významy slov jistých logických kategorií. Určení toho, jakých kategorií, je přitom dáno celkem jazyka, ve smyslu použití daných slov ve větách a inferencích, což vede v rámci Fregovy logiky k rozlišení vlastního jména coby nasyceného výrazu a predikátu coby nenasyceného substitučního rámce. Toto interně-holistické rozlišení, zhuštěné ve Fregově devíze "slova mají význam pouze v kontextu věty", zobecnil Wittgenstein [1953, § 43] v tezi, že

> významem slova je jeho užití v jazyce.

My ji čteme především jako doklad toho, že v obratu k jazyku se již skrývá obrat pragmatický. V jakém smyslu a do jaké míry lze tento obrat rozvinout z Fregovy myšlenky logické aritmetiky, je samozřejmě záležitostí další interpretace, stejně jako je jí otázka, jakou roli v tomto obratu hraje Hilbertova myšlenka axiomatismu a finitismu, případně teorie rekurze a konstruktivní matematiky. Společný je jim v každém případě důraz na úlohu symbolických reprezentací, tj. nedůvěra v abstraktní jsoucna a mentální obrazy, Hilbertem [1922, s. 163] shrnutá do parafráze Goethova Fausta

> na počátku byl znak.

S tímto postojem je již tou či onou měrou spjatý jistý pragmatický náboj. K jak odlišným představám o aritmetice, zejména s ohledem na tradiční otázky její analytičnosti či syntetičnosti, tento základní přístup může vést, budeme diskutovat v příští kapitole. Tím pádem pokryjeme většinu názorových proudů současné filosofie matematiky. Brouwerův odkaz pro pragmaticky orientovanou část spektra výzkumu základů spočívá především v devíze, že matematika je více činností nežli teorií, jak ji od něho převzali Wittgenstein ve své teorii jazykových her i Lorenzen v operativní koncepci aritmetiky. I jimi se budou zabývat následující řádky.

8 Na počátku byl znak

Výklad předchozích kapitol byl z jistého úhlu pohledu založen na konfrontaci základních postojů, které se tradičně objevují v otázkách filosofie matematiky, a to především proto, že jsou to základní otázky filosofie vůbec, totiž jak poznáváme svět a jak je toto poznání možné. K jejich přehledné artikulaci nám v tento moment nejlépe poslouží úvodní Goethův citát a především doprovodné citáty pod ním, po řadě reprezentující

(1) Hilbertův formalismus (na počátku byl znak, smysly vnímatelný artefakt),

(2) Fregův platonismus (na počátku byl smysl znaku, to, co znak vyjadřuje),

(3) Brouwerův mentalismus (na počátku byla síla, původní intuice tvůrčího subjektu) a

(4) Wittgensteinův pragmatismus (na počátku byl čin, lidské jednání, jazyková hra),

se všemi komentáři a výhradami, které jsme k těmto doktrínám a jejich spojování s uvedenými jmény dosud uvedli. V této kapitole nám půjde o doplnění a především o jistý druh syntézy těchto postojů, která se — ve vztahu k naší historické situaci — z každého pokusí převzít to nejcennější.

Tím také zůstaneme věrni deklarovaným zásadám a nebudeme se dívat na dějiny (nejen filosofického) myšlení jako na předem prohraný souboj falešných teorií, případně upevňování teorie pravé (byť v umírněné verzi Popperova ‘přibližování se’ k pravdě), ale dialektický proces, začínající konfrontací stávající, leč náhle zpochybněné teze s antitezí, která toto zpochybnění, konflikt, vyjadřuje. Výsledek, syntéza teze a antiteze, přitom v našem pojetí nijak neodpovídá ani neaproximuje předem danou pravdu, ale naopak určuje, co je (v ten který okamžik) pravdivé skrze jisté koherenčně-pragmatické cíle, které v ten který moment sledujeme. V tomto smyslu je náš svět coby objekt a výsledek našeho poznání naprosto nedeterministický. Tím samozřejmě nezastáváme žádnou primitivní verzi utilitarismu, ani nepopíráme, že skutečnost na našem poznání, primárně ve formě smyslových vjemů, participuje. Chceme především říci, že každá teorie pravdy má kromě korespondenčního aspektu také prvek koherenční a pragmatický.

Věty matematiky se ve srovnání s větami jiných věd zdají postrádat právě onen první, korespondenční rozměr, tedy rozumíme-li mu v původním, empirickém smyslu. Pokus o jeho přenesení na úroveň abstrakt vede nyní přímo k matematickému platonismu, jenž chápe a postuluje abstraktní objekty matematiky jako externí podněty vnitřního, 'intelektuálního smyslu'. Právě v tomto významu hovoří mnozí matematici, např. Gödel [1964, s. 262, 271 n], a někteří filosofové matematiky o 'intuici'.[1] Vezmeme-li nicméně vážně výše zmíněné pragmatické a koherenční ohledy jakožto obecné podmínky možnosti každého poznání, nezbývá nám opět než souhlasit s Wittgensteinem [1953, § 213], že odkazy k intuici nejsou ničím jiným než lacinou 'výmluvou' toho, komu chybějí lepší argumenty. To se týká i filosofie (ontologického) platonismu jako celku. Obrat k jazyku a obrat pragmatický nám přitom ukazují, jak vidět celou věc střízlivě.

Není poznání mimo jazyk a jeho užití, jehož lokální stabilita je právě tím, co nazýváme objektivitou světa, nezávislou na vůli jednotlivce, jenž se může na stávající praxi nejprve pouze podílet, připojit se k ní, aby ji případně později ve vzájemné kooperaci s ostatními pozvolna rozvíjel a měnil. Změna *užití* slova je samozřejmě možná, zároveň ale vždy podstatně komplikovanější a kontroverznější nežli změna *slova samotného* (náhrada termínů), odkud také pochází představa, že na sobě nezávisejí, neboť '*saying so does not make things so*', a že slovo samo je vlastně *pouze* čímsi nepodstatným, konvenčně zvoleným. To vše je ovšem pravda jen do jisté míry, neboť beze slova by nebylo ani jeho významu. Odtud pak je to ale již jenom krůček k Hilbertově tezi, že na počátku všeho (či přinejmenším aritmetického poznání) je znak, coby kombinaci osvíceného formalismu s větným, ba inferenčním holismem. Od ní následně dospíváme k pragmatickým teoriím aritmetiky, podle nichž jsou v aritmetických větách jen komplikovaným způsobem vyjádřena metatvrzení o operování se znaky, tj. konečnými artefakty, podle jistých předem daných pravidel. Tím se z Hilbertova formalismu definitivně stává více než jenom povrchní postoj klasického nominalismu, podle něhož (některá) slova nereprezentují nic jiného než sama sebe, neboť zde k významu znaků počítáme také jejich operativní funkci. Tento zrod sémantiky ze syntaxe je základem operativní aritmetiky a logiky Lorenzenovy, s kořeny v teoriích pozdního Wittgensteina.

[1] Srov. k tomu také Moorův komentář in Gödel [1990, s. 169 n].

S pomocí obou, tj. Wittgensteinovy i Lorenzenovy koncepce matematiky, se zde rovněž pokusíme podat odpověď na otázku, která prochází jako červená nit filosofií matematiky novověku a byla i tématem naší knihy, totiž jak je to s údajnou syntetičností, případně analytičností aritmetiky, zvláště pak v konfrontaci s logikou. Půjde nám přitom o vše jiné než jakýsi definitivní verdikt, kterým bychom se přiklonili na tu či onu stranu sporu, ale spíše o posouzení, jaký smysl toto rozlišení má v linii dané fenomény, jako byla geometrizace aritmetiky, aritmetizace analýzy, logizace aritmetiky a dalšími, se zvláštním přihlédnutím ke Gödelovým větám coby nejdiskutovanějšímu výsledku logiky naší doby. Předmětem zájmu ale *de facto* nebude Gödelův teorém sám, ale výklady, které se na něj váží, a závěry, které se z nich vyvozují.

8.1 Problém počátku

Díváme-li se na otázku povahy matematického poznání z hlediska filosofie jazyka, musíme nejprve vysvětlit úlohu jazyka v celém kognitivním procesu. Ve vztahu k našim základním rozlišením tak dospějeme k těm dosud nejvíce diskutovaným, totiž k nějaké verzi pojmového realismu na straně jedné, zhuštěné v platonistově přesvědčení, že je objektivita, případně jistota našeho poznání garantována nezávislou povahou jeho objektů na nás a našem jazyce, na straně druhé pak k mentalistově víře, že jistotu toho, co považujeme za pravdivé, lze hledat jenom v původní intuici, síle poznávajícího subjektu, k níž se má jazyk jen jako přehrávač k záznamu, tj. slouží nanejvýš k její více či méně dokonalé manifestaci. Výsledek, jak jsme opakovaně demonstrovali na případech souboje Brouwera s Cantorem, je v obou případech v podstatě týž, tj. žádné objektivně sdělitelné *poznání* neexistuje.

Analytická filosofie, zrozená z Fregova obratu k jazyku, uvádí oba tyto extrémy na pravou míru s tím, že pravda je kdesi uprostřed, totiž v nutné intersubjektivitě sdíleného. Poznání není poznání moje, ale naše, stejně jako věty, kterými jej vyjadřuji, jsou určeny primárně druhým, tj. neprodukujeme je proto, abychom jimi, jak podotkl Wittgenstein [1976, s. 33 n], třeba tapetovali stěny nebo, jak se domnívají tvůrci pořadů pro ženy a mladistvé, vyjadřovali své nejniternější pocity. To platí pochopitelně i o 'větách matematiky'. Problém Fregovy filosofie spočívá hlavně v tom, že se z historických důvodů explicitně vymezovala proti extrému druhému, totiž tehdy velmi rozšířenému psychologismu, podle něhož jsou abstraktní objekty, případně pojmy, identické s obsahy naší mysli. Frege tak na jednu stranu správně podotkl, že obsah našich vět, to, co se jimi snažíme sdělit, nemůže být závislý na mentálních dispozicích jednotlivých mluvčích, právě proto, že má být obecně sdílen, a tedy objektivní. Na druhou stranu, několikráte tuto nutnou nezávislost významu slov na libovůli jednotlivce extrapoloval směrem k nezávislosti na celém lidstvu, např. když v *Grundlagen* [1884, § 96] říká, že pravdivost vět matematiky či matematické pojmy nemůžeme vytvořit, ale jen objevit stejně jako zeměpisec objevuje neznámou zemi. Není obtížné dokládat jinými citáty, že se zde Frege pouze ‘neobratně’ vyjádřil ve výše uvedeném negativním slova smyslu. Nejvýmluvněji o tom asi svědčí citát z *Grundlagen* [1884, § 26], v němž Frege explicitně popisuje své pojetí objektivity:

> Objektivní je [...] zákonité, pojmové, souditelné, to, co lze vyjádřit slovy. [...] Objektivitou rozumím tedy nezávislost na našem vnímání, nazírání a na našich představách, na rozvrhu vnitřních obrazů ze vzpomínek dřívějších počitků, nikoli však nezávislost na našem rozumu; neboť zodpovědět otázku, co věci jsou, nezávisle na rozumu, by znamenalo soudit, aniž bychom soudili, prát kožich, aniž bychom jej namočili.

To až nápadně připomíná Schopenhauerova [1858, díl II, § 1] slova o tom, že si sice můžeme představit svět bez člověka, ale tento svět bude zase a pouze lidská představa. Další exegeze Fregových spisů není nutná ze dvou zásadních důvodů.[2]

Objev logiky, jenž je Fregovou zásluhou, ukazuje více než jasně, že se její autor systematicky orientoval právě na to, co se dá zapsat, a to dokonce ve velmi specifickém smyslu předem daného výrazového systému. Mnohem obecnější důvod, proč nebrat vážně nejen Fregův údajný platonismus, ale platonismus (a mentalismus) vůbec, vyplývá z Fregova pojetí objektivity, totiž ze zřejmého faktu, že argumentovat ve prospěch či proti zásadnímu významu jazyka v poznání světa již tento jazyk a jeho sdílené, veřejně přístupné porozumění předpokládá. Nevyhnutelnost tohoto faktu je transcendentálně-analytické, nikoli metafyzické povahy, tj. nemusíme a ani nesmíme v něj nijak dogmaticky věřit, na jeho přijetí ale závisí pochopení v něm použitých rozdílů. Stejné povahy je i Aristotelovo [Met., 1006a, 1011a] překvapivě pragmatické odmítnutí argumentů proti možnosti objektivního poznání slovy, že ti, kteří je vznášejí (a patří k nim jak pojmoví relativisté, tak radikální skeptici), buďto možnost takového poznání sami předpokládají, a dopouštějí se tedy podvodu, nebo nejsou oprávněni vůbec nic říkat, a podobají se tedy květině.

K rozdílům plynoucím z transcendentálně-analytického čtení Fregova ‘platonismu’ patří i rozdíl mezi samotným znakem coby libovolným artefaktem, a tím, co tento znak znamená, vyjadřuje, v rámci praktikované jazykové hry. Frege opět správně poznamenává, že věta jako “5 je prvočíslo” nemůže být z podstaty věci *o* znaku “5”, stejně jako nemohla být *o* obsahu mé mysli. Ani znaku, ani mé představě čísla 5 totiž ne-

[2] Vlastně ze třech, přičemž tím posledním je fakt, že jsem tak učinil jinde. Jednak v rámci monografie Kolman [2002], jednak samostatným článkem Kolman [2000].

náleží vlastnost prvočíselnosti, ale empiricko-syntaktické vlastnosti jako "černý", případně "matný" apod. Problém je, že v případě konkrétního diskurzu je tato sémantická analýza věty coby přípisu vlastnosti nějakému předmětu truismem, který nám neříká nic o tom, jak konkrétně zdůvodnit pravdivost daných elementárních vět, a představuje tak jenom obecné schéma plošně užívané logiky, jak je známe z Tarského definice pravdivosti a výše vylíčených konstitutivních principů předmětného oboru coby interpretace Fregova systému. Jak jsme již několikráte zdůraznili, tyto principy neartikulují konkrétní způsoby pravdivostního ohodnocení vět té které disciplíny, ale naopak, vytyčují startovní čáru, jíž musí být dosaženo, aby bylo možné aplikovat úsudková schémata Fregovy logiky.

Výrazy jako "5" či "je prvočíslo" jsou takto zprvu pouze momenty popisu příslušného větného systému a jeho následné evaluace, což znamená, že mají nejdříve pouhou synkategorematickou roli. Řeč o objektech, které mají jisté vlastnosti, přichází až později, jakožto heuristická opora projekce zvolené logiky na tu kterou oblast poznání. Chápe-li někdo, jako např. Russell, tuto projekci jako jedinou možnou, přísluší mu samozřejmě právem Wittgensteinova [1984*b*, s. 41] výtka, že je v zajetí tradičního mýtu o subjekt-predikátové struktuře věty. Vůči Fregovi není ale již tento argument docela korektní, byť má bezpochyby jisté oprávnění, stejně jako následující Wittgensteinův [1984*b*, s. 150] často citovaný (a Waismannem přetlumočený) postřeh:

> Pro Frega existovala alternativa: znak má buďto význam, tj. zastupuje předmět — logický znak logický předmět, aritmetický znak aritmetický předmět —, nebo je to jen inkoustem namalovaný obrazec na papíře. Ale tato alternativa není oprávněná. Jak ukazuje hra v šachy, existuje třetí možnost: pěšec na šachovnici nemá význam v tom smyslu, že by něco zastupoval, že je znakem něčeho, ani to není jenom figurka vyřezaná ze dřeva, kterou postrkáváme po dřevěné desce. To, co je pěšec, určují teprve pravidla šachové hry.

Tento rozumný názor, prezentovaný jako ocenění zdravých rysů formalismu, není ale nijak v rozporu s Fregovým postojem, nevidíme-li okamžitě v pojmu objektivního významu, který zavedl, variantu platonistovy preexistující entity, ale právě jen relativní sémantické rozlišení výrazu a jeho funkce. Frege ostatně nebyl nikdy příliš specifický v tom, co slova obecně znamenají, a naopak mnohokráte zdůrazňoval, viz třeba [1983, s. 16 nn], že ke své logice nedospěl jako jeho předchůdci inspekcí a následným porovnáváním kusů reality (předmětů, případně pojmů), ale rozpadem věty jakožto nejmenší části jazyka, s níž si lze teprve něco samostatně počít. Frege [1983, s. 273] jde dokonce až tak daleko, že říká:

> Charakteristický rys mého pojetí logiky nejprve ozřejmím tím, že na vrchol kladu obsah slova "pravda", a pak tím, že za ním nechávám ihned následovat myšlenku jako to, u čeho pravdivost vůbec přichází v úvahu. Nevycházím tedy od pojmů a neskládám z nich myšlenky nebo soudy, nýbrž získávám části myšlenky jejím rozpadnutím. Tímto se odlišuje moje pojmové písmo od podobných výtvorů Leibnizových a jeho následovníků, přes moje možná nešťastně zvolené pojmenování.

V kapitole 4 jsme přitom již zmínili Fregovo [1983, s. 272] upřesnění tohoto výroku, totiž že otázka východiska, počátku jeho logiky, "vůbec neleží ve slově 'pravdivý', nýbrž v tvrdící síle, s níž je vyslovována věta". Tím jsme od sémantického platonismu fregovských významů a smyslů opět na pragmatické půdě toho, jak jsou daná slova používána, totiž v rámci vět vyřčených někým vůči někomu. Význam slov je tedy obecně především jejich herní potenciál, příspěvek k roli vět jakožto nejmenších jednotek, samostatných tahů jazykové hry.

Příměr předmětu a jeho jména, které k obvyklému určení významu dodatečně přistupuje, je původem empirické, tj. nikoli sémantické povahy, a přes značnou didaktickou sílu mnoho relevantních postřehů spíše zatemňuje. Proto je také obecně prospěšné začínat ve věcech sémantiky a filosofie jazyka analýzou abstraktních oborů, jako je ten matematiky, a hledat později podobnosti s obory přirozenými, empirickými, nežli postupovat opačně a utopit se pak v lákavých, leč irelevantních příměrech z bezbřehé praxe přirozeného jazyka.[3] Frege, pravděpodobně z 'popularizačních' důvodů, tento správný směr výkladu v praxi mnohokráte obrátil, a mohl tak své čtenáře a interprety svést na chybnou stopu, jak na ni výše upozorňuje Wittgenstein. Mottem této opravy mohou být další Wittgensteinova [1984*b*, s. 105] slova:

> Syntax nelze zdůvodnit. Je proto libovolná. Oddělena od svých aplikací, uvažována sama o sobě, je hrou, ve stejném smyslu jako šachy. V tomto má formalismus pravdu.

To, v čem se formalismus mýlí, je předpoklad, že jsou objektem aritmetiky symboly samé, případně že lze její věty uchopit jako bezobsažné posloupnosti znaků, formule. Ve svých *Grundgesetze*, v nichž byl mj. příměr formální aritmetiky s hrou v šachy zpopularizován, Frege upozorňuje, že paralela aritmetiky a hry kulhá právě v tom, že herní pravidla neartikulují pravdivé nebo nepravdivé věty, ale jen zásady pohybu figurkami, které samy nejsou pravdivosti či obsahu schopny. Podle Frega [1893/1903, díl II, § 93] je proto třeba důsledně odlišovat hru od její teorie, která již nemůže být formální, ale musí obsahovat smysluplné věty

[3] V této souvislosti jsme již např. mluvili o rozlišení určité deskripce a vlastního jména na bázi vágního rozdílu konotujících a denotujících výrazů.

týkající se oné hry samotné, např. že z té či oné pozice lze dát šach tolika a tolika tahy:

> Tyto věty říkají jenom zdánlivě něco o figurkách, neboť vlastnosti těchto figurek jsou zcela libovolné [. . .]. Spíše jsou to pravidla hry, jejichž vlastnosti se skrze tyto věty dostávají do centra pozornosti. Tím pádem vlastně teorie šachu nezkoumá šachové figurky; jde o pravidla a to, co z nich plyne.

Tím jsme se dostali zpět k Wittgensteinovu pojetí významu jakožto použití znaku. Této pozici odpovídá i pozdější postoj Hilbertův. Je přitom dost pravděpodobné, že Hilbert, jenž vedl na přelomu století s Fregem korespondenci ohledně formálních teorií geometrie, přijal postupem času Fregem navržená vylepšení za vlastní. V každém případě víme, že příslušné pasáže z *Grundgesetze* četl.[4]

Ke zřetelnému profilování svých názorů na povahu matematiky se Hilbert dostal až v poslední fázi svého vědeckého života, a to v reakci na rozmáhající se vliv Brouwerova intuicionismu, jenž mu odlákal i nejnadanějšího žáka Hermanna Weyla. Weylova konverze, dramaticky vyjádřená v článku *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* [1921], byla přímým podnětem k Hilbertově protiakci v článku *Neubegründung der Mathematik* [1922], v němž byla Brouwerova revoluce označena za puč, k jehož potlačení Hilbert slíbil nasadit vlastní alternativu. Ta se velmi neurčitě označuje jako tzv. HILBERTŮV PROGRAM. Začátkem této periody vývoje základů matematiky byl ale vlastně již článek *Axiomatisches Denken* [1918], v němž Hilbert oprášil některé ze svých starších názorů a nápadů z období základů geometrie, jemuž jsme se věnovali v kapitole 5. Jedná se především o myšlenku axiomatického zdůvodnění matematiky a vědy vůbec.

Ta byla jasně formulována již v rámci jeho pařížské přednášky *Mathematische Probleme* [1900*b*], v druhém problému bezespornosti aritmetiky, především však v článku *Über den Zahlbegriff* [1900*a*]. Podle Hilberta lze spolehlivého, jistého vedení matematiky dosáhnout právě a pouze cestou postupné axiomatizace jednotlivých vědních odvětví a metadůkazů jejich bezespornosti. Ty jsou v případech jednotlivých disciplín obvykle umožněny převedením na bezespornost disciplín jiných, elementárnějších, což se Hilbertovi podařilo např. u geometrie konstrukcí analytického modelu. Na konci musí ovšem stát nějaký důkaz absolutní, což se zdá být zvláště nevyhnutelné právě v případě aritmetiky, nevyznáváme-li tedy stále ještě možnost její redukce na logiku, resp. teorii množin. V tomto byl Hilbert naštěstí realista, tj. nedělal si naděje, že by šlo logicistický projekt provozuschopně resuscitovat.

[4] Potvrzuje to jednak přímo v jednom ze svých dopisů Fregovi [1976, s. 79 n], a významněji, k Fregovu textu odkazuje později v jednom ze svých spisů [1922, s. 165].

Hilbert [1900a] srovnává axiomatickou metodu zavádění, resp. zdůvodňování pojmů s metodou genetickou, v níž se např. k reálným číslům dostáváme postupným rozšiřováním původního oboru skrze proveditelnost dalších a dalších operací, aniž bychom se ujistili, zda tento proces eventuálně nevede ke sporu. Fakt, že k tomu skutečně dochází v rámci Fregova rozšíření logické aritmetiky o množinový operátor, je pak Hilbertovi nejlepším důkazem, že je axiomatická metoda nadřazena metodám stávajícím, a představuje i lék na tehdy se objevivší paradoxy.

Jelikož jsme právě v kapitole 5, která se věnovala mezím logicistických a množinových definicí, provedli důkladnou kritiku Hilbertova axiomatismu a s ním spjaté ideje implicitní definice coby pochybného dítěte přehnané záliby v prázdných symbolech na straně jedné, a modelově-teoretického platonismu na straně druhé, můžeme se nyní ve světle upřesňujících poznámek této kapitoly věnovat vstřícnější interpretaci Hilbertova podniku. Vyjdeme při ní z toho, že mezi Hilbertovými axiomy a pojmy, které zachycují, existuje těsnější pouto nežli to, které očekáváme od 'náhodného' vztahu formule a jejího modelu, neboť Hilbert pravděpodobně nepředpokládá, že by onen axiomy definovaný model existoval předem. Vezměme např. následující citát [1900b, s. 301]:

> Soubor všech reálných čísel, tj. kontinuum, není při právě popsaném pojetí např. souhrnem všech desetinných rozvojů nebo všech možných zákonů, jimiž se řídí členy fundamentálních posloupností, nýbrž systém věcí, jejichž vzájemné vztahy jsou řízeny stanovenými axiomy a pro něž platí ty a pouze ty skutečnosti, které lze z daných axiomů odvodit konečným počtem logických pravidel.

Při troše dobré vůle zde můžeme rozpoznat artikulaci sémantického holismu, jenž je dokonce radikálnější než větný holismus Fregův, neboť nechává pojmy či předměty aritmetiky vyvstat nejen z vět, ale i z relací mezi nimi. Zmínili jsme dříve, že Frege takovou inferenční podmíněnost pojmů zmínil v úvodu svého pojmového písma, nikdy se ale k této myšlence v takto radikální podobě nevrátil. My jsme se nově rozhodli číst tímto prizmatem Hilbertův koncept implicitní definice, což znamená: nahradit její strukturalistickou interpretaci interpretací inferencialistickou, při uvážení všech výhrad uvedených dříve.

Podstatné totiž je, že některé z těchto výhrad můžeme nyní zmírnit či dokonce zrušit, např. právě pod vlivem Wittgensteinovy kritiky Frega. Hilbertem zdůrazněná konvenční povaha jeho axiomů, přezkoumávaných pouze co do bezespornosti, může ukazovat na onu pragmatickou změnu perspektivy, kterou v Hilbertově přístupu viděl instrumentalisticky orientovaný Poincaré. Takto dospějeme opět ke šťastnému spojení koherenčního aspektu pravdy (konzistence axiomů) s aspektem pragmatickým, a zbývá již jenom vysvětlit, jak se to má s její třetí, korespondenční složkou, totiž jakéže to poznání Hilbertovy axiomy vyjadřují, o čem (pravdivě) pojednávají, proč si zasluhují názvu aritmetické, geometrické a jiné. Fázi, kdy se této otázky snažil jednoduše zbavit jakožto irelevantní, metafyzické a nevědecké, překonal Hilbert právě v rozmezí zhruba třinácti let, v nichž ho pučista Brouwer a renegát Weyl donutili formulovat svůj základní postoj nanovo a v jasnějších konturách. Hilbert sám pro něj razil termín “finitistický” (*finite Einstellung*), zkráceně tedy FINITISMUS.

8.2 Problém jistoty

Hilbertovy postoje z pozdějších let jsou spjaty s několika frázemi, které pronikly do širšího povědomí, mezi nimi již zmíněné:

axiomatická metoda,

Hilbertův program,

finitismus,

metamatematika a

teorie důkazů.

Hilbert sám nicméně každou z nich zavedl spíše jako chytlavé heslo nežli detailně vysvětlený pojem či projekt. V praxi vše zůstává neostré a propletené, a ani my se zde nebudeme snažit táhnout nějaké ostřejší hranice. Vše budeme jednoduše označovat jako Hilbertův program, začínající třeba následujícími slovy [1923, s. 178]:

> Cílem mých zkoumání k novým základům matematiky není nic menšího nežli definitivní odstranění všech pochybností o jistotě matematického usuzování.

K potřebě “jistoty” se totiž Hilbert odvolává zcela pravidelně a v kontextu dříve citovaných pasáží (“na počátku byl znak”) tak svůj program explicitně rozvíjí v kategoriích hledání jistého počátku, tedy dvou epistemologických problémů, které Popper popsal jako nešvar tehdejší teorie vědy a v jistém smyslu i filosofie vůbec, a doporučil se jim coby pseudoproblémům spíše vyhnout, nežli je řešit. Nazvěme je PROBLÉMEM POČÁTKU a PROBLÉMEM JISTOTY.[5]

Obsahem těchto problémů je snaha o nalezení spolehlivé báze (*Basisproblem*), z níž by šlo odvodit veškeré skutečné poznání a oddělit je

[5] Popper [1935] hovoří primárně o problému indukce (*Induktionsproblem*) a problému ohraničení (*Abgrenzungsproblem*) empirických věd od ostatních. Jistota a počátek jsou vzhledem k nim problémy odvozenými.

tak od poznání zdánlivého. V tradici logického pozitivismu, k níž se Popper byť s výhradami hlásil, byla za toto nepochybné východisko nejprve považována sféra smyslových dat, ve zřejmé snaze eliminovat z oblasti smysluplných výroků věty filosofie, resp. všechno to, co Kant označil za syntetické *apriori*. *Apriori* samotnému byl udělen generální pardon v jeho analytické podobě, reprezentované především Fregovou a Russellovou logikou coby naukou o formách smysluplných vět, jak ji kanonizuje Wittgensteinův *Tractatus*. Analytické věty však přesto musely být právě pro svoji neempiričnost, 'nesmyslovost' označeny za nevlastní, smysluprázdné (*sinnlos*), když už ne přímo nesmyslné (*unsinnig*) jako věty metafyziky. Scientistický prvek pozitivistického hnutí samozřejmě vyžadoval i záchranu ostatních neempirických věd, jako byla matematika, což vyžadovalo jejich vynětí z kategorie syntetických vět, v posledku tedy uskutečnění Fregova plánu redukce aritmetiky na logiku, resp. jeho rozšíření o matematiku celou včetně geometrie. S ohledem na tento vývoj transformoval později Quine [1953, s. 20] Popperovy dva základní problémy teorie poznání do slavnější podoby dvou dogmat (logického) empirismu, totiž (1) o jistotě či bezprostřednosti čistě empirické, smyslové báze a (2) o ostrosti rozlišení syntetických a analytických pravd, tj. smyslové evidence a pojmových schémat. My v dalším výkladu vyjdeme z původních rozlišení Popperových, zužitkujeme ale i Quinovy postřehy.

Popperův vhled a následná korekce pozitivistického východiska spočívaly v tom, že jistota sama, přestože tradičně nahlížena jako charakteristický znak pravého poznání, je kritériem ryze subjektivním, které nemá s pravdou jako takovou co do činění, jak to ukazují tisícileté dějiny vědeckých hypotéz a omylů. Vykázat nějakou teorii jakožto jistou, upozorňuje Popper, je v principu možné kdykoli, za přijetí dostatečně drastických (imunizačních) opatření. Proto navrhuje, abychom namísto potvrzování hypotéz, tj. směřování k jistotě, za oficiální metodu stanovili jejich falsifikaci.

Problém tohoto jinak atraktivního návrhu spočívá v tom, že falsifikace je jen druhou stranou téže mince, neboť každé poznání můžeme zpochybnit jako nejisté. Žádný ze zákonů (klasické) fyziky, např. Newtonův první pohybový:

> tělesa zůstávají v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, nepůsobí-li na ně nějaké vnější síly,

není v přímém souladu se zkušeností, spíše naopak, pozemská tělesa mají sklon zvolnit a zastavit se, nebeská tělesa se zase nepohybují přímočaře. Zákon proto nelze vyvrátit, natož pak potvrdit pouhým pozorováním, tj. na bázi empirické zkušenosti. V uvedeném případě tomu explicitně zabraňuje dodatek o působení vnějších sil, neboť jakýkoli nepohodlný protipříklad můžeme označit za nepřípadný tím, že se na něm projevilo působení nějakých (zatím neznámých) sil. Takto bychom ale mohli docela dobře tvrdit, že se tělesa obvykle pohybují do spirály![6]

S pádem jistoty nepadá sama možnost pravdivého poznání, ale především představa, že zákony, jako jsou ty fyziky, které toto poznání mají vyjadřovat, nějakým přímočarým, snadno nahlédnutelným způsobem popisují náš svět.[7] Nechceme-li dopředu možnost objektivního poznání zcela vyloučit, což by bylo — jako u všech skeptických a relativistických úvah — jenom prázdné, teatrální gesto, spoléhající se pokrytecky na patřičně naladěné publikum, usoudíme nyní, že fyzikální zákony musí být v nějakém smyslu nutné, nevyvratitelné či *a priori* a že se tato jejich síla, podobně jako v případě zákona pohybového, skrývá v onom imunizujícím dodatku

> je to tak a tak, až na působení jiných sil.

Že se výsledně nejedná o tvrzení bezobsažné

> je to tak a tak, není-li tomu jinak,

zajišťuje právě vztah toho kterého zákona (1) k celku (dynamických) zákonů, jejichž prostřednictvím jsou ony v dodatku zmíněné síly dále specifikovány, a to (2) nikoli k celku náhodnému, ale k takovému, který se nějak osvědčil v procesu ovládnutí skutečnosti, při jejím (3) popisu vyhovujícím lidským potřebám a cílům. Takto jsou opět usmířeny (1) koherenční, (2) pragmatická a (3) korespondenční teorie pravdy, když brány osamoceně vedou po řadě k absurdním konsekvencím (1) absolutního racionalismu (pravda je to, co tvrdí některá z mnoha koherentních skupin vět), (2) utilitarismu (pravda je to, co se mi hodí) a (3) jalové metafyziky („A" je pravda, když A). Uvažovány ve vzájemné součinnosti tyto teorie jedna druhou doplňují a ospravedlňují, přesně ve smyslu následující Quinovy [1987, s. 214] poznámky:

> Koherence a korespondence, správně vzato, nejsou konkurenčními teoriemi pravdy, nýbrž doplňkovými aspekty. Koherenční

[6] Tento příklad Ludwiga Langeho cituje Frege v článku *Über das Trägheitsgesetz* [1891*a*], v němž navíc rozvíjí a anticipuje některé momenty Quinova holistického pojetí vědy, jak je zmíníme záhy. Srov. k tomu také můj článek Kolman [2003].

[7] Naivněrealistický výklad fyzikálních zákonů, doporučující např. těm, kdo pochybují o objektivitě zákonu gravitace, tj. o jeho přímém (deskriptivním), izomorfním vztahu k zobrazované skutečnosti, aby ji okusili na vlastní kůži skokem z okna, byl vlastně uveden do patřičných mezí již onou slavnou kauzou kocourkovského vrabce, odsouzeného za své zločinné krácení úrody ke shození z věže. Kocourkovští občané v zákonu správně rozpoznali preskriptivní, apriorní rysy, které nelze možnou zkušeností vyvrátit, a užili jej naopak jako výkladový princip, na jehož základě (uznávám, že ne příliš šťastně) usoudili, že se vrabec po pádu roztříštil tak, že po něm nezbylo zhola nic, a zvolený trest se jim pak zdál až příliš krutý.

> aspekt má co do činění s naším objevováním pravdy podle našich nejlepších schopností. Korespondenční aspekt má co dělat se vztahem pravd a tím, o čem jsou.

Nutnost souhry několika kritérií je také klíčem k pochopení toho, proč obvykle selhává i řešení druhého z Popperových pseudoproblémů, totiž problému počátku. Na rozdíl od problému jistoty ale tato otázka objektivně smysl dává a není nejmenšího důvodu, proč by ji nebylo možné úspěšně řešit. Její úskalí spočívá v tom, že si podobně jako filosofie empirismu naše východisko vymezíme příliš úzce (smyslová data) nebo jako realismus či platonismus naopak příliš široce (preexistující svět). Řešení plynoucí ze spojení obou, jazykového a pragmatického obratu, tkví v tom, že si na startovní čáru vezmeme pouze a jenom to, co již při 'zodpovídání čehokoli' předpokládat musíme, totiž stabilní jazykovou praxi neboli fakt, že se v převážné většině případů domluvíme. Tím obracíme atomistický přístup logického empirismu naruby a na jeho místo stavíme sémantický holismus.

U Hilberta je zřejmé to, že začal u oné skromnější, empiricko-syntaktické části pomyslného spektra, postupem času se ale značně přiblížil k námi preferovanému zlatému středu, aniž by se kdy vychýlil na druhou stranu. To není v jeho případě ani tak ctnost jako důsledek přílišného lpění na jistotě poznání, jejíž břemeno jej táhlo vždy k extrému empiricky vykazatelných jsoucen. Jejich základním rysem, stejně jako rysem našeho myšlení, je podle Hilberta [1923, s. 187] konečnost, neboť "když myslíme, probíhá konečný proces". V Hilbertově [1930, s. 381] pojetí také není matematika naukou o nekonečnu, jak se domnívali Cantor, Frege i Brouwer, protože

> nekonečno není nikde realizováno; nevyskytuje se ani v přírodě, ani je nelze bez dalších opatření připustit jako základ našeho myšlení. V tom spatřuji důležitou paralelu mezi přírodou a myšlením, podstatnou shodu zkušenosti a teorie.

Jelikož je podle Hilberta harmonie myšlení a světa zakotvená či zjednaná právě jejich konečností, stává se tato kritériem smyslu jakékoli věty, jinými slovy: pouze věty s konečným obsahem mají vůbec nějaký obsah. Reflexí na tento transcendentální poznatek dospívá Hilbert [1931, s. 486] k závěru, že "vedle zkušenosti a myšlení existuje ještě třetí zdroj poznání". Text pokračuje takto:

> Ačkoli dnes již nemůžeme souhlasit s Kantem ve všech detailech, nejobecnější a základní princip jeho epistemologie neztratil na významu: je třeba objevit postoj[8] apriorního názoru a skrze

[8] Hilbertův termín "Einstellung" se v tomto kontextu špatně překládá. V anglickém překladu, otištěném in Ewald [1996], je např. použit termín "mode of thought".

> něj zkoumat podmínky všeho poznání. Podle mého mínění se právě o to pokouším ve svých zkoumáních principů matematiky. *Apriori* zde není ničím více ani méně nežli základním postojem, který také nazývám postojem finitistickým: něco je nám dáno již předem v naší schopnosti reprezentovat: jisté mimologické konkrétní objekty existují názorně jakožto bezprostřední zkušenost před vším myšlením. Aby mohlo být logické usuzování jisté, musí být tyto objekty úplně přehlédnutelné ve všech svých částech, a jejich prezentace, rozdíly, vzájemná následnost či uskupení jsou nám spolu s těmito objekty bezprostředně a názorně dány jako něco, co nelze ani redukovat na něco jiného, ani takovou redukci nepotřebuje. Toto je základní postoj, který považuji za nutný pro matematiku a všechno vědecké myšlení a komunikaci, bez něhož by jakákoli myšlenková činnost nebyla vůbec možná.

Ačkoli text připouští vícero čtení, můžeme z něho vyvodit, že za podmínku poznání považuje Hilbert fakt jeho reprezentace v jazyce, a to především proto, že je to reprezentace konečná. Odtud také jeho devíza "na počátku byl znak". Tím se Hilbertovy filosofické názory dostávají do souladu s analytickým postojem, který zde systematicky hájíme, až na zmínku o "konečnosti" jazyka, poplatnou bezesporu dříve uvedené touze po jistotě. Právě s ohledem na ni je ale Hilbert všechno jiné než analytický filosof, neboť již tvrzení, že je jazyk konečný, musí být z transcendentálně-analytického pohledu stejně (ne)ospravedlnitelné, jako že je nekonečný, a má tedy čistě metafyzický charakter. Pojem konečnosti navíc pojem nekonečna předpokládá, a *vice versa*, v jistém smyslu tedy musíme uznat existenci nekonečného objektu (množiny přirozených čísel), abychom pak o jiném (jejich podmnožině) mohli hovořit jako o konečném.

Jak jsme řekli, mají podle Hilberta konkrétní obsah pouze tvrzení o kombinacích objektů vykazatelných v názoru, a to proto, že jsou finitní, a tudíž jistá. K takovým patří nejen jednoduché pozorovací výroky ("těchto pět koček je strakatých"), ale i výroky elementární aritmetiky

$$2 + 2 = 4,$$

které si můžeme ověřit na prstech ruky či na papíře. Právě a jenom díky nim je určitá část matematiky, nazývaná MATEMATIKOU FINITISTICKOU, ospravedlněna jako smysluplná. Hilbert [1922, s. 164] k ní počítá jak rozhodnutelnou bázi jednoduchých vztahů mezi numerály, tak (z ne zcela jasných důvodů) jejich schémata

$$x + y = y + x$$

a (což je již pochopitelnější) i výroky, které z nich vzniknou pomocí logických spojek a omezenou kvantifikací. Tento typ matematiky je nyní dán do kontrastu s její bezesporu větší a podstatnější částí, již Hilbert [1923, s. 182] nazývá MATEMATIKOU TRANSFINITNÍ a řadí k ní vlastně všechny výroky neomezeně kvantifikované, neboť "skrze ně opouštíme půdu finitního a vstupujeme do oblasti transfinitních úsudků".

Hilbert, který dosud držel *dictum* akceptovatelné i tím nezarytějším konstruktivistou, opakuje tamtéž dokonce kritiku Brouwerovu, např. když poznamenává, že úsudky jako vyloučený třetí, případně přechod

$$\neg(\forall x)\neg A(x) \;/\; (\exists x)A(x),$$

jsou odpozorovány z operací nad konečnými totalitami objektů. Jejich aplikací na nekonečné totality, usuzuje dále, otevíráme dveře omylům stejně, jako je otevřeli zakladatelé analýzy tím, že s nekonečnými součty zacházeli jako s konečnými.[9] Příčinu logických paradoxů lze pak snadno spatřit i v tom, že se k obecné, resp. existenční kvantifikaci $(\forall x)A(x)$, resp. $(\exists x)A(x)$ chováme jako k pouhému zobecnění konjunkce, resp. disjunkce

$$A(1) \wedge A(2) \wedge A(3) \wedge \cdots \qquad\qquad A(1) \vee A(2) \vee A(3) \vee \cdots.$$

Hilbertovo zpochybnění logických zákonů a matematických vět o ně opřených má, v kontrastu k postoji Brouwerovu, jistá specifika, z nichž vyvěrají i některé dodatečné problémy. Brouwer především existenci nekonečna nepopíral, a mohl o něm tedy hovořit jako o součásti obsahu příslušných vět. Hilbertovy názory na povahu obecných vět se v tomto ohledu podobají spíše Weylově [1921, s. 156] teorii nevlastních soudů, v níž je (klasické) existenční tvrzení přirovnáno k jakémusi větnému abstraktu (*Urteilsabstrakt*), papíru, na němž je tvrzena existence pokladu, aniž by bylo popsáno, kde kopat. Obecné tvrzení má zase charakter instrukce pro tvorbu dalších soudů (*Anweisung für Urteile*) a celá matematika se nakonec podobá jakési monstrózní 'papírové ekonomice', v níž mají pravou hodnotu pouze singulární tvrzení a tvrzení obecná jsou jimi pouze kryta, tj. vystupují zástupně. To se rovná postřehu, že model nějaké formální teorie, tj. teorie materiální, je určen již popisem (evaluací) všech elementárních vět, jak jsme to právě pro případ aritmetiky viděli v oddíle 7.1.

[9] Bylo podotýkáno, viz třeba Mancosu [1998, s. 154 n], že ve skutečnosti je Hilbertův projekt ve svém důrazu na efektivní metody mnohem radikálnějším konstruktivismem nežli mystické teorie Brouwerovy, a *de facto* připomíná spíše původní finitismus Kroneckerův. Hilbert se skutečně začal ke Kroneckerovu odkazu explicitně čím dále více hlásit. Dřívější výhrady, včetně výpadů vůči Brouwerovi, spočívaly bezesporu v tom, že si živě vzpomínal, jak zhoubně působil Kroneckerův dogmatický, útočný postoj na šíření myšlenek Cantorových.

S Weylem se Hilbert shoduje v tom, že transfinitní tvrzení, tj. výroky o nekonečně mnoha objektech, v posledku žádný reálný obsah nemají. Přesto jsou ale užitečné a mohou být jako takové i ospravedlněny právě na bázi finitistického kritéria, neboť — ač bezobsažné — mají pořád charakter konečné posloupnosti znaků! Heuristikou tohoto tahu je Hilbertovi [1923, s. 187] tzv. METODA IDEÁLNÍCH ELEMENTŮ nějaké teorie. Příměr sám je jasný: mnoho matematických teorií se zcela reálnou, hmatatelnou aplikací dosáhlo značného zjednodušení dodatečným přijetím ideálních, z povahy věci nezdůvodněných prvků. K Hilbertem často uváděným příkladům patří projektivní geometrie, kde připojení nových bodů v nekonečnu umožňuje např. tvrzení, že každé dvě přímky, včetně rovnoběžek, určují bod, a tím pádem platí zákony duality (dva různé body vždy určují přímku vs. dvě různé přímky vždy určují bod apod.).[10] V algebře pak zase vedlo zavedení prvku $\sqrt{-1} = i$ k reformulaci základní věty algebry v tom smyslu, že ke každému komplexnímu polynomu n-tého stupně existuje právě (tj. nikoli jen nejvýše) n komplexních kořenů (včetně případného opakování).

Hilbertova strategie, jak zachránit klasickou matematiku, spočívá nyní v tom, že chce její transfinitní část předvést jako ideální ve vztahu k její části finitistické, reálné, tj. jako takové rozšíření, které nevede k žádným potížím, ba naopak, představuje jednoznačný přínos. Ten nelze samozřejmě měřit v obecných termínech, v případě transfinitních úsudkových schémat bude ale zajištěn již následným zjednodušením povolených úsudkových a důkazových přechodů, jak jsme o něm mluvili dříve, např. při srovnání Cantorova a Brouwerova přístupu k základům matematiky. Veškerá motivace takto zvoleného východiska bude čistě pragmatická, a v případě úspěchu se tak intuicionistovy stížnosti redukují na fanatikův rozmar. Slovy Weylova příměru: papírová ekonomika se ukáže být úspěšným rozšířením ekonomiky skutečné a odmítnout ji lze jenom z ideologických, nikoli věcných důvodů.[11]

Zatímco posouzení přínosu ideálního rozšíření teorie závisí na konkrétním případu, je základní typ potíže odhadnutelný předem: rozšířená teorie se může stát sporná. Jelikož, jak jsme viděli v kapitole 5, podle Hilberta nelze z obecně logického hlediska pro danou teorii učinit více nežli zajistit její konzistenci, spočívá ospravedlnění transfinitních vět a

[10] Tzv. nevlastní body projektivní roviny lze ztotožnit se směry přímek v rovině původní, díky čemuž se automaticky dvě přímky téhož směru (rovnoběžky) protínají v tomtéž bodě. Dva vlastní body a jeden vlastní a nevlastní bod určují vždy vlastní přímku. Dva nevlastní body oproti tomu určují přímku nevlastní, složenou ze všech nevlastních bodů. Vlastní a nevlastní přímka se takto protínají v bodě odpovídajícím směru přímky vlastní.

[11] Historické námitky proti papírovým penězům spočívaly v tom, že na rozdíl od zlata nemají žádnou hodnotu, což lze okamžitě demonstrovat jejich spálením. Výhody bankovek jsou ale zřejmé: jsou snadno přenosné a lze kontrolovat jejich oběh. Zlato *per se* žádnou hodnotu přirozeně také nemá, je ale vzácné a třpytí se.

úsudků matematiky jednoduše v tom, že o jejich axiomatizaci dokážeme finitistickými prostředky, že je bezesporná, tj. učiníme z této bezespornosti obsah reálného tvrzení o konkrétních posloupnostech znaků. Právě to je náplní Hilbertem [1922, s. 174] objevené METAMATEMATIKY (*Metamathematik*), redukované v posledku na TEORII (formálních) DŮKAZŮ (*Beweistheorie*) toho, že v nějaké formální teorii není formálně odvoditelná sporná formule. Metamatematice samotné předchází formalizace VLASTNÍ MATEMATIKY, tj. její proměna v MATEMATIKU FORMÁLNÍ coby systém generování bezobsažných (posloupností) znaků, objektů našeho konečného názoru. Hilbertovými [1923, s. 179 n] slovy:

> K vlastní, takto formalizované matematice pak přistupuje matematika do značné míry nová, metamatematika, nutná k jejímu zajištění, v níž — v protikladu k čistě formálním úsudkům vlastní matematiky — přichází ke slovu obsažné usuzování, které ale slouží pouze k prokázání bezespornosti axiomů. V této metamatematice používáme pouze důkazy vlastní matematiky, které jsou samy předmětem obsažného usuzování.

Zde Hilbert vlastně jen opakuje Fregův názor, že čistě formální matematika, tj. matematika prostá jakéhokoli obsahu, není možná, neboť obsah musí mít alespoň její teorie. Hilbert však zároveň klade důraz na to, že tento obsah nevybočí ze sféry názorného a že se omezuje pouze na konečné znaky a operování s nimi. Zajímavější je závěrečná věta uvedeného citátu, totiž že nejen formalizovaná, ale již vlastní matematika používá čistě formální, a tedy schematické postupy, a že se tím od ní v důsledku liší jenom kosmeticky. Tím se částečně vysvětluje Hilbertovo rozčarování z Gödelova objevu.

8.3 Hilbertův program

Prostá formulace Hilbertova programu, jak ji nacházíme především v jeho *Neubegründung der Mathematik* [1922], spočívá ve

(1) formalizaci jazyka vlastních matematických, ale i jiných disciplín (fyziky, biologie),

(2) jejich převedení do axiomatického tvaru a

(3) následném důkazu bezespornosti příslušných formalismů finitistickými prostředky.

Jelikož Hilbert považoval body (1) a (2), resp. jejich možnost, za garantované svým transcendentálním finitismem, zbývala jako netriviální část (3). Na ni se v oblasti aritmetiky a analýzy soustředili jeho žáci a spolupracovníci Wilhelm Ackermann a John von Neumann. Paul Bernays, jenž byl roku 1917 povolán z Zürichu do Göttingen jako Hilbertův asistent, se navíc zasloužil o rozvedení myšlenek Hilbertova programu a jejich zasazení do širšího filosofického rámce.[12]

Jelikož část aritmetiky byla finitní i svým obsahem, a tudíž triviálně bezesporná, šlo vlastně o to prokázat relativní bezespornost jejího transfinitního rozšíření, což je obvykle vyjadřováno podmínkou jeho konzervativnosti:

> Teorie T v jazyce L_T je KONZERVATIVNÍM ROZŠÍŘENÍM teorie $S \subseteq T$ v jazyce $L_S \subseteq L_T$, jestliže každá formule v jazyce L_S odvoditelná v T je odvoditelná již v S.

Výhoda ideálních rozšíření reálných teorií spočívá často právě v tom, že mají některé teorémy původní teorie v teorii nové podstatně kratší nebo názornější důkaz. Při zajištěné konzervativnosti může tedy přechod do ideálního rozšíření ušetřit značnou část práce, jak je tomu např. ve vztahu afinní a projektivní geometrie. Jelikož konzervativním rozšířením bezesporné teorie musí být opět teorie bezesporná, představuje pro nás pojem konzervativnosti spojení pozitivní části metody ideálních elementů s částí negativní, tj. výhodu zjednodušení úsudkových postupů se zamezením nebezpečí sporu.[13]

Obhajoba klasické matematiky se v Hilbertově projektu soustředí na tzv. transfinitní axiomy, ovládající klasické užití kvantifikátorů:

$$(\forall x)\varphi \to \varphi, \qquad \varphi \to (\exists x)\varphi, \qquad \neg(\forall x)\varphi \to (\exists x)\neg\varphi \qquad \text{atd.}$$

Důkazem bezespornosti těchto zákonů má být především ospravedlněn vyloučený třetí v aplikaci na nekonečné obory. Vlastní provedení tohoto plánu, o něž se opírají i některé dílčí výsledky Ackermannovy a von Neumannovy, závisí na Hilbertově myšlence ϵ-KALKULU. Ten vznikl rozšířením finitních fragmentů aritmetiky a logiky, tj. fragmentů bez kvantifikátorů, o speciální typ operátoru, jenž v aplikaci na predikáty vytváří jména. Hilbert [1923, s. 183] přitom nejprve pracoval s tzv. τ-OPERÁTOREM, jehož funkce je neformálně popsána tak, že v aplikaci na predikát $A(x)$ 'vybírá' $\tau_x A(x)$ takové, že

(τ) $A(\tau_x A(x)) \to A(x)$,

[12] Mancosu ve své antologii [1998] velice šťastně kombinuje výbory z Hilbertových článků s pracemi Bernaysovými, čímž poukazuje na fakt, že mnohé z Hilbertem letmo načrtnutých myšlenek lze nalézt u Bernayse velmi podrobně rozpracovány, často i o mnoho let dříve, než je Hilbert publikoval. To samozřejmě neznamená, že nepocházejí od Hilberta, či že jím nebyly alespoň inspirovány.

[13] K formulaci Hilbertova programu v termínech konzervativnosti srov. např. Potter [2000, s. 226] či Smith [2007, s. 252 nn].

neboli takový prvek univerza, u něhož splnění podmínky A garantuje, že ji splňují všechny prvky. Lze také říci, že τ-operátor má určovat protipříklad k A, pokud takový existuje. Hilbert ve své ilustraci uvažuje vlastnost ‘podplatitelnosti’, k níž pak operátor τ vybírá člověka takové osobní integrity, že ve společnosti, v níž je podplatitelný on, je již podplatitelný každý. Od roku 1925 začal Hilbert používat tzv. ϵ-OPERÁTOR, jehož užití je řízeno axiomem

$$(\epsilon) \quad A(x) \rightarrow A(\epsilon_x A(x)).$$

Zaváděný operátor tentokráte k dané vlastnosti A vybírá nějaký objekt $\epsilon_x A(x)$, jenž ji splňuje, pokud nějaký takový vůbec existuje, a plní tedy roli jakési výběrové funkce. Z neformálního významu, jenž je s operátory spojen, již plyne platnost následujících vztahů, které jsou z hlediska formálního pouhými definicemi, totiž

$$(\forall x)A(x) \rightleftharpoons A(\tau_x A(x)) \qquad (\exists x)A(x) \rightleftharpoons A(\epsilon_x A(x)),$$
$$(\exists x)A(x) \rightleftharpoons A(\tau_x \neg A(x)) \qquad (\forall x)A(x) \rightleftharpoons A(\epsilon_x \neg A(x)).$$

Poslední vztah např. zdůvodníme tak, že platnost vlastnosti $A(x)$ o objektu $\epsilon_x \neg A(x)$, který ji nesplňuje, není možná, žádný takový objekt tedy neexistuje, a $A(x)$ takto platí pro všechny objekty univerza. Tato a podobné úvahy jsou ale jenom pomocné a pro celou věc nemají podstatný význam, neboť nás oficiálně nezajímá nefinitní obsah příslušných vztahů (jenž navíc podle Hilberta ani neexistuje), ale jejich finitní, syntaktické vlastnosti. Z tohoto úhlu pohledu nám především stačí, že jsou z uvedených definicí a axiomu (ϵ) odvoditelné všechny ‘transfinitní’ axiomy. Důvod jejich nahrazení axiomem (ϵ), resp. přechod od predikátového počtu k ϵ-kalkulu, spočívá v tom, že v druhém z nich lze ϵ-termy nahradit numerály, a převést tak problém konzistence transfinitního systému na konzistenci systému bez kvantifikátorů.

Výše uvedené transfinitní axiomy ovšem zahrnují pouze přechody čistě logické. Jelikož klasická matematika pracuje i se zcela specifickými nekonečnými úsudky, k nimž paradigmaticky patří úplná indukce, je třeba ϵ-kalkul rozšířit o nekvantifikovanou variantu tohoto principu

$$\epsilon_x A(x) = s(a) \rightarrow \neg A(a).$$

Na neformální rovině se zde vlastně jedná o princip nejmenšího čísla, který je s principu indukce klasicky ekvivalentní a tvrdí, že k číselné vlastnosti $A(x)$, kterou něco splňuje, existuje nejmenší číslo této vlastnosti, neboli $(\exists x)A(x) \rightarrow (\exists x)[A(x) \wedge (\forall y < x)\neg A(y)]$.[14] Detaily vlast-

[14] K odvození principu indukce je zapotřebí ještě přidat tvrzení, že má každé číslo jiné než nula přímého předchůdce, které má ovšem existenční charakter. Hilbert proto zavádí pomocnou funkci δ a axiom $\delta(s(x)) = x$, tedy inverzi k funkci s, a rozšiřuje

ního provedení důkazů bezespornosti ϵ-kalkulu přenechejme příslušné literatuře[15] a zmiňme již jen několik detailů.

Rozšíření ϵ-kalkulu na matematickou analýzu mělo být dosaženo eliminací kvantifikace proměnných vyššího řádu, tj. aplikací ϵ-operátoru na funktorové proměnné. O důkaz bezespornosti analýzy se přitom pokusil Ackermann [1924] v rámci své disertace psané pod Hilbertovým vedením. Ačkoli si záhy uvědomil, že jeho důkaz není bezchybný, věřil, že dokázal alespoň bezespornost aritmetiky. Teprve von Neumann [1927] poukázal na to, že byla dokázána pouze bezespornost jejího fragmentu s indukcí omezenou na formule bez kvantifikátorů. V článku kromě toho předvedl vylepšení Ackermannových metod, aniž by však dosáhl kýženého cíle. Na Hilberta [1929, s. 229] nicméně jednotlivé dílčí úspěchy zapůsobily natolik, že vítězně označuje bezespornost aritmetiky za dokázanou a bezespornost analýzy za otázku doplnění několika technikalit. S jejím vyřešením by měla přijít i bezespornost axiomů teorie množin.

Mezi problémy, které teorii důkazů ještě čekají, Hilbert [1929, s. 232] explicitně zmiňuje úplnost logiky a aritmetiky. Tím dostává jeho program širší obrysy, naznačené ovšem již jeho článkem o axiomatické metodě [1918, s. 153], v němž otázku bezespornosti řadí do společnosti spřízněných epistemických problémů a výslovně jmenuje

> problém principiální *řešitelnosti každé matematické otázky*, problém následné *kontrolovatelnosti* výsledku, dále otázku *kritéria jednoduchosti* matematických důkazů, otázku vztahu *obsahu a formalismu* v matematice a logice a konečně problém *rozhodnutelnosti* matematické otázky konečným počtem operací.

Poslední bod vstoupil do dějin logiky jako tzv. ENTSCHEIDUNGSPROBLEM, a to zejména proto, že byl v Hilbertových a Ackermannových *Grundzüge der theoretischen Logik* [1928, § 11] (dále zpravidla "Grundzüge"), představujících první moderní učebnici této disciplíny, označen za hlavní problém (tehdejší) matematické logiky.

My již víme, že 'problém rozhodnutí' byl o něco později v oblasti logiky a aritmetiky negativně vyřešen Churchem [1936a], [1936b]. Situace se ale zprvu pro onen šířeji pojatý program nevyvíjela nijak nepříznivě, ba naopak: vše se zdálo potvrzovat Hilbertův optimismus. Bernays [1918] již ve své habilitaci ostrým rozlišením syntaxe a sémantiky rozvedl ještě před Postem důkaz sémantické i syntaktické (Postovy) úplnosti zvolené

kalkul o formuli $a \neq 0 \to a = s(\delta(a))$. Viz Hilbert [1922, s. 174], [1923, s. 188] a Bernays [1935, s. 209]. Historické a filosofické aspekty programu, především s ohledem na teorii důkazů, mapuje sborník Hendricks *et al.* [2000]. Svérázným příspěvkem k otázkám vývoje finitismu je Gauthier [2002].

[15] Stručný přehled o průběhu, úspěších a neúspěších Hilbertova programu podává Bernays [1935]. Užitečný je také text Mancosu *et al.* [2005].

axiomatizace výrokové logiky, z jejíž korektnosti pak usoudil na bezespornost a hilbertovskou metodou rozdílných interpretací dokázal nezávislost jejích axiomů.[16] Název 'Entscheidungsproblem' pochází od Heinricha Behmanna [1922], jenž pod ním uveřejnil výsledek, který sice již dříve nezávisle objevili Löwenheim [1915] a Skolem [1920], Behmann jej nicméně prezentoval metodou tzv. ELIMINACE KVANTIFIKÁTORŮ, která se velmi úspěšně ujala. Jednalo se přitom o důkaz tvrzení, že je rozhodnutelná monadická logika, tj. logika jednomístných predikátů druhého, a tím pádem i prvního řádu. Tento výsledek byl následován celou řadou důkazů bezespornosti některých fragmentů predikátové logiky, jejichž průběžný seznam obsahuje právě Hilbertova a Ackermannova učebnice. Poté, co Presburger [1929] dokázal úplnost svého fragmentu aritmetiky, byla tato spojitá linie pozitivních metamatematických výsledků korunována Gödelovým [1930] důkazem úplnosti predikátové logiky, aby ji hned nato přeťal výsledek o neúplnosti, ba nezúplnitelnosti aritmetiky od téhož autora, pod názvem *Über formal unentscheidbare Sätze der 'Principia Mathematica' und verwandter Systeme* [1931].

Ačkoli závěry týkající se dopadu Gödelova výsledku na Hilbertův program a filosofii matematiky obecně budeme moci vyvodit až poté, co jej alespoň v náčrtu předvedeme, můžeme říci něco k samotnému historickému pozadí tohoto objevu, které je více než pozoruhodné. K problému úplnosti logiky se Gödel dostal přes Hilbertovy a Ackermannovy *Grundzüge*, v nichž je zmíněn jako nevyřešený. Poté, co jej roku 1929 ve své disertaci zvládl (a o rok později vydal), se pustil do dalšího problému, jímž byla bezespornost analýzy, neboť bezespornost aritmetiky byla podle Hilberta již prakticky dokázána. Zkusmá redukce bezespornosti analýzy na aritmetiku vedla Gödela k možnosti kódování syntaxe, na jehož základě dospěl úvahou podobnou té, skrývající se za paradoxem lháře, ke konstrukci pravdivé věty aritmetiky, která není dokazatelná v systému *Principia Mathematica.*[17] Tento postřeh pak zmínil v září roku 1930 na konferenci v Královci, kde si jej povšiml von Neumann.[18] Ten si pak v následujících týdnech uvědomil, že z Gödelovy konstrukce lze vyvodit přímé důsledky pro Hilbertův program, neboť onou pravdivou, leč nedokazatelnou větou může být tvrzení vyjadřující konzistenci systému. Gödel mezitím dospěl k témuž závěru sám a formuloval jej ve zmíněném článku.

[16] Detaily in Mancosu *et al.* [2005, s. 64].

[17] Viz Kleenův komentář in Gödel [1986, s. 127 nn].

[18] Konference byla věnovaná třem dominujícím proudům tehdejšího výzkumu základů, totiž logicismu, zastoupenému Carnapem, intuicionismu, jejž reprezentoval Heyting, a formalismu, reprezentovanému von Neumannem. Gödel na ní prezentoval výsledek své disertace, poznámku o existenci pravdivých vět neodvoditelných v bezesporné formalizaci aritmetiky utrousil později, během diskuze. Viz Dawsonův komentář in Gödel [1986, s. 196 nn].

Hilbert, který pravděpodobně nebyl Gödelovu vystoupení přítomen, měl den poté rovněž v Královci u příležitosti udělení čestného občanství města slavnostní řeč,[19] končící slavným zvoláním:

> Wir müssen wissen, wir werden wissen!

Zpráva o Gödelově konstrukci tedy musela působit jako blesk z čistého nebe. Podle Bernaysova vyjádření byl Hilbertovou bezprostřední reakcí na Gödelův objev čirý vztek.[20] Přirozeně bylo ale předčasné házet flintu do žita, tj. dalo se docela dobře očekávat, že se podaří najít nějakou chybu, případně uvést celou věc na pravou míru, k čemuž také Hilbert vyzval své asistenty. Stále navíc panovala značná nejistota ohledně šíře zvolených finitistických prostředků a sám Gödel si vlastně nebyl jist dosahem svého objevu, a to ze stejných důvodů, z nichž zprvu nepovažoval svůj pojem (primitivně) rekurzivní funkce za adekvátní prostředek vystižení pojmu efektivity.

Inkriminované tvrzení, které mohlo ohrozit Hilbertův program, přitom v obvyklé formulaci říká, že

> důkaz bezespornosti formalizované aritmetiky nelze vést v tomto systému samotném, je-li bezesporný.

Podstata Gödelova důkazu spočívá právě v tom, že v jistých dostatečně silných axiomatických systémech lze prostřednictvím kódování syntaxe dokazovat 'věty' o dokazatelnosti v těchto systémech samých, tedy že je aritmetika od jisté úrovně sebevztažná. K negativnímu závěru ohledně Hilbertova programu bychom dospěli poté, co bychom uvěřili, že jsou takovouto dokazatelností vyčerpány všechny finitistické metody důkazu, neboť nemožnost odvození se teprve pak rovná nemožnosti odvození finitistického. Je přitom celkem možné, ba pravděpodobné, že Hilbert takovouto tezi zastával — vzpomeňme jen jeho předpoklad, že již vlastní matematika postupuje čistě formálně, podle fixní sady pravidel. Na zcela obecné rovině Hilbert [1929, s. 233] tento názor formuluje takto:

> Je potvrzeno, jak to možná předvídal již Aristotelés, že náš rozum nepoužívá žádných tajných cest, ale postupuje vždy podle dobře určených a artikulovatelných pravidel. A to je současně garantem absolutní objektivity jeho souzení.

I zde je ovšem možné velkorysejší čtení, jak se k němu ještě záhy dostaneme v souvislosti s analýzou Hilbertova axiomatismu. Asi tři měsíce po královecké konferenci Hilbert navrhl v rámci přednášky publikované

[19] Byla otištěna jako Hilbert [1930].

[20] Bernays to sdělil v korespondenci Constanci Reidové, která připravovala Hilbertův životopis. Viz Reid [1970, s. 198 n].

později jako [1931] rozšířit svůj systém o ω-pravidlo, které lze bez dalších omezení stěží považovat za finitistické. Když pak roku 1936 předvedl Gentzen důkaz bezespornosti $\mathfrak{PA}$, který považoval za konstruktivní v širším slova smyslu, tj. s využitím jistých relativně spolehlivých, leč transfinitních principů, byl již osud původního projektu zpečetěn. Uvidíme, že to nutně neznamená demisi celého programu, ale podnět k jeho radikální reformulaci.[21]

Postupné opouštění striktní finitnosti ve smyslu 'přímé vykazatelnosti v názoru' nastalo každopádně již dříve, a to v okamžiku, kdy byla k užitým prostředkům přibrána primitivně rekurzivní aritmetika, která je k provedení Gödelova důkazu nezbytná.[22] Platí např., že ačkoli se jedná o primitivně rekurzivní funkci, mocnina dvou rukou zapsatelných a očima přehlédnutelných čísel již přehlédnutelná být nemusí a kontrola následného výpočtu, pokud bude vůbec fyzicky možná, je všechno jiné než "jistá" v jakémkoli smyslu toho slova. Bernays [1935, s. 210] si jako jeden z mála uvědomil, že slabina Hilbertova programu se skrývá již v původním očekávání jistoty, s nímž byl důkaz bezespornosti od počátku spjat a kterému nešlo vyhovět prakticky žádným představitelným způsobem:

> Přes intenzivní pokusy a navržené důkazové postupy jsme nedospěli k požadovanému cíli. Postupně byla zklamána všechna naše očekávání, přičemž se také prokázalo, že nebezpečí omylu je v oblasti metamatematických úvah obzvláště velké.

Zajímavé je, že se k prastarému zdůvodnění axiomů (konečnou) evidencí uchýlil právě Hilbert, jenž chtěl původně z bezespornosti učinit kritérium, které by nahradilo vágní odkazy k subjektivnímu názoru poukazem na objektivní fakt neodvoditelnosti jisté formule. Otázky vztahu jistoty či efektivity přijatých deduktivních metod k pravdivosti vět, kterou mají zdůvodnit, jsou přitom velmi delikátní.

Tak např. pravdivá tvrzení, která nejsou podle Gödelových vět odvoditelná v Peanově formalismu, jsou přesto, že se postupem času podařilo najít přirozenější případy (např. Goodsteinovu a Ramseyho (zesílenou) větu), značně umělá, tj. převážná většina aritmetických vět, jejichž pravdivost je známa, v tomto jednoduchém výrazovém systému odvoditelná je. Lze tedy očekávat, že to bude i případ dosud nerozhodnutých tvrzení, jako je Goldbachova domněnka. Z teoretického hlediska by tak — v souladu s Leibnizovým snem o nahrazení myšlení počítáním — stačilo

[21] Tomu by dále nasvědčovalo, kdyby k inkriminované úpravě Hilbert dospěl nezávisle na Gödelově výsledku. Podle Bernayse [1935, s. 215] tomu tak skutečně bylo, Feferman ve svém komentáři in Gödel [1986, s. 209 n] ale upozorňuje na rozpor tohoto vyjádření s Bernaysovými dopisy Reidové.

[22] Srov. Potterův [2000, s. 242] komentář k Bernaysovu pozdnímu vymezení finitismu.

strojově generovat všechny teorémy $\mathfrak{PA}$ a těšit se, že se tak časem většina pravdivých vět aritmetiky potvrdí, a to způsobem nad jiné jistým. Problém je ale (1) jednak ve zmíněném prostoru a času, neboť formální důkaz příslušného teorému bude pravděpodobně velmi dlouhý a velká část procesu tak jako tak padne na generování zcela nezajímavých pravd či truismů jako "$1 = 1$ nebo je každé sudé číslo větší než dvě součtem dvou prvočísel", (2) jednak v rozpoznání samotného výsledku jako 'zajímavého', neboť tento rys může příslušná formalizace podstatně zastřít, a (3) jednak v důvěře, kterou dáme příslušnému stroji a jeho programátorovi, neboť faktická kontrola výsledku lidskými silami bude nespolehlivá stejně jako každý náš pokus ověřit třeba jen několikastránkový výpočet.

Možnost generování aritmetických pravd strojem není takto nepodobná myšlence, že by bylo např. možné 'objevovat' zajímavé skladby procházením všech možných kombinací tónů. Ta je snadno nahlédnutelná jako utopická, neboť zde přirozeně vidíme obrovský podíl původní invence, neredukovatelné na předem dané postupy a přijatá omezení. Gödelovy věty můžeme nyní vidět jako upozornění, že cosi podobného platí i v matematice, s tou výhradou, že se to 'oficiálně' dokázat nedá. Motivace našeho posledního argumentu byla navíc ekonomická: myšlenka dokazovat či komponovat na bázi čistě kombinatorických principů je neproveditelná prakticky, tj. kromě sterility vlastní celému podniku není ani velká šance, že se nám v rozumném horizontu podaří něco užitečného, pravdivého či pěkného objevit. Cesta k úspěchu je nutně doprovázená nejistotou dosud nevyzkoušených postupů a metod.

8.4 Axiomatismus a inferencialismus

Stejně jako Hilbertův princip řešitelnosti každého matematického problému nebyl ani Hilbertův program čirou utopií, která potřebovala dostat za vyučenou zjevením Gödelových vět — jakési novodobé kritiky (mezí) lidského rozumu. Naopak, Hilbertovu pozici spolu s ohlašovanou harmonií myšlení a světa bylo od počátku možné chápat jako stanovisko zdravého racionálního optimismu, jenž si je vědom toho, že matematické a jiné otázky, které si klademe, jsou otázky naše, a proto musí mít řešení v rámci možností, jimiž disponujeme, a že jakýkoli pokus delegovat jejich pravdivost na nějakou třetí, záhrobní stranu, která je nám v principu nepřístupná nebo je přístupná jen několika vyvoleným/samozvaným jedincům, nemá o nic větší oprávnění než pokus opačný či jakýkoli jiný.

Jistota řešitelnosti každého problému je tedy jistotou transcendentální, oprávněnou, právě proto se ale také vztahuje pouze na problémy 'skutečné', nikoli pseudoproblémy filosofické či jiné metafyziky, v matematice reprezentované teorií množin. K jejich odlišení neexistuje žádné pevné kritérium, je zapotřebí zkušenosti a na ní založené soudnosti (*Ur-*

teilskraft). Chyba Hilbertova přístupu spočívala v tom, že v taková pevná kritéria věřil a domníval se je odvodit z konečnosti lidského poznání. Jeho argumentace je přitom velmi jemná a lze ji rozložit do několika základních kroků. Východisko přitom vypadá docela rozumně:

(1) Zatímco oblast lidského poznání, případně jazyka, je potenciálně nekonečná, přinejmenším v tom smyslu, že ji netvoří pouze omezené množství vět, naše reálné možnosti omezené jsou, a lze tedy usoudit, že v důsledku pracujeme vždy na bázi nějakých snadno uchopitelných konečných pravidel. Taková pravidla se ve skutečnosti skrývají za vším, co děláme, specificky tedy za použitím našich slov. Ta si sice osvojujeme na konečném počtu případů, postupně však jejich užití rozšiřujeme na potenciálně nekonečnou oblast, čímž nemíníme nic jiného, nežli že jsme schopni tato slova ve shodě s územ některým (dosud nezakušeným) fenoménům připisovat, některým odepírat.

(2) Není obtížné přesvědčit se, že jednotlivá slova mají význam teprve ve spojitosti se slovy jinými. V oblasti matematiky, např. geometrie, kde toto pozorování učinil Hilbert, je to zvláště transparentní: přidání axiomu k axiomům jiným vede k významovému posunu jednotlivých termínů (přímka, bod), a ty tedy ve svém obsahu závisejí na větném celku. Tento postřeh lze sice získat levněji, např. na relačních slovech jako "stát vedle" apod., odkud pak již vede cesta k 'samostatným' slovům, jako je "Napoleon" či "Eiffelova věž", Hilbertova cesta ovšem zakládá rovnou holismus inferenční, neboť význam slov není určen náhodným souborem vět, ale celým deduktivním systémem, tedy úhrnem všech důsledků příslušných prvních premis.

(3) Mírnější, a proto i obecnější verze holismu, totiž holismus větný, je přítomna a rozpracována ve Fregově filosofii matematiky a jazyka, podle níž má slovo význam pouze v kontextu věty, resp. systému vět, pro něž byly dány podmínky pravdivosti. Hilbertův základní postřeh spočívá v tom, že vzhledem k principiálně nekonečné povaze příslušného větného systému, jako je např. v oddíle 7.1 popsaný $\mathsf{N} = \langle T_{\mathsf{N}}, S_{\mathsf{N}} \rangle$ elementární aritmetiky, musí být ono ohodnocení dáno nějakým konečným způsobem. Proti tomu nelze nic namítnout a je to i v souladu s naší specifikací pravdivostních hodnot vět z N pomocí algoritmů a Tarského definice. Hilbertovi byl ale tento popis až příliš velkorysým. V jeho pojetí musí být onen konečný způsob identický se způsobem axiomatickým v nějakém přísně finitistickém smyslu. Naše myšlení, usuzuje, musí být axiomatizovatelné již proto, že je konečné, a axiomaticky tedy postupuje tak jako tak, byť nám nejsou jeho první premisy a seznam základních úsudkových principů zprvu známy, tj. zůstávají implicitní. Podstatné je, že lze tyto základní zákony našeho myšlení *ex post* odkrýt a fixovat. Hilbertovi tedy jeho finitismus slouží jako transcendentální zdůvodnění axiomatismu. Čteme-li ho inferencialisticky, máme zde před sebou pokus o jakousi transcendentální dedukci jistého pohledu na jazyk a svět.

Projdeme-li si nyní ještě jednou právě uvedené tři body, lze říci, že Gödelovy věty prokázaly Hilbertovu programu stejnou službu jako diagonální lemma teorii primitivně rekurzivních funkcí, tj. ukázaly, že se jedná o pojetí příliš úzké, které nemůže konkurovat původnímu, ne zcela efektivnímu popisu systému N skrze Tarského definici. Hilbertovo pozdější přijetí ω-pravidla $A(1), A(2), \ldots / (\forall x)A(x)$ je vlastně také uznáním oprávněnosti tohoto širšího způsobu ohodnocování vět, které může být rovněž nazýváno axiomatickým, již ale ne v původním efektivním či finitistickém stylu, neboť specifikem Tarského definice, jehož je ω-pravidlo instancí, je připuštění nekonečně mnoha formulí, resp. vět v antecedentu. Hilbertův krok je ovšem i uznáním nezbytnosti rozlišit mezi teorií formální, interpretovatelnou, a teorií materiální, odkazující na specifický obor hodnot proměnné, v tomto případě 1, 2, ..., tj. i uznáním nezbytnosti rozlišit syntax od sémantiky. Na konečnosti popisu ohodnocení skrze takto šířeji pojatý axiomatický systém se přitom nic nemění, výsledek se pouze vymyká efektivní (tedy i radikálně empirické) kontrole, což odpovídá dříve popsané doktríně sémantického platonismu, kterou lze ostatně ospravedlnit již na bázi každodenní zkušenosti, s jejím rozdílem mezi pravdou poznanou a zatím neověřenou. Ačkoli je Hilbertova rámcová myšlenka inferenčního zdůvodnění pojmů a vět tímto upřesněním nezasažena, stále se je třeba mít na pozoru před dalšími, neadekvátními specifikacemi.

Jednou z prominentních je např. Davidsonův [1967*b*], [1984] program vypracování teorie významu pro přirozené jazyky, vycházející z toho, že mají syntakticko-sémantickou strukturu predikátového kalkulu, s komplexními větami ohodnocenými v zobecněné formě rekurzivně-axiomatické definice. Věty, v nichž je např. predikát modifikován příslovcem,[23] typu:

Petr běžel rychle směrem Paříž,

z nichž bychom obvykle usoudili na

Petr běžel rychle, případně Petr běžel směrem Paříž,

což nám obvyklá analýza uvedených vět jakožto elementárních tvrzení typu $F(N)$ neumožňuje, navrhuje Davidson přizpůsobit Tarského paradigmatu zavedením kvantifikace přes události, kdy se ‘objektem’ uvedené věty stane Petrovo běžení, a ona pak vypadá takto:

$(\exists x)(x$ je Petrovo běžení $\wedge\ x$ je rychlé $\wedge\ x$ je směrem Paříž).

Proti této konkrétní analýze nelze nic namítat, jak ale upozorňuje třeba Stekeler-Weithofer [2006], prohlašuje-li ji Davidson za obecně aplikovatelné schéma, proměňuje tím Fregovu logiku v univerzální rys lidského

[23] K Davidsonově analýze příslovcí viz Davidson [1967*a*].

jazyka, k čemuž nemá nejmenšího důvodu, neboť k ní existují zcela rovnoprávné alternativy, např. logika založená na efektivní interpretaci kvantifikátorů, případně logiky nezakládající pravdivost komplexních vět ve funkcionální závislosti na větách dílčích, ale na jejich obhajobě v nějakém širším důkazovém či argumentačním kontextu. K těmto alternativám se ještě dostaneme v průběhu této kapitoly.

Chyba přitom není ani tak v myšlence explicitní specifikace úsudkových norem přítomných v jazyce jako v předpokladu, že *je* těchto explikovatelných norem jen omezený a dobře popsatelný počet, jak to tiše předpokládá Hilbert i Davidson. Přitom není ani na okamžik pochyb o tom, že velká část našeho každodenního života má čistě schematický charakter: Vyjdeme-li z domu, rozhlédneme se na obě strany, případně na jednu, víme-li, že se jedná o jednosměrku; v řeči užíváme bez přemýšlení správné gramatické tvary; sčítáme či dělíme podle zažitých algoritmů. Tato schémata mají *implicitní* charakter a není snadné je vždy explikovat (stačí uvažovat gramatické jevy rodného jazyka, třeba tvary kondicionálu), na druhou stranu je tato explikace možná a často i potřebná (stačí uvažovat gramatické jevy cizího jazyka). Dále je pravda, že mnohá z běžně užívaných schémat jsme se původně naučili *explicitně*, časem se ale dostavila jejich mechanizace, umožňující nám soustředit se na schémata jiná. Problém tkví nicméně právě v tom, že schémata chování neexistují pouze *per se*, tj. aktuálně v našich hlavách či činech, ale i potenciálně v naší schopnosti jejich rozpoznání. Již proto nelze z konečnosti aktuálního světa usoudit na existenci jejich fixního výčtu, neboť pokus o něj již zdaleka není aktuální a v jistém smyslu transcenduje ty z (aktuálních) možností, které vyčísluje. V následujícím se pokusíme být ještě konkrétnější.

Byl to pozdní Wittgenstein [1953], kdo zdůraznil, že zdaleka ne všechna pravidla mohou být osvojena explicitně, neboť již sama dovednost řídit se nějakým pravidlem spočívá v porozumění určité pravidelnosti. Např. nutnost přecházet na zelenou, nikoli na červenou, mi sice může být vysvětlena přímo, v tomto případě ale musím již ovládat pravidla typu

říká-li někdo to a to, musím, resp. mám udělat to a to.

Jistá pravidla jsou tedy relativně k jiným neexplikovatelná a jejich zavádění musí mít *empraktický* charakter, tj. dosáhneme ho pouze nepřímo, např. udělováním pohlavků nebo elektrošoky. Tento argument, aplikovatelný i proti Hilbertovu plánu, představuje dospělejší verzi Wittgensteinovy nauky z *Tractatu*, totiž o neartikulovatelnosti sémantiky.

Je to přitom právě spleť podvědomě aplikovaných a ne zcela průhledných pravidel, co mnozí nazývají intuicí, šestým smyslem atd. ("muž tohoto projevu bývá podvodník"). Z praktických důvodů by bylo samozřejmě bláznovství na takovýto druh zkušenosti zcela rezignovat (při významné obchodní transakci), principiální odmítání jeho explicitní reformulace, a tím i možné korekce, je ale příznakem mimořádné pověrčivosti, byť se z výše uvedených důvodů nutné — nicméně relativní — implicitnosti některých pravidel může vždy jednat pouze o explikaci dílčí. Principiální možnost jazykového zveřejnění, explikace takovýchto pravidel, je dána i tím, že se — jak ukázal právě Wittgenstein — nemůže jednat o pravidla soukromá, neboť u takovýchto 'pravidel' by nebylo vůbec možné rozlišit mezi správným či špatným následováním, a nebyla by to tedy pravidla, stejně jako by nebyl soukromý jazyk jazykem. O takovéto systematické zveřejnění se lze samozřejmě pokoušet i v případě aritmetiky, pro jejíž elementární věty jsme ani v oddíle 7.1 žádné pravdivostní podmínky nepodali. Nyní nám jde o to ukázat, že je to v principu možné a že se v této možnosti skrývá i způsob, jak dát aritmetice definitivní pragmatický a inferencialistický základ, jinými slovy: že se není třeba odvolávat ani na blíže nespecifikovanou intuici, ani na "milého pánaboha".

Odkaz na intuice, který je zvláště v poloformálních úvodech k matematické literatuře, ale i ve spisech filosofických poměrně rozšířený, není přitom právě pro tuto svoji popularitu nijak nezajímavý. Co jsou, resp. mají být tyto intuice zač? — Myslí se tím něco jako předvědecká, tj. netříděná aritmetická zkušenost ve smyslu Fregových *Kleinkinder-Zahlen* nebo Wittgensteinova šíře pojatá matematická praxe? Se značnou pravděpodobností nic z toho, neboť již zvolený název, jenž by Frege ani Wittgenstein v daném významu nepoužil, naznačuje, že se jedná o element mystický, orákulum používané podle toho, kdy a komu se hodí (axiom výběru vs. axiom determinovanosti). Cena této 'intuicionistické' verze aritmetického zdůvodňování spočívá nicméně v následujícím pozorování: Stejně jako by měla být dříve, konkrétně v oddíle 5.9, předvedená cykličnost logicisticko-strukturalistických definicí varováním těm, kdo si myslí, že dodají aritmetice té pravé 'exaktnosti', jestliže si oficiálně zakáží kontakt s původní početní praxí, mohla by libovolnost rozličných odkazů k našim 'intuicím' sloužit jako výstraha pro ty, kdo se jí — napodobujíce Wittgensteina — až příliš často zapřísahají, aniž by byli schopni vzájemný vztah aritmetické praxe a teorie nějak dále konkretizovat. Zdá-li se jim něco takového zbytečné, měli by se pokusit vysvětlit známé rozdíly v matematické úrovni rozličných civilizací, počínaje aritmetikami 'deseti prstů' až po západní fenomén abstraktních teorií pěstovaných pro sebe sama, resp. z důvodů povšechně estetických.

Fregův pohrdavý postoj k dětské aritmetice nebyl ve skutečnosti namířen proti myšlence praktického založení aritmetiky. Vždyť svoji 'umělou' definici čísla jako množiny všech rovnopočetných množin uvedl až po sáhodlouhé analýze přirozeného užití číselných výrazů, v níž se číslo ukázalo být něčím, co náleží pojmu, tedy vlastnost vlastností, to vše pod patronátem 'axiomu' jeho zkoumání — kontextuálního principu. Pravým terčem Fregovy kritiky byly rozličné naturalistické teorie, pokoušející se aritmetiku založit na čistě deskriptivní bázi našeho operování s artefakty (Mill) a našich mentálních stavů a aktů (Husserl). Frege si byl vědom toho, že ani jedním z těchto způsobů či jejich kombinací nelze dojít příliš daleko a že společným důvodem toho je neempirický, normativní rys matematiky. Upozorňuje, že matematická tvrzení nelze na jednu stranu vyvrátit prostým pozorováním (2 a 2 kapky vody nejsou 4, ale 1 kapka), na druhou stranu nemohou být redukována na libovolnou fikci prostou jakéhokoli vztahu ke světu. Tento druhý rys matematických pravd nicméně — možná v podvědomé snaze vyhnout se Kantovu transcendentálnímu řešení, neslučitelnému s jeho logicistickým prohlášením — přepjal směrem k jakési předzjednané harmonii mezi větami a tím, co vyjadřují, která se zdá implikovat nějakou verzi platonismu. Takovýto platonismus ovšem, při zachování smysluplnosti logicistické teze, tedy snahy o analytickou aritmetiku, nemůže být striktně ontologický, tj. v posledku v něm nemůže jít opět o nic jiného, nežli o zdůraznění rozdílu mezi zdůvodněnou tezí a libovolnou smyšlenkou.

Při zvážení všeho, co jsme dosud o vývoji logicismu řekli, se zdá, že úkolem, před kterým stála pofregovská filosofie matematiky — tj. filosofie matematiky po paradoxu —, bylo takové zdůvodnění aritmetických pravd, které vychází a je regulováno intersubjektivní zkušeností se světem a tím, jak jej úspěšně ovládat, při vědomí toho, že ‘zkušenostní svět’ a ‘úspěch v něm’ jsou rovněž teoretickými konstrukty, na nichž má právě matematika značný podíl (‘svět je to, co můžu popsat jazykem matematické fyziky’). Prostředníkem této syntézy Fregova logicismu, s jeho oprávněným důrazem na jazyk, a Brouwerova intuicionismu, s jeho oprávněnou skepsí vůči univerzálnosti logicistových definicí, je kromě Hilbertových víceznačných pokusů filosofie Ludwiga Wittgensteina, především díky jeho pozdním úvahám o řízení se pravidlem. Podstatné impulsy jsou ovšem obsaženy již ve Wittgensteinově *Tractatu*, jemuž je věnován následující oddíl.

8.5 Wittgensteinova aritmetika

Jedna z mnoha variací na téma rozdílu toho, co lze vyjádřit a co se jen ukazuje, kterou v *Tractatu* [1922, § 4.122] nalezneme, je rozdíl externí a interní (formální) vlastnosti, resp. pojmu. První z nich je pojem obvyklý, přispívající k obsahu věty, což v ontologii *Tractatu* a na něm postaveného logického empirismu znamená, že je součástí odpovídajícího stavu věcí či faktu. Interní pojem takový ontologický status nemá, tj. patří do sféry metajazyka, formy. Pro nás je tento rozdíl významný proto, že jej Wittgenstein předkládá jako klíč k řešení problémů, na nichž si vylámal zuby Fregův a Russellův logicismus, totiž ‘exaktního’ uchopení čísla.

Formální nebo také interní pojem, resp. relace, je pojem, pod nějž cokoli z oboru jeho aplikace (přípustných substituentů) nemůže nespadat, pročež je vlastní artikulace tohoto (ne)spadání nesmyslná. Wittgensteinem uváděné 'x je předmět', 'x je pojem' či 'x existuje' jsou ostatně pro tuto svoji vlastnost známé z fregovské literatury, viz Fregova kontroverze [1892a] s Kerrym o větu "pojem koně není pojem" či Fregův dialog [1983] s Pünjerem nad tím, zda je odepření existence předmětu smysluplnou (kontingentní) či kontradiktorickou větou. Důvod je jednoduchý: všechny uvedené pojmy zastupují nějakou sémantickou kategorii Fregovy logiky, a nemohou být proto v samotném pojmovém písmu přímo vyjádřeny. Lze se o to samozřejmě pokoušet dodatečnými triky, např. uchopením výrazu "$x = x$" jako vydělení, a tedy i označení všech předmětů. Právě proto, že se o žádné skutečné (vlastní) 'vydělení' nejedná, je tento krok spíše matoucí a vede např. ke známým problémům ohledně tvrzení typu $(\exists x)(x = N)$, která vypadají na první pohled jako smysluplná, v kontextu pojmového písma jsou ale prázdná, tautologická.

K těmto neproblematickým kategoriálním pojmům (výraz "interní" je zjevně jen nový název pro staré věci) přiřazuje Wittgenstein provokativně pojmy jako 'x je číslo' či 'x je následník y', které se Frege pokoušel explicitně definovat, tj. přistupoval k nim jako k pojmům externím. Wittgensteinův základní důvod je přitom prostý. Matematika stejně jako logika nemá žádný bezprostředně deskriptivní, zobrazující charakter, a nepatří tedy do oboru vět, které mají z hlediska 'obrázkové' teorie *Tractatu* 'smysl'. Jelikož ale její věty nejsou nesmyslné jako věty metafyziky, je třeba jejich charakter vysvětlit pouze jako nepřímý, týkající se forem empirického světa. K tomu poslouží Wittgensteinovi pojem operace v jeho odlišení od pojmu funkce.

Jelikož je formální pojem dán spolu s objektem, který pod něj spadá, není jeho znakem jako u pojmu obvyklého výraz, který přispívá k větě, ale proměnná příslušného typu, např. objektová x v případě pojmu 'předmět' nebo funktorová f v případně pojmu 'funkce', resp. pojmu 'pojem'. Jelikož se tyto formální pojmy týkají prvků Wittgensteinovy ontologie, mají v tomto smyslu pořád jistý bezprostřední charakter. Pojmy aritmetické oproti tomu vykazují ještě komplikovanější strukturu, závislou na pojmu operace. Pomocí něho od sebe Wittgenstein primárně odlišuje dvě možná pojetí funkce, jejichž užití ve Fregově sémantice kolísá či splývá, totiž funkce jakožto (1) sémantické entity, toho, co nějaká syntakticky relevantní složka věty znamená, a (2) procesu, jenž vede od jedné entity k druhé, explicitně ale vyjádřen není, tj. nepatří k objektům modelu užité logiky. Ve fregovské analýze elementární věty

$$F(N)$$

odpovídá výrazu N nějaký předmět a, výrazu $F(x)$ pak nějaká funkce f. Výraz komplexní je pak jednak (1) jménem výsledné pravdivostní hodnoty (u Frega), případně stavu věcí sestávajícího z f a a (u Russella), neboli konglomerátu

$$fa,$$

(2) jednak výrazem aplikace funkce f na předmět a, tj. procesu přiřazení pravdivostní hodnoty předmětu:

$$f : x \to \{0, 1\}.$$

Tato aplikace není ale v zápise $F(N)$ explicitně vyjádřena a je vůči němu i transcendentní (tj. překračuje jeho vyjadřovací možnosti), což — jak jsme viděli v oddíle 4.5 — neznamená, že ji nelze explikovat v rámci jazyka jiného, jenž pro ni zavede výraz

$$\mathcal{PRED}(a, f),$$

případně zápis $a \in \{x \mid f(x)\}$ jako v teorii množin. Pointa je, že v tomto jazyce musíme zase implicitně zvládnout pravidlo aplikace predikátu $\mathcal{PRED}$ na objekty x, y, stále tedy držíme jako podstatný (relativní) rozdíl toho, co lze výrazem říci a co se na něm jen ukazuje. Opakováním uvedeného sémantického zdvihu můžeme nanejvýš přejít k hierarchii predikačních funkcí

$$\mathcal{PRED}_2(a, f, \mathcal{PRED}),$$
$$\mathcal{PRED}_3(a, f, \mathcal{PRED}, \mathcal{PRED}_2),$$
$$\vdots,$$

které stejně jako hierarchie typů či jazyků nemají žádné bezprostředně ontologické opodstatnění, a jsou tedy nanejvýš výrazem otevřené možnosti tematizovat jakékoli naše jednání, tedy i užití jazyka, v jazyce.

Funkce v onom druhém, implicitně-operativním smyslu přechodu odněkud někam, jenž se explicitně nevyskytuje v zobrazovaném faktu, ale jen jeho struktuře, způsobu či identitě zobrazení, je v *Tractatu* nazvána (INTERNÍ) OPERACÍ. Wittgensteinovi přitom posloužila několikerým způsobem, prototypicky v jeho zápasu s noční můrou obrázkové teorie a celého logického atomismu, totiž s interpretací složených faktů. Problém nespočívá jen v tom, že s výjimkou konjunkce a obecné kvantifikace, které se zdají vyjadřovat kumulování kusů reality po způsobu skládání mozaiky, nedávají ostatní kombinace přímý, zobrazující smysl a vedou nanejvýš k prvoplánovým konstrukcím negativních a jiných faktů, ale především v otázce, co ve vztahu jazyka a světa, modelovaném na vztahu obrazu a zobrazovaného, odpovídá logickým spojkám. Wittgenstein [1922, § 4.0312] přitom ostře odmítá Russellovu představu komplexního faktu jako ontologické kombinace předmětů a spojek, když říká:

> má základní myšlenka je, že ‘logické konstanty’ nezastupují,

a ve svých deních [1994a, s. 95] navrhuje představit si stavy věcí jakožto reprezentované kartami jednoduché hry, spočívající v jejich vynášení a ohlašování: "je to tak", "není to tak", "je to tak a tak", "je to tak nebo tak" apod. Podstatné je, že ke skutečnosti samé není přidáváno nic: pomocí spojek, operováním s kartami jsme jen rozšířili způsoby její reprezentace.

Vezmeme-li nyní výraz jako $2 + (2 + 3) = 7$, je jasné, že znaménko $+$ musí být výrazem operace, neboť pro funkci by celá věta vyjadřovala stav věcí, v němž se číslo 7 sestává z kombinace čísla 2, funkce $+$, čísla 2, funkce $+$ a čísla 3. Tento výklad také ospravedlňuje opakované užití symbolu, které je možné právě a pouze u operací, neboť samy v procesu mizí a zůstává jen jejich výsledek, tj. číslo 7. To vše uvádíme především s ohledem na Wittgensteinovo [1922, § 3.333] řešení Russellova paradoxu:

> Funkce nemůže být svým vlastním argumentem proto, že její znak již obsahuje vzor svého argumentu, a nemůže tedy sama sebe obsahovat.

Podle Wittgensteina tedy musí mít ve výrazu $F(F(x))$ vnitřní a vnější funkce odlišné významy, a paradox tudíž nevzniká. Věc se ale nemá tak, že by funkci nešlo aplikovat na sebe sama, zatímco operaci ano: možné není ani jedno (!), podstatné je, že operace nemá ontologický charakter, není součástí významu věty, ale jen zprostředkovává přechody mezi uvažovanými prvky. V tomto také spočívá jádro Wittgensteinovy teorie logických konstant, na níž teprve závisí jeho teorie aritmetiky.

Začněme provizorně druhou z nich, a to v návaznosti na Wittgensteinův pojem interního pojmu. Ten se v případě pojmu jednomístného ukazuje na předmětech, jimž náleží, a je tedy reprezentovatelný příslušnou proměnnou. V případě relací je ale interní pojem záležitostí implicitních vztahů mezi předměty, jeho reprezentace je tedy obtížnější. Podle Wittgensteina může k jejímu vysvětlení díky svému efemérnímu charakteru posloužit právě pojem operace, která příslušné interní vztahy zjednává. S ohledem na to, že je operace jednoznačná směrem vpravo, to samozřejmě předpokládá relace určitého typu. 'Shodou okolností' je to ale právě řada čísel

$$1, 2, 3, \ldots,$$

stejně jako řada vět či formulí

$$aRb,\ (\exists x)(aRx \wedge xRb),\ (\exists x, y)(aRx \wedge xRy \wedge yRb),\ \ldots,$$ [24]

co je podle Wittgensteina [1922, § 4.1252, 4.1273] uspořádáno interní, nikoli externí relací, jak se podle něho mylně domnívali Russell a Frege,

[24] Zde se zcela výjimečně držíme alespoň zčásti Wittgensteinova způsobu zápisu.

a čehož obecný člen tak představuje formální, nikoli vlastní pojem. K příslušné proměnné, která jej reprezentuje, dospějeme tak, že si budeme přechod od jednoho členu k druhému myslet jako zajištěný operací O, v prvním případě tedy

$$O(x) = x + 1,$$

v druhém pak

$$O[(\exists x_1, \ldots, x_n)(aRx_1 \wedge \cdots \wedge \ x_nRy)] = \\ (\exists x_1, \ldots, x_{n+1})(aRx_1 \wedge \cdots \wedge x_{n+1}Ry),$$

abychom nakonec fixováním báze a, v našich případech 1 a aRb, dospěli ke komplexní proměnné, zachycující obecný člen řady

$$a,\ O(a),\ O(O(a)),\ \ldots$$

jako

$$[a, x, O(x)].$$

Nemá větší význam dále diskutovat detaily této Wittgensteinovy 'teorie', zvláště když takřka žádné nejsou. Cenný na celé věci je právě onen praktický, neontologizující prvek, spjatý — možná mimoděk — s konstruktivním pojmem operace. Z hlediska našeho dalšího výkladu bychom v tomto okamžiku mohli přirozeně přejít k Lorenzenově operativní matematice, která Wittgensteinův dílčí, ale významný podnět rozvíjí v teoretických detailech. Ve vztahu k výkladu dosavadnímu se nicméně vyplatí zastavit se ještě u Wittgensteinovy aritmetiky z *Tractatu*. V jejím kontextu totiž nestačí vysvětlit pojem následníka jako interní relaci na číslech, ale i povahu těchto čísel samotných, neboť s ohledem na dosud řečené nemohou být považována za stavební kameny, objekty Wittgensteinova logicko-empirického světa. A skutečně, ve vlastní expozici svého pojetí aritmetiky Wittgenstein [1922, § 6.021] jasně říká:

> číslo je exponentem operace,

tedy něco, čím zachycujeme její opakované aplikace, a co je proto ještě prchavější, nežli operace samotná. Wittgensteinova teorie čísla je tedy teorií čísla ordinálního, navazující jednak na Fregovu adjektivní strategii z *Grundlagen*, jednak na Cantorovu původní teorii ordinálů jakožto (konečných i nekonečných) indexů uzávěrové operace. Zbývá jen fixovat onu kanonickou operaci, resp. skupinu objektů, kterou tato operace pořádá.

Pro Wittgensteina se jí zcela přirozeně a vlastně i nevyhnutelně stává operace na větách, která z vět základních dělá věty komplexní, a to v jejich sémantickém smyslu pravdivostních funkcí nad pevně danou bází elementárních vět — stavů věcí v jejich nastávání a nenastávání, tj. ohodnocení hodnotou pravda a nepravda. Vždyť:

> všechny věty jsou výsledky pravdivostních operací na elementárních větách.[25]

Pracujeme-li s klasickými logickými spojkami, lze si např. úlohu negace představit jako operaci, která v prostoru možných ohodnocení (pravdivostních možností, *Wahrheitsmöglichkeiten*) přiřadí těm, které nějaké větě A dávají hodnotu pravda (jejím tzv. pravdivostním důvodům, *Wahrheitsgründen*), jejich doplněk, tj. ty, které jí přiřazují hodnotu nepravda. Podobně s dalšími operátory. Logické konstanty tedy od počátku nedenotují, ale fungují jako množinové operace na ohodnoceních vět (formulí). Proto v posledku neexistuje rozdíl pozitivního a negativního faktu.[26]

S ohledem na expresivní úplnost Shefferova operátoru upřesňuje záhy Wittgenstein [1922, § 5.5] výše uvedené tvrzení slovy:

> každá pravdivostní funkce je výsledek sukcesivní aplikace operace $(- - - - - - W)(\xi, \ldots\ldots)$ na elementární věty,

kde druhá závorka obsahuje seznam elementárních vět (výrokových konstant) nějaké věty (formule) a první pak při fixovaném pořadí pravdivostních možností říká, že pouze poslední z nich, ohodnocující všechny elementární věty hodnotou nepravda, je pravdivostním důvodem. V zobecněné aplikaci Shefferova operátoru na nekonečné množství elementárních vět

$$F(N_1),\ F(N_2),\ \ldots$$

stejného rámce $F(x)$, kde řada N_1, N_2, ... obsahuje jména všech předmětů Wittgensteinova univerza, dostáváme operátor $N(x)$, který např. v aplikaci na uvedenou řadu, zkrácenou jako $\bar{\xi}$, dává

$$N(\bar{\xi}) \rightleftharpoons \neg(\exists x)F(x).$$

Tím máme zachycenu kvantifikaci, a dospíváme tak k poslednímu upřesnění Wittgensteinovy nauky o formě věty a zároveň prvnímu paragrafu jeho 'aritmetiky' [1922, § 6], podle něhož vypadá obecná forma pravdivostní funkce takto

$$[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})],$$

kde $\bar{p}$ je seznam všech elementárních vět. V tomto výrazu máme tedy zachycen interní pojem věty, v němž se, jak poznamenává Wittgenstein [1922, § 6.01], zároveň manifestuje obecný tvar operace $\Omega(\bar{\xi})$ coby nejobecnější formy přechodu od věty k větě. Touto formou není zjevně nic

[25] Wittgenstein [1922, § 5.3]. Srov. také § 5.2341, z něhož plyne, že jsou operace definovány na smyslech vět, nikoli na větách samých, viz třeba: "Negace obrací smysl věty."

[26] Viz [1922, § 5.241]: "Operace nezachycuje formu, ale jen rozdíl forem."

jiného, nežli naše stará známá rekurze. — “A *tak* přicházíme k pojmu čísla.” Totiž definicí [1922, § 6.02]:

$$\Omega^0(x) \stackrel{\text{def}}{=} x,$$
$$\Omega^{n+1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Omega(\Omega^n(x)).$$

Namísto řady

$$a,\ \Omega(a),\ \Omega(\Omega(a)),\ \Omega(\Omega(\Omega(a))),\ \ldots$$

dostáváme řadu

$$\Omega^0(a),\ \Omega^{0+1}(a),\ \Omega^{0+1+1}(a),\ \ldots,$$

a namísto proměnné

$$[a, x, \Omega(x)]$$

proměnnou

$$[\Omega^0(a), \Omega^n(x), \Omega^{n+1}(x)].$$

Obvyklými definicemi získáme jednotlivé numerály

$$1 \stackrel{\text{def}}{=} 0 + 1,$$
$$2 \stackrel{\text{def}}{=} 0 + 1 + 1,$$
$$3 \stackrel{\text{def}}{=} 0 + 1 + 1 + 1,$$
$$\vdots,$$

a odtud i pojem přirozeného čísla

$$[0, x, x + 1].$$

Zbývá vysvětlit, k čemu slouží věty matematiky. — Ty, stejně jako věty logiky, nejsou o světě, neboť [1922, § 6.2]:

> Matematika je logická metoda. Věty matematiky jsou rovnosti, tedy pseudověty.

Jak pak ale rozumět pseudovýrazu “$2+2 = 4$”? Zde je na místě opět citát [1922, § 6.24]: “Metodou matematiky, jak přijít ke svým rovnostem, je metoda substituční. Neboť rovnosti vyjadřují nahraditelnost dvou výrazů [...].” Ergo: “$m = n$” znamená totéž co

$$\Omega^m(x) = \Omega^n(x),$$

jak Wittgenstein [1922, § 6.241] v zápětí demonstruje na příkladě důkazu věty $2 \times 2 = 4$, když nejprve definuje násobení jako $\Omega^{m \times n}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\Omega^m)^n(x)$ a implicitně předpokládá definici sčítání $\Omega^{m+n} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^n(\Omega^m(x))$:

$$\Omega^{2\times 2}(x) = (\Omega^2)^2(x) = (\Omega^2)^{1+1}(x) = \Omega^2(\Omega^2(x))$$
$$= \Omega^{1+1}(\Omega^{1+1}(x)) = (\Omega\Omega)(\Omega\Omega)(x) = \Omega(\Omega(\Omega(\Omega(x)))).$$

Vedle Leibnizova 'důkazu' věty "$2+2=4$" nám tedy takto do sbírky 'logicistických' redukcí elementárních vět aritmetiky přibyl další exemplář, který je zajímavý tím, že je v něm zákon asociativity, který v Leibnizově odvození chybí (viz oddíl 5.7), přítomen implicitně jako přirozená vlastnost řetězení operací. Wittgensteinova aritmetika, jak upozornil Potter [2000, s. 181 nn], trpí ale jiným a ve svých důsledcích mnohem vážnějším neduhem.

Skutečnost, že je základní (forma) operace $\Omega(x)$ definována jako operace na větách, je jenom přirozeným důsledkem ontologie *Tractatu*, kde si od počátku můžeme být jisti pouze 'existencí' nekonečně mnoha rekurzivně definovaných vět a jimi zobrazovanými (komplexními) situacemi. Operace $\Omega(x)$ ovšem není definována na větách jakožto symbolech (znacích), ale na jejich smyslech, které u Wittgensteina splývají s pravdivostními podmínkami věty. Odtud naše uchopení operací jakožto funkcí na množinách pravdivostních možností. Zápis $\Omega^m(x) = \Omega^n(x)$ ve významu $m = n$ takto říká, že je

$$\Omega^m(x) \leftrightarrow \Omega^n(x)$$

tautologií. To s sebou nese dvě pozorování: (1) Ω nemůže zastupovat náhodnou konkrétní operaci, neboť ta může, jak Wittgenstein [1922, § 5.254] upozorňuje, v průběhu aplikování zmizet, jak se to např. stane negaci v každém sudém kroku $p = \neg\neg p = \neg\neg\neg\neg p = \cdots$. Platilo by totiž $0 = 2 = 4 = \cdots$. (2) Proměnná x zároveň nemůže reprezentovat náhodnou konkrétní větu, neboť např. pro elementární větu p platí $\Omega^2(p) = \Omega^4(p)$ pro libovolnou ze čtyř možných pravdivostních funkcí. Nabízí se tedy fixovat rovnost takto:

$$m = n \rightleftharpoons (\forall\Omega)(\forall x)(\Omega^m(x) = \Omega^n(x)).$$

Přeskočme nyní Potterovy bezvýchodné pokusy dát nějaký význam negovaným a kvantifikovaným rovnostem a zvažme, co by se stalo, kdyby byl Wittgensteinův svět konečný, tj. popsatelný jen systémem elementárních vět o n prvcích. Pro ně existuje pouze 2^n různých pravdivostních možností a k těm zase 2^{2^n} jejich podmnožin, možných 'smyslů' daného světa. Na nich existuje opět jen konečné množství operací. Lze ukázat, že za těchto podmínek musí existovat indexy $r < s$ takové, že

$$(\forall\Omega)(\forall x)(\Omega^r(x) = \Omega^s(x)).$$

Za předpokladu, že je svět konečný, tedy Wittgensteinova aritmetika kolabuje. Tím pádem ale čelí stejnému problému jako Fregova adjektivní strategie a Russellova teorie typů, v nichž je možnost adekvátního rozvoje teorie čísla závislá na počtu předmětů v univerzu (viz oddíl 6.9), samozřejmě předpokládáme-li souvislost mezi počtem možných stavů světa a počtem předmětů, z nichž jsou v *Tractatu* kombinovány. Podle Wittgensteina [1922, § 4.1272] je navíc jakékoli tvrzení o počtu předmětů nesmyslnou větou, která se pouze obráží v počtu odlišných jmen, případně proměnných, které užíváme. Stanovení něčeho, jako je Russellův axiom nekonečna, uzavírá Wittgenstein [1922, § 5.535], tedy nepřichází v úvahu. Nabízí se ovšem jiná možnost, jak celou věc obrátit v náš prospěch, totiž uchopit aritmetiku v jejím apriorním vztahu ke světu jako garant toho, že je skutečnost nekonečná. Touto úvahou se ale dál zabývat nebudeme.

8.6 Na počátku byl čin

Ve Wittgensteinově analýze čísla coby formálního pojmu zjednaného pojmem interní operace máme před sebou zejména ve světle jeho pozdní filosofie jasné vyjádření toho, že uchopit pojem čísla neznamená v důsledku nic jiného nežli osvojit si příslušné generativní pravidlo neboli pochopit pravidla číselné konstrukce. V širší perspektivě našeho výkladu, zejména v kontextu dialektického pohybu novověké matematiky od názoru k pojmu a zpět, se zdá opět vše (nikoli neodvratně, ale důvodně) směřovat k zařazení induktivního popisu typu $[a, x, O(x)]$ mezi elementární prostředky reformované aritmetiky. V závěrečné syntéze se tak k čistě pojmovým prostředkům, reprezentovaným statickou ideou explicitní definice, přidává kantovská příměs konstrukčních pravidel, zajišťujících oné čistě deskriptivní části logicistického projektu ontologickou bázi, z níž lze teprve něco pojmově vydělit, jak jsme to popsali v kapitole 5.

Byl to Paul Lorenzen, kdo v kontrastu k Wittgensteinovým roztroušeným poznámkám tento krok systematicky rozpracoval, a to na základě podobných úvah, jimiž začala filosofie Hilbertova, totiž o počátku a jistotě. Lorenzen [1974, s. 171] přitom nepopírá transcendentální fakt, že jazyk stejně jako život sám nelze obejít, podle něho to však neznamená, že je nelze dále zdůvodnit. Cituji:

> Diltheyův výrok, že poznání nemůže jít mimo život [“*hinter das Leben zurückgehen*”], nesmí být [...] v žádném případě chápán jako důkaz nutnosti rezignovat na metodický počátek našeho myšlení (poznání). Říká přece jen, že tento počátek nesmí být hledán mimo život.

Nepřekročitelnost jazyka spočívá v tom, že nemohu vysvětlit pravdivost jeho vět, aniž bych již nepředpokládal pravdivost vět jiných, jejichž prostřednictvím toto vysvětlení podávám. Wittgenstein právě z tohoto pozorování vyvodil nemožnost vědecké sémantiky. Již dříve (mj. na straně 450) jsme ale naznačili, že se jedná pouze o nemožnost globální, neboť sémantika je možná, a je tak vždy i definována, v omezení na nějakou relativně nejasnou část jazyka, pro niž, v části relativně stabilní, formulujeme pravdivostní podmínky.

Lorenzen ovšem usiluje o víc, totiž o absolutní počátek, jenž je dle jeho mínění umožněn tím, že jazyk je především jistým způsobem jednání a jako takový je i zaveden, tj. osvojen dítětem, které mluvit a rozumět ještě neumí. V paralele k Neurathovu [1932a, s. 205] příměru jazyka jako lodi, kterou musíme opravit na této lodi samotné, bez možnosti přistát v přístavu, má proto Lorenzen [1974, s. 172] připraven následující návrh:

> S ohledem na problém metody našeho myšlení se ale musíme vžít do stavu bez lodi, tj. jazyka, a pokusit se vybavit si taková jednání, s nimiž — plavajíce uprostřed moře života — můžeme postavit vor nebo loď.

Je samozřejmě otázka, do jaké míry je tento posun teoreticky únosný, tj. zda je v něm skutečně jazyk eliminován ve prospěch nějakého elementárnějšího pojmu (jednání), nebo je to jen eliminace zdánlivá, která jej v nějakém podstatném smyslu stále předpokládá. Realističtější se zdá být druhá možnost, neboť poučované dítě neumí zpravidla vůbec nic, tj. nejen mluvit, ale ani jednat, a to již proto, že jednání samo se od pouhého chování zdá odlišovat spjatostí s jistým schématem, k němuž se lze eventuálně připojit, a které proto musí být z definice artikulovatelné v jazyce. Problematický je také onen univerzální nárok celého podniku, tj. pokus o zdůvodnění libovolného jazyka.

Cenný na Lorenzenově obratu je naopak jeho neontologický charakter. Pojmy jazyka neartikulují preexistující rozlišení ve sféře jsoucna, nýbrž souvisejí s jazykem, Lorenzenovými [1974, s. 178] slovy: "nejsou uchopovány ontologicky, ale operativně". V případě logiky a aritmetiky je věc komplikovanější. Podle Lorenzena je logika nauka o užití logických operátorů, v čemž se již začíná neblaze projevovat ona univerzalistická tendence, neboť Lorenzen se v principu omezuje na spojky fregovské syntaxe, čímž z ní, stejně jako později Davidson, činí přirozený rys našeho myšlení a světa.

Základní otázka je přitom jasná: Užíváme-li nějakých úsudkových pravidel jakožto logických, tj. vedoucích vždy od pravdivých vět (téže formy) k pravdivým větám (téže formy), musíme vysvětlit, čím je tato jejich vlastnost zjednána, odkud se bere. My jsme argumentovali předem zavedenou sémantikou, podle Lorenzena [1968, s. 83] je ale takovýto odkaz chybný, neboť artikulace sémantiky již předpokládá jisté věty jako pravdivé a jistá úsudková pravidla jakožto přenášející pravdivost, a výsledně se tedy pohybujeme vždy v kruhu. To je další důsledek jeho univerzalismu. — Východiskem z uvedeného kruhu má být podle Lorenzena určitý krok stranou, totiž k jednoduchým mimojazykovým jednáním. Ta byla v první fázi jeho filosofie úzce spjata s jednáním ospravedlňujícím věty aritmetiky, totiž schematickým operováním s artefakty na bázi jednoduchých kalkulů. Zde se operacionalista Lorenzen setkává s formalistou Hilbertem.

Spřízněnost logiky a aritmetiky přitom není umělá, neboť obojí — usuzování a počítání — v nějakém ohledu spočívá v operování se symboly, větami či číslovkami. Podle Lorenzena [1955, s. 3 n] je tak operování podle jistých kalkulů — formálních systémů — předmětem matematiky v užším smyslu, do níž řadí aritmetiku, analýzu, algebru a topologii. Předmětem takto vymezené aritmetiky jsou tedy opět znaky samotné, jak tvrdí formalismus, nicméně ve svém operativním užití. To aritmetiku odlišuje od geometrie, vůči níž, vztahující se k prostorové zkušenosti, se jeví jako závislá na jiné, prostší formě názoru (vnitřním smyslu), kterou Kant identifikoval s názorem času. V kalkulech coby jednoduchých generátorech symbolů je rovněž nalezena báze vyhovující Hilbertovu finitismu, včetně upřesnění, že aritmetice nejde o symboly samé, ale právě o možnost jejich generování, tj. operování s nimi, čímž se z ní namísto formální teorie stává teorie materiální, jejíž obsah, matérie, je ovšem všechno jiné nežli abstraktní. Není však ani konkrétní v striktně finitistickém smyslu, neboť odvoditelnost znaku je distinkce teoretická, kterou si — jak zdůrazňuje Lorenzen — stejně jako pojem potenciálního nekonečna lze osvojit právě a pouze zkušeností s uvedenými kalkuly. To vše platí dvojnásob pro negativní pojem neodvoditelnosti.

Od Hilbertovy metamatematiky se Lorenzenova operativní matematika liší tím, že se nesnaží zdůvodnit aritmetiku či jiné disciplíny finitistickými úvahami o odvoditelnosti znaků v nějakém konkrétním kalkulu (neodvoditelnost formule “$0 = 1$” v $\mathfrak{PA}$), ale chce ji prezentovat jako produkt obecnějšího zkoumání o odvoditelnosti v kalkulu libovolném. To má ten zásadní důsledek, že to není teprve *meta*matematika, ale již aritmetika sama, v čem jsou artikulována smysluplná tvrzení — věty. Ve vztahu k Aristotelově, resp. Hilbertově axiomatické metodě to znamená, že odmítáme původní koncept axiomů coby dále nezdůvodnitelných pravd, případně neinterpretovaných formulí, u nichž lze nanejvýš provést důkaz bezespornosti. Podle Lorenzena lze na bázi úvah o obecné odvoditelnosti podat takovou obhajobu Peanových axiomů, která je předvede jakožto pravdivé věty, nikoli však redukcí na aritmetická či nějaká jiná tvrzení, ale odkazem na zcela elementární praxi operování podle jednoduchých pravidel. Tato praxe pak *de facto* supluje tradiční epagogické zdůvodnění prvních premis. Aritmetika ovšem není v Lorenzenově pojetí vědou axiomatické metody, tj. nespočívá v odvozování, dedukcích pravd z prvních premis, ale právě v operování s artefakty. Tento bod Lorenzenovy teorie základů aritmetiky záhy rozvedeme.

Abychom si nejprve utvořili konkrétnější představu o Lorenzenově původním plánu operativní logiky a matematiky, načrtněme v hrubých tazích některé její zcela elementární zásady, Lorenzenem řazené do tzv.

PROTOLOGIKY jakožto nauky o tom, co vlastní logice a aritmetice předchází, co je (necyklicky) zdůvodňuje. Základem je přirozeně pojem kalkulu coby generátoru figur:

> KALKUL je tvořen konečnými seznamy atomických figur, užitých proměnných a pravidel. Pravidla se dělí na tzv. POČÁTKY tvaru $\Rightarrow A$, zachycující bezprostředně generovatelné figury tvaru A, a PODMÍNĚNÁ PRAVIDLA tvaru $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$, artikulující odvoditelnost figury tvaru B za předpokladu odvoditelnosti figur tvaru $A_1, \ldots, A_n$.

Za příklad vezměme kalkul (K1) s atomickými figurami $\spadesuit$, $\heartsuit$ a pravidly

(1) $\Rightarrow \spadesuit$,

(2) $x \Rightarrow x\heartsuit$,

(3) $x \Rightarrow \spadesuit x \spadesuit$.

SLOVY KALKULU nazýváme všechny figury složené z figur atomických. K nim se také jako ke svým objektům vztahuje OBJEKTOVÁ PROMĚNNÁ x kalkulu. Slova kalkulu samotná jsou zavedena pomocí speciálních kalkulů, v tomto případě kalkulu

(A) $\Rightarrow \spadesuit$,

(B) $\Rightarrow \heartsuit$,

(C) $x \Rightarrow x\heartsuit$,

(D) $x \Rightarrow x\spadesuit$,

odlišujícího se od kalkulu (K1) interpretací proměnné x, která se v druhém případě vztahuje pouze na slova daným kalkulem dosud vygenerovaná! Tomuto typu PROMĚNNÝCH se říká VLASTNÍ (*Eigenvariable*). Podobně lze zavést pojem FOREM KALKULU coby kombinací atomických figur a proměnných.

Rozdíl obou typů proměnných, *vlastní*, vytvářející si postupně svůj obor aplikace, a *objektové*, vztahující se k oboru předdefinovanému, je přitom zásadní a podstatně přesahuje oblast operativní aritmetiky. Vysvětleme stručně, proč: Wittgensteinova úprava Fregovy aritmetiky spočívá právě v tom, že v definici čísla ve stylu

$$[0, x, x+1]$$

nahrazuje objektovou proměnnou x Fregovy explicitní definice

$$(\forall X)[X(0) \wedge (\forall y)(X(y) \rightarrow X(y+1)) \rightarrow X(x)]$$

proměnnou vlastní, čímž si ušetřuje dodatečné problémy se zajištěním oboru, k němuž by se proměnné x, y měly vztahovat. Frege se tuto otázku pokusil vyřešit v rámci svého zákona GV kombinací obou typů proměnných — statické, předpokládající nezávislý obor kvantifikace, a konstruktivní, tento obor průběžně vytvářející —, čímž na svůj systém přivolal Russellův paradox. Míchání různých proměnných, vlastní a objektové, je tak nejobecnější diagnózou jak jeho, tak spřízněných antinomií logiky a matematiky. Tímto je také považujeme věcně i historicky za vyřešené a nebudeme se jimi již v dalším textu zabývat.

Vedle pojmu kalkulu hrají v Lorenzenově protologice centrální roli pojmy odvoditelnosti a přípustnosti. Figura A se nazývá ODVODITELNÁ v kalkulu (K), symbolicky

$$\vdash_K A,$$

existuje-li posloupnost jeho slov taková, že je A jejím členem posledním a každý člen posloupnosti je buďto konsekventem počátku kalkulu, nebo byl získán aplikací pravidla kalkulu na nějaké členy předchozí, tj. platí, že substitucí nějakých slov za proměnné pravidla se z jeho antecedentu a konsekventu stanou členy uvedené posloupnosti v potřebném pořadí. Odvoditelnost slova, tj. fakt $\vdash_K A$, lze doložit příslušnou posloupností, odvozením. Např. pro výrok

$$\vdash_{K1} \spadesuit\spadesuit\spadesuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

je jí posloupnost

$$\spadesuit,\ \spadesuit\spadesuit\spadesuit,\ \spadesuit\spadesuit\spadesuit\heartsuit,\ \spadesuit\spadesuit\spadesuit\heartsuit\heartsuit,\ \spadesuit\spadesuit\spadesuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit.$$

Její konstrukce je tedy důkazem příslušného (meta)tvrzení. Podobným (meta)tvrzením je tzv. PŘÍPUSTNOST PRAVIDLA R ke kalkulu (K), znamenající, že přidáním R k pravidlům (K) nebude rozšířena množina odvoditelných slov. To zachycujeme zcela analogicky jako

$$\vdash_K R$$

a pokrýváme tím vlastně i předchozí případ, kdy odvoditelností slova A rozumíme přípustnost pravidla $\Rightarrow A$. Výrazy A a $\Rightarrow A$ budeme i nadále používat záměnně. — Jako příklad pravidla přípustného ke kalkulu (K1) uveďme třeba

(4) $x \Rightarrow \spadesuit x\heartsuit\spadesuit.$

Důkaz tohoto tvrzení je přitom založen na poněkud komplikovanější úvaze, nazývané ELIMINACE. Ta ukazuje, jak libovolné odvození slova, v němž bylo užito nové pravidlo, transformovat na odvození, v němž se toto pravidlo nevyskytuje. V případě pravidla (4) a kalkulu (K1) je např.

zřejmé, že část jakéhokoli odvození, v níž bylo poprvé použito, musí mít tvar

$$\spadesuit, \ldots, A, \ldots, \spadesuit A \heartsuit \spadesuit.$$

Téhož výsledku šlo ale zjevně dosáhnout přímo, totiž aplikací pravidel (2) a (3) na A, z čehož dostáváme odvození

$$\spadesuit, \ldots, A, \ldots, A\heartsuit, \spadesuit A \heartsuit \spadesuit$$

téže figury bez použití (4) a můžeme psát $\vdash_{K1} x \Rightarrow \spadesuit x \heartsuit \spadesuit$. Obecně lze zavést značení

$$R_1, \ldots, R_n \vdash_K R$$

jako tvrzení přípustnosti pravidla R ke kalkulu (K) rozšířeném o pravidla $R_1, \ldots, R_n$.

Zatímco možné způsoby eliminace není nutné a obecně ani možné nijak dopředu schematizovat, lze zachytit některé obecné způsoby, jak z eliminací jistého typu získat eliminace další. Tyto tzv. principy Lorenzenovy protologiky představují přímý pendant metateorémů formální logiky a matematiky, jak jsme se s nimi seznámili dříve. První z nich např. kopíruje větu o dedukci logických kalkulů, a je také Lorenzenem [1955, s. 26] patřičně nazván DEDUKTIVNÍM PRINCIPEM:

> Jestliže platí $R_1, \ldots, R_n, A_1, \ldots, A_m \vdash B$, kde $A_1, \ldots, A_m$ jsou počátky, pak i $R_1, \ldots, R_n \vdash A_1, \ldots, A_m \Rightarrow B$.

V úvahách o vztazích mezi pravidly a jejich iteracích je přitom třeba vzít naléhavě v úvahu postavení užitých proměnných. Tak např. mírně komplikovanější eliminací lze ukázat přípustnost pravidla

(5) $x \Rightarrow \spadesuit\spadesuit x$

ke kalkulu (K1). Kdybychom nyní převeditelnost tohoto problému na vztah $x \vdash \spadesuit\spadesuit x$ četli v tom smyslu, že z odvoditelnosti jakéhokoli slova plyne odvoditelnost všech slov tvaru $\spadesuit\spadesuit A$, šlo by *de facto* deduktivním principem zdůvodnit přípustnost jakéhokoli pravidla tohoto typu, a my se tedy musíme omezit na tvrzení, že z odvoditelnosti slova A plyne odvoditelnost slova $\spadesuit\spadesuit A$, neboli chápat užitou proměnnou x jakožto vázanou symbolem $\vdash$. Podobně je třeba u tvrzení

$$x\heartsuit \Rightarrow \heartsuit x \vdash_{K1} y \Rightarrow \heartsuit \spadesuit y \spadesuit$$

rozlišovat jeho platnost obecnou od platnosti pro libovolnou konkretizaci x a y. Tak platí např.

$$x\heartsuit \Rightarrow \heartsuit x \vdash_{K1} B \Rightarrow \heartsuit \spadesuit B \spadesuit$$

pro B libovolné, nikoli však varianta pro libovolné A, tj. konkretizaci x, třeba s ohledem na neplatnost vztahu

$$\spadesuit\heartsuit \Rightarrow \heartsuit\spadesuit \vdash_{K1} y \Rightarrow \heartsuit\spadesuit y\spadesuit.$$

Ono omezení lze zachytit explicitně jako

$$x\heartsuit \Rightarrow_x \heartsuit x \vdash_{K1} y \Rightarrow \heartsuit\spadesuit y\spadesuit,$$

tedy vázáním příslušné proměnné. Proměnná y v tomto případě být vázána může, ale nemusí. Podobně můžeme rozlišit mezi platnými

$$x\heartsuit \Rightarrow \ \heartsuit x \vdash_{K1} x \Rightarrow \ \heartsuit x,$$

$$x\heartsuit \Rightarrow_x \heartsuit x \vdash_{K1} x \Rightarrow_x \heartsuit x$$

a neplatným

$$x\heartsuit \Rightarrow \ \heartsuit x \vdash_{K1} x \Rightarrow_x \heartsuit x.$$

Ačkoli převedení platnosti tvrzení $\vdash_{K1} x \Rightarrow \spadesuit\spadesuit x$ na platnost tvrzení $x \vdash_{K1} \spadesuit\spadesuit x$ skrze deduktivní princip nám záležitost eliminace věcně nijak neusnadňuje, umožňuje nám alespoň nahlédnout, že jí bude dosaženo, jakmile dokážeme vztah $\vdash_{K1} \spadesuit\spadesuit s$ pro každé slovo s odvoditelné v kalkulu (K1). Proměnnou s zavádíme jako typ této množiny výrazů. K dokazování eliminací tohoto druhu se pak hodí princip, jejž Lorenzen [1955, s. 28] nazývá PRINCIPEM INDUKCE, čehož důvod je okamžitě zřejmý z následující formulace:

> Máme-li kalkul (K) s počátky A_1, A_2, ... a pravidly $B_1^1, B_1^2, \ldots \Rightarrow B_1$; $B_2^1, B_2^2, \ldots \Rightarrow B_2$; ... a s je proměnná pro libovolné odvoditelné slovo v (K), pak pro libovolnou formu $C(x)$ kalkulu (K) platí $C(A_1); C(A_2); \ldots; C(B_1^1), C(B_1^2), \ldots \Rightarrow C(B_1)$; $C(B_2^1), C(B_2^2), \ldots \Rightarrow C(B_2); \ldots \vdash_K C(s)$, kde vlevo od $\vdash_K$ jsou všechny výskyty proměnných vázané.

Jak zdůvodnění jednotlivých eliminací, tak těchto principů coby eliminačních schémat není obtížné nahlédnout, a má právě proto opět jasný epagogický charakter, známý z geometrických demonstrací: na jednom případě uchopíme platnost všech. Lorenzen přitom jako motivaci obvykle využívá formu sázek mezi dvěma mluvčími, hráči, čímž anticipuje své pozdější rozšíření raného operativního konceptu na koncept dialogický. Zde se úvaha o jistotě protologických, a odvozeně pak i aritmetických tvrzení stává zajímavou, neboť je spojena s možností intersubjektivního ověření, nikoli tedy jen nereflektovaným přesvědčením (míněním) určitého jedince. Podstatné u pravd tohoto operativního typu je rovněž okolnost, že jejich kontrolu máme v principu plně v rukou, tj. nezávisí na zcela externích, nevypočitatelných faktorech. Jsou tedy v jistém, právě popsaném smyslu konkrétnější než obecná empirická tvrzení, což je zvlášť zajímavé v kontextu obvykle proklamované abstraktnosti aritmetických, resp. matematických pravd.

Výčet protologických principů ale ještě nekončí. Komplikovanější příklad důkazu přípustnosti pravidla (R) $A \Rightarrow B$ ke kalkulu (K) spočívá v inspekci všech pravidel kalkulu, jejichž konsekvent může vhodnou substitucí splynout s formou A. Pokud lze ze všech jejich antecedentů odvodit v (K) B bez použití (R), je (R) přípustné, neboli:

> Mějme kalkul (K), nové pravidlo $A \Rightarrow B$ a všechna pravidla $A_1^1, A_1^2, \ldots \Rightarrow_{x,y,\ldots} A_1$; $A_2^1, A_2^2, \ldots \Rightarrow_{x,y,\ldots} A_2$; $\ldots$ kalkulu (K), jejichž konsekvent může nahrazením proměnných x, y, $\ldots$ splynout s A. Pak platí $A_1^1, A_1^2, \ldots \Rightarrow_{x,y,\ldots} B; A_2^1, A_2^2, \ldots \Rightarrow_{x,y,\ldots} B; \ldots \vdash_K A \Rightarrow B$. B přitom nesmí obsahovat žádnou z nahrazovaných proměnných x, y, $\ldots$ jako volnou.

Tento princip nazývá Lorenzen [1955, s. 30] PRINCIPEM OBRATU, a to s ohledem na jeho speciální případ, který nám za popsaných okolností dovoluje k nějakému pravidlu přijmout jeho inverzi jako přípustnou. To se stane např. u pravidla (2) kalkulu (K1), neboť podle principu obratu platí

$$x \Rightarrow x \vdash_K x\heartsuit \Rightarrow x$$

a $x \Rightarrow x$ je přípustné ke každému kalkulu, tedy i ke (K). V dalším oddíle ukážeme již aplikaci protologických principů na aritmetiku, současně však budeme muset v souvislosti s potřebou dokazovat negativní tvrzení o (ne)odvoditelnosti a (ne)přípustnosti vyřešit problém logických konstant.

8.7 Operativní logika a aritmetika

Operativní zdůvodnění vět aritmetiky vyžaduje jak zavedení elementárních aritmetických pojmů, především tedy pojmu čísla a aritmetických operací, tak zdůvodnění logických spojek. Čísla jsou ve své nejzákladnější formě definována kalkulem (K|):

(1) $\Rightarrow |$,

(2) $x \Rightarrow x|$,

v němž proměnná x funguje jakožto vlastní. To již není případ proměnných kalkulu (K=):

(1) $\Rightarrow | = |$,

(2) $x = y \Rightarrow x| = y|$,

v němž se x, y vztahují ke slovům kalkulem (K|) generovaným. Přechod od (K|) ke (K=) můžeme samozřejmě v duchu techniky logické abstrakce komentovat jakožto přechod od číslovek k číslům, a to tím spíše, že to byl právě Lorenzen [1962a], kdo Fregovu techniku znovurozpoznání rozpracoval v teoretických detailech. V historickém kontextu Lorenzenova díla je to ale až záležitost pozdějšího data, neboť z čistě operativního hlediska jsou tyto úvahy nepatřičné. Znak "=" je symbol jako kterýkoli jiný, tj. nepředpokládáme, že by byl jeho význam dán ještě jinak nežli obecnou verzí kalkulu (K=):

$$x = y, u = v \Rightarrow xu = yv,$$

kde u, v zastupují atomické figury. Toto pravidlo můžeme připojit k libovolnému kalkulu spolu s počátky artikulujícími rovnost jeho atomických figur, tj. např. $\Rightarrow \heartsuit = \heartsuit$, $\Rightarrow \spadesuit = \spadesuit$ apod. Z této definice rovnosti ale už prakticky plyne obecná přípustnost schématu

$$x = y \Rightarrow A(x) = A(y)$$

a rovněž platnost principu, který Lorenzen [1955, s. 34] nazývá PRINCIPEM ROVNOSTI:

> Tvrzení $x = y, x \vdash x \Rightarrow y$ platí pro každý kalkul, jenž obsahuje definici rovnosti.

Na bázi toho pak dostáváme platnost tvrzení

$$x = y \vdash A(x) \Rightarrow A(y),$$

které připomíná obvyklou definici rovnosti skrze Leibnizův princip. Pro Lorenzena je tato podobnost více než těsná, neboť chce zavést implikaci prostým nahrazením znaku $\Rightarrow$ znakem $\rightarrow$.

To se může zdát zprvu z různých důvodů neúnosné, odpovídá to ale již protologickému čtení zápisu $A \Rightarrow B$ ve smyslu "když je odvozeno A, můžeš odvodit B", které nyní chápeme v širším kontextu inferenčních závazků. Podle Lorenzena se tak navíc vyhýbáme bludnému kruhu Tarského definice, neboť kořen operativního zdůvodnění dané spojky nespočívá v jejím předchozím metajazykovém uchopení, ale ve zvládnutí jistých praktických dovedností, totiž odvozování v kalkulu a příslušných eliminacích. Na jejich základě jsou zdůvodněna i metatvrzení, jako je *modus ponens*

$$A, A \rightarrow B \vdash B$$

či tranzitivita implikace

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C.$$

Další jsou okamžitým a očividným důsledkem deduktivního principu. Podstatné je přitom právě to, že všechna pravidla, např. třeba MP, nelze zdůvodnit zcela explicitně, ale jen na preteoretické, empraktické bázi. Na polopopulární úrovni to demonstruje Carrollův [1895, s. 1104–1108] slavný příklad z rozhovorů Achilla a želvy, v němž předpoklad možnosti explicitního zdůvodnění (užití) pravidla

$$A \Rightarrow B$$

metapravidlem

$$A, (A \rightarrow B) \Rightarrow B$$

vede k ustanovení metametapravidla

$$A \wedge (A \rightarrow B), A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B \Rightarrow B,$$

a v důsledku tedy až k nekonečnému regresu. To také ukazuje, že rozdíl mezi $A \Rightarrow B$ a $A \rightarrow B$, resp. $\Rightarrow A \rightarrow B$, jak bychom měli implikaci správně zavést, je všechno jiné než triviální: opět se jedná o kontrast implicitně předpokládaného a explicitně vyjádřeného, kdy nově nabytou sílu druhého lze pozorovat např. v možnosti řetězit příslušnou spojku ($\rightarrow$), což u pravidel ($\Rightarrow$) nedává zprvu vůbec smysl.

Oproti implikaci jsou konjunkce a disjunkce zavedeny speciálními definicemi — pravidly, a mají tedy podstatně konvenčnější charakter. Přesto má jejich původ zřetelně operativní rysy, v případě konjunkce např. pramenící z možnosti řetězení figur, zachycené definicí

$$x, y \Rightarrow x \wedge y.$$

V libovolnosti řazení podmíněně odvoditelných symbolů x, y se totiž implicitně skrývá např. i obvyklá komutativnost zavedené spojky, stejně jako se v operativním pojetí čísla Wittgensteinova *Tractatu* skrývala komutativita, případně asociativita sčítání a násobení. Z toho hned vidíme, že se zde jedná o více nežli jen prostou změnu stávající notace, ale nový koncept logiky, která je založena cele na pravidlech (*Regellogik*). Tento koncept lze eventuálně rozvinout až do inferencialistické sémantiky,[27] v níž se pokusíme význam spojek namísto explicitními definicemi v rámci pravdivostních tabulek zachytit holisticky pomocí úsudkových pravidel, jak to zcela přirozeně odpovídá jejich synkategorematické, nedenotující povaze. Oproti inferencialismu, který stanovuje dvě dodatečná pravidla

$$x \wedge y \Rightarrow x \qquad\qquad x \wedge y \Rightarrow y$$

bez dalšího vysvětlení, odvozuje je Lorenzen [1955, § 7] z definujícího pravidla pomocí principu obratu. Podobně lze z definice disjunkce

[27] Viz třeba Peregrin [1999, s. 206 n].

$$x \Rightarrow x \vee y \qquad\qquad y \Rightarrow x \vee y$$

získat obratem platnost vztahu

$$x \Rightarrow z; y \Rightarrow z \vdash x \vee y \Rightarrow z,$$

zachycujícího poslední řádek tabulky, v němž spojka přiřazuje nepravdivým argumentům opět nepravdu. Tolik tedy konjunkce a disjunkce.

Filosoficky i technicky nejproblematičtější spojkou je tradičně negace. Pro ni, stejně jako pro implikaci, neexistují jednoduchá pravidla zavedení, tj. je třeba sáhnout k čistě operativní, případně inferenční interpretaci. Přirozeně se nabízí neodvoditelnost dané figury, což nás ovšem staví před následující problém: Řekli jsme, že pravdivost tvrzení

$$\vdash A$$

doložíme konstrukcí příslušného odvození. Jak ale doložíme jeho nepravdivost? V operativním rámci je podle Lorenzena [1955, § 5] třeba vyjít z toho, že neodvoditelnost figury znamená tolik, co její nerovnost libovolné figuře odvoditelné. K libovolnému kalkulu jsou proto přidána následující pravidla

(1) $\Rightarrow ux \neq v,$

(2) $\Rightarrow u \neq vx,$

(3) $x \neq y \Rightarrow ux \neq vy,$

(4) $u \neq v \Rightarrow ux \neq vy,$

kde u, v jsou speciální proměnné pro atomické figury. Tím je umožněno využít v důkazech neodvoditelnosti princip indukce. Triviálně pak platí poslední (pátý) protologický princip, který Lorenzen [1955, s. 37] — bez nároku na úplnost — ve svém zkoumání stanovuje, totiž tzv. PRINCIP NEODVODITELNOSTI:

> Je-li slovo A neodvoditelné v kalkulu (K), je k němu pravidlo $A \Rightarrow B$ přípustné.

Při předběžném ztotožnění nepravdivosti s neodvoditelností je takto *de facto* zdůvodněn klasický a často zpochybňovaný princip tradiční logiky *ex falso quodlibet*. Vlastního zavedení negace dosahuje Lorenzen [1955, § 8] tak, že uvažuje slovo A kalkulu (K), pro něž platí $\vdash_K A \Rightarrow B$ pro libovolné B, a nazývá ho $\perp$-VÝROKEM. Je zřejmé, že každé neodvoditelné slovo může plnit roli $\perp$-výroku, opak ale neplatí např. v kalkulech, v nichž je odvoditelné cokoli. Ty v tradiční interpretaci odpovídají kalkulům sporným, a my tedy v případě ‘rozumných’ kalkulů můžeme předpokládat existenci alespoň jednoho $\perp$-výroku.[28] — Nyní již můžeme stanovit

$$\neg A \rightleftharpoons A \Rightarrow \perp,$$

tj. převést negaci na implikaci, jak to odpovídá původnímu Brouwerovu návrhu. Lorenzen také skutečně odvozuje logické pravdy (Heytingovy) intuicionistické logiky jakožto pravidla přípustná k libovolnému kalkulu, např.

$$A \rightarrow \neg\neg A,$$

zatímco některá klasicky pravdivá tvrzení typu

$$A \vee \neg A$$

označuje za fiktivní, neboť v operativní interpretaci zdůvodnitelná nejsou. V konkrétním kalkulu lze odvození figury $A \vee \neg A$ dosáhnout za předpokladu důkazu odvoditelnosti jedné z možností A, $\neg A$, kterého ale např. pro věty aritmetiky (samozřejmě po specifikaci příslušného kalkulu) nejsme obecně schopni. Klasická logika je nicméně v souladu s Hilbertovým návrhem ospravedlnitelná alespoň v tom smyslu, že je fikcí (relativně) bezespornou, kterou lze v rámci intuicionistického kalkulu úspěšně simulovat na bázi překladu zavedeného Kurtem Gödelem [1933]. Detaily se nebudeme zabývat, uveďme ale drobnou ilustraci Lorenzenových [1955, s. 80] úvah, které kopírují některé úvahy Brouwerovy:

Kdyby bylo $A \vee \neg A$ dokazatelně neodvoditelné, bylo by pravidlo $A \vee \neg A \Rightarrow \perp$ přípustné, a na základě intuicionisticky platné ekvivalence $\neg A \wedge \neg B \leftrightarrow \neg(A \vee B)$ by šlo tedy odvodit $\neg A$ a $\neg\neg A$. Tím pádem by bylo odvoditelné $\perp$. Tato úvaha vlastně představuje konstruktivistické zdůvodnění logické platnosti tvrzení formy $\neg\neg(A \vee \neg A)$, kterého lze dosáhnout pro libovolné oslabení klasicky platné tautologie dvojitou negací. Částečně nám to dává tušit, jak bude vypadat zmíněný Gödelův překlad. Nyní je vhodná chvíle přejít zase k operativní aritmetice.

Můžeme již totiž provést to, čeho jsme zatím — v rámci Tarského definice — nebyli schopni, totiž podat pravdivostní podmínky elementárních vět. Základem jsou zde kalkuly (K+):

(1) $\Rightarrow x + | = x|$,

(2) $x + y = z \Rightarrow x + y| = z|$

[28] V obecné rovině jej představuje jakékoli nepohodlné slovo, v aritmetice např. $0 \neq 1$, což ovšem příslušnou negaci parametrizuje, a my tak v principu dostáváme tolik negací, co nepohodlných slov. *Ex falso quodlibet* je přitom právě způsobem, jak se této parametrizace zbavit. Eventuálně za ním můžeme vidět artikulaci faktu, že spor obvykle nezůstává lokální. Srov. k tomu poznámky in Stekeler-Weithofer & Kambartel [2005, s. 214] a Stekeler-Weithofer [2003].

a (K×):

(1) $\Rightarrow | \times x = x,$

(2) $x \times y = v; v + y = w \Rightarrow x| \times y = w,$

definující příslušné operace.[29] Jelikož nyní již nemáme co do činění s prostými figurami, ale potenciálními větami, je zřejmé, že prostřednictvím metatvrzení typu

$$\vdash_{K+} || + || = ||||$$

zakládáme pravdivost příslušného tvrzení objektového, tj. aritmetické věty 2+2 = 4. Její kritéria jsou tedy ekvivalentní odvoditelnosti v kalkulu (K+), v tomto případě potvrzené posloupností

$$|| + | = |||, || + || = ||||,$$

a závisí tak plně na naší schopnosti operovat se symboly podle pravidel kalkulu (K+), nikoli na platnosti jiných pravd, natož pak pravd o jiném, abstraktním světě. Samotné kalkuly jsou přitom zdůvodněny čistě pragmaticky, odkazem na fakt, že se osvědčily.[30]

Z klasického úhlu pohledu bychom nyní chtěli říci, že předvedené kalkuly reprezentují epagogickou část definice pravdy, zatímco pravdivost komplexních vět je zachycena deduktivně, v rámci nějakého axiomatického systému, byť pojatého šířeji. Z Lorenzenova pohledu to ale nedává smysl již proto, že i ona část epagogická je v jistém smyslu deduktivní, a naopak, ohodnocení komplexních vět není závislé na axiomatickém systému, jako jsou třeba Peanovy axiomy, ale na protologických principech, které jsou dosti volné, jak co do počtu, tak co do specifikace užitých eliminačních metod. Jsou to tedy Peanovy axiomy coby konvenčně zvolený systém formulí, co je třeba zdůvodnit a eventuálně prokázat, že tvoří v nějakém smyslu úplný či alespoň smysluplný celek.

První část tohoto problému je přitom v naší situaci proveditelná triviálně, neboť axiom

$$x| = y| \Rightarrow x = y$$

lze získat okamžitě obrácením pravidla (2) kalkulu (K=) podle principu obratu. Axiom

[29] Podobně jako v logicistickém případě se zde dopouštíme metodologického skoku. Správně bychom měli nejprve zavést formy typu $A_+(x, y, z)$ a dokázat, že platí $A_+(x, y, z'), A_+(x, y, z'') \vdash z' = z''$, čehož lze dosáhnout jednoduchou indukcí.

[30] Tím ovšem nejsou vyřízeny elementární věty v obvyklém smyslu, k nimž počítáme i výrazy jako $3 \times (2 + 2) = (6 + 3) + 2$. Zde záleží vše na pravidlech, která jsme zavedli či odvodili jako přípustná pro identitu, např. na její komutativitě, zaměnitelnosti stejného stejným atd. Patřičné detaily si zde čtenář snadno doplní sám.

$\Rightarrow x| \neq |$

je zase instancí pravidel definujících nerovnost, případně jejich důsledků, a ve schématu indukce

$A(|); A(x) \Rightarrow A(x|) \vdash A(s)$

snadno poznáme instanci principu indukce nad kalkulem (K|), definujícím číslo. Druhou část problému lze podle Lorenzena [1955, § 22], případně [1962*b*, s. 60], obhájit tak, že necháme $A(x)$ nespecifikováno, tj. začneme se k němu chovat jako k indefinitní (druhořádové) proměnné. Pak lze totiž tvrdit jakousi operativní verzi věty o kategoričnosti druhořádové verze $\mathfrak{PA}$, totiž že libovolný kalkul, který vede k protologickému zdůvodnění formulí $\mathfrak{PA}$, modulo nahrazení atomických figur figurami jinými, povede ke zdůvodnění týchž formulí jako původní aritmetický kalkul (standardní model) (K|), (K=), (K+), (K×), opět modulo příslušná nahrazení, tj. až na izomorfismus. Detaily se opět zabývat nebudeme, leccos se ale možná stane jasnější, až nám příští kapitola umožní nahradit v právě formulovaném tvrzení slovo "(aritmetický) kalkul", resp. "model (aritmetiky)" termínem "(aritmetický) poloformalismus".

8.8 Dialogická logika

Hlavní výhoda operativního přístupu k logice a aritmetice tkví bezpochyby v jejich radikální deontologizaci, probíhající přesně v intencích Wittgensteinovy pozdní filosofie, která — jak jsme ukázali — byla již anticipována úvahami o nedeskriptivní povaze logiky a matematiky v *Tractatu.* Lorenzen přitom tento podnět zužitkoval i v oblastech přirozeného jazyka, které moderní logika pro jejich nematematický původ nechávala zpočátku stranou, speciálně v rámci diskurzu apodiktických a problematických soudů, neboli modálních výpovědí, klasifikujících některé výroky jako nutné, možné či skutečné (nutně, hypoteticky a aktuálně pravdivé). Namísto obvyklého ontologického čtení věty

A je nutná,

ve smyslu její transformace do indikativu možných světů

v každém možném světě platí A,

zasazuje se Lorenzen [1955, § 11] o čtení vztažné, odpovídající obvyklému užití obratu "je nutné, že A" ve smyslu odvoditelnosti tvrzení A ze systému Σ přesvědčení, která považujeme za nepochybná ("zločinec nutně utekl oknem", "Mozart byl nutně otráven", "nutně se změní počasí") neboli

$\Box_\Sigma A \rightleftharpoons \Sigma \vdash A.$

Možnost je takto analyzována jakožto bezespornost rozšíření Σ o A, neboli definicí

$$\Diamond_\Sigma A \rightleftharpoons \Sigma \nvdash \neg A.$$

Tento typ zdůvodnění modálních výrazů se obecně nazývá EPISTEMICKÝ, přičemž k odstranění indexu příslušného operátoru, a tedy i k pojmu (epistemické) modální logiky, dospějeme (podobně jako v předchozím oddíle) zaostřením na tvrzení platná v jakémkoli systému Σ. Tak získáme např. tvrzení

$$\Box A \to \Diamond A$$

jako důsledek přirozeného požadavku, aby byl každý systém Σ konzistentní. Jako neodůvodněné se nám okamžitě ukáže řetězení modalit, s jehož interpretací bývají na obvyklé, 'intuitivní', bázi značné problémy. Jako opodstatněné ho naopak nahlédneme u tzv. MODALIT DEONTICKÝCH, představujících jeden z mnoha dalších způsobů, jak analyzovat výskyt slova možný ve větách našeho jazyka ("je nutné, aby bylo možné otevřít dveře").[31]

Právě skutečnost, že chtěl konstruované logické systémy aplikovat v širší oblasti přirozeného jazyka, naznačuje, že byl Lorenzenovi jeho původní operativní koncept logiky příliš úzký, a to již v rámci matematiky, kterou — jak sám říká — operativním způsobem obsáhnout nelze. To vše je samozřejmě také záležitostí dalšího vymezení oné 'operativnosti', stejně jako byl Hilbertův axiomatismus závislý na dalším vymezení pojmu 'axiomatického systému'. Lorenzen v každém případě záhy po své *Einführung in die operative Logik und Mathematik* [1955] nahrazuje OPERATIVNÍ KONCEPT LOGIKY širším konceptem LOGIKY DIALOGICKÉ. Přinejmenším z didaktického hlediska tak získává prakticky okamžitě jasné odlišení elementárních a komplexních vět nejen v oblasti matematiky, a to za přijetí velmi plauzibilního východiska, že pravdivost vět nemůže být zdůvodněna abstraktně, skrze tezovitě deklarované pravdivostní podmínky, které již předpokládají naši schopnost porozumění textu, ale v přirozeném kontextu aktuálního tvrzení dané věty vůči někomu, tj. v idealizovaném dialogu dvou hráčů — proponenta a oponenta. To je zcela v souladu s Brandomovou [1994, s. 167] pozdější charakterizací tvrzení jakožto praktického závazku ve společenské hře na udávání a požadování důvodů. Tento závazek je zjevně ZÁVAZKEM INFERENČNÍM (*inferential commitment*).

Nosnost dialogického konceptu přitom můžeme nahlédnout právě na velmi problematickém případě ospravedlnění negace. Ten, kdo tvrdí nějakou větu (PROPONENT), např. $2 + 2 = 4$, zavazuje se automaticky

[31] K problematice různých aspektů analýzy modalit, včetně Lorenzenova vlastního, srov. antologii Kolman [2005*c*].

k její obhajobě (vůči OPONENTOVI), v případě operativní matematiky tedy k tomu, že ji odvodí v příslušném kalkulu. Je jasné, že teprve

> větu obhajitelnou proti *libovolnému* oponentovi nazveme pravdivou.

Ten, kdo tvrdí negaci, např. $2 + 2 \neq 5$, nemůže přirozeně ukázat nějaké neodvození (Russellův negativní fakt), odvozovací závazek proto přebírá ten, kdo o daném tvrzení pochybuje a kdo tak automaticky tvrdí, že negovaná věta odvoditelná je. Jelikož kalkul (K+) takovouto větu odvodit nedovoluje, je zřejmé, že proponent její negace zvítězí vůči libovolnému oponentovi, a věta je tedy pravdivá. Obecně platí, že se útok na negaci věty A rovná závazku k obhajobě A. Všimněme si, že ve vztahu k operativní matematice jsme se zde zbavili povinnosti zavádět speciální kalkul pro nerovnost, v němž by byla ve skutečnosti věta $2+2 \neq 5$ odvoditelná, a tedy přímo obhájena jako pravdivá. Pravdivost je nyní definována jako existence obecné výherní strategie, nezávislé na uskutečněných hrách či konkrétních hráčích. Rovněž nemusíme řešit, která věta je ‘skutečně’ pozitivní, tj. doložitelná nějakým faktem.

Významné je zde srovnání s Fregovou sémantikou. Na rozdíl od Fregovy funkcionální logiky je v dialogickém konceptu význam jednotlivých spojek zaváděn odshora dolů, holisticky, v rámci dialogu, a to stanovením pravidel útoku a obhajoby. Ta jsou zachycena v následující tabulce:

tvrzení	útok	obhajoba
$\neg A$	$A?$	
$A_1 \wedge A_2$	$i?$	A_i
$A_1 \vee A_2$	$?$	A_i
$A_1 \rightarrow A_2$	$A_1?$	A_2
$(\forall x)A(x)$	$n?$	$A(n)$
$(\exists x)A(x)$	$?$	$A(n)$

Dialogický význam spojek $\wedge$ a $\vee$ je přitom rámcově jasný. Ten, kdo tvrdí konjunkci, je připraven obhájit libovolný z jejích konjunktů podle volby oponenta; u disjunkce vybírá na oponentovu výzvu některý disjunkt proponent sám. V případě implikace spočívá obhajoba v závazku ke konsekventu za předpokladu, že je oponent připraven se zavázat tvrdit antecedent, v čemž zároveň spočívá jeho útok. Proponent si pak teoreticky může vybrat mezi napadnutím oponentova tvrzení nebo hájením vlastní části teze. Kvantifikátory, které jsme v operativním případě neuvažovali, jsou zjevným zobecněním významu konjunkce a disjunkce: obhajoba obecného i existenčního kvantifikátoru sice vypadá stejně, příslušná věta, k níž se proponent zavazuje, však závisí na tom, kdo vybírá substituent n.

> Za VYHRANÝ dialog se považuje ten, v němž proponent obhájil napadenou elementární větu nebo oponent takovouto větu neobhájil.

Logické pravdy jsou nyní oproti pravdám materiálním snadno definovatelné jako ty, které lze vyhrát již na základě znalosti pravidel dialogu, nikoli způsobu obhajoby elementárních vět. Příkladem je třeba formule $p \to p$ pro p elementární, jejíž výherní strategie vypadá takto:[32]

	oponent	proponent
1		$p \to p$
2	$p?$	p
3	?	?

Proponentova výhra je dána tím, že má obhajovat elementární tvrzení p, které zároveň tvrdí oponent, a tím pádem vyhraje jak v případě, že p jeho soupeř dokáže (pak stačí příslušný důkaz zopakovat), nebo 'kontumačně', totiž jestliže soupeř neuspěje. Z formálního hlediska se nejedná o nic jiného nežli Bethovo uzavřené *tableau*, což není náhoda: obě metody spočívají na téže myšlence, totiž obrácení Gentzenovy metody sekventových kalkulů vzhůru nohama. Formální a materiální hra se liší právě možností uzavřít dialog výše uvedeným způsobem, tj.:

> Dialog lze FORMÁLNĚ VYHRÁT, jestliže v něm má proponent obhájit elementární větu (formuli), kterou tvrdí oponent.

Lorenzen si od dialogické normace Fregovy syntaxe sliboval stejně jako u operativní logiky takové zdůvodnění efektivního konceptu logiky v Heytingově verzi, které by bylo v nějakém smyslu přirozené, přímé a vyhnulo by se i Brouwerovým neurčitým, a proto dogmatickým odkazům k intuici. To se však brzy ukázalo jako pošetilé, neboť při specifikaci obecných pravidel dialogu je třeba určit nejen pravidla toho, *jak* táhnout, ale i *kdy* táhnout. Okamžitě jasná je tato potřeba u kvantifikace, v jejímž případě by mohl některý z hráčů sabotovat ukončení dialogu výběrem dalších a dalších substituentů, případně instancí dané formule. Ještě problematičtější jsou ale případy jako tento: Dialog o formuli $p \vee \neg p$ pro p elementární lze např. vyhrát, povolíme-li následující průběh:

	oponent	proponent
1		$p \vee \neg p$
2	?	$\neg p$
3	$p?$	p

[32] Dialogy budeme uvádět ve značně zjednodušené a zhuštěné formě.

V posledním řádku reaguje proponent znovu na útok v řádku 2 a může tak ‘uzavřít’ dialog, tj. použít stejnou elementární formuli, kterou již použil oponent. Pokud by ale byla povolena pouze obhajoba vůči poslednímu útoku, proponent by v obecném případě prohrál, totiž kdyby nevěděl, který z obou disjunktů platí.

Patřičným stanovením toho, kdy je proponent, resp. oponent oprávněn hájit se, případně útočit, lze přitom dosáhnout jak klasického, tak konstruktivního průběhu dialogu.[33] Vyjdeme-li ze základního stavu, v němž mohou hráči reagovat pouze na akci předchozího kroku, což je tzv. PŘÍSNĚ KONSTRUKTIVNÍ DIALOG, povoluje EFEKTIVNÍ ČI KONSTRUKTIVNÍ DIALOG proponentovi napadnout libovolnou tezi oponenta a KLASICKÝ DIALOG k tomu přibírá i možnost proponentovy obhajoby vůči libovolnému útoku. Ačkoli se o to Lorenzen [1987, s. 75 nn] snaží, neexistuje nejmenší důvod, proč jedno z těchto rozhodnutí považovat za přirozenější (v Lorenzenově terminologii “rozumnější”) než druhé, z čehož lze po Stekelerově [1986] vzoru vyvodit jakési uvedení Lorenzenových přepjatých ambicí na pravou míru, ve stejném duchu, v jakém pomohly Gödelovy výsledky k upřesnění Hilbertova programu: Vše naše vědění lze a je i v nějakém smyslu potřebné zdůvodnit, nelze se však domnívat, že je toto zdůvodnění možné na bázi jednoho paradigmatu, tj. že by eventuálně nemohlo vypadat jinak, stejně jako by mohla jinak vypadat praxe, kterou se zdůvodnit snažíme.

My se nyní nebudeme věnovat dalším detailům a spokojíme se s tím, že lze pravidla formulovat tak, aby dialog terminoval, tj. aby bylo v konečně mnoha krocích rozhodnuto, kdo vyhrál a kdo ne. Procházíme-li jednotlivá pravidla, je zřejmé, jaké vítězné strategie musíme mít, abychom mohli obhájit věty příslušných forem. Kdo chce např. vyhrát dialog s pozicí

$$|| \; A \wedge B,$$

musí být s to vyhrát dialogy s pozicemi

$$|| \; A \text{ a } || \; B.$$

Podobně pro ostatní spojky. Touto úvahou dospějeme nejprve k definici pravdy à la Tarski, v níž je k obhajobě pozice

$$|| \; (\forall x)A(x)$$

potřeba obhajoba pozice $|| \; A(n)$ pro libovolné n substituovatelné, neboli k pravidlu

$$(\forall) \quad A(n) \text{ pro každé } n \Rightarrow (\forall x)A(x)$$

[33] Stručný přehled o možnosti modelování různých druhů logických pravd obecnými pravidly pro průběh dialogu lze nalézt in Lorenzen [1969].

s potenciálně nekonečným množstvím premis. Ačkoli nám tedy uvedený postup dává z definice jasný přehled o všech vítězných strategiích, není v případě nekonečného oboru, jako je aritmetika, možné jejich schematické generování. U logických pravd je ovšem situace jiná, neboť jejich proměnné se musí vztahovat k libovolnému oboru bez ohledu na velikost domény, což znamená, že se na místě nekonečně mnoha premis může nanejvýš vyskytovat proměnná volná. Takto lze dospět ke zdůvodněné verzi Gentzenova kalkulu, jak to ukazuje zápis:

$$F \mid\mid G, A;\ F \mid\mid G, B \Rightarrow F \mid\mid G, A \wedge B,$$

kde F, resp. G jsou všechny dosud tvrzené teze oponentovy, resp. proponentovy. O jaký typ zdůvodnění se jedná, vidíme hned třeba z toho, že v případě konstruktivní verze kalkulu není nutné s ohledem na příslušné obecné pravidlo zaznamenávat předchozí teze proponenta, a množina G je tak prázdná. Problému kvantifikace se zase zbavíme tím, že příslušné pravidlo formulujeme pomocí proměnné jako

$$F \mid\mid G, A(y) \Rightarrow F \mid\mid G, (\forall x)A(x),$$

kde se y nevyskytuje volná v závěru. Podobně zavádíme pravidla pro ostatní spojky nalevo i napravo od znaku $\mid\mid$, přičemž na začátek klademe sekventy

$$\Rightarrow F, p \mid\mid G, p$$

pro p elementární. Takto vzniklý kalkul pak pro svůj konečný, schematický charakter efektivně generuje všechny vítězné strategie nezávislé na oboru elementárních vět, tj. všechny tautologie dané logiky. Ta je tedy, jak jsme se v případě logiky klasické přesvědčili dříve, úplná.

Předvedený kalkul můžeme kromě čisté logiky samozřejmě bez obav používat i v oblastech materiálních, s vědomím toho, že pravdy odvozené s jeho pomocí příslušnou oblast materiálních pravd zpravidla nevyčerpávají. Ta je totiž dána také pravidly uvedeného (potenciálně) nekonečného typu, jejichž souhrn spolu se systémem všech elementárních pravd představuje jakýsi velkorysý axiomatický systém, jejž Lorenzen [1962*b*] — po Schütteho [1960] vzoru — nazval POLOFORMALISMEM (*Halbformalismus*, *semi-formalism*). Příkladem takovéhoto (polo)deduktivního systému jsou např. všechny pravdivé elementární věty aritmetiky plus (Tarského) pravidla ohodnocení vět, s prominentní instancí pravidla ($\forall$) coby Hilbertova ω-pravidla

$$(\omega)\quad A(1), A(2), \ldots \Rightarrow (\forall x)A(x).$$

Klasický aritmetický poloformalismus jsme popsali v oddíle 7.1 jako $\mathsf{N} = \langle T_{\mathsf{N}}, S_{\mathsf{N}} \rangle$. Vedle těchto poloformalismů, standardních modelů daných disciplín, rozlišujeme ovšem také FORMALISMY PLNÉ (*Vollformalismus*, *full-formalism*), což jsou klasické deduktivní systémy s efektivním chápáním axiomů a pravidel. Příkladem je Peanova aritmetika. Tím máme před sebou inferenční artikulaci tradičního rozlišení sémantiky a syntaxe. — Jak jsme již zdůraznili mnohokráte, je ale efektivita druhého z nich, tj. syntaxe, velmi specifického druhu, totiž schematicky vymezená Turingovým strojem nebo některým z příbuzných konceptů. První, tj. sémantika, si zde oproti tomu ponechává značný manévrovací prostor, zejména vzhledem k interpretaci ($\forall$)-pravidla. Ilustrujme to na případě aritmetiky.

(1) Systém pravdivých elementárních vět aritmetiky je sice nekonečný, ale rozhodnutelný Turingovým strojem (tj. rekurzivní), a tím pádem akceptovatelný klasickým i konstruktivistickým táborem. To se přirozeně vztahuje i na negace elementárních vět, v důsledku čehož je Lorenzen [1987, s. 56] nazývá PRAVDIVOSTNĚ DEFINITIVNÍ, tj. jednoznačně určené co do pravdivostní hodnoty. Nad touto bází nyní poloformalismus induktivně ohodnocuje předem danou třídu aritmetických vět, přičemž podle klasické logiky tak činí korektně a úplně, tj. ohodnocuje každou větu pouze a právě jednou pravdivostní hodnotou. Konstruktivismus nezpochybňuje část týkající se korektnosti, ale úplnosti, a to v důsledku specifického chápání ω-pravidla. To si zaslouží dalšího rozvedení.

(2) Klasická logika dospívá standardní induktivní úvahou k závěru, že z definitivnosti vět typu $A(N)$ pro libovolné N plyne definitivnost vět $(\forall x)A(x)$ a $(\exists x)\neg A(x)$, resp. $(\exists x)A(x)$ a $(\forall x)\neg A(x)$, a to tak, že výlučně, tj. že nabývají vždy po dvojicích opačných hodnot. Tento úsudek obnáší v první řadě velkorysé čtení ω-pravidla, které přiřazuje větě $(\forall x)A(x)$ hodnotu pravda i tehdy, když ještě nevíme, že je každá instance $A(N)$ pravdivá. Konstruktivisté celkem plauzibilně namítají, že pravidlem může být pouze něco, čím se lze obecně řídit, a váží jeho konkrétní aplikaci na existenci uniformní strategie, jak vyhrát formu $A(x)$ pro libovolné N. Tato existence přitom nijak nevyplývá z existence konkrétních strategií pro jednotlivá $A(N)$! Např. u Goldbachovy domněnky dokážeme jistě v konečně mnoha krocích rozhodnout, zda je konkrétní sudé číslo součtem dvou prvočísel, a v principu tedy můžeme mít výherní strategii pro každé z nich, obecné tvrzení ale zatím dokázat neumíme.

(3) Konstruktivisté užívají tedy také nekonečná pravidla, ale jako licenci tohoto použití vyžadují podmínku uniformní vítězné strategie pro jejich premisy. Pojem vítězné strategie je pak ponechán úmyslně otevřený, indefinitní. Následkem toho jsou konstruktivisté také schopni rozlišit sémantiku a syntax, jejich sémantika je však méně liberální než klasická. Syntax (byť odlišná) je v obou případech přísně efektivní (schematická). V důsledku dodatečných podmínek na aplikaci ($\forall$)-pravidla zůstává obvykle mnoho vět pravdivostně nedourčeno. Z konstruktivního hlediska je již proto nemožné interpretovat negaci jako prostou neodvoditelnost v poloformalismu, neboť systém by se tak stal potenciálně ne-

stabilní. Neodvoditelnost znamená totiž neodvoditelnost ‘momentální’, úsudek na $\neg A$ by po úspěšném nalezení důkazu A bylo nutné odvolat. Právě proto je negace interpretována pozitivně jako $A \to \bot$.

(4) Klasický formalismus je z konstruktivního hlediska (odhlédneme-li od Brouwerovy pozdější filosofie) ospravedlnitelný jako konzistentní, a to dokonce v maximálním slova smyslu, tj. jeho další rozšíření už konzistentní není. Je-li tedy nazýván fikcí, pak v tomto idealizovaném smyslu největší možné liberalizace pojmu pravidla. Pro náš další výklad z toho především plyne potřeba rozlišovat mezi formálními a poloformálními systémy aritmetiky, odvozování v nichž zachycujeme obvyklými symboly $\vdash$ a $\models$. V obou případech pak rozlišujeme klasickou a konstruktivní variantu. Od naší důkazově-teoretické reformulace klasických logických pojmů si slibujeme v první řadě demystifikaci tradiční řeči o standardním modelu či modelech vůbec, jak je běžná právě ve výkladech Gödelových teorémů. Těm a jejich důsledkům pro filosofii matematiky se budeme věnovat ve zbytku knihy.

Nejprve se ale ještě stručně zmiňme o dalších výhodách dialogického konceptu. Kromě již uvažovaného pragmaticko-inferencialistického zdůvodnění komplexních vět Fregovy logiky, které vede k alternativní sémantice pro fregovskou syntax, k nim patří i možnost přiblížit diskuzi o adekvátnosti Kantova rozlišení syntetických a analytických, apriorních a aposteriorních pravd naší historické situaci, včetně zavedení několika dalších terminologických nuancí. Vzhledem k tomu, že diskutovaná rozlišení nepovažujeme za platná absolutně, nemáme důvod diskutovat jejich neúnosnost např. tváří v tvář neklasickým geometriím či Quinově kritice dvou dogmat empirismu. Stačí nám, že tyto distinkce mohou být v mnoha případech velmi užitečné. Nejjednodušší aplikace se přitom týká *analytických* pravd coby vět založených na (explicitních) definicích typu

grošák je strakatý kůň

a tzv. pojmových pravdách. K těm patří v první řadě pravdy logiky, které můžeme jasně specifikovat jako ty z vět, které jsou obhajitelné pouze na základě pravidel dialogu, tj. bez znalosti matérie skryté v jednotlivých větách elementárních. Uvážíme-li oproti tomu nějakou větu aritmetiky, nejlépe princip matematické indukce

$$A(|) \wedge (\forall x)(A(x) \to A(x|)) \to (\forall x)A(x),$$

tradičně považovaný za určující v otázce epistemické povahy aritmetiky, vypadá začátek vítězného dialogu takto:

oponent	proponent
$A(\|)$	$(\forall x)A(x)$
$(\forall x)(A(x) \to A(x\|))$	

V dalším kroku zvolí oponent konkrétní n, dejme tomu $n := |||$, pro něž bude vyžadovat obhajobu. Dialog pak může pokračovat následovně:

$$
\begin{array}{c||c}
|||? & A(|||) \\
A(|) \to A(||) & |? \\
A(||) & A(|)? \\
A(||) \to A(|||) & ||? \\
A(|||) & A(||)?
\end{array}
$$

Není obtížné (epagogicky!) nahlédnout, že je tato strategie naprosto obecná, tj. volba n neovlivňuje výsledek, ale jen délku dialogu, který je nakonec také formálně uzavřen. Rozdíl oproti strategiím logickým spočívá v tom, že je proponentovo vítězství založeno i na znalosti kalkulu (K|), tj. konstrukci číslovek. Právě tento nutný odkaz ke konstrukci (*syntézi*) činí podle Lorenzena [1969, s. 45] aritmetiku závislou na mimologických zdrojích, tj. definicích čísel a aritmetických operacích nad kalkuly (K|), (K=), (K+), (K×), a je ji proto v protikladu k logice možné nazývat *syntetickou*.

Dialog, na němž jsme tuto odlišnost demonstrovali, nám ale na druhou stranu ukázal i to, v čem se logika a aritmetika podobají, totiž že se v obou nakonec nejedná o nic jiného nežli o operování se symboly, odkud také plyne jejich tradiční vymezení coby *formálních* věd. To je ještě podtrženo prokázanou kalkulizací logiky, v níž je sada výherních strategií (tautologií a platných argumentů) vykázána jako schematická, tj. generovatelná strojem. Rozdíl mezi analytickým — pojmovým charakterem logiky a konstruktivním — syntetickým charakterem aritmetiky tím ovšem setřen není, neboť kalkulizace se v případě aritmetiky týká jen jejích elementárních pojmů, nikoli pojmu pravdivosti, který podle Gödelových vět o neúplnosti schematicky (rekurzivně) zachytitelný není! Aritmetika tedy může být označena za syntetickou v tom smyslu, že její poloformálně definovaná pravda transcenduje jakoukoli následnou schematizaci. To ale vyplyne až z dále načrtnutých technických detailů.

Nyní se spokojme s tím, že jsme v oblasti tradičních apriorních pravd vedle formálně-analytických vět logiky a formálně-syntetických vět aritmetiky schopni rozlišit také kategorie materiálně-analytického a materiálně-syntetického. K první přitom můžeme řadit pojmové pravdy v širším smyslu, jenž neumožňuje jejich převedení na jazykové konvence, netýká se ale ani přímo našeho světa, nýbrž užití jazyka v něm. To je třeba případ věty:

je-li Praha na východ od Aše, je Aš na západ od Prahy

nebo tvrzení:

psi štěkají, zatímco lvi řvou.

Zvláště na druhém z nich je vidět, že se nejedná ani o definici konvenčního střihu, ani o empirické tvrzení, které by bylo vyvráceno případem němého psa, případně lva, jehož řev by se psímu štěkání k nerozeznání podobal. K materiálně-syntetickým větám počítá Lorenzen [1987, s. 211] celou geometrii v její funkci měřicího aparátu fyziky. Další detaily ale opusťme a věnujme se již slíbeným Gödelovým větám.

8.9 Neúplnost a nerozhodnutelnost

Gödelovy výsledky od jejich první formulace v článku *Über formal unentscheidbare Sätze der 'Principia Mathematica' und verwandter Systeme* [1931] prošly co do způsobu prezentace značným vývojem, který umožňuje podřídit jejich výklad potřebám daného kontextu, jednoduchostí počínaje a obecností konče. Ani my nemáme v situaci dalšího výkladu zapotřebí držet se pevně původního historického rámce, zvláště když byla díky vydání Smithovy knihy *An Introduction to Gödel's Theorems* [2007] podchycena reprezentativní škála teoretických, didaktických i historických souvislostí. Budeme se tedy držet především toho, že lze Gödelův první teorém o neúplnosti prezentovat ve dvou základních formách, odpovídajících (1) jednak logickému rozlišení syntaxe a sémantiky, jak ho právě Gödel ve svém článku učinil zvláště zřetelným, (2) jednak situaci, v níž článek psal, tedy pod vlivem konkrétních cílů a momentálního stavu Hilbertova programu.

Náš výklad Gödelových vět začneme pozorováním, že fatální závěry, s nimiž Gödel přišel, lze v nějakém smyslu získat mnohem levněji, totiž při využití několika základních rozlišení a výsledků teorie rekurze. To samozřejmě není výtka, neboť Gödel jednak touto teorií ještě nedisponoval (naopak ve svém článku přispěl k jejímu rozvoji), jednak je zmíněné jednoduchosti dosaženo na úkor konkrétnosti některých bodů. Z hlediska (ne)realizovatelnosti Hilbertova programu, přinejmenším v jeho původní verzi, jsou nicméně tyto zjednodušené verze konkrétní více než dost.

K jejich předvedení budeme potřebovat varianty rozlišení zavedených v oddíle 5.10, především tedy pojmy sémantické a syntaktické reprezentace nějaké aritmetické relace. První z nich přitom vztáhneme k nějakému aritmetickému jazyku L, když řekneme:

> L je DOSTATEČNĚ EXPRESIVNÍ, jestliže pro každou rekurzivní n-ární relaci R existuje formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ taková, že $\mathsf{N}_0 \vDash \varphi(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n})$, když $R(m_1, \ldots, m_n)$, a $\mathsf{N}_0 \vDash \neg\varphi(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n})$, jestliže neplatí $R(m_1, \ldots, m_n)$, pro libovolné $m_1, \ldots, m_n \in \mathsf{N}_0$. O formuli φ této vlastnosti říkáme, že relaci R VYJADŘUJE.

Připomeňme, že pro číslo n značíme jako $\overline{n}$ příslušný numerál, tj. výraz formálního jazyka, jenž ve standardní interpretaci (N_0) toto číslo označuje. Rekurzivitou jsme již kdysi nahradili preteoretický pojem rozhodnutelnosti. Syntaktického pendantu dostatečné expresivity jazyka dosáhneme vztažením pojmu reprezentovatelnosti k nějaké (aritmetické) teorii. Řekneme tedy, že teorie

> T je DOSTATEČNĚ SILNÁ, jestliže pro každou rekurzivní n-ární relaci R existuje formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ taková, že platí $T \vdash \varphi(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n})$, jestliže $R(m_1, \ldots, m_n)$, a $T \vdash \neg\varphi(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n})$, jestliže neplatí $R(m_1, \ldots, m_n)$, pro libovolné $m_1, \ldots, m_n \in \mathsf{N}_0$. O formuli φ této vlastnosti říkáme, že relaci R v T ZACHYCUJE.

Jak jsme již poznamenali dříve, platí, že je-li teorie T korektní vůči N_0, plyne ze zachytitelnosti relace její vyjádřitelnost, avšak nikoli *vice versa*. Teorií T myslíme přirozeně TEORII AXIOMATICKOU, která je nyní dourčena jako generující systém (kalkul) sestávající z (1) množiny T formulí (axiomů) formálního jazyka s rekurzivním pojmem správně utvořené formule a (2) množiny pravidel s rekurzivním pojmem důkazu, tj. nad níž je rozhodnutelné, zda je příslušná posloupnost formulí důkazem v T či nikoli. Při doplňujících požadavcích na množinu axiomů to odpovídá koncepci plného formalismu, jak jsme jej zavedli v předchozím oddíle. Teorii T přitom nazýváme rozhodnutelnou, jestliže má rozhodnutelnou množinu teorémů $\mathsf{Th}(T)$. Rozhodnutelná množina axiomů nám zajišťuje pouze rekurzivní spočetnost množiny teorémů, jak ji hned dostaneme z věty o projekci a vztahu

$$\mathsf{Th}(T) = \{\varphi \mid (\exists x)(x \text{ je důkazem } \varphi \text{ v } T)\},$$

neboť relace "x je důkazem y v T" je podle předpokladu rozhodnutelná. Teorii S nazýváme (EFEKTIVNĚ) AXIOMATIZOVATELNOU, jestliže k ní existuje ekvivalentní teorie s rekurzivní množinou axiomů. — Již dříve jsme přitom zmínili, že v definici axiomatizovatelné teorie je možné uvažovat i rekurzivně spočetnou množinu axiomů, a to s ohledem na tzv. CRAIGŮV TRIK:

> K teorii S s rekurzivně spočetnou množinou axiomů existuje ekvivalentní teorie T, která má dokonce primitivně rekurzivní množinu axiomů.

Důkaz: Jelikož má teorie S rekurzivně spočetnou množinu axiomů, musí být z uzavřenosti RS-podmínek na existenční kvantifikaci rekurzivně spočetná i množina $\mathsf{Th}(S)$. Vezměme tedy její vyčíslení φ_1, φ_2, … a uvažme množinu $T = \{\varphi_1, \varphi_2 \wedge \varphi_2, \varphi_3 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_3, \ldots\}$. K ověření toho, zda $\psi \in T$, stačí s ohledem na požadovaný tvar formule projít přiměřeně dlouhý úsek uvažovaného vyčíslení $\mathsf{Th}(S)$. To znamená, že je T rekurzivní, a to dokonce primitivně, neboť uvažované prohledávání teorémů S je závislé na délce ψ. (Turingův stroj ověří, zda je ψ konjunkce stejných formulí, a pokud ano, zjistí jejich počet n a porovná příslušnou opakující se formuli s formulí φ_n vyčíslení. Jelikož rozklad ψ na konjunkci nemusí být jednoznačný, je příslušné porovnání nutné provést pro každý počet konjunktů.) Očividně platí, že $\mathsf{Th}(T) = \mathsf{Th}(S)$. $\square$

Obecně tedy můžeme předpokládat, že axiomatizovatelná množina formulí má PR-množinu axiomů. To se ukáže být významné při formulaci Gödelova výsledku.

V oddíle 5.3 jsme rozlišili dva základní typy úplnosti, totiž úplnost teorie T vůči interpretaci (tj. úplnost sémantickou), kdy lze speciálně z toho, že platí $\mathsf{N}_0 \models \varphi$, usoudit na $T \vdash \varphi$, a úplnost deduktivní, případně vůči negaci (tj. úplnost syntaktickou), která vyžaduje platnost právě jedné z možností $T \vdash \varphi$ a $T \vdash \neg\varphi$ pro každou uzavřenou formuli. Jednoduchá sémantická verze věty o neúplnosti aritmetiky tvrdí v podstatě tolik, že žádná její axiomatizovatelná teorie s dostatečně expresivním jazykem L není úplná v sémantickém smyslu, což vyjádříme jako tvrzení:

> Množina všech pravdivých formulí dostatečně expresivního aritmetického jazyka L není axiomatizovatelná.

Důkaz: Vycházíme z toho, že kdyby axiomatizovatelná byla, byla by také rekurzivně spočetná. Tento předpoklad dovedeme nyní ke sporu s pomocí prokázaného faktu, že množina K (viz s. 497) je RS, její doplněk $-K$ však nikoli. Podle věty o projekci existuje k množině K rekurzivní relace R taková, že $(\exists x)R(x,n)$ tehdy a jen tehdy, když $n \in K$. Jelikož je L dostatečně expresivní, je R vyjádřena nějakou formulí $\varphi(x,y)$, což znamená, že když platí $R(m,n)$, platí $\mathsf{N}_0 \models \varphi(\overline{m},\overline{n})$, a tudíž i $\mathsf{N}_0 \models (\exists x)\varphi(x,\overline{n})$. Tím pádem ale platí, že $n \in K$ tehdy a jen tehdy, když $\mathsf{N}_0 \models (\exists x)\varphi(x,\overline{n})$, z čehož konverzí dostáváme ekvivalenci

$$n \in -K \text{ tehdy a jen tehdy, když } \mathsf{N}_0 \models \neg(\exists x)\varphi(x,\overline{n}).$$

Kdyby nyní množina všech pravd jazyka L byla RS, mohli bychom ji systematicky procházet, a jakmile bychom narazili na formuli tvaru

$$\neg(\exists x)\varphi(x,\overline{m})$$

pro nějaké číslo m, poznamenali bychom si je, a vytvořili tak řadu všech $m \in -K$ a pouze jich. To je ale v rozporu s prokázanou rekurzivní nespočetností $-K$. $\square$

Pro axiomatizovatelnou teorii s dostatečně expresivním jazykem, která je korektní vůči standardní interpretaci (což obvykle předpokládáme jako samozřejmost), dostáváme s předchozím výsledkem i neúplnost deduktivní. Je-li totiž dostatečně expresivní teorie T neúplná sémanticky, znamená, to, že existuje φ uzavřená taková, že je pravdivá a zároveň neodvoditelná z T. Formule $\neg\varphi$ je tím pádem nepravdivá, a nemůže být tedy za předpokladu korektnosti odvoditelná z T. Tím je deduktivní neúplnost T dokázána.

K syntaktické verzi jednoduchého teorému o neúplnosti se dostaneme přes spřízněný výsledek nerozhodnutelnosti, jejž podal jako první Church [1936*b*]. Odvození je jednoduché: Je-li teorie deduktivně úplná, tvoří množiny sentencí $\{\varphi \mid T \vdash \varphi\}$ a $\{\varphi \mid T \vdash \neg\varphi\}$ úplný rozklad množiny všech sentencí daného jazyka, tj. každá sentence náleží právě jedné z nich. Jelikož v případě axiomatizovatelných teorií jsou obě množiny RS, musí být podle Postovy věty rozhodnutelné, tj. OR. Platí tedy:

> Z nerozhodnutelnosti axiomatizovatelné teorie T plyne její deduktivní neúplnost.

Příslušnou větu o neúplnosti proto můžeme formulovat takto:

> Žádná konzistentní, dostatečně silná teorie T není rozhodnutelná.

Důkaz: Postupujme sporem, tj. předpokládejme, že je teorie T rozhodnutelná. Vezměme nějaké vyčíslení $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... všech formulí jazyka teorie T s jedinou volnou proměnnou. Na jeho základě můžeme definovat aritmetickou vlastnost A takto:

$$A(x) \rightleftharpoons T \vdash \neg\varphi_x(\overline{x}).$$

Z rozhodnutelnosti T plyne okamžitě i rozhodnutelnost A, což při předpokládané zachytitelnosti všech rekurzivních relací vede k existenci formule $\varphi(x)$ takové, že $T \vdash \varphi(\overline{n})$, když má n vlastnost A, a $T \vdash \neg\varphi(\overline{n})$, když n nemá vlastnost A. Jelikož je $\varphi(x)$ formule s jedinou volnou proměnnou, musí se nacházet v daném vyčíslení, tj. přísluší jí nějaký index a. Lze tušit, že spor odvodíme dotazem, zda a má či nemá vlastnost A. V obou případech dospějeme ke sporu s předpokladem bezespornosti T. □

Na důkazu je významné právě to, že na rozdíl od předchozího případu operuje pouze syntaktickým pojmem konzistence teorie, tj. nikoli pojmy (sémantické) úplnosti a korektnosti. Gödelův původní důkaz tzv. první věty o neúplnosti se od předvedených zjednodušených verzí liší na první, povrchní pohled především tím, že nemá jejich hypotetický charakter, tj. ukazuje pro zcela konkrétní teorii, totiž systém *Principia Mathematica*, že je v nějakém smyslu dostatečně expresivní, resp. silná, z čehož pak zobecněním dospívá k větě o neúplnosti libovolné teorie popsaných vlastností. To nemá vliv na celkový dopad obou zjednodušených verzí, neboť se přirozeně očekávalo, že jakékoli axiomatické (finitistické) uchopení aritmetiky, které by stálo za úvahu, musí ony základní vlastnosti (dostatečnou expresivní a deduktivní sílu) mít. Výhoda Gödelova postupu spočívá především v tom, že předvádí zcela obecnou konstrukci zcela konkrétní formule, která je v daném systému přes svoji pravdivost nedokazatelná, případně nezávislá na zvolených axiomech. Roli axiomatických systémů, pro něž lze toto ukázat, hrají od jisté doby Robinsonova a Peanova aritmetika, a to pro svoji minimalitu: v jejich rámci, s jazykem L_A čítajícím pouze výrazy s, 0, $+$, $\times$, lze totiž vyjádřit, resp. zachytit všechny primitivně rekurzivní funkce. To je v jistém smyslu pouze záležitostí elegance, neboť totéž platí triviálně pro tzv. primitivně rekurzivní aritmetiku, v níž je každá prf-funkce zastoupena vlastním symbolem a 'definujícími' axiomy. Výhoda důkazu pro $\mathfrak{Q}$ a $\mathfrak{PA}$ spočívá nicméně v možnosti pohodlného zobecnění dosažených výsledků již pro relativně jednoduché jazyky a teorie.

Klíčovým místem Gödelova původního důkazu je přitom možnost kódovat syntax formální aritmetiky v aritmetice samé, a prezentovat tak metatvrzení o dokazatelnosti jakožto tvrzení formální aritmetiky, tedy něco, co lze formulovat v aritmetickém jazyce a dokazovat v aritmetických teoriích. Elementární syntaktické vlastnosti jako 'být axiomem', 'být teorémem' či 'být důkazem něčeho' se přitom ve své formě aritmetických vlastností ukáží být primitivně rekurzivní, což povede k jejich reprezentovatelnosti v rámci $\mathfrak{Q}$ a $\mathfrak{PA}$. Z toho pak, při vhodné volbě formule, povede (pod hrozbou sporu s předpokládanou korektností či bezesporností) cesta k důkazu jejich neúplnosti. Lze tušit, že za vším bude opět nějaký diagonální, sebevztažný krok, jak jsme jej viděli např. již v definici množiny K, tak vlastnosti A z předchozích zjednodušených důkazů Gödelova teorému.

Autoreferenční obrat Gödelova původního důkazu bývá obvykle popisován tak, že jistá kritická formule vyjadřuje svou konstrukcí, že je nedokazatelná, samozřejmě ve vztahu k užitému kódování a formalismu. Kdyby byla dokazatelná, musela by být vzhledem ke korektnosti formalismu pravdivá, což vzhledem ke konstrukci znamená nedokazatelná. Tím pádem musí být nedokazatelná, a tudíž pravdivá. V syntaktické verzi Gödelova výsledku je třeba ještě o něco zpřísnit podmínky kladené na výchozí teorii (skrze tzv. ω-bezespornost), nebo kritickou formuli utvořit o něco sofistikovaněji, což je např. princip tzv. Rosserova zobecnění. Aniž bychom chtěli či mohli zacházet do přílišných detailů, pokusíme se nyní o podrobnější rekonstrukci základních kroků Gödelova důkazu.

Začít můžeme opět ideou reprezentace aritmetických vlastností a relací ve formálních jazycích a teoriích. Jak již jsme zmínili v oddíle 5.10, je u funkcí žádoucí vyjádřit jednoznačnost. Vedle prostého zachycení funkce f formulí φ v teorii T jako relace ji můžeme chtít ZACHYTIT JAKO FUNKCI, což obnáší (v případě unárních funkcí) přidání podmínky pro každé m platí $T \vdash (\exists! y)\varphi(\overline{m}, y)$.[34]

Pokud jsme schopni dokázat dokonce i

$T \vdash (\forall x)(\exists! y)\varphi(x, y)$,

můžeme pro danou funkci zavést speciální symbol $\mathtt{f}$, jímž pak bude v dané teorii explicitně definována, totiž formulí

$(\forall \mathtt{x}, \mathtt{y})(\mathtt{f}(\mathtt{x}) = \mathtt{y} \leftrightarrow \varphi(\mathtt{x}, \mathtt{y}))$.

Rozdílem strojového a obyčejného písma budeme od nynějška (v případě potřeby) zachycovat užití symbolů v rámci formálního a neformálního jazyka, což jsme zatím činili většinou jen implicitně. V rámci rekonstrukce Gödelova argumentu je ale tato kontextuální domluva již obtížně udržitelná.

Podle Smithova [2007, s. 101] návrhu můžeme o posledně zmíněném způsobu reprezentace funkce hovořit jako o jejím PLNÉM ZACHYCENÍ JAKO FUNKCE. Nad těmito definicemi se hned ukáží výhody $\mathfrak{Q}$ a $\mathfrak{PA}$, neboť (1) pro každou teorii, která $\mathfrak{Q}$ obsahuje, platí, že zachycuje-li funkci, zachycuje ji i jako funkci, a (2) pro každou teorii, která obsahuje $\mathfrak{PA}$, a to dokonce již v omezení schématu indukce na formule s omezenou kvantifikací, ze zachytitelnosti funkce vyplývá její plná zachytitelnost jako funkce.

Již zmíněná klasifikace formulí jazyka L_A (včetně definovatelného symbolu $<$) s ohledem na užitou kvantifikaci vede nejprve k následujícím standardním definicím:

> Δ_0-FORMULE jsou formule získané induktivně (i) z formulí elementárních, tvaru $s = t$ a $s < t$, kde s, t jsou aritmetické termy, (ii) aplikací výrokových spojek a omezené kvantifikace, tj. prefixu tvaru $(\forall \mathtt{x} < s)$, resp. $(\exists \mathtt{x} < s)$, kde s je numerál či proměnná odlišná od $\mathtt{x}$.
>
> Σ_1-FORMULE, resp. Π_1-FORMULE jsou definovány jako ty, které vzniknou z nějaké Δ_0-formule φ předepsáním bloku existenčních, resp. obecných kvantifikátorů.

Tyto definice tvoří začátek tzv. ARITMETICKÉ HIERARCHIE, kterou ale nebudeme sledovat dál. Významné je, že Δ_0 je podmnožinou obou, Σ_1 i Π_1 množin, a že negací Σ_1-formule dostaneme formuli ekvivalentní

[34] Spojením této podmínky s pozitivní podmínkou zachytitelnosti: 'jestliže $f(m) = n$, pak $T \vdash \varphi(\overline{m}, \overline{n})$' dostáváme vztah: 'jestliže $f(m) = n$, pak $T \vdash (\forall y)[\varphi(\overline{m}, y) \leftrightarrow y = \overline{n}]$', s jehož pomocí lze v $\mathfrak{Q}$ odvodit i část negativní, tj. podmínku: 'jestliže $f(m) \neq n$, pak $T \vdash \neg\varphi(\overline{m}, \overline{n})$', pročež je uvedený vztah alternativně používán jako definice zachytitelnosti funkce jako funkce.

Π_1-formuli a *vice versa.* — Na základě těchto definicí lze dosáhnout dílčího pozitivního výsledku týkajícího se $\mathfrak{Q}$, totiž že rozhoduje každou Δ_0-sentenci, neboli:

> Jestliže $\mathsf{N}_0 \models \varphi$, pak $\mathfrak{Q} \vdash \varphi$, a jestliže $\mathsf{N}_0 \not\models \varphi$, pak $\mathfrak{Q} \vdash \neg\varphi$, pro Δ_0-sentenci φ.

Z toho dostáváme přímo tvrzení Σ_1-ÚPLNOSTI $\mathfrak{Q}$, čímž myslíme úplnost vůči formulím dané třídy, neboli vztah:

> Jestliže platí $\mathsf{N}_0 \models \varphi$ pro Σ_1-formuli φ, pak $\mathfrak{Q} \vdash \varphi$.

Po další námaze pak obdržíme větu:

> Každá funkce, která je vyjádřitelná nějakou Σ_1-formulí, neboli tzv. Σ_1-FUNKCE, je v $\mathfrak{Q}$ zachytitelná jako funkce.

Jelikož Gödel dále pomocí tzv. β-funkce, (de)kódující posloupnosti čísel pouze s využitím funkcí jazyka L_A (tj. především bez použití obvyklé funkce exponenciální), dokázal, že každá prf-funkce je Σ_1-funkce, máme úhrnem větu:

> Každá prf-funkce je zachytitelná v $\mathfrak{Q}$ jako funkce.

Po těchto nevděčných přípravných pracích dostávají již věci rychlý spád. Ještě je ovšem třeba kódovat syntax. Začneme přidělením přirozených čísel elementárním symbolům užitého formálního jazyka, tj.

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ \forall,\ \exists,\ =,\ (,\ ),\ \mathtt{0},\ \mathtt{s},\ +,\ \times,$$

a nekonečné sadě proměnných

$$\mathtt{x},\ \mathtt{y},\ \ldots .$$[35]

Na základě toho pak můžeme snadno kódovat výrazy sestávající z těchto elementárních znaků jakožto posloupnosti jim odpovídajících čísel. Příslušné (de)kódovací schéma může být zvoleno různě, což neznamená, že na něm nezáleží, podstatné je, že je efektivně proveditelné v primitivně rekurzivním smyslu. O kódu přiřazenému výrazu φ aritmetického jazyka řekneme, že je jeho GÖDELOVÝM ČÍSLEM, což značíme jako

$$\ulcorner\varphi\urcorner.$$

Tak např.

$$\ulcorner\mathtt{s(s(0))}\urcorner$$

[35] Ty si je možné představit jako složené ze dvou elementárních symbolů, tj. $\mathtt{x}$ a bloku čárek $|$. Pro jednoduchost ale budeme operovat s výše uvedenými.

je číslo přiřazené uzavřenému termu $\mathtt{s}(\mathtt{s}(\mathtt{0}))$ coby posloupnosti znaků

$$\mathtt{s}, (, \mathtt{s}, (, \mathtt{0},),).$$

Tomuto číslu odpovídá v rámci formálního jazyka nějaký numerál, jenž bychom měli značit jako

$$\overline{\ulcorner \mathtt{s}(\mathtt{s}(\mathtt{0})) \urcorner},$$

obvykle si však vystačíme s původním $\ulcorner \mathtt{s}(\mathtt{s}(\mathtt{0})) \urcorner$, tj. dopustíme se jisté dvojznačnosti. Posloupnosti výrazů budeme zcela přirozeně kódovat jako posloupnosti příslušných Gödelových čísel. — Není obtížné nahlédnout (a je rutinní dokázat), že např. vlastnost 'být Gödelovým číslem termu jazyka L_A' je primitivně rekurzivní podmínka, tj. lze ji rozhodnout Turingovým strojem s předem omezenou délkou hledání. Podobně lze argumentovat pro vlastnosti 'být Gödelovým číslem formule jazyka L_A', 'být Gödelovým číslem axiomu teorie T v jazyce L_A', kde T má primitivně rekurzivní množinu axiomů, a významně: 'být Gödelovým číslem důkazu formule φ v teorii T jazyka L_A' s toutéž podmínkou na T a příslušný dokazovací systém. Takto získáváme aritmetické vlastnosti a relace $\mathit{Term}(x)$, $\mathit{Form}(x)$, $\mathit{Axiom}_T(x)$ a $\mathit{Proof}_T(x, y)$, o nichž víme, že jsou PR. Podstatné je, že

> relace $\mathit{Proof}_T(x, y)$ nastává mezi čísly m, n tehdy a jen tehdy, je-li m Gödelovým číslem posloupnosti formulí, která je důkazem formule s Gödelovým číslem n v teorii T.

Index teorie budeme obvykle vynechávat. Zcela speciální a pro konstrukci Gödelovy sebevztažné sentence klíčový krok představuje definice

> funkce $\mathit{subst}(x, y)$, která pro kód m formule φ o jediné volné proměnné a číslo n vypočte kód formule $\varphi(\overline{n})$ vzniklé z φ substitucí numerálu pro n za příslušnou volnou proměnnou.

Lze ukázat, že se jedná o funkci primitivně rekurzivní. Z toho plyne, že je prf i funkce

$$\mathit{diag}(x) := \mathit{subst}(x, x),$$

která se nazývá DIAGONALIZACÍ, neboť přiřazuje kódu formule φ o jediné volné proměnné kód formule

$$\varphi(\ulcorner \varphi \urcorner),$$

v souladu s dříve zavedenou notační konvencí. Jelikož je aritmetická relace $\mathit{Proof}(x, y)$ primitivně rekurzivní, zůstane jí i relace

$$P(x, y) \rightleftharpoons \mathit{Proof}(x, \mathit{diag}(y)),$$

v níž se dvě čísla ocitnou tehdy a jen tehdy, kóduje-li první z nich důkaz formule, která vznikne diagonalizací formule kódované číslem druhým. Jelikož PR-relace je definována jako ta, co má charakteristickou funkci v prf, je zřejmé, že ji lze také vyjádřit v jazyce L_A nějakou Σ_1-formulí $\mathtt{P}(\mathtt{x},\mathtt{y})$, z níž pak Gödel skládá formuli

$$\mathtt{U}(\mathtt{y}) \rightleftharpoons (\forall \mathtt{x})\neg\mathtt{P}(\mathtt{x},\mathtt{y}).$$

My k ní budeme dále odkazovat také jako k $\mathtt{U}$. Její diagonalizací získáme formuli

$$\mathtt{G} \rightleftharpoons \mathtt{U}(\ulcorner\mathtt{U}\urcorner) \rightleftharpoons (\forall \mathtt{x})\neg\mathtt{P}(\mathtt{x},\ulcorner\mathtt{U}\urcorner),$$

která je právě onou autoreferující kritickou formulí Gödelova původního důkazu. To dokážeme prostřednictvím následujícího tvrzení:

> $\mathtt{G}$ je pravdivá (v N_0) tehdy a jen tehdy, když je nedokazatelná (v $\mathfrak{Q}$).

Důkaz: Předpokládejme, že je $\mathtt{G}$ pravdivá v N_0. To znamená, že pro žádné m neplatí v N_0 Σ_1-formule $\mathtt{P}(\overline{m},\ulcorner\mathtt{U}\urcorner)$, vyjadřující relaci $P(x,y)$. To znamená, že neexistuje Gödelovo číslo důkazu diagonalizace formule s kódem $\ulcorner\mathtt{U}\urcorner$ v $\mathfrak{Q}$, což je právě formule $\mathtt{G}$. To znamená, že je $\mathtt{G}$ nedokazatelná. Jelikož jsou všechny uvedené kroky ekvivalence, věta je dokázána. □

Z toho všeho především plyne, že $\mathtt{G}$ je ve skutečnosti pravdivá, neboť kdyby pravdivá nebyla, byla by dokazatelná v $\mathfrak{Q}$, a z korektnosti $\mathfrak{Q}$ by pak plynula její pravdivost, což je spor. Tím pádem je v $\mathfrak{Q}$ nedokazatelná pravdivá formule a my získáváme neúplnost $\mathfrak{Q}$ vůči standardní interpretaci. Podstatné na celém důkazu nicméně je, že se netýká samotné $\mathfrak{Q}$, ale jakékoli teorie, která je minimálně tak silná. Projdeme-li totiž dílčí kroky, které byly v důkazu neúplnosti $\mathfrak{Q}$ využity, získáváme obratem obecnou verzi celého tvrzení:

> V každé korektní axiomatizovatelné teorii T v jazyce obsahujícím L_A existuje sentence φ v jazyce L_A taková, že neplatí ani $T \vdash \varphi$, ani $T \vdash \neg\varphi$.

O formuli φ můžeme ještě říci, že je GOLDBACHOVA TYPU, neboť má stejnou aritmetickou formu jako Goldbachova domněnka, tj. jedná se o vlastní Π_1-formuli, neboli Δ_0-formuli s předepsaným obecným kvantifikátorem, jenž právě činí otázku její pravdivosti obecně (efektivně) nerozhodnutelnou. Formule $\mathtt{G}$ 'musela' být přitom pravdivá právě proto, že je Goldbachova typu, neboť její negace je automaticky Σ_1-formule a v případě pravdivosti by s ohledem na Σ_1-úplnost $\mathfrak{Q}$ musela být i dokazatelná. Z hlediska (ne)naplnění cílů Hilbertova programu je významná zvláště okolnost, že je ona nedokazatelná, leč pravdivá formule typu Π_1, neboť, jak jsme zmínili v oddíle 8.2, obecná schémata rozhodnutelných tvrzení počítal Hilbert ještě k vlastní, finitistické matematice.

8.10 Gödelova první věta

V předcházejícím oddíle jsme načrtli hlavní ideu Gödelova důkazu, jak ji sám prezentoval v úvodu ke svému článku [1931, s. 176] spolu s poznámkou, že neúplnosti aritmetických systémů lze dosáhnout již na základě "čistě formálních a mnohem slabších předpokladů". Tím — v duchu Hilbertova syntaktického programu — myslel především eliminaci užité korektnosti teorie. Gödelovou první větou budeme tedy rozumět především syntaktickou verzi předvedeného tvrzení, kterou prezentujeme v tomto oddíle. V ní by měla být korektnost nahrazena pojmem bezespornosti, dostatečná vyjadřovací schopnost teorie pak dostatečnou schopností deduktivní.

Gödelovi se nicméně toto nahrazení povedlo jenom z části, když totiž musel v jednom směru svého argumentu nahradit prostou bezespornost silnější podmínkou ω-bezespornosti, která je zjevně šitá na míru aritmetické interpretaci příslušného axiomatického systému, a tedy sémanticky motivovaná. Zní přitom takto:

> Aritmetická teorie T je ω-BEZESPORNÁ, jestliže není možné, aby pro nějakou otevřenou formuli $\varphi(\mathtt{x})$ platilo $T \vdash (\exists \mathtt{x})\varphi(\mathtt{x})$ a zároveň pro všechna $m \in \mathsf{N}_0$ platilo $T \vdash \neg\varphi(\overline{m})$.

Ve vztahu k materiálním teoriím aritmetiky (standardnímu modelu) je tento požadavek přirozený, tj. platí automaticky s ohledem na přesné vymezení oboru kvantifikace. Ve formálních teoriích není oproti tomu prostou konzistencí zajištěna ω-bezespornost, neboť přípustné interpretace mohou teoreticky obsahovat i jiné objekty nežli 'přirozená čísla'. Triviálně však platí opak, tj. ω-bezespornost implikuje konzistenci, pročež jsme o ní také hovořili jako o silnější vlastnosti.

GÖDELOVU PRVNÍ VĚTU můžeme nyní formulovat rovnou v zobecněném tvaru, jenž v podstatě odpovídá Gödelově původní artikulaci a konzervuje navíc některé významné detaily:

> Je-li v axiomatizovatelné teorii T v jazyce obsahujícím L_A zachytitelná každá prf-funkce (či alternativně: obsahuje-li $\mathfrak{Q}$), pak existuje L_A-formule φ Goldbachova typu taková, že: je-li T bezesporná, pak $T \nvdash \varphi$, a je-li T ω-bezesporná, pak $T \nvdash \neg\varphi$.

Důkaz: Formulí zmíněnou ve větě je podle očekávání sentence $\mathtt{G}$. První část důkazu je neproblematická. Předpokládejme, že je T konzistentní a že splňuje všechny vlastnosti uvedené v preambuli. Platí-li $T \vdash \mathtt{G}$, existuje Gödelovo číslo m důkazu formule $\mathtt{G}$ v T a relace $P(x, y)$ platí o číslech m a $\ulcorner\mathtt{U}\urcorner$. Jelikož má T primitivně rekurzivní množinu axiomů, je relace $P(x, y)$ primitivně rekurzivní, a tudíž i zachytitelná formulí $\mathtt{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ v T. Tím pádem platí $T \vdash \mathtt{P}(\overline{m}, \ulcorner\mathtt{U}\urcorner)$. Jelikož $\mathtt{G} \rightleftharpoons (\forall\mathtt{x})\neg\mathtt{P}(\mathtt{x}, \ulcorner\mathtt{U}\urcorner)$, musí ale v souladu s hypotézou $T \vdash \mathtt{G}$ na základě specifikace $\mathtt{x} := \overline{m}$ platit i $T \vdash \neg\mathtt{P}(\overline{m}, \ulcorner\mathtt{U}\urcorner)$, což je ve sporu s předpokládanou bezespornosti T. Ergo: $T \nvdash \mathtt{G}$.

Druhá část důkazu je komplikovanější. Předpokládejme opět, že T splňuje výše uvedené vlastnosti a je navíc ω-bezesporná. Nechť dále platí $T \vdash \neg\mathtt{G}$. To v první řadě znamená, že neplatí $T \vdash \mathtt{G}$, a tudíž pro žádné m nemůže platit relace $P(m, \ulcorner\mathtt{U}\urcorner)$. Jelikož formule $\mathtt{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ zachycuje relaci $P(x, y)$ v T, platí i $T \vdash \neg\mathtt{P}(\overline{m}, \ulcorner\mathtt{U}\urcorner)$ pro každé m. Jelikož $\neg\mathtt{G} \leftrightarrow (\exists\mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}, \ulcorner\mathtt{U}\urcorner)$ je v souladu s hypotézou dokazatelná, nemůže být teorie T ω-bezesporná, což je v rozporu s předpokladem. Platí tedy $T \nvdash \neg\mathtt{G}$, což jsme chtěli dokázat. □

Postupem času se ukázalo, že Gödelovo 'sémantické' omezení není nutné, nahradí-li se původní formule $\mathtt{G}$ poněkud komplikovanější, leč spřízněnou konstrukcí. Tu podal John Barkley Rosser [1936]. Na neformální rovině ji lze popsat jako tvrzení, které 'říká', že když je dokazatelné, je již dokazatelná jeho negace, tj. má důkaz menšího Gödelova čísla. Podobným způsobem jako u $\mathtt{G}$ se lze lehce přesvědčit, že je Rosserova sentence $\mathtt{R}$ pravdivá tehdy a jen tehdy, když je nedokazatelná.

Důkaz: Nechť je $\mathtt{R}$ pravdivá. Kdyby byla $\mathtt{R}$ dokazatelná, byla by z toho, jak je zkonstruována, dokazatelná i její negace, a příslušná teorie by nemohla být bezesporná. A naopak, nechť je $\mathtt{R}$ nedokazatelná. Pak je její antecedent nepravdivý a z vlastností materiální implikace plyne, že je $\mathtt{R}$ pravdivá. □

Sémantická verze Gödelovy věty s $\mathtt{R}$ namísto $\mathtt{G}$ snadno následuje. Syntaktická verze důkazu, tentokráte již bez dodatku ω-konzistence, je mírně komplikovanější a pro naše účely nemá cenu se jí podrobně zabývat. Významné je, že není nutné nijak reformulovat původní podmínky, neboť se opět jedná o Π_1-formuli.[36]

Postupme ale dále. Fakt, že se formule $\mathtt{G}$ nějak vztahuje k vlastní nedokazatelnosti, lze nyní převést do podoby dokazatelného (meta)tvrzení. K tomu potřebujeme Σ_1-formuli $\mathtt{Proof_T}(\mathtt{x}, \mathtt{y})$, která zachycuje PR-relaci $\mathit{Proof}_T(x, y)$ v teorii T. Definujeme-li nyní predikát

$$\mathtt{Prov_T}(\mathtt{x}) \rightleftharpoons (\exists\mathtt{y})\mathtt{Proof_T}(\mathtt{y}, \mathtt{x}),$$

je zřejmé, že za předpokladu korektnosti teorie T musí vyjadřovat vlastnost dokazatelnosti formule s číslem x v T. Indexy teorií budeme jako obvykle podle potřeby vynechávat. Jelikož formule $\mathtt{Prov}(\mathtt{x})$ zůstává stále

[36] Podrobnosti in Smith [2007, s. 165 n, 177 n].

Σ_1-formulí, lze nad teoriemi, které jsou jako $\mathfrak{Q}$ Σ_1-úplné, usoudit z $T \vdash \varphi$ na $T \vdash \mathtt{Prov}(\ulcorner\varphi\urcorner)$. Nic nás ale neopravňuje očekávat, že teorie T relaci dokazatelnosti zachycuje, a ve skutečnosti je jedním z důsledků Gödelových teorémů zjištění, že toho při dané síle není vůbec schopna. Plyne to takřka okamžitě ze zmíněné explikace 'vlastní dokazatelnosti' formule jako

$$T \vdash \mathtt{G} \leftrightarrow \neg\mathtt{Prov}(\ulcorner\mathtt{G}\urcorner).$$

Tuto konstrukci lze přitom zobecnit do tzv. DIAGONALIZAČNÍHO LEMMATU následujícího znění:

> Je-li T konzistentní axiomatizovatelná teorie v jazyce obsahujícím L_A, v níž lze zachytit každou prf-funkci jako funkci, pak pro každou formuli $\varphi(\mathtt{x})$ o jediné volné proměnné existuje sentence ψ taková, že $T \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\psi\urcorner)$.

Nezávislý důkaz diagonálního lemmatu, vycházející z možnosti reprezentace diagonální funkce $diag(x, y)$ jako funkce v teoriích dostatečné síly, umožňuje předvést Gödelovu první větu jako jeho speciální případ, kdy formuli $\mathtt{G}$ získáme coby 'pevný bod' formule $\neg\mathtt{Prov}(\mathtt{x})$. Toto schéma nabývá zvláštního významu v souvislosti s Tarského [1933] výsledky týkajícími se pojmu pravdy, zvláště pak jeho 'nezachytitelnosti' či 'nedefinovatelnosti'.

Podle Tarského selhává pokus o definici pravdivosti pro nějaký jazyk v tomto jazyce samém (např. jazyce přirozeném) právě na možnosti sebevztažení, jak jsme ji mj. pozorovali na rozličných paradoxech typu lháře. Formální výraz tomuto pozorování dává právě uvedené diagonální lemma. Tarski tvrdí, že každá teorie pravdy pro daný jazyk musí splňovat kritérium adekvátnosti, shrnuté ve schématu

"φ" je pravdivá tehdy a jen tehdy, když φ.

Toto kritérium v aplikaci na nějakou formální teorii T s jazykem L obnáší zavedení predikátu $\mathtt{True}(\mathtt{x})$ pravdivosti, pro nějž je možné odvodit vztah

$$\varphi \leftrightarrow \mathtt{True}(\ulcorner\varphi\urcorner)$$

pro libovolnou formuli φ jazyka L. TARSKÉHO TEORÉM nyní říká, že toto odvození není možné podat v (aritmetické) teorii T samé, neboť — je-li dostatečně silná — platí pro ni diagonální lemma a v aplikaci na predikát $\neg\mathtt{True}(\mathtt{x})$ získáváme pevný bod $\ulcorner\mathtt{C}\urcorner$, tj. formuli, pro niž

$$T \vdash \mathtt{C} \leftrightarrow \neg\mathtt{True}(\ulcorner\mathtt{C}\urcorner).$$

Předpoklad platnosti

$$T \vdash \mathtt{C} \leftrightarrow \mathtt{True}(\ulcorner\mathtt{C}\urcorner)$$

pak vede okamžitě ke sporu. V této souvislosti je zvláště pozoruhodný kontrast predikátu pravdivosti s predikátem dokazatelnosti, kdy druhý z nich sice není v uvažovaných teoriích (deduktivně) zachytitelný, lze ho ale (sémanticky) vyjádřit. U predikátu pravdivosti není zjevně možné ani to! Pokud by totiž existovala formule $\mathtt{True(x)}$ s touto vlastností, získali bychom aplikací lemmatu odvoditelnost formule $\mathtt{C} \leftrightarrow \neg\mathtt{True}(\ulcorner \mathtt{C} \urcorner)$, která by — s ohledem na předpokládanou korektnost teorie T — musela být pravdivá. To ale není možné.

Nemožnost zachytit predikát dokazatelnosti v teoriích, které jako $\mathfrak{Q}$ či $\mathfrak{PA}$ umožňují zachytit všechny prf-funkce, je podkladem dalšího důsledku Gödelovy první věty, totiž že jsou ony teorie nerozhodnutelné primitivně rekurzivním algoritmem. Tvrzení, že nejsou rozhodnutelné v obecně rekurzivním smyslu, je ovšem také možné, neboť lze dokázat:

$\mathfrak{Q}$ je schopna zachytit každou orf-funkci jako funkci.

Z toho pak jako nechtěné dítě dostáváme tvrzení:

Žádná teorie obsahující $\mathfrak{Q}$ není rozhodnutelná.

Ba co víc, zasažen je i samotný základní deduktivní aparát, — logické axiomy a pravidla —, který zmíněné axiomatické teorie užívají. Jelikož je $\mathfrak{Q}$ konečně axiomatizovatelná, bylo by v případě rozhodnutelnosti predikátové logiky s rovností, tj. základního axiomatického systému $\mathfrak{B}_{\forall}^{=}$, k němuž jsou axiomy $\mathfrak{Q}$ přidány jako mimologické, možné rozhodnout i $\mathfrak{Q}$, totiž skrze větu o dedukci, která umožňuje převést problém odvoditelnosti $\mathfrak{Q} \vdash \varphi$ na otázku $\vdash \mathfrak{Q} \rightarrow \varphi$, kde je $\mathfrak{Q}$ chápán jako jediný axiom. Tedy:

Predikátová logika prvního řádu není rozhodnutelná.

S tímto tvrzením, oficiálně dokázaným Churchem [1936*a*], je negativně vyřešen Hilbertův 'Entscheidungsproblem'. Vidíme, že historicky první negativní výsledek jich s sebou přinesl celou kopu. Již dříve jsme přitom jako jeden z nich zmínili neúplnost logiky druhého řádu, plynoucí rovněž z konečné axiomatizovatelnosti a kategoričnosti $\mathfrak{PA}_2$. Díky nim je totiž formule φ v jazyce L_A pravdivá tehdy a jen tehdy, je-li $\mathfrak{PA}_2 \rightarrow \varphi$ tautologií. Jelikož je vlastnost 'být formulí prvního řádu v jazyce L_A' zjevně rozhodnutelná, úplnost logiky druhého řádu, tj. systému $\mathfrak{B}_2$, by nám dovolovala generovat všechny pravdivé věty aritmetiky prvního řádu, což, jak víme, není možné. Všimněme si, že z deduktivního hlediska je $\mathfrak{PA}_2$ neúplná automaticky, protože rozšiřuje $\mathfrak{Q}$.

Spolu s diagonálním lemmatem skončila technická část naší prezentace první Gödelovy věty. Nyní věnujme stručný komentář jejím interpretacím nematematického charakteru. Ty jsou velmi rozšířené[37] a

[37] Systematicky se jejich kritikou zabývá např. Franzén [2005].

nezřídka se s nimi setkáváme i v rámci matematických textů a učebnic, což by samozřejmě nebylo na závadu, kdyby v nich nebyly vydávány za jakési koroláry Gödelova výsledku, tedy objevy podobně neotřesitelného, matematického charakteru. S tímto pochybným přístupem jsme se již setkali např. u Cantorova diagonálního argumentu, který je obvykle k původní diagonální konstrukci jaksi nezištně přidán spolu se závěry typu: ‘reálných čísel je více než přirozených’, ‘existují nepojmenovatelná reálná čísla’ či ‘pojem kontinua je nezávislý na jazyku’. Ne náhodou vedou často Gödelovy věty pro svoji podobnou — diagonální — strukturu k podobným závěrům. Jejich pochybnost je zvláště patrná na dvou extrémních pozicích, které se Gödelovými výsledky zaštiťují.

Není obtížné uhodnout, že se jedná o matematický platonismus na straně jedné a mentalismus na straně druhé. Prostřednictvím Gödelových vět nás přesvědčují, že je matematická pravda jako celek nepoznatelná (existují pravdivé, leč nedokazatelné věty), a v druhé krajnosti, že ji nelze postihnout strukturami naší řeči, ale jen osamělým křižováním širokých vod matematické intuice. Gödelův, stejně jako Cantorův výsledek se tomu zdají nahrávat právě svojí obecností, s níž jsou aplikovatelné na libovolnou teorii, resp. vyčíslení. První Gödelova věta právě proto není jen důkazem neúplnosti konkrétních formálních teorií, ale i důkazem jejich nezúplnitelnosti, neboť náhodné přidávání formule S_T nezávislé na teorii T k teorii T samotné vede k teorii $T + S_T$, která je opět neúplná, tentokráte však s ohledem na nějakou formuli S_{T+S_T}. Přeříkáme-li to vše v důkazově-teoretické, resp. inferencialistické řeči plných formalismů a poloformalismů, ukázal Gödel, jak ke schematicky (zcela formálně) daným výherním strategiím obhajoby aritmetických vět sestrojit větu, kterou jimi vyhrát nelze, přestože (resp. právě proto, že) je ospravedlnitelná v rámci aritmetického poloformalismu, jinými slovy: pravdivá. Tato reformulace umožňuje vidět jasněji několik věcí:

(1) Gödelova metastrategie neospravedlňuje platonismus v žádné z jeho forem, tj. ani v mírné formě platonismu sémantického, neboť ona nedokazatelná, leč pravdivá věta je z definice dokazatelná v rámci poloformalismu, a to dokonce poloformalismu konstruktivního!

Gödel [1931, s. 197] na tento fakt sám upozorňuje, když říká, že jeho důkaz dostává přísně konstruktivním (efektivním) principům, tj. je akceptovatelný i intuicionisty. Všimněme si, že totéž platí o Cantorově diagonální *konstrukci.*

(2) Neúplnost (plně-formální) teorie znamená neúplnost vůči jistému poloformalismu — definici pravdy. Ta musela být předem navržena a z povahy věci nemůže být neúplná. Poloformalismy

> mohou být nanejvýš neúplné vůči sobě navzájem, jako je konstruktivní poloformalismus neúplný ve vztahu ke klasickému.

Střízlivé čtení Gödelova výsledku nás takto přivádí ke stejnému závěru jako střízlivé čtení výsledku Cantorova. Nejedná se o tvrzení existence na nás či na jazyku nezávislé reality, ale poukaz k tomu, že pojmy aritmetické pravdy, resp. funkce přes svůj zdánlivě umělý charakter transcendují každou schematizaci, jak se konkrétně projevuje v rekurzivní specifikaci pojmu efektivního. Jak jsme viděli, není tento závěr namířen proti pojmu efektivity samotnému, ale proti jeho příliš úzkému vymezení. Prostor pro další postup je přitom značně široký a zahrnuje v první řadě velkorysejší (méně určitou) charakterizaci užitého jazyka ve smyslu jeho otevřenosti dalším, ne čistě syntaktickým rozšířením. Takto lze znovu oprášit Brouwerovu teorii existence dvou mohutností, ovšem v aplikaci na jazyk, rozlišením konstrukcí schematických, definitivních, jako je např. induktivní definice číselné řady, případně částečně rekurzivní funkce, a indefinitních, otevřených, jako je popis všech funkcí na přirozených číslech, případně popis čísel reálných. Lokálně je přitom možné využít přirozené neefektivity aritmetických pojmů, plynoucí z jejich nekonečného charakteru, jak to dělá např. rekurzivní analýza, a dospět tak k pojmu (rekurzivní) nespočetnosti zákazem jistých (z efektivního hlediska) fiktivních vyčíslení, aniž by byl jakkoli opuštěn prostor Cantorovy první mohutnosti.

V aplikaci na aritmetiku se první přístup blíží tomu, co jsme charakterizovali termínem sémantického platonismu. Ten systematicky ponechává v otázkách definice pravdivosti co největší prostor dalším upřesněním, aniž by se oprostil od povinnosti jazykové vykazatelnosti, konkrétně vázané na obecnou specifikaci přípustných jazykových reprezentací (jmen), jazykových forem (predikátů) a pravdivostních podmínek vět, které lze z těchto sestavit. Je významné, že Gödel [1995*b*, s. 310] sám vidí své negativní výsledky *de facto* právě jakožto příspěvek k rozlišení sémantického a ontologického platonismu, když totiž artikuluje dvě možná čtení nedokazatelnosti sentence `G`. První z nich je ve smyslu absolutním, transcendentním, v němž je `G` nedokazatelná

> nejen v rámci nějakého konkrétního axiomatického systému, ale prostřednictvím *jakéhokoli* matematického důkazu, s nímž může lidská mysl přijít.

Tím pádem "existují absolutně neřešitelné diofantické rovnice", rozuměj: věty Goldbachova typu. Druhé čtení je ve smyslu relativním, transcendentálním, podle něhož

> nemohou být axiomy nikdy uchopeny jako konečné pravidlo, tj. lidská mysl (dokonce v říši čisté matematiky) nekonečně překračuje schopnosti konečného stroje.

Gödel se nicméně k těmto variantám, jak už napovídá název jeho textu *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications*, chová jakožto k teoriím, což je — přestože se nejspíše kloní k druhé z variant[38] — problematický přístup. Neudržitelnost platonismu totiž nespočívá v tom, že je nekonzistentní, ale že je neopodstatněný, tj. tvrdí více, než si může dovolit. Je-li lidská mysl konečná (ať už to znamená cokoli), může jen stěží tuto konečnost dokázat, natož pak vyjádřit tezí, že nemůžeme poznat všechno. Ve skutečnosti by měl být dokazatelný spíše pravý opak, tj. poznatelnost všeho, přesně jak to učinil Hilbert v inferenčně-pragmatickém zdůvodnění svého axiomatismu coby variantě, ba rozšíření Kantova [1781/1787, A 476/B 504] tvrzení, že

> existují vědy, jejichž samotná povaha vyžaduje, aby každou otázku, která v nich vyvstane, bylo možné úplně zodpovědět na základě toho, co je známo, jelikož odpověď vyvěrá z týchž zdrojů jako otázka [...].

Jistota Hilbertovy teze o ‘poznatelnosti všeho’ je samozřejmě založena tím, že je triviální, neboť poznání je od počátku vždy jenom poznání lidské a jakékoli jeho ‘božské’ (na člověku nezávislé) varianty mohou být pouze více či méně oprávněné artikulace jeho aktuální falibility, tj. nezávislosti na přesvědčeních konkrétního jedince, nikoli na lidstvu jako celku. Podobný závěr se týká i koroláru Gödelovy věty, který bývá někdy nazýván druhou Gödelovou větou o neúplnosti a týká se nemožnosti důkazu bezespornosti aritmetické teorie. Stručně se k tomu vyjádříme v dalším oddíle, jímž celou knihu uzavřeme.

8.11 Gödelova druhá věta

Jádrem tzv. druhého Gödelova teorému je pozorování, že lze teorém první, což znamená jeho ústřední syntaktickou verzi, formalizovat v rámci užité formální teorie samé, podobně jako jsme v ní byli schopni formalizovat skutečnost, že formule $\mathtt{G}$ vyjadřuje svoji nedokazatelnost, tj.

(1) $T \vdash \mathtt{G} \leftrightarrow \neg\mathtt{Prov}(\ulcorner\mathtt{G}\urcorner)$,

pro dostatečně silné T. Relevantní část prvního teorému, která má být formalizována, je teze, že v bezesporném T není odvoditelná formule $\mathtt{G}$. Bezespornost teorie přitom znamená tolik, co neodvoditelnost nějaké nepohodlné formule, např. $\mathtt{0} = \mathtt{1}$, což vede nejprve k definici

$$\mathtt{Con_T} \rightleftharpoons \neg\mathtt{Prov_T}(\ulcorner\mathtt{0} = \mathtt{1}\urcorner).$$

[38] Srov. Boolosův komentář k textu in Gödel [1995*a*, s. 294], případně poznámky in Smith [2007, s. 262].

Druhým krokem je důkaz metatvrzení

(2) $T \vdash \mathtt{Con_T} \to \neg\mathtt{Prov_T}(\ulcorner\mathtt{G}\urcorner)$,

které je již zmíněnou formalizací prvního teorému. Teorie T musí být silnější než dosud, což se obyčejně formuluje tak, že obsahuje Peanovu aritmetiku, ve skutečnosti však stačí fragment $\mathfrak{PA}$ s indukcí omezenou na Σ_1-formule. Z tvrzení (1), (2) dostáváme okamžitě obecnou variantu DRUHÉ GÖDELOVY VĚTY:

> Jestliže je T bezesporná axiomatizovatelná teorie, která obsahuje $\mathfrak{PA}$, pak $T \nvdash \mathtt{Con_T}$.

Ta říká, že bezespornost teorie nelze dokázat v této teorii samé, je-li bezesporná. Plyne to přirozeně z toho, že $\mathtt{G}$ v T odvoditelná není, předpoklad $T \vdash \mathtt{Con_T}$ by tedy vedl ke sporu.

Jak jsme již zmínili, byla druhá věta v první řadě formulována jakožto výzva Hilbertovu programu a je také tradičně považována za jeho přímé vyvrácení. Tento závěr je ovšem z mnoha důvodů problematický. Sám Gödel [1986, s. 194] např. uvedl, že jeho výsledek neprotiřečí Hilbertovu finitistickému stanovisku, neboť není zřejmé, že přísně (tj. schematicky či plně-)formální metody, k nimž se jeho věty vztahují, vyčerpávají všechny myslitelné finitní prostředky. To je jednak v souladu s dříve zmíněnou 'relativistickou' interpretací Gödelovy první věty, jednak to odpovídá faktu, že onou nezachytitelnou větou uvažovaných formalismů je (v případě $\mathtt{G}$, $\mathtt{R}$ i $\mathtt{Con_T}$) Π_1-sentence, tj. věta, kterou Hilbert považoval za část vlastní matematiky, a kterou tedy žádná plná formalizace nezachycuje, jinými slovy: vlastní matematika transcenduje každou schematizaci. Je samozřejmě otázka, zda to Hilbertově koncepci finitismu pomáhá či zda ji to problematizuje.

Podíváme-li se nicméně na celou věc výkladu druhé Gödelovy věty střízlivýma očima, zjistíme, že diskuze na toto téma obvykle nemohou vést příliš daleko, neboť uvedené tvrzení neříká *de facto* nic jiného, nežli že k dostatečně silné plně-formální teorii T umíme zkonstruovat sentenci S_T, pro niž platí následující dvě podmínky:

(1) S_T je pravdivá (ospravedlnitelná v aritmetickém poloformalismu) tehdy a jen tehdy, je-li T konzistentní,

(2) S_T je nedokazatelná (neospravedlnitelná v aritmetickém plném formalismu) tehdy a jen tehdy, je-li T konzistentní.

Vzata sama o sobě artikuluje podmínka (2) trivialitu, neboť konzistence teorie se z definice rovná existenci nedokazatelné věty, a za požadované S_T by tedy bylo možné volit libovolnou (logickou) kontradikci. To komplikuje podmínka (1), podle níž musí být ona neodvoditelná věta také pravdivá, což kontradikce přirozeně není. Spojením (1) a (2) získáváme tedy tvrzení existence neodvoditelné, leč pravdivé věty.

To ovšem znamená, že při korektnosti T nepředstavuje druhá Gödelova věta nic jiného nežli variantu Gödelovy první věty v jejím sémantickém znění. Předpokládáme-li naopak ω-bezespornost T, dostáváme verzi syntaktickou, neboť je-li T konzistentní, platí:

$$\mathfrak{PA} \vdash \neg\mathtt{Proof}_{\mathtt{T}}(\overline{n}, \ulcorner \mathtt{0} = \mathtt{1} \urcorner)$$

pro každé n a předpoklad $\mathfrak{PA} \vdash \neg\mathtt{Con}_{\mathtt{T}}$ neboli

$$\mathfrak{PA} \vdash (\exists \mathtt{x})\mathtt{Proof}_{\mathtt{T}}(\mathtt{x}, \ulcorner \mathtt{0} = \mathtt{1} \urcorner)$$

vede ke sporu. Jedinou změnou, kterou druhý teorém přináší, se tak zdá být konstrukce nové nezávislé sentence. Navíc platí, že o nemožnosti dokázat bezespornost aritmetiky nám druhá věta, resp. korolár věty první nemůže nic říci již proto, že kdyby teorie T nekonzistentní byla, bylo by v ní odvoditelné cokoli, tj. i formule $\mathtt{Con}_{\mathtt{T}}$. Dokazovat bezespornost teorie v ní samé proto nedává vůbec smysl.

Poučení je nyní stejné jako v případě věty první, totiž že tvrzení o nemožnosti zúplnit či dokázat bezespornost aritmetiky nelze číst absolutně, ve smyslu jakéhosi náhledu či kritiky omezenosti našeho intelektu, ale naopak jako potvrzení omezenosti zvolené koncepce dokazatelnosti ve srovnání se základní, definující koncepcí aritmetické pravdy skrze zvolený poloformalismus. Právě a pouze s odkazem na něj lze totiž kanonické systémy, jako je $\mathfrak{Q}$ či $\mathfrak{PA}$, ospravedlnit jako bezesporné, když totiž ukážeme, že jsou v něm jejich axiomy odvoditelné ($\models$). To přirozeně není nic jiného nežli modelově-teoretický argument, podle něhož je teorie bezesporná, má-li model. Jeho současná důkazově-teoretická artikulace má tu výhodu, že je v ní bezespornost jedné (plně-formální) teorie explicitně převedena na jinou (poloformální), kterou je ovšem tím pádem také zapotřebí zdůvodnit, tj. neodvolávat se, jak je obvyklé, nekriticky na nějaký druh mimosmyslové intuice. V případě aritmetického poloformalismu $\mathsf{N} = \langle T_{\mathsf{N}}, S_{\mathsf{N}} \rangle$ nám k tomuto důkazu poslouží jednoduchá metaindukce, v jejímž rámci se přesvědčíme, že

(1) všechny elementární věty jsou ohodnoceny jednoznačně na bázi jednoduchých transformačních algoritmů, případně kalkulů Lorenzenovy operativní matematiky; jejich systém je dokonce PR,

(2) Tarského pravidla evaluace komplexních vět jsou korektní, tj. ohodnocují každou větu nejvýše jednou pravdivostní hodnotou,

(3) dále se lze přít jen o to, zda jsou úplná, tj. zda ohodnocují všechny věty nějakou pravdivostní hodnotou, jak to tvrdí sémantický platonismus, či zda toho v obecném případě nejsou schopna, jak tvrdí Brouwer a jeho následovníci.

V tomto posledním bodě se od sebe liší klasický a konstruktivní poloformalismus. Jejich bezespornost, a tím pádem i bezespornost $\mathfrak{Q}$ a $\mathfrak{PA}$, je ovšem nepochybná. Je možné samozřejmě tvrdit, že ji nelze dokázat finitistickým způsobem, jak to vyžadoval Hilbert, nicméně šířka finitistických metod je právě tím, co je od počátku celého programu otevřeno další diskuzi, a není zřejmé, proč by předvedená metaindukce nemohla být za takovou metodu považována, zvláště když Hilbertovy původní, ultrafinitistické postupy přes avizovanou názornost a spolehlivost vedly mnohokráte ke značně nespolehlivým výsledkům, jako v případě Ackermannových 'důkazů' bezespornosti analýzy.

To nemění nic na věci, že se v argumentaci modelem nutně odvoláváme na přechody typu ω-pravidla, které jsou tradičně považovány za nefinitistické. Rovněž Gentzenův [1936] pozdější důkaz bezespornosti aritmetiky využívá jistého rozšíření obvyklých metod, totiž transfinitní indukce v omezení na spočetné ordinály po ϵ_0. Ty jsou přiřazovány důkazům v sekventové (gentzenovské) verzi aritmetického plného formalismu takovým způsobem, že ke každému důkazu sporu lze nalézt důkaz sporu menšího ordinálu. Jelikož ostře klesající posloupnost ordinálů nemůže být nekonečná, nemůže být spor odvoditelný. Na stejné bázi se zakládá také často zmiňovaný důkaz Goodsteinovy věty coby příkladu tvrzení, jež je na Peanově aritmetice nezávislé a nemá přitom tak umělý charakter jako původní sentence Gödelovy. Jejím obsahem je tvrzení, že jistá částečně rekurzivní funkce pro každý vstup terminuje, tj. že je totální. Jádrem důkazu je pozorování, že struktuře aritmetických termů, jimiž je popsána tzv. Goodsteinova posloupnost čísel, odpovídá ostře klesající posloupnost ordinálních čísel, které členy první posloupnosti majorizují, a obě posloupnosti proto musí končit nulou. Jelikož je toto tvrzení dokazatelné v $\mathfrak{ZF}$, bývá často uváděno jako příklad netriviálního užití metod teorie množin v aritmetice, resp. jako podklad teze, že jsou aritmetika a jiné matematické disciplíny do teorie množin vnořeny či by tam alespoň vnořeny být měly. V důkazu se nicméně nevyskytuje nic, co by nebylo akceptovatelné konstruktivistickou matematikou. Spočetné ordinály (po ϵ_0) reprezentují různá dobrá uspořádání přirozených čísel, která jsou přirozenými čísly efektivně kódovatelná, a platnost (transfinitní) indukce na ordinálech je, stejně jako v případě přirozených čísel, triviálním důsledkem jejich induktivní definice.[39]

[39] Důkaz nezávislosti Goodsteinovy věty na $\mathfrak{PA}$, vyjádřený v tzv. větě Kirbyho-Parisově, spočívá v pozorování, že odvození Goodsteinovy věty by vedlo k ospravedlnění užití transfinitní indukce (po ϵ_0) v rámci $\mathfrak{PA}$, a tedy i k důkazu bezespornosti aritmetiky à la Gentzen, což s ohledem na druhou Gödelovu větu není možné. Rozdíl oproti Gödelově nezávislé sentenci spočívá v tom, že sentence Goodsteinova je typu Π_2, tj. tvaru $(\forall \mathtt{x})(\exists \mathtt{y})\varphi(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ pro φ Δ_0-formuli, a nepředstavuje tedy přímý protipříklad vůči původní formulaci Hilbertova programu. Platí nicméně rovněž dokazatelnost každé instance $(\exists \mathtt{y})\varphi(\overline{n}, \mathtt{y})$ v $\mathfrak{PA}$.

Jako příznak toho, že je původní ostře vymezené finitistické schéma pro obvyklé aritmetické potřeby příliš úzké, pochopil Gödelovy věty také Zermelo. Ten se postupně rozešel s Hilbertovou myšlenkou symbolické redukce matematiky, o níž v důsledku hovořil [1932, s. 85] jako o "finitistickém předsudku" a ztotožňoval ji s tzv. skolemismem, tj. doktrínou, která se v jeho pojetí snažila vměstnat veškerou matematiku do kazajky prvořádových teorií. Zmínili jsme se o tom již v oddíle 6.7. Zermelův odstup od Hilbertových metod se projevil také na jeho vztahu k matematické logice, což je zvláště ironické, neboť Zermelo byl vůbec první, kdo — díky Hilbertovu návrhu — roku 1907 oficiálně získal pozici lektora matematické logiky jako univerzitního oboru.[40] Na tuto proměnu proponenta v nepřítele upozorňuje snad nejvýmluvněji zpráva Zermelova oblíbeného žáka a spolupracovníka Reinholda Baera, v níž mu Gödelův výsledek přibližuje slovy: "Sláva, logici také objevili diagonalizaci!" V dalším dopise nicméně Baer navrhuje, že vliv objevu nemusí být jen negativní, neboť lze rozlišit dva protichůdné závěry:

(1) kapitulujeme před "klasickou" logikou (jako Skolem) a amputujeme matematiku,

(2) prohlásíme, jako to děláte Vy, "klasickou" logiku za nedostatečnou.[41]

Zermelo se zjevně rozhodl pro variantu (2), není ovšem jasné, jakou roli v tom skutečně hrají Gödelovy věty, neboť v krátké korespondenci s Gödelem [2003, s. 429 n] z roku 1931 opakovaně tvrdí, že v jeho důkazu nalezl mezeru spočívající v "chybném předpokladu, že je každé matematicky definovatelné rozlišení vyjádřitelné 'konečnou kombinací znaků' ". Zermelo zjevně používá pojem důkazu v širším smyslu, jenž — s ohledem na systematické využití nekonečných jazyků, resp. logických pravidel — odpovídá, přinejmenším v aritmetice, námi popsané koncepci poloformalismu. Zermelo [1932, s. 87] říká doslova:

> Matematický 'důkaz' není nic jiného nežli *systém vět, jenž je dobře fundovaný vzhledem ke kvantifikaci.*

Kanamoriho [2004, s. 530] slovy: V Zermelově důkazu se jedná o "sémantické určení pravdy či nepravdy věty prostřednictvím transfinitní indukce, založené na dobře fundované konstrukci ze základních relací". Zermelův [1932, s. 87] závěr je pak jednoznačný:

> Z našeho úhlu pohledu je každá "pravdivá" věta současně i "dokazatelná" a každá věta také "*rozhodnutelná*". Neexistují žádné (objektivně) "*nerozhodnutelné* věty".

[40] Viz Ebbinghaus [2007, s. 92 nn].

[41] Citováno podle Ebbinghaus [2007, s. 213 n].

To, *cum grano salis*, odpovídá Hilbertovu přesvědčení o řešitelnosti každého matematického problému. Paralelně k tomuto odvržení finitistické doktríny vystupuje Zermelo s INFINITISTICKÝM PROGRAMEM, jehož bází má být logika nekonečných konjunkcí a disjunkcí (délky libovolného ordinálu), při vhodné interpretaci tedy logika druhého a vyšších řádů.[42] Jejich rámec také Zermelo úspěšně používal, např. v důkazu kategoričnosti své axiomatizace teorie množin.

Ačkoli Zermelo hájil nekonečné metody soustavně a s neobyčejnou vervou,[43] měly prvořádové teorie coby vlastní a výhradní objekt matematikova zájmu vlivné přímluvce, mezi nimi i Skolema a Gödela. Důvody, proč nakonec skutečně ovládly prakticky celé pole poválečné metamatematiky, nejsou jednoznačné. Jistě v tom sehrály značnou roli příznivé vlastnosti prvořádové logiky (úplnost, kompaktnost), věcné opodstatnění však nemají, neboť o ně jednak v původním projektu konceptualizace (logizace) aritmetiky nešlo (významná byla rozhodnutelnost a úplnost příslušných teorií, která díky Gödelovým větám přišla nadobro vniveč), jednak se jedná o výhody virtuální, které druhořádová logika postrádá pouze s ohledem na příliš velkoryse pojatou sémantiku. Při jejím odbývání jakožto neúplné je proto třeba brát v potaz, že z čistě deduktivního hlediska je pořád silnější nežli logika řádu prvního, jejímž rozšířením vzniká!

Za jistých okolností můžeme přihlášku k druhořádovým teoriím chápat právě jakožto rozhodnutí nevázat se ve volbě hodnot užitých proměnných na výrazy jazyka daného schematicky, což, jak jsme již mnohokráte zmínili, nutně neznamená, že kvantifikaci chápeme objektově, tj. jakožto referující k nezávisle danému oboru ‘všech’ podmnožin nosiče, ale jen že si u daných substituentů ponecháváme možnost dalších upřesnění, jak to odpovídá dynamické povaze jazyka přirozeného (včetně ‘přirozeného’, tj. neformálního jazyka matematiky) a způsobů jeho pojmotvorby. Je přitom přinejmenším diskutabilní, že by takto celou věc viděl i Zermelo, jenž ve svých vyjádřeních prozrazuje silně platonistické sklony, což je pochopitelné zvláště s ohledem na fakt, že svůj nekonečný program neomezuje pouze na aritmetiku, s dobře popsanou bází elementárních vět, ale i na ‘fiktivní’ teorii množin. Na druhou stranu není zcela oprávněné tvrdit, že totálně nepochopil některé nuance Gödelovy argumentace, případně zvolený pojmový rámec, jak se to stalo zvykem.[44] Zermelova vyjádření lze snadno číst tak, že situaci ani chápat nechtěl, neboť neviděl nejmenší důvod, proč se v matematických důkazech omezovat na finitistické schéma. V dopise Gödelovi [2003, s. 430] se např. zcela legitimně ptá:

[42] K interpretaci Zermelova konceptu srov. Ebbinghaus [2007, s. 204 nn].
[43] Srov. k tomu závěr Moorova článku [1980], kde jsou také přetištěny některé Zermelovy pozdní texty.
[44] Viz např. Dawsonův komentář in Gödel [2003, s. 419 n].

> Můžete snad ‘dokázat’, že je *Vaše* schéma ‘jediným možným’? To ale přece nejde; neboť co je ‘důkaz’, nemůže být samo ‘dokazatelné’, nýbrž musí být nějakým způsobem *přijato*, *předpokládáno*. A o to se zde právě jedná: co rozumíme důkazem?

Je pozoruhodné, jak nápadně celá diskuze připomíná Fregovu kontroverzi s Hilbertem (s pojmem důkazu na místě pravdy), i když se zde Gödel nepochybně ukazuje jako vnímavější partner, než byl Hilbert, a diskuzi zjevně neukončuje z pozice mocensky silnějšího,[45] ale z bezradnosti. Rovněž vědecko-společenské vyústění je stejné, končící vítězstvím Gödelových metamatematických představ nad Zermelovými, nezávisle na kvalitě jejich zdůvodnění.[46]

Ukazuje-li se další pátrání po původu rozlišení prvořádových a druhořádových teorií jako neplodné, zdá se být naopak jeho existence důvodem, proč může Lorenzen nazývat aritmetiku syntetickou disciplínou ve smyslu jejího vymykání se konceptuálním (analytickým) metodám, představovaným schematickou (plně-formální) axiomatizací. Gödelovy věty jsou podle Lorenzena [1974, s. 60] důkazem toho, že aritmetika není vědou axiomatické metody. Proti tomu lze namítat především to, že Gödelovy věty spolu s prokázanou kategoričností aritmetiky druhého řádu vedou i k neúplnosti logiky řádů vyšších, která tak musí být automaticky rovněž syntetická, přičemž následné vydělení logiky prvního řádu vypadá jako *ad hoc*, a tudíž nevěrohodně. Zde si je však nutné uvědomit, že z Lorenzenova konstruktivistického pohledu jsou příslušné proměnné vyššího řádu interpretovány substitučně, a výsledek tedy zdaleka nevede nutně ke standardní sémantice ‘všech’ podmnožin daného nosiče, eventuálně může skončit u logiky řádu prvního, jak jsme to naznačili v oddíle 4.5. Logika druhého řádu se nicméně tak jako tak pro svoji potenciální indefinitnost (velkorysou interpretovatelnost proměnných) teorii množin a aritmetice nebezpečně přibližuje, a není proto divu, že lze ‘úspěch’ Fregova logicismu přinejmenším v jeho neologicistické interpretaci chápat jako předzjednaný.

Bylo by ale chybou myslet si, že se Lorenzen ve své kritice axiomatických teorií primárně pokouší o zdůvodnění starých distinkcí či

[45] Jímž zatím nebyl, i když stárnoucí Zermelo opakovaně hovoří o intrikách Gödelovy kliky. Viz Ebbinghaus [2007, s. 304].

[46] K postupné ztrátě zájmu o teorie vyššího řádu vedla i Zermelova rezignace na profesorské místo ve Freiburgu, k níž došlo roku 1935 poté, co byl nacistickými studenty a některými kolegy denunciován za urážku Vůdce, projevující se kritickými poznámkami k soudobé politice a neopětováním nacistického pozdravu (a to ani po zcela adresném “Heil Hitler, Herr Zermelo!”). Není bez zajímavosti, že povinnost začínat přednášky zvednutím ruky, o níž se Zermelo zmiňuje jako o politice Gesslerova klobouku, zavedl na univerzitě ve své funkci rektora Martin Heidegger. Další podrobnosti in Ebbinghaus [2007, s. 219 nn]. Zcela rehabilitován byl Zermelo na svoji vlastní žádost roku 1946, to byl ale již těžce nemocný a prakticky slepý.

zavržení distinkcí nových. Spíše se snaží apelovat na to, abychom před zbrklým vyvozováním dalekosáhlých závěrů o metodách našeho rozumu, jeho mezích a možnostech důkladně promysleli, zda neužíváme některých pojmů, jako je pravda, důkaz apod., až příliš samozřejmě a nekriticky. Hrozí totiž, že je použijeme k 'vysvětlení' něčeho, co není ani zdaleka tak problematické, jako jsou tyto pojmy samotné. V tomtéž 'sókratovském' duchu reagoval Frege na Hilbertův axiomatismus a Zermelo na Gödelův důkaz o neúplnosti. K němu Lorenzen [1974, s. 222 n] říká:

> Lze ukázat, že Peanovy axiomy jsou pravdivé věty konstruktivní aritmetiky. ω-neúplnost, kterou dokázal Gödel, ukazuje, že z těchto axiomů nejsou logicky odvoditelné všechny pravdivé věty. Tomu by se neměl nikdo divit. Obecná věta $(\forall x)A(x)$ je konstruktivně pravdivá, jestliže je $A(n)$ pravdivá pro každé n. Abychom ale mohli $(\forall x)A(x)$ logicky odvodit, musíme nejprve odvodit $A(x)$ s volnou proměnnou x. ω-neúplnost lze tedy očekávat. Peanova aritmetika je ale ω-úplná, jestliže se omezíme jen na sčítání. Pointa Gödelova důkazu tedy spočívá v tom, že ω-neúplná je aritmetika s pouhým sčítáním a násobením, tedy bez vyšších forem induktivních definicí, jak to již v obecnosti bylo možné čekat. Jak ale víme, byla Gödelova věta o neúplnosti z roku 1931 velkým překvapením. A dodnes není obecně známo, že je sice žádoucí, abychom v axiomatických teoriích (jako je např. teorie grup) užívali v kvantifikaci přes prvky modelu pouze formálně-logické úsudky, že ale v aritmetice lze od Peanových axiomů (doplněných o induktivní definice) dospět ke *všem* pravdivým aritmetickým větám jenom tehdy, užijeme-li při kvantifikaci přes 'přirozená' čísla fakt, že to jsou kvantifikace přes $|, ||, |||, \ldots$.

Pro naši věc zařazení významu Gödelových vět do širšího kontextu je zvláště podstatný Lorenzenův [1974, s. 223] závěr:

> Peanovy axiomy spolu s *formální* logikou zdaleka nepředstavují postačující základ aritmetiky. Máme-li v tomto jasno, stává se také spor mezi axiomatickou a konstruktivní metodou v aritmetice pouhým sporem o slova. Jelikož jsou Peanovy axiomy pravdivé věty konstruktivní aritmetiky, je zbytečné trvat na tom, že aritmetika začíná teprve tehdy, jestliže jsme označili nějaké věty za axiomy.

Nejde tedy ani tak o (technický) rozdíl klasické a konstruktivní matematiky, jako o otázku toho, kdy nazýváme větu pravdivou, co znamená, že ji dokážeme, a co je ve sledu tohoto tázání primární. Na pozadí těchto otázek není pak negativní obsah Gödelova tvrzení v širším, matematicko-filosofickém kontextu skutečně nijak fatální.

Vrátíme-li se na závěr ještě k tomu, zda se z epistemologického hlediska a s přihlédnutím k fenoménu Gödelových vět aritmetika a logika od sebe nějak liší, lze odpovědět nejprve cosi ve Wittgensteinově duchu, totiž že triviálně ano, protože první z nich *počítá* a druhá *usuzuje*. Na druhou stranu je právě podstatnou odlišnost obou obtížné hledat v rámci trendu, který, jako moderní logika, stavěl od počátku — což znamená vlastně již od Leibnize — na tom, že mezi počítáním a usuzováním existují četné podobnosti. Poincaré měl tedy pravdu: moderní logika byla úspěšná proto, že využila metod charakteristických pro matematiku, zvláště pak úplné indukce. Ta představuje cestu k nekonečnu, rekurzivně definovaným jazykům, interpretacím, resp. axiomatickým systémům, jak v užším, plně-formálním, tak v širším, poloformálním smyslu. Logika se ale díky tomu nestala matematikou, jak se domníval Poincaré, a matematika se neproměnila v logiku, jak o to usilovali logicisté. Jejich vztahy se nicméně změnily, což vedlo jak k posílení některých částí obou, tak k oslabení jiných. To je ale přirozený znak vývoje každé vědy.

Pod vlivem logiky se matematika stala vnímavější k otázkám syntaktického *designu* svých teorií a usnadnila jejich intersubjektivní kontrolu zavedením transparentního pojmu (deduktivního) důkazu. Negativní stránkou věci bylo výše zmíněné ztotožnění pravdivosti s deduktivní konzistencí. Gödelovy věty jsou pak jen symptomy tohoto rozhodnutí, odkazující na jeho meze ve stejném, nikoli nevyhnutelném duchu, jako nás Cantorův diagonální argument upozornil na limity schematického vymezení funkce, či klasické geometrické problémy, jako je kvadratura kruhu, na úskalí Eudoxovy definice proporcí. Snažili jsme se opakovaně zdůraznit, že se přitom nejednalo o žádné vyvrácení zmíněných teorií, schémat, která musí být z povahy věci jednodušší nežli to, co se snaží vysvětlit, a jsou tedy časem přístupná revizi, ale především o příležitost, jak posoudit přínos té které teorie v té které historické situaci a vydat se eventuálně jiným směrem.

Radikální skepticismus Poincarého a Wittgensteina vůči přílišnému sbližování logiky a matematiky tedy není na místě již proto, že zakrývá, jak může být překřížení různých disciplín, v případě logiky a matematiky dvou disciplín čistého rozumu, užitečné a z hlediska vývoje vědy nevyhnutelné, je-li interpretováno skromným, dialektickým způsobem, nikoli jako *redukce*, ale *projekce* části jedné (relativně stabilní) na část té druhé (relativně nejasné). To může vést nakonec k disciplínám nového, smíšeného typu, jako jsou abstraktní matematické disciplíny po vzoru topologie či univerzální algebry, či disciplíny, které byly vznikem moderní logiky v užším slova smyslu teprve umožněny, jako metamatematika, teorie modelů, teorie rekurze či výpočtová složitost.

Závěr

Nadměrná délka textu opravňuje čtenáře k tomu, aby po autorovi požadoval jakousi bilanci. Autorovou výhodou i nevýhodou je, že o některých věcech již nemůže být žádných pochyb. Je třeba jasné, že ačkoli základní struktura knihy odráží dějinný vývoj pojmu čísla, od antiky přes novověk až po první polovinu minulého století, a snaží se také zohlednit biografické pozadí některých objevů, činí tak příliš výběrově na to, aby mohla být nazývána historickou studií. Ba co víc, její hlubší smysl je spíše ahistorický, odkazující k tomu, že dějiny poznání nepředstavují jednoduchou přímku, cestu, z níž je nemožné uhnout, neboť jen odkrývá předem daná, a proto nepochybná a nevyhnutelná fakta (jak se domnívají vědečtí pozitivisté jako Carnap), či která sice připouští různé okliky a zkratky, stále však směřuje k jediné, a proto nepochybné pravdě (jak se domnívají reformovaní pozitivisté jako Popper). Snažil jsem se ukázat, že poznání je spíše dialektický proces neustálého rozhodování kudy dál, v němž to, co je pravdivé, není určováno externě, na nás nezávislou skutečností, ale interně, dynamickým celkem pragmaticko-koherenčních aspektů naší konkrétní historické situace.

Platón byl první, kdo si povšiml, že reflexe vývoje matematiky má v tomto ohledu výjimečné postavení. Úlohou filosofie bylo přitom od počátku vysvětlit, jak je *možné*, že lze v tomto proměnlivém, tekoucím světě najít cosi neměnného, invariantního (Platónovo [Phil., 15b] jedno v mnohém), a dospět tak k pevnému, na jedinci a situaci nezávislému poznání. Díky Platónovu vlivu tak podobně jako eleaté tradičně rozlišujeme mezi prchavou říší smyslových počitků, náhlých impresí a dojmů, a věčnou oblastí idejí, forem a norem, zapomínáme ale často právě jako eleaté, nikoli však Platón, že tato rozlišení nemají primárně za úkol náš svět zmnožit, že se nejedná o vědecká konstatování nového typu faktu, jak k celé věci přistupuje tradičně metafyzika skrze záměnu kauzální a eidetické příčiny, ale o artikulaci něčeho, co musí po nazření potřebné diference zase zmizet, co musí být odkopnuto jako onen pověstný žebřík Wittgensteinova *Tractatu* [1922, § 6.54]. Právě tento nezvládnutý, ontologizující aspekt Parmenidovy nauky kritizuje Platón, přesto, že se k ní v jiných ohledech systematicky hlásí.

Tvrdí-li tedy Platón či Kant, že poznání vzniká až sloučením smyslového vjemu (názoru) s pojmem (eidetickou formou), nezavazují se tím k existenci dalšího světa (idejí, věcí o sobě), nýbrž upozorňují, že jako lidé nejsme počitkovými funkcemi aktuálního světa, ale teoretické bytosti žijící v prostoru zděděných schémat a možností, co s nimi učinit. Náš život ve světě je podstatně závislý na naší ochotě soustavné reflexe jeho forem, bez jakékoli naděje, že kdy dospějeme k nějaké finální teorii o tom, jak to s nimi 've skutečnosti' je. Právě v tomto základním přístupu či naladění se liší filosofie od vědy, právě na něm je založen fakt, že život a jazyk, na rozdíl od jejich forem a projevů, nelze obejít (je 'unhintergehbar').

Mimořádný význam matematiky v celku ostatních věd spočívá právě v tom, že je 'abstraktní', a vyžaduje tak od toho, kdo se jí učí, značnou míru odhodlání a schopnosti odhlížet od toho, co je 'běžné', 'dobře známé' a 'pohodlné', totiž svět, jak jsem jej našel, rozuměj: jak jsem byl do něho vychován a jak bych v něm mohl být okolnostmi vláčen po zbytek svého života. V tom se samozřejmě jako druhý extrém skrývá nebezpečí tichého šílenství těch, kdo v této abstrakci naleznou zalíbení, které jim dá zapomenout na vše ostatní. Právě na matematice je vidět, že ve světě ani v jazyce neexistují jakákoli předem daná, bezprostřední či přirozená fakta, totiž nestanovíme-li nejprve teorii, nad níž je můžeme objevovat, což znamená mimo jiné i to, že všechno nalezené mohlo být také jinak. Tento základní postřeh jsme se pokoušeli v knize mnohokráte demonstrovat a rozvíjet, poprvé snad nad Bolzanovou větou o mezihodnotě, kterou jsme navrhli číst nejen obvyklým, a proto pohodlným způsobem coby důkaz triviálního (sebeevidentního) tvrzení, ale také jako netriviální návrh, jak definovat kontinuum, a tedy nový pojmový, a potažmo důkazový rámec. Právě tato závislost pozorování (faktů) na našich teoriích je podstatou Kantova koperníkovského obratu (příroda neodpovídá, není-li tázána) a jádrem pozorování, že jako racionální, *sebe*vědomé bytosti nejsme jen produkty a 'oběťmi', ale také spolutvůrci skutečnosti.

Vědci, včetně matematiků, na tuto podmíněnost svých tvrzení systematicky zapomínají a vydávají často za prokázaná fakta různá metatvrzení týkající se zděděné, a proto apriorní struktury (formy) svých výzkumů. To jsme názorně viděli u Cantorova diagonálního argumentu či u zákona vyloučeného třetího, které v jejich předsudečné samozřejmosti donkichotsky napadl Brouwer. Právě neschopnost odlišit konvenčnost jistých předpokladů od důsledků, které jejich volba přináší, kritizuje Platón ve své *Ústavě* [Res., 533b n], když o vědcích hovoří jako o snících. V podobenství o jeskyni tamtéž [Res., 514a nn] se příznačně vědci od ostatních vězňů, pozorujících odrazy forem (zděděných rozlišení, návyků) na stěně, liší jen bystrostí, která jim dovoluje predikovat jejich následnost a četnost (kdykoli dvakrát králík, pak jednou kachna). Podobně jako ostatní vězni odmítají opustit důvěrně známý (empirický) svět a oddat se reflexi jeho forem na (ve) světle ideje dobra (Slunce), jakémsi celku všech možných pragmatických ohledů a rozlišení (toho, co je z těch a těch důvodů ‘dobré’).[47] *Mathémata*, která se mimo (smyslovou) jeskyni také vyskytují, reprezentují přitom ideje (rozlišení) ve slabším slova smyslu, a to právě proto, že nejde o ně samé, ale o jejich cvičný, pomocný charakter. Kdo si důkladným studiem matematických teorií přivykne ostrému světlu abstrakce, je potom schopen využít své poznání ve skutečném světě, zde reprezentovaném jeskyní. Teorie proporcí coby božský dar, který dal lidstvu Pythagoras,[48] je metodou, na níž si lze nacvičit ono tolik potřebné rozpoznávání jednoho (proporce) v mnohém (jejích reprezentacích), jak jsme se s ním poprvé seznámili právě u definice *anthyfairetického* rácia.

Skutečné rozlišování, zachycování stabilního významu našich slov, probíhá podle Platóna [Soph., 218c nn] teprve na platformě metody dělení pojmů, *diairesis*, uzpůsobené vlastnímu, ‘terénnímu’ výzkumu po návratu do jeskyně, tj. světa, o jehož poznání nám jde v první řadě. Platónovo (stejně jako každé jiné) podobenství je přitom zavádějící v tom, že oddělením světa empirického či každodenního (jeskyně) od světa idejí (mimo jeskyni) vzbuzuje dojem, že se lze zdržovat, poznávat pouze v druhém z nich, a návrat do prvního je tak jen záležitostí rozhodnutí mimořádně filantropických jedinců. Ve skutečnosti zde žádná taková volba není: svět první nelze vůbec opustit (ve smyslu Diltheyova: poznání nemůže jít za život, viz s. 544) a tzv. čisté poznání či věda pro sebe sama je v důsledku čirý nesmysl, tj. žádné poznání a žádná věda, stejně jako není filosofie sofistů, prováděná jen pro vnější lesk a uznání, žádnou filosofií.

To vše ale implicitně ukazuje již dialogická, a proto nedogmatická forma Platónových spisů, v níž není svět idejí jednoduše postulován, ale vykazován jako vztažený k světu všednímu právě prostřednictvím *diairesis* coby konsenzuální analýzou relativně stabilní jazykové praxe, hledání jakéhosi ‘největšího společného dělitele’ mínění všech zúčastněných osob, jak to na úrovni teoretické popisuje Eukleidův algoritmus. Pouze lidé nevědomí (včetně sofistů a prototypu ‘vědce’) se tohoto procesu zříkají ve zpupném přesvědčení, že mají klíč k bezprostřednímu poznání (té které části světa), čímž se vydávají napospas vládnoucímu mínění (vědeckému paradigmatu) a zděděným předsudkům. Pompézně ohlašovaná skromnost, s níž se setkáváme jak v rámci vědeckého světonázoru (věda je nedokonalým prostředkem přibližování se k pravdě), tak v prohlášeních náboženských (člověk je jen třtina) a relativistických (každý může mít na věc svůj názor), se pak snadno ukazuje jako falešná v konfrontaci s Platónovým pokusem o nalezení zlaté střední cesty mezi

[47] ‘Pragmatický’ výklad Platónových podobenství podává Stekeler-Weithofer [1995, s. 89 n].

[48] Viz Platón [Phil., 16c nn]. Platón přímo hovoří o Prométheovi, v němž je ovšem tradičně rozpoznáván Pythagoras a za božský dar pak považována matematika. Spatřovat za příslušnou metodou přímo teorii proporcí či dokonce *anthyfairesis* vyžaduje jistý interpretační výkon, jak jej podává např. Stekeler-Weithofer [1992*c*, s. 364 n].

relativismem či subjektivismem Prótagorova ‘člověk je měrou všech věcí’ a Parmenidovým či pythagorejským ‘platonismem’. Cílem pravé filosofie, na rozdíl od filosofie sofistů a metafyziky, je přitom nevykazovat vztah pomíjivého světa smyslů a světa neměnných forem (pevných významů slov) jako deskriptivně-ontologický, ale instrumentální. V tom hraje velkou roli právě matematika pro svůj nepřímý či, lépe řečeno, relativně nepřímý, komplikovaný vztah k empirickému světu. Platón, takto interpretován, se pak stává prvním (transcendentálně-)analytickým filosofem, a v jistém smyslu i prvním filosofem vůbec.

Právě tento základní postoj jsme se pokoušeli rozvíjet i v této knize, s filosofií matematiky jakožto klíčem k problémům filosofie jazyka a filosofie vůbec. Role matematiky byla tedy opět služebná, zaostřená na konstitutivní sémantické vztahy výrazu a jeho významu, věty a její pravdivosti apod., v kontextu bez nepatřičných, např. empirických konotací. Takto získaná rozlišení jsme se pak snažili přenést zpět na prvotní diskurz přirozeného jazyka a světa, např. když jsme argumentovali, že se jméno ani v empirickém diskurzu nestává jménem něčeho skrze jednoduchý akt *deixe*, který u matematických ‘objektů’ nedává bezprostřední smysl, ale v komplexním začlenění daného výrazu do systému možných reprezentací a stanovením toho, kdy jsou dva výrazy jménem ‘téhož objektu’ a kdy nikoli.

Právě reflexe na matematické poznání nám dala nahlédnout, že náš svět není v žádném případě redukovatelný na momentálně zakoušený soubor vjemů či vzpomínek, ale že se jedná o komplikovaný teoretický konstrukt toho, co možná je, co by být mohlo a co možná bude, tj. našich více či méně ospravedlnitelných domněnek a predikcí. Proto bychom stejně jako Platón měli od těch, kdo se zabývají filosofií, očekávat soustavný zájem o matematiku a logiku, nikoli však v naivně-vědeckém smyslu kumulování nových poznatků a navrhování nových teorií, ale porozumění jejich mezím a předpokladům v intencích Kantovy otázky:

Jak je matematika možná?

V této knize jsme se ji pokusili zodpovědět pro relativně úzce vymezenou oblast přirozených a reálných čísel, tedy toho, čím se počítá a čím se měří.

Résumé

This work deals with basic principles of arithmetic and calculus from the perspective of modern logic. The central line of the text examines the concept of real number or, more precisely, the concept of continuum in its development, beginning with Eudoxus, Descartes and Leibniz, through Bolzano, Cantor and Dedekind, to Frege, Brouwer, Hilbert and Wittgenstein. Every significant movement in the philosophy of mathematics (Platonism, formalism, intuitionism, logicism, constructivism, structuralism etc.) is covered, not abstractly, but against the background of particular results or phenomena of modern logic and mathematics. Among those mentioned are Cantor's diagonal argument, Dedekind's recursion theorem, Bolzano's intermediate value theorem, Russell's paradox along with other logical paradoxes, Zermelo's well-ordering theorem, Skolem's paradox, Hilbert's program, and Gödel's theorems. The book also contains the author's own original results relating to the untenability of a structuralistic (re)interpretation of Frege's logicism (in the neo-logicism of Wright and Hale) and a complex defense of semantic holism including its most radical inferentialist version. In mathematics, this is done against the background of the exegesis of Hilbert's works.

My goal, as author, was not just to delineate the evolution of significant arithmetical concepts, albeit discussed from a non-traditional analytical perspective. The classical issues of the philosophy of mathematics (number, continuum, infinity, abstraction etc.) are presented primarily as a motivation and key for solving problems relating to the philosophy of language (meaning, reference, truth, existence etc.) and to philosophy in general. The role of mathematics in this book, therefore, is only auxiliary, analogous to the roles it is given in the philosophies of Plato, Kant or Frege, all of whom considered mathematical knowledge to be a presupposition not subject to philosophical training. Due to its complicated, indirect relation to the world, mathematics for a philosopher is an important instrument with which to demonstrate the disputability of the presupposition that there exist immediate or natural facts standing free of the prior theory against which we discover them. Hence any facts we discover could, theoretically speaking, exist in an alternative guise. I try

to elaborate on this by drawing on Bolzano's intermediate value theorem, reading it not in the usual way as an analytical proof of a self-evident fact (that a continuous function which takes opposite signs over a closed interval must include taking the value 0), but as a non-trivial proposal with which to define the continuum and, consequently, to provide a new proof and conceptual framework where the theorem is valid. In fact, this dependency of our observations on our theories is the idea behind Kant's Copernican turn and the basis of the finding that, as reasonable, self-conscious beings, we are not only products but also co-creators of reality.

This does not contradict the traditional view of mathematics as a prototype of stable and reliable knowledge. On the contrary, Parmenides' and Plato's distinction between the fluctuating, changeable world of senses on the one hand and the constant, eternal world of ideas on the other, is understood from the beginning as a basic philosophical distinction, the necessity of which is illustrated by mathematics. For instance, the discovery of irrational proportions (*alogoi logoi*) is something which, despite its intellectual inevitability, cannot be proved in a purely empirical fashion (since empirical measurements are always rational). Thus, Aristotle's attempt to eliminate Plato's ideas or concepts by their identification with their empirical extensions (e.g. the identification of the concept of cat with the set of actually existing cats, or the concept of circle with a set of — always imperfect — geometrical figures) is immediately dismissed as incorrect. It is only the view that the world of ideas is absolutely independent of us or that some people can or shall dwell in it, which is criticized. All distinctions (such as Plato's between the world of senses and the world of forms, Kant's between intuition and concept, or Frege's between object and concept) are only supporting moments in the process of our mastering and co-creating one single (or, if you wish, natural or everyday) world, in the spirit of Kant's thesis that real knowledge results only from both intuition and concept. Philosophy and logic, as treated in this book, are not disciplines that study or describe some other world, but merely the moderators of this communal process.

Literatura

ACKERMANN, Wilhelm (1924): “Begründung des ‘Tertium non datur’ mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit”. *Mathematische Annalen*, 93: 1–36.

ALEXANDROV, Pavel Sergejevič (2001): *Lehrbuch der Mengenlehre* (Manfred PESCHEL; Wolfgang RITTER; Horst ANTELMANN, překl.). Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 7. vydání.

ANSELM Z CANTERBURY (1938–1961): *S. Anselmi Opera Omnia I–VI* (F. S. SCHMITT, ed.). Thomas Nelson & Sons, Edinburgh.

——— (1965): *St. Anselm's Proslogion* (M. J. CHARLESWORTH, překl.). University of Notre Dame Press, Notre Dame.

——— (Pros.): *Proslogion*. In Anselm z Canterbury [1938–1961].

ARISTOTELÉS (1831–1870): *Aristotelis Opera I–V* (Immanuel BEKKER, ed.). Georg Reimer, Berlin.

——— (1984): *The Complete Works I–II* (Jonathan BARNES, ed.). Princeton University Press, Princeton.

——— (Cat.): *Categoriae*. In Aristotelés [1831–1870].

——— (Met.): *Metaphysica*. In Aristotelés [1831–1870].

——— (Phys.): *Physica*. In Aristotelés [1831–1870].

——— (Top.): *Topica*. In Aristotelés [1831–1870].

AYER, Sir Alfred Jules (1936): *Language, Truth and Logic*. Victor Gollancz, London. Citováno podle vydání Ayer [2001].

——— (2001): *Language, Truth and Logic*. Penguin Books, London.

BAIRE, René-Louis & *et al.*(1905): “Cinq lettres sur la théorie des ensembles”. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 33: 261–273. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 1077–1086.

Balcar, Bohuslav & Štěpánek, Petr (2005): *Teorie množin.* Academia, Praha, 2. vydání.

Becker, Oskar (1933): "Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid". *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, 2: 311–333. Přetištěno in Christianidis [2004], 191–209.

——— (1964): *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung.* Karl Alber, Freiburg, 2. vydání.

Behmann, Heinrich (1922): "Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem". *Mathematische Annalen*, 86: 163–229.

Behrends, Ehrhard (2004): *Analysis I.* Vieweg, Wiesbaden, 2. vydání.

Bendixson, Ivar (1883): "Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points". *Acta Mathematica*, 2: 415–429.

Beran, Ondřej (2008): *Jazyk a individualita.* Disertace, Univerzita Karlova v Praze, Praha.

Berkeley, George (1734): *The Analyst, or, A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician.* Jacob Tonson, London. Citováno podle fragmentu otištěného in Ewald [1996], 60–92.

Bernays, Paul (1918): *Beiträge zur axiomatischen Behandlung des Logik-Kalküls.* Habilitace, Universität Göttingen, Göttingen.

——— (1926): "Axiomatische Untersuchungen des Aussagen-Kalküls der 'Principia Mathematica'". *Mathematische Zeitschrift*, 25: 305–320.

——— (1935): "Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik". In Hilbert [1935], 196–216.

Bernstein, Felix (1901): *Untersuchungen aus der Mengenlehre.* Disertace, Universität Göttingen, Halle.

——— (1905): "Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen". *Mathematische Annalen*, 60: 187–193.

Beth, Evert Willem (1959): *The Foundations of Mathematics. A Study in the Philosophy of Science.* North-Holland, Amsterdam.

——— (1965): *Mathematical Thought. An Introduction to the Philosophy of Mathematics.* D. Reidel, Dordrecht.

BISHOP, Errett & BRIDGES, Douglas (1985): *Constructive Analysis.* Springer, Berlin.

BOLZANO, Bernard (1810): *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung.* Caspar Widtmann, Prag. Anglický překlad otištěn in Bolzano [2004], 82–137.

——— (1817): *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.* Gottlieb Haase, Prag. Anglický překlad otištěn in Bolzano [2004], 249–263 a také in Ewald [1996], 225–248.

——— (1837): *Dr. Bolzanos Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und größtentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherigen Bearbeiter. I–IV.* Seidel, Sulzbach.

——— (1851): *Dr. Bernard Bolzanos Paradoxien des Unendlichen, herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Prihonsky.* Reclam, Leipzig. Anglický překlad otištěn in Bolzano [2004], 590–678.

——— (2004): *The Mathematical Works of Bernard Bolzano* (Steve RUSS, ed.). Oxford University Press, Oxford.

BOOLOS, George (1986/1987): "Saving Frege from contradiction". *Proceedings of the Aristotelian Society*, 87: 137–151. Citováno podle přetisku in Boolos [1998], 171–182.

——— (1987): "The consistency of Frege's 'Foundations of Arithmetic'". In *On Being and Saying: Essays for Richard Cartwright* (J. J. THOMSON, ed.), 3–20. The MIT Press, Cambridge, MA. Citováno podle přetisku in Boolos [1998], 183–201.

——— (1990): "The standard of equality of numbers". In *Meaning and Method: Essays in Honor of Hilary Putnam* (George BOOLOS, ed.), 261–277. Cambridge University Press, Cambridge.

——— (1998): *Logic, Logic, and Logic.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

BOOLOS, George & BURGESS, John & JEFFREY, Richard (2002): *Computability and Logic.* Cambridge University Press, Cambridge, 4. vydání.

BOOLOS, George & HECK, Jr., Richard (1998): "'Die Grundlagen der Arithmetik', §§ 82–83". In Schirn [1998], 407–428.

Borel, Émile (1898): *Leçons sur la théorie des fonctions.* Gauthier-Villars, Paris.

——— (1905): "Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles". *Mathematische Annalen*, 60: 194–195. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 1076–1077.

——— (1914): *Leçons sur la théorie des fonctions.* Gauthier-Villars, Paris, 2. vydání.

Borradori, Giovanna (1994): *The American Philosopher: Conversations with Quine, Davidson, Putnam, Nozick, Danto, Rorty, Cavell, MacIntyre and Kuhn.* University of Chicago Press, Chicago.

Borwein, Jonathan M. (1998): "Brouwer-Heyting sequences converge". *Mathematical Intelligencer*, 20: 14–15.

Brandom, Robert (1994): *Making It Explicit. Reasoning, Representing, and Discursive Commitment.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

Bridges, Douglas & Richman, Fred (1987): *Varieties of Constructive Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (1905): *Leven, Kunst en Mystiek.* Waltman, Delft.

——— (1907): *Over de grondslagen der wiskunde.* Disertace, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam. Citováno podle anglického překladu otištěného in Brouwer [1975], 13–101.

——— (1908): "De onbetrouwbaarheid der logische principes". *Tijdschrift voor wijsbegeerte*, 2: 152–158. Citováno podle anglického překladu otištěného in Brouwer [1975], 107–111.

——— (1912): *Intuïtionisme en formalisme.* Inaugurační přednáška, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam. Citováno podle anglického překladu Brouwer [1914*a*].

——— (1914*a*): "Intuitionism and formalism". *Bulletin of the American Mathematical Society*, 20: 81–96.

——— (1914*b*): "Rezension von: 'A. Schoenflies und H. Hahn, Die Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen. Erste Hälfte' ". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 23: 78–83.

——— (1918): “Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil: Allgemeine Mengenlehre”. *Verhandelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 12(5): 1–43.

——— (1919): “Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Zweiter Teil: Theorie der Punktmengen”. *Verhandelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 12(7): 1–33.

——— (1921): “Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruch-Entwicklung?” *Mathematische Annalen*, 83: 201–210. Anglický překlad otištěn in Mancosu [1998], 28–35.

——— (1923): “Intuïtionistische splitsing van mathematische grondbegrippen”. *Verslagen van de Gewone Vergaderingen der Afdeeling Natuurkunde der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 32: 877–880. Anglický překlad otištěn in Mancosu [1998], 286–289.

——— (1924*a*): “Bemerkungen zum Beweise der gleichmässigen Stetigkeit voller Funktionen”. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings of the Section of Sciences*, 27: 644–646.

——— (1924*b*): “Beweis, dass jede volle Funktion gleichmässig stetig ist”. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings of the Section of Sciences*, 27: 189–193. Anglický překlad otištěn in Mancosu [1998], 36–39.

——— (1924*c*): “Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik I”. *Mathematische Annalen*, 93: 244–258.

——— (1925): “Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe”. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 33: 251–256. Anglický překlad otištěn in Mancosu [1998], 290–292.

——— (1927): “Über Definitionsbereiche von Funktionen”. *Mathematische Annalen*, 97: 60–75. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 446–463.

——— (1928): “Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus”. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings of the Section of Sciences*, 31: 374–379. Anglický překlad otištěn in Mancosu [1998], 40–44 a také in van Heijenoort [1967], 490–492.

——— (1929): “Mathematik, Wissenschaft und Sprache”. *Monathshefte für Mathematik und Physik*, 36: 153–164. Anglický překlad otištěn in Mancosu [1998], 45–53 a také in Ewald [1996], 1170–1185.

——— (1930): *Die Struktur des Kontinuums.* Gottlieb Gistel, Wien. Anglický překlad otištěn in Mancosu [1998], 54–64 a také in Ewald [1996], 1186–1196.

——— (1948): “Consciousness, philosophy and mathematics”. In *Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy, Amsterdam, August 11–18, 1948*, 1235–1249. North-Holland, Amsterdam.

——— (1954): “Points and spaces”. *Canadian Journal of Mathematics*, 6: 1–17.

——— (1975): *Collected Works I* (Arendt Heyting, ed.). North-Holland, Amsterdam.

——— (1992): *Intuitionismus. Berliner Gastvorlesungen* (Dirk van Dalen, ed.). BI Wissenschaftsverlag, Mannheim.

Bukovský, Lev (1979): *Štruktúra reálnej osi.* Veda, Bratislava.

Burali-Forti, Cesare (1897): “Una questione sui numeri transfiniti”. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 11: 154–164. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 104–112.

Burgess, John (1984): “Review of: Wright [1983]”. *Philosophical Review*, 93: 638–640.

Cantor, Georg (1870): “Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 72: 130–138. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 71–79.

——— (1872): “Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen”. *Mathematische Annalen*, 5: 123–132. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 92–102.

——— (1874): “Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 77: 258–262. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 115–118. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 839–843.

——— (1878): “Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84: 242–258. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 119–133.

——— (1879): "Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten I". *Mathematische Annalen*, 15: 1–7. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 139–145.

——— (1880): "Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten II". *Mathematische Annalen*, 17: 355–358. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 145–148.

——— (1882): "Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten III". *Mathematische Annalen*, 20: 113–121. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 149–157.

——— (1883*a*): *Grundlagen der allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen.* Teubner, Leipzig. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 165–209. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 878–919.

——— (1883*b*): "Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten IV, V". *Mathematische Annalen*, 21: 51–58, 545–586. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 157–209.

——— (1884): "Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten VI". *Mathematische Annalen*, 23: 453–488. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 210-246.

——— (1886): "Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche". *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 88: 224–233. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 370–376.

——— (1887/1888): "Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten I, II". *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 91/92: 81–125, 252–270/250–265. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 378–439.

——— (1890): *Gesammelte Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten.* C. E. M. Pfeffer, Halle.

——— (1892): "Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1: 75–78. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 278–281. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 920–922.

——— (1895/1897): "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre". *Mathematische Annalen*, 46/49: 481–512/207–246. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 282–356.

——— (1932): *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind* (Ernst Zermelo, ed.). Springer, Berlin.

——— (1970): “Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mitteilung”. *Acta Mathematica*, 124: 65–107.

——— (1991): *Briefe* (H. Meschkowski; W. Nilson, eds.). Springer, Berlin.

Carnap, Rudolf (1934): *Logische Syntax der Sprache*. Springer, Wien.

——— (1937): *The Logical Syntax of Language*, (Amethe Smeaton, překl.). Routledge & Kegan Paul, London.

——— (1947): *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic*. University of Chicago Press, Chicago.

Carroll, Lewis (1895): “What the tortoise said to Achilles”. *Mind*, 4: 278–280.

Cauchy, Augustin-Louis (1821): *Cours d’Analyse de l’École Polytechnique*. De Bure, Paris.

Christianidis, Jean (ed.) (2004): *Classics in the History of Greek Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Church, Alonzo (1936*a*): “A note on the Enscheidungsproblem”. *Journal of Symbolic Logic*, 1: 40–41. Přetištěno in Davis [1965], 108–114.

——— (1936*b*): “An unsolvable problem of elementary number theory”. *American Journal of Mathematics*, 58: 345–363. Přetištěno in Davis [1965], 88–107.

——— (1937): “Review of: Turing [1936]”. *Journal of Symbolic Logic*, 2: 42–43.

Coffa, J. Alberto (1982): “Kant, Bolzano and the emergence of logicism”. *Journal of Philosophy*, 74: 679–689. Přetištěno in Demopoulos [1995], 29–40.

——— (1991): *The Semantic Tradition from Kant to Carnap: To the Vienna Station*. Cambridge University Press, Cambridge.

Cohen, Leon W. & Ehrlich, Gertrude (1963): *The Structure of the Real Number System*. Van Nostrand Reinhold Company, New York.

Cohen, Paul J. (1963/1964): “The independence of the continuum hypothesis I, II”. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 50/51: 1143–1148/105–110. Přetištěno in Sacks [2003], 1–12.

Corcoran, John (1972): “Completeness of an ancient logic”. *Journal of Symbolic Logic*, 37: 696–702.

van Dalen, Dirk (1999): *Mystic, Geometer and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer I (The Dawning Revolution).* Clarendon Press, Oxford.

——— (2005): *Mystic, Geometer and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer II (Hope and Disillusion).* Clarendon Press, Oxford.

Dauben, Joseph Warren (1979): *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

Davidson, Donald (1967*a*): "The logical form of action sentences". In *The Logic of Decision and Action* (Nicholas Rescher, ed.), 30, 81–95. University of Pittsburgh Press, Pittsburgh.

——— (1967*b*): "Truth and meaning". *Synthese*, 17: 304–323. Přetištěno in Davidson [1984], 17–36.

——— (1984): *Inquiries into Truth and Interpretation.* Clarendon Press, Oxford.

——— (1991): "Three varieties of knowledge". In *A. J. Ayer Memorial Essays* (A. Phillips Griffiths, ed.), *Royal Institute of Philosophy Supplement*, 30, 153–166. Cambridge University Press, Cambridge.

Davis, Martin (1965): *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions.* Raven Press Books, New York.

Dedekind, Richard (1871): "Über die Komposition der binären quadratischen Formen. Supplement X to Dirichlet's 'Vorlesungen über Zahlentheorie'". In Dirichlet [1871], 423–462. Fragment v anglickém překladu otištěn in Ewald [1996], 762–765.

——— (1872): *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Vieweg, Braunschweig. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 765–779.

——— (1888): *Was sind und was sollen die Zahlen.* Vieweg, Braunschweig. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 787–832.

Deiser, Oliver (2004): *Einführung in die Mengenlehre.* Springer, Berlin, 2. vydání.

——— (2007): *Reelle Zahlen. Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen.* Springer, Berlin.

Demopoulos, William (ed.) (1995): *Frege's Philosophy of Mathematics.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

DESCARTES, René (1637a): *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences.* Jan Maire, Leyden. Francouzsko-německá zrcadlová verze je částí Descartes [1996].

——— (1637b): *La Géométrie.* Jan Maire, Leyden. Zrcadlová francouzsko-anglická verze vyšla jako Descartes [1954].

——— (1701): "Regulae ad directionem ingenii". In *Opuscula posthuma, physica et mathematica.* Blaeu, Amsterdam. Otištěno v zrcadlové formě in Descartes [1996].

——— (1954): *The Geometry of René Descartes.* Dover Publications, Inc., New York.

——— (1996): *Philosophische Schriften.* Felix Meiner, Hamburg.

DIOGENÉS LAERTIOS (1964): *De vitis et dogmatibus clarorum philosophorum* (H. S. LONG, ed.). Clarendon Press, Oxford.

——— (Vit.): *De vitis et dogmatibus clarorum philosophorum.* Vydáno jako Diogenés Laertios [1964].

DIRICHLET, Johann Peter Gustav Lejeune (1871): *Vorlesungen über Zahlentheorie.* Vieweg, Braunschweig.

DUMMETT, Sir Michael (1977): *Elements of Intuitionism.* Oxford University Press, Oxford.

——— (1981): *Frege: Philosophy of Language.* Harvard University Press, Cambridge, MA, 2. vydání.

——— (1991): *Frege: Philosophy of Mathematics.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

EBBINGHAUS, Heinz-Dieter (ed.) (1991): *Numbers.* Springer, Berlin.

EBBINGHAUS, Heinz-Dieter (2007): *Ernst Zermelo. An Approach to His Life and Work.* Springer, Berlin.

ENDERTON, Herbert B. (1977): *Elements of Set Theory.* Academic Press, London.

——— (2000): *A Mathematical Introduction to Logic.* Academic Press, London, 2. vydání.

EUKLEIDÉS (1883–1916): *Euclidis Opera Omnia I–IX* (Johan Ludvig HEIBERG; Hermann MENGE; Maximilian CURTZE, eds.). Teubner, Leipzig.

——— (1926): *The Thirteen Books of The Elements I–III. Translated with Introduction and Commentary by Sir Thomas L. Heath.* Cambridge University Press, Cambridge, 2. vydání.

——— (El.): *Elementa Geometriae.* In Eukleidés [1883–1916], díl I–IV.

Eves, Howard (1990): *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics.* PWS-Kent Publishing, Boston, 3. vydání.

Ewald, William (ed.) (1996): *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics I–II.* Clarendon Press, Oxford.

Feferman, Solomon (1988): "Weyl vindicated: 'Das Kontinuum' 70 years later". In *Atti del Congresso Temi e prospettive della logica e della filosofia della scienza contemporanee* (C. Celucci; G. Sambin, eds.), *Cesena 7–10 gennaio 1987*, 1, 59–93. CLUEB, Bologna.

——— (1998): *In the Light of Logic.* Oxford University Press, Oxford.

——— (2005): "Predicativity". In Shapiro [2005], 590–624.

Fine, Kit (2002): *The Limits of Abstraction.* Clarendon Press, Oxford.

Fourier, Jean Baptiste Joseph de (1822): *Théorie analytique de la chaleur.* Firmin-Didot, Paris.

Fowler, David (1999): *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction.* Clarendon Press, Oxford, 2. vydání.

Fraenkel, Abraham (1921): "Über die Zermelosche Begründung der Mengenlehre". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 30: 97–98.

——— (1922*a*): "Der Begriff 'definit' und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms". *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse*, 253–257. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 284–289.

——— (1922*b*): "Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre". *Mathematische Annalen*, 86: 230–237.

——— (1925): "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I". *Mathematische Zeitschrift*, 22: 250–273.

——— (1926): "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre II". *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 155: 129–158.

——— (1928): *Einleitung in die Mengenlehre.* Springer, Berlin, 3. vydání.

FRAENKEL, Abraham & BAR-HILLEL, Yehoshua & LEVY, Azriel (1973): *Foundations of Set Theory.* North-Holland, Amsterdam, 2. vydání.

FRANZÉN, Torkel (2005): *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to its Use and Abuse.* A. K. Peters, Wellesley, MA.

FREGE, Gottlob (1879): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* L. Nebert, Halle.

——— (1884): *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* W. Koebner, Breslau.

——— (1891*a*): "Über das Trägheitsgesetz". *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 98: 145–161.

——— (1891*b*): *Function und Begriff. Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 9. Januar der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft.* H. Pohle, Jena.

——— (1892*a*): "Über Begriff und Gegenstand". *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 16: 192–205.

——— (1892*b*): "Über Sinn und Bedeutung". *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100: 25–50.

——— (1893/1903): *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. I–II.* H. Pohle, Jena.

——— (1894): "Rezension von: 'Dr. E. G. Husserl, Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchung. Erster Band. Leipzig, 1891. C. E. M. Pfeffer' ". *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 103: 313–332.

——— (1895): "Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders 'Vorlesungen über die Algebra der Logik' ". *Archiv für systematische Philosophie*, 1: 433–456.

——— (1896): "Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene". *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe*, 48: 361–378.

——— (1903): "Über die Grundlagen der Geometrie. I-II". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 12: 319–324, 368–375.

——— (1906): "Über die Grundlagen der Geometrie. I-III". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15: 293–309, 377–403, 423–430.

——— (1918*a*): “Der Gedanke. Eine logische Untersuchung”. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, 1: 58–77.

——— (1918*b*): “Die Verneinung. Eine logische Untersuchung”. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, 1: 143–157.

——— (1976): *Wissenschaftlicher Briefwechsel* (Gottfried GABRIEL; Hans HERMES; Friedrich KAMBARTEL; Christian THIEL; Albert VERAART, eds.). Felix Meiner, Hamburg.

——— (1983): *Nachgelassene Schriften* (Hans HERMES; Friedrich KAMBARTEL; Friedrich KAULBACH, eds.). Felix Meiner, Hamburg, 2. vydání.

VON FRITZ, Kurt (1971): *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft.* Walter de Gruyter, Berlin.

GABBAY, Dov & GUENTHNER, Franz (eds.) (2001): *Handbook of Philosophical Logic II.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2. vydání.

GANDY, Robin (1978): “Church’s thesis and principles for mechanism”. In *The Kleene Symposium* (Jon BARWISE; H. Jerome KEISLER; Kenneth KUNEN, eds.), *Studies in Logic and Foundations of Mathematics*, 101, 123–148. North-Holland, New York.

GAUTHIER, Yvon (2002): *Internal Logic. Foundations of Mathematics from Kronecker to Hilbert.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

GENTZEN, Gerhard (1935): “Untersuchungen über das logische Schliessen I–II”. *Mathematische Zeitschrift*, 39: 176–210, 405–431. Anglický překlad otištěn in Gentzen [1969], 68–131.

——— (1936): “Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie”. *Mathematische Annalen*, 112: 493–565. Anglický překlad otištěn in Gentzen [1969], 132–213.

——— (1969): *The Collected Papers of Gerhard Gentzen* (M. E. SZABO, ed. & překl.). North-Holland, Amsterdam.

GEORGE, Alexander (1985): “Skolem and the Löwenheim-Skolem theorem: A case study of the philosophical significance of mathematical results”. *History and Philosophy of Logic*, 6: 75–89.

GERICKE, Helmuth (1984): *Mathematik in Antike und Orient.* Springer, Berlin.

——— (1990): *Mathematik im Abendland. Von den römischen Feldmessern bis zu Descartes.* Springer, Berlin.

Gleason, Andrew (1966): *Fundamentals of Abstract Analysis.* Addison-Wesley Publishing Company, Cambdridge, MA.

Gödel, Kurt (1930): "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls". *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37: 349–360. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 582–591 a Gödel [1986], 102–123.

——— (1931): "Über formal unentscheidbare Sätze der 'Principia Mathematica' und verwandter Systeme I". *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38: 173–198. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 592–617 a Gödel [1986], 144–195.

——— (1933): "Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie". *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums Wien*, 4: 34–38. Anglický překlad otištěn in Gödel [1986], 286–295.

——— (1938): "The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis". *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, 24: 556–557. Přetištěno in Gödel [1990], 27–32 a Sacks [2003], 108–112.

——— (1944): "Russell's mathematical logic". In Schilpp [1944], 125–153. Přetištěno in Gödel [1990], 119–143.

——— (1964): "What is Cantor's continuum problem?" In *Philosophy of Mathematics: Selected Reading* (Paul Benacerraf; Hilary Putnam, eds.), 258–273. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ. Přetištěno in Gödel [1990], 254–270.

——— (1986): *Collected Works I* (S. Feferman; J. W. Dawson; S. C. Kleene; G. H. Moore; R. M. Solovay; J. van Heijenoort, eds.). Oxford University Press, Oxford.

——— (1990): *Collected Works II* (S. Feferman; J. W. Dawson; S. C. Kleene; G. H. Moore; R. M. Solovay; J. van Heijenoort, eds.). Oxford University Press, Oxford.

——— (1995*a*): *Collected Works III* (S. Feferman; J. W. Dawson; W. Goldfarb; C. Parsons; R. M. Solovay, eds.). Oxford University Press, Oxford.

——— (1995*b*): "Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications". In Gödel [1995*a*], 304–323.

——— (2003): *Collected Works V. Correspondence H–Z* (S. Feferman; J. W. Dawson; W. Goldfarb; C. Parsons; W. Sieg, eds.). Oxford University Press, Oxford.

GOODMAN, Nelson (1983): *Fact, Fiction, and Forecast.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

GRASSMANN, Hermann Günther (1861): *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. Erster Theil: Arithmetik.* Enslin, Berlin.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor (ed.) (1980): *From the Calculus to Set Theory 1630–1910. An Introductory History.* Princeton University Press, Princeton, NJ.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor (2000): *The Search for Mathematical Roots 1870–1940. Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel.* Princeton University Press, Princeton, NJ.

GRELLING, Kurt & NELSON, Leonard (1908): "Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti". *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, 2: 301–334.

HAAPARANTA, Leila & HINTIKKA, Jaakko (eds.) (1986): *Frege Synthetized.* D. Reidel, Dordrecht.

HALLETT, Michael (1984): *Cantorian Set Theory and Limitation of Size.* Clarendon Press, Oxford.

HARTSHORNE, Robin (2000): *Geometry: Euclid and Beyond.* Springer, New York.

HAUSDORFF, Felix (1914): *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit, Leipzig.

HAZEN, Allen (1985): "Review of: Wright [1983]". *Australasian Journal of Philosophy*, 63: 251–254.

HEATH, Sir Thomas L. (1931): *A Manual of Greek Mathematics.* Clarendon Press, Oxford.

HECK, Jr., Richard (1993): "The development of arithmetic in Frege's 'Grundgesetze der Arithmetic'". *Journal of Symbolic Logic*, 58: 579–601. Citováno podle přetisku in Demopoulos [1995], 257–291.

——— (1995): "Definition by induction in Frege's 'Grundgesetze der Arithmetik'". In Demopoulos [1995], 295–333.

VAN HEIJENOORT, Jean (ed.) (1967): *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879–1931.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

VAN HEIJENOORT, Jean (1986): "Frege and vagueness". In Haaparanta & Hintikka [1986], 31–45.

HEINE, Eduard Heinrich (1872): “Die Elemente der Functionenlehre”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 74: 172–188.

HELLMAN, Geoffrey (1989): *Mathematics without Numbers.* Clarendon Press, Oxford.

HENDRICKS, Vincent F. & PEDERSEN, Stig Andur & JØRGENSEN, Klaus Frovin (eds.) (2000): *Proof Theory. History and Philosophical Significance.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

HENKIN, Leon (1949): “The completeness of the first-order functional calculus”. *Journal of Symbolic Logic*, 14: 159–166.

——— (1950): “Completeness in the theory of types”. *Journal of Symbolic Logic*, 15: 81–91.

HERBRAND, Jacques (1930): *Recherches sur la théorie de la démonstration.* Disertace, Université Paris, Paris. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 525–581.

HESSELING, Dennis E. (2003): *Gnomes in the Fog. The Reception of Brouwer's Intuitionism in the 1920s.* Birkhäuser, Basel.

HESSENBERG, Gerhard (1906): “Grundbegriffe der Mengenlehre”. *Abhandlungen der Fries'schen Schule, Neue Folge*, 1: 479–706.

HEYTING, Arend (1930*a*): “Die formalen Regeln der intuitionistichen Logik I”. *Sitzungsbereiche der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 42–56. Anglický překlad otištěn in Mancosu [1998], 311–327.

——— (1930*b*): “Die formalen Regeln der intuitionistichen Mathematik II–III”. *Sitzungsbereiche der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 57–71, 158–169.

——— (1934): *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie.* Springer, Berlin.

——— (1956): *Intuitionism. An Introduction.* North-Holland, Amsterdam.

HILBERT, David (1899): *Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen.* Teubner, Leipzig, 1. vydání. Přetištěno in Hilbert [2004] včetně úprav z dalších vydání.

——— (1900*a*): “Über den Zahlbegriff”. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8: 180–184. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 1089–1095.

——— (1900*b*): “Mathematische Probleme. Vortrag gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris 1900”. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 253–297. Citováno podle přetisku in Hilbert [1935], 290–329. Fragmenty v angličtině otištěny in Ewald [1996], 1096–1104.

——— (1903): *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, Leipzig, 2. vydání.

——— (1905): “Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik”. In *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, 174–185. Teubner, Leipzig. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 128–138.

——— (1918): “Axiomatisches Denken”. *Mathematische Annalen*, 78: 405–415. Citováno podle přetisku in Hilbert [1935], 146–156. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 1105–1115.

——— (1922): “Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung”. *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1: 157–177. Citováno podle přetisku in Hilbert [1935], 157–177. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 1115–1134.

——— (1923): “Die logischen Grundlagen der Mathematik”. *Mathematische Annalen*, 88: 151–165. Citováno podle přetisku in Hilbert [1935], 178–191. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 1134–1148.

——— (1926): “Über das Unendliche”. *Mathematische Annalen*, 95: 161–190. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 367–392.

——— (1928): “Die Grundlagen der Mathematik”. *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 6: 65–85. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 464–479.

——— (1929): “Probleme der Grundlegung der Mathematik”. *Mathematische Annalen*, 102: 1–9. Číslováno podle anglického překladu otištěného in Mancosu [1998], 227–233.

——— (1930): “Naturerkennen und Logik”. *Die Naturwissenschaften*, 18: 959–963. Citováno podle přetisku in Hilbert [1935], 378–387. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 1157–1165.

——— (1931): “Die Grundlegung der elementaren Zahlentheorie”. *Mathematische Annalen*, 104: 485–495. Neúplně přetištěno in Hilbert [1935], 192–195. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 1148–1156.

——— (1935): *Gesammelte Abhandlungen. Dritter Band: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes*. Springer, Berlin.

——— (2004): *Lectures on the Foundations of Geometry, 1891–1902* (Michael Hallett; Ulrich Majer, eds.). Springer, Berlin.

Hilbert, David & Ackermann, Wilhelm (1928): *Grundzüge der theoretischen Logik*. Springer, Berlin.

Hintikka, Jaakko (1973): *Logic, Language-Games and Information: Kantian Themes in the Philosophy of Logic*. Clarendon Press, Oxford.

Hodes, Harold (1984): "Logicism and the ontological commitments of arithmetic". *Journal of Philosophy*, 81: 123–149.

Hughes, George E. & Cresswell, Max J. (1968): *An Introduction to Modal Logic*. Methuen, London.

——— (1996): *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, London.

Hume, David (1739/1740): *A Treatise of Human Nature*. Anonymous, Anonymous.

Jahnke, Hans Niels (ed.) (1999): *Geschichte der Analysis*. Spektrum, Heidelberg.

James, William (1907): *Pragmatism. A New Name for Some Old Ways of Thinking. Popular Lectures*. Longmans, Green and Company, New York.

Jech, Thomas (2002): *Set Theory*. Springer, Berlin, 3. vydání.

Jevons, Stanley (1874): *The Principles of Science. A Treatise on Logic and Scientific Method*. Macmillan, London.

Kalmár, László (1959): "An argument against the plausibility of Church's thesis". In *Constructivity in Mathematics* (Arend Heyting, ed.), Proceedings of the colloquium held at Amsterdam 1957, 72–80. North-Holland, Amsterdam.

Kambartel, Friedrich (1978): "Symbolische Handlungen. Überlegungen zu den Grundlagen einer pragmatischen Theorie der Sprache". In *Vernünftiges Denken. Studien zur praktischen Philosophie und Wissenschaftstheorie* (Jürgen Mittelstrass; Manfred Riedel, eds.), 3–22. Walter de Gruyter, Berlin.

Kanamori, Akihiro (2004): "Zermelo and set theory". *The Bulletin of Symbolic Logic*, 10: 487–553.

Kannetzky, Frank (2000): *Paradoxes Denken. Theoretische und praktische Irritationen des Denkens*. Mentis, Paderborn.

Kant, Immanuel (1781/1787): *Kritik der reinen Vernunft*. Johann Friedrich Hartknoch, Riga.

——— (1800): *Immanuel Kants Logik. Ein Handbuch zu Vorlesungen* (Gottlob Benjamin Jäsche, ed.). Friedrich Nicolovius, Königsberg.

Kechris, Alexander S. (2007): "Set theory and uniqueness for trigonometric series". `http://math.caltech.edu/people/kechris.html`.

Kitcher, Philip (1983): *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford University Press, Oxford.

Kleene, Stephen Cole (1936*a*): "General recursive functions of natural numbers". *Mathematische Annalen*, 112: 727–742. Přetištěno in Davis [1965], 236–253.

——— (1936*b*): "λ-definability and recursiveness". *Duke Mathematical Journal*, 2: 340–353.

——— (1943): "Recursive predicates and quantifiers". *Transactions of the American Mathematical Society*, 53: 41–73. Přetištěno in Davis [1965], 254–287.

——— (1952): *Introduction to Metamathematics*. North-Holland, Amsterdam.

Kleene, Stephen Cole & Vesley, Richard Eugene (1965): *The Foundations of Intuitionistic Mathematics*. North-Holland, Amsterdam.

Kline, Morris (1972): *Mathematical Thought. From Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, New York.

Kolman, Vojtěch (2000): "K Fregovu údajnému platonismu". *Filosofický časopis*, 48(4): 577–599.

——— (2002): *Logika Gottloba Frega*. Filosofia, Praha.

——— (2003): "K Fregovu údajnému pragmatismu". *Filosofický časopis*, 51(6): 937–958.

——— (2004): "K současné analýze modalit". *Organon F*, 11(1): 15–31.

——— (2005*a*): "Freges Pragmatismus im Streit um den Begriff der Wahrheit". *Philosophisches Jahrbuch der Görres-Gesellschaft*, 112(2): 292–310.

——— (2005*b*): "Lässt sich der Logizismus retten?" *Allgemeine Zeitschrift für Philosophie*, 30(2): 159–174.

KOLMAN, Vojtěch (ed.) (2005*c*): *Možnost, skutečnost, nutnost. Příspěvky k modální propedeutice*. Filosofia, Praha.

——— (2006): *From Truth to Proof*. Miscellanea Logica VI. UK FF, Praha.

KOLMAN, Vojtěch (2007): "Logicism and the recursion theorem". In *The Logica Yearbook 2006* (Ondřej TOMALA; Radek HONZÍK, eds.), 127–136. Filosofia, Praha.

——— (2008*a*): "Der Zahlbegriff und seine Logik. Die Entwicklung einer Begründung der Arithmetik bei Frege, Gödel und Lorenzen". *Logical Analysis and the History of Philosophy*, 11: 65–87.

——— (2008*b*): "Is continuum denumerable?" In *The Logica Yearbook 2007* (Michal PELIŠ, ed.), 77–86. Filosofia, Praha.

KÖNIG, Dénes (1926): "Sur les correspondances multivoques des ensembles". *Fundamenta Mathematicae*, 8: 114–134.

KÖNIG, Julius (1905*a*): "Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem". *Mathematische Annalen*, 61: 156–160. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 142–149.

——— (1905*b*): "Zum Kontinuum-Problem". *Mathematische Annalen*, 60: 177–180.

——— (1906): "Sur la théorie des ensembles". *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, 143: 110–112.

KOWALEWSKI, Gerhard (1950): *Bestand und Wandel. Meine Lebenserinnerungen. Zugleich ein Beitrag zur neueren Geschichte der Mathematik*. Oldenbourg, München.

KRIPKE, Saul (1972): "Naming and necessity". In *Semantics of Natural Language* (Donald DAVIDSON; Gilbert HARMAN, eds.), 253–355, 763–769. D. Reidel, Dordrecht.

——— (1982): *Wittgenstein on Rules and Private Language. An Elementary Exposition*. Harvard University Press, Cambridge, MA.

KURATOWSKI, Kazimierz (1921): "Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles". *Fundamenta Mathematicae*, 2: 161–171.

——— (1922): "Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques". *Fundamenta Mathematicae*, 3: 76–108.

Kvasz, Ladislav (1998): *O revolúciach vo vede a ruptúrach v jazyku vedy.* Vydavatel'stvo UK v Bratislave, Bratislava 1998.

——— (2008): *Patterns of Change. Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics.* Birkhäuser, Basel.

Lagrange, Joseph-Louis (1788): *Mécanique analytique.* Le Veuve Desaint, Paris.

——— (1797): *Theorie de fonctions analytiques.* Imprimerie de la République, Paris.

Lakatos, Imre (1976): *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge University Press, Cambridge.

——— (1978): "Cauchy and the continuum: The significance of non-standard analysis for the history and philosophy of mathematics". *Mathematical Intelligencer*, 1: 151–161.

Lavine, Shaughan (1994): *Understanding the Infinite.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1705): *Nouveaux Essais sur L'entendement humain.* Přetištěno in Leibniz [2001], díl I.

——— (2001): *Œuvres de Leibniz.* Adamant Media Corporation, Paris.

Lewis, Harry R. & Papadimitriou, Christos H. (1998): *Elements of the Theory of Computation.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2. vydání.

Lorenz, Kuno (1970): *Elemente der Sprachkritik. Eine Alternative zum Dogmatismus und Skeptizismus in der analytischen Philosophie.* Suhrkamp, Frankfurt am Main.

Lorenzen, Paul (1955): *Einführung in die operative Logik und Mathematik.* Springer, Berlin.

——— (1960): *Die Entstehung der exakten Wissenschaften.* Springer, Berlin.

——— (1962*a*): "Gleichheit und Abstraktion". *Ratio*, 4: 77–81. Přetištěno in Lorenzen [1974], 190–198.

——— (1962*b*): *Metamathematik.* Bibliographisches Institut, Mannheim.

——— (1965): *Differential und Integral. Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis.* Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main.

——— (1968): *Methodisches Denken.* Suhrkamp, Frankfurt am Main.

——— (1969): *Normative Logic and Ethics.* Bibliographisches Institut, Mannheim.

——— (1974): *Konstruktive Wissenschaftstheorie.* Suhrkamp, Frankfurt am Main.

——— (1984): *Elementargeometrie. Das Fundament der analytischen Geometrie.* Bibliographisches Institut, Mannheim.

——— (1987): *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie.* Bibliographisches Institut, Mannheim.

LORENZEN, Paul & LORENZ, Kuno (1978): *Dialogische Logik.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

LORENZEN, Paul & SCHWEMMER, Oswald (1973): *Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie.* Bibliographisches Institut, Mannheim.

ŁOŚ, Jerzy (1955): "On the extending of models I". *Fundamenta Mathematicae*, 42: 38–54.

LÖWENHEIM, Leopold (1915): "Über Möglichkeiten im Relativkalkül". *Mathematische Annalen*, 76: 447–470. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 228–251.

ŁUKASIEWICZ, Jan (1935): "Zur Geschichte der Aussagenlogik". *Erkenntnis*, 5: 111–131. Anglický překlad otištěn in Łukasiewicz [1970], 197–217.

——— (1970): *Selected Works* (Ludwik BORKOWSKI, ed.). North-Holland, Amsterdam.

ŁUKASIEWICZ, Jan & TARSKI, Alfred (1930): "Untersuchungen über den Aussagenkalkül". *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, 23: 30–50. Anglický překlad otištěn in Łukasiewicz [1970], 131–152.

MAINZER, Klaus (1980): *Geschichte der Geometrie.* Bibliographisches Institut, Mannheim.

MALCEV, Anatolij Ivanovič (1936): "Untersuchungen aus dem Gebiet der mathematischen Logik". *Matematičeskij Sbornik*, 1: 323–336.

MANCOSU, Paolo (ed.) (1998): *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s.* Oxford University Press, Oxford.

MANCOSU, Paolo & ZACH, Richard & BADESA, Calixto (2005): "The development of mathematical logic from Russell to Tarski: 1900–1935". `http://www.ucalgary.ca/rzach/papers/history.html`.

MAYBERRY, John, P. (2000): *The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets.* Cambridge University Press, Cambridge.

MENDONÇA, W. P. & STEKELER-WEITHOFER, Pirmin (1987): "Frege — ein Platonist?" *Ratio*, 29: 157–169.

MIRIMANOV, Dmitry (1917*a*): "Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles". *L'Enseignement Mathématique*, 19: 37–52.

——— (1917*b*): "Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies Cantoriennes". *L'Enseignement Mathématique*, 19: 209–217.

MONK, J. Donald (1976): *Mathematical Logic.* Springer, New York.

MOORE, Adrian W. (1990): *The Infinite.* Routledge, London.

MOORE, George Edward (1925): "A defence of common sense". In *Contemporary British Philosophy II* (John Henry MUIRHEAD, ed.), 193–223. George Allen & Unwin, London.

MOORE, Gregory H. (1980): "Beyond first-order logic: The historical interplay between mathematical logic and axiomatic set theory". *History and Philosophy of Logic*, 1: 95–137. Přetištěno in Shapiro [1996], 3–46.

——— (1982): *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development, and Influence.* New York, Springer.

MYHILL, John (1951): "Report on some investigations concerning the consistency of the axiom of reducibility". *Journal of Symbolic Logic*, 16: 35–42.

——— (1974): "The undefinability of the set of natural numbers in the ramified 'Principia'". In *Bertrand Russell's Philosophy* (G. NAKHNIKIAN, ed.), 19–27. Duckworth, London.

NELSEN, Roger B. (1993): *Proofs without Words. Excercises in Visual Thinking.* The Mathematical Association of America, Washington.

VON NEUMANN, John (1923): "Zur Einführung der transfiniten Zahlen". *Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio scientiarum mathematicarum I*, 199–208. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 346–354.

——— (1925): “Eine Axiomatisierung der Mengenlehre”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 154: 219–240. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 393–413.

——— (1927): “Zur Hilbertschen Beweistheorie”. *Mathematische Zeitschrift*, 26: 1–46.

——— (1928): “Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre”. *Mathematische Annalen*, 99: 373–391.

——— (1929): “Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 160: 227–241.

Neurath, Otto (1932*a*): “Protokollsätze”. *Erkenntnis*, 3: 204–214. Přetištěno in Stöltzner & Uebel [2006], 399–411.

——— (1932*b*): “Soziologie im Physikalismus”. *Erkenntnis*, 2: 393–431. Přetištěno in Stöltzner & Uebel [2006], 269–314.

Newton, Sir Isaac (1686): *Philosophiæ naturalis principia mathematica.* S. Pepys, London. Anglický překlad vyšel jako Newton [1999].

——— (1999): *The Principia. Mathematical Principles of Natural Philosophy* (I. Bernard Cohen; Anne Whitman, překl.). University of California Press, Berkeley, CA.

Nicod, Jean G. P. (1917–1920): “A reduction in the number of the primitive propositions of logic”. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 19: 32–41.

Odifreddi, Piergiorgio (1989): *Classical Recursion Theory. The Theory of Functions and Sets of Natural Numbers.* North-Holland, Amsterdam.

Parsons, Charles (1965): “Frege’s theory of number”. In *Philosophy in America* (Max Black, ed.), 180–203. Cornell University Press, Ithaca, NY.

Peano, Giuseppe (1889): *Arithmetices principia, nova methodo exposita.* Bocca, Turin. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 83–97.

——— (1890): “Démonstration de l’intégrabilité des équations différentielles ordinaires”. *Mathematische Annalen*, 37: 182–228.

——— (1906*a*): “Additione”. *Revista de mathematica*, 8: 143–157.

——— (1906*b*): “Super theorema de Cantor-Bernstein”. *Revista de mathematica*, 8: 136–143.

Peirce, Charles Sanders (1931–1958): *Collected Papers I–VI* (Charles Hartshorne; Paul Weiss, ed.). Harvard University Press, Cambridge, MA.

Peregrin, Jaroslav (1997): “What does one need when she needs ‘higher-order’ logic?” In *Logica 1997* (Timothy Childers; Petr Kolář; Vladimír Svoboda, eds.), Proceedings of the 10th International Symposium, 75–92. Filosofia, Praha.

——— (1999): *Význam a struktura.* Oikumené, Praha.

Platón (1900–1907): *Platonis Opera: Recognovit Brevique Adnotatione Critica Instruxit I–V* (John Burnet, ed.). Oxford University Press, Oxford.

——— (1961): *The Collected Dialogs* (Edith Hamilton; Huntington Cairns, eds.). Princeton University Press, Princeton, NJ.

——— (Men.): *Meno.* In Platón [1900–1907], díl 3.

——— (Phil.): *Philebus.* In Platón [1900–1907], díl 2.

——— (Res.): *Respublica.* In Platón [1900–1907], díl 4.

——— (Soph.): *Sophista.* In Platón [1900–1907], díl 1.

Poincaré, Henri (1898): “On the foundations of geometry”. *The Monist*, 9: 1–43. Přetištěno in Ewald [1996], 982–1011.

——— (1899): “Des fondements de la géométrie: à propos d’un livre de M. Russell”. *Revue de métaphysique et de morale*, 7: 251–279.

——— (1902): *La science et l’hypothèse.* Flammarion, Paris.

——— (1905): “Les mathématiques et la logique I”. *Revue de métaphysique et de morale*, 13: 815–835. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 1021–1038.

——— (1906*a*): “Les mathématiques et la logique II”. *Revue de métaphysique et de morale*, 14: 17–34. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 1038–1052.

——— (1906*b*): “Les mathématiques et la logique III”. *Revue de métaphysique et de morale*, 14: 294–317. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 1052–1071.

——— (1908): *Science et méthode.* Flammarion, Paris.

Popper, Sir Karl Raymund (1935): *Logik der Forschung.* Julius Springer, Wien.

——— (1963): *Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge.* Routledge, London.

Post, Emil (1921): "Introduction to a general theory of elementary propositions". *American Journal of Mathematics*, 43: 163–185. Přetištěno in van Heijenoort [1967], 264–283.

Posy, Carl (2005): "Intuitionism and philosophy". In Shapiro [2005], 319–355.

Potter, Michael (2000): *Reason's Nearest Kin: Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap.* Oxford University Press, Oxford.

——— (2004): *Set Theory and its Philosophy: A Critical Introduction.* Oxford University Press, Oxford.

Prawitz, Dag (1965): *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study.* Almqvist and Wiksell, Stockholm.

Presburger, Mojżesz (1929): "Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt". *Sprawozdanie z I. Kongresu matematyków krajów slowiańskich, Warszawa 1929*, 92–101.

Procházka, Karel (2006): "Consequence and semantics in Carnap's syntax". In Kolman [2006], 77–114.

Quine, Willard Van Orman (1953): *From a Logical Point of View. Nine Logico-Philosophical Essays.* Harvard University Press, Cambridge, MA. Citováno podle vydání Quine [1961].

——— (1955): "On Frege's way out". *Mind*, 64: 145–159. Přetištěno in Quine [1995], 146–158.

——— (1960): *Word and Object.* MIT Press, Cambridge, MA.

——— (1961): *From a Logical Point of View.* Harper Torchbooks, New York, 2. vydání.

——— (1963): *Set Theory and its Logic.* Harvard University Press, Cambridge, MA. Citováno podle vydání Quine [1969].

——— (1966): *The Ways of Paradox and Other Essays.* Random House, New York. Citováno podle vydání Quine [1976].

——— (1969): *Set Theory and its Logic*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 2. vydání.

——— (1970): *Philosophy of Logic*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. Citováno podle vydání Quine [1986].

——— (1976): *The Ways of Paradox and Other Essays*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 2. vydání.

——— (1981): *Theories and Things*. Harvard University Press, Cambridge, MA.

——— (1986): *Philosophy of Logic*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 2. vydání.

——— (1987): *Quiddities. An Intermittently Philosophical Dictionary*. Harvard University Press, Cambridge, MA.

——— (1995): *Selected Papers*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 2. vydání.

Ramsey, Frank Plumpton (1925): “The foundations of mathematics”. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 25: 338–384. Citováno podle přetisku in Ramsey [1990], 164–224.

——— (1990): *Philosophical Papers* (D. H. Mellor, ed.). Cambridge University Press, Cambridge.

Rautenberg, Wolfgang (2002): *Einführung in die mathematische Logik*. Vieweg, Wiesbaden, 2. vydání.

Reid, Constance (1970): *Hilbert*. Springer, New York.

Richard, Jules (1905): “Les principes des mathématiques et le problème des ensembles”. *Revue générales de sciences pures et appliquées*, 16: 541. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 142–144.

Robinson, Abraham (1961): “Non-standard analysis”. *Proceedings of the Royal Academy of Sciences of Amsterdam. Series A*, 64: 432–440.

——— (1974): *Non-standard Analysis*. North-Holland, Amsterdam, 2. vydání.

Robinson, Raphael M. (1950): “An essentially undecidable axiom system”. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, MA, 1950, Vol. 1*, 729–730.

Rosser, J. Barkley (1936): “Extensions of some theorems of Gödel and Church”. *Journal of Symbolic Logic*, 1: 87–91. Přetištěno in Davis [1965], 230–235.

RUSSELL, Bertrand (1897): *An Essay on the Foundations of Geometry.* Cambridge University Press, Cambridge.

——— (1903): *The Principles of Mathematics.* George Allen & Unwin, London.

——— (1905): "On denoting". *Mind*, 14: 479–493.

——— (1906*a*): "Les paradoxes de la logique". *Revue de métaphysique et de morale*, 14: 627–650. Citováno podle anglického překladu otištěného in Russell [1973], 190–214.

——— (1906*b*): "On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types". *Proceedings of the London Mathematical Society*, 4: 29–53.

——— (1908): "Mathematical logic as based on the theory of types". *American Journal of Mathematics*, 30: 222–262. Citováno podle přetisku in van Heijenoort [1967], 150–182.

——— (1911): "Sur les axiomes de l'infini et du transfini". *Comptes Rendus des Séances de la Société Mathématique de France*, 2: 22–35.

——— (1912): *The Problems of Philosophy.* Williams & Norgate, London.

——— (1918/1919): "The philosophy of logical atomism". *Monist*, 28/29: 495–527/32–63, 190–222, 345–380. Přetištěno a citováno podle Russell [1956], 175–281.

——— (1919): *Introduction to Mathematical Philosophy.* George Allen & Unwin, London.

——— (1956): *Logic and Knowledge* (Robert Charles MARSH, ed.). George Allen & Unwin, London.

——— (1959): *My Philosophical Development.* George Allen & Unwin, London.

——— (1973): *Essays in Analysis* (Douglas LACKEY, ed.). George Allen & Unwin, London.

RUSSELL, Bertrand & WHITEHEAD, Alfred North (1910–1913): *Principia Mathematica I–III.* Cambridge University Press, Cambridge.

——— (1925): *Principia Mathematica I, II.* Cambridge University Press, Cambridge, 2. vydání.

Sacks, Gerald E. (ed.) (2003): *Mathematical Logic in the 20th Century.* Singapore University Press, Singapore.

Schilpp, Paul Arthur (ed.) (1944): *The Philosophy of Bertrand Russell.* Northwestern University Press, Evanston, IL.

Schirn, Matthias (ed.) (1998): *The Philosophy of Mathematics Today.* Clarendon Press, Oxford.

Schoenflies, Arthur (1905): "Über wohlgeordnete Mengen". *Mathematische Annalen*, 60: 181–186.

——— (1922): "Zur Erinnerung an Georg Cantor". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 31: 97–106.

Schopenhauer, Arthur (1819): *Die Welt als Wille und Vorstellung.* F. A. Brockhaus, Leipzig.

——— (1858): *Die Welt als Wille und Vorstellung I–II.* F. A. Brockhaus, Leipzig, 3. vydání.

Schröder, Ernst (1890–1895): *Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik) I–III.* Teubner, Leipzig.

——— (1897): "Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien". In *Verhandlungen des Ersten Internationalen Mathematiker-Kongress in Zürich vom 9. bis 11. August 1897* (Ferdinand Rudio, ed.), Proceedings of the 10th International Symposium, 147–162. Teubner, Leipzig.

——— (1898): "Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze". *Nova Acta Academiae Caesareae Leopoldino-Caroliae Germanicae Naturae Curiosum*, 71: 303–362.

Schütte, Kurt (1960): *Beweistheorie.* Springer, Berlin.

Scott, Dana S. (1955): "Definitions by abstraction in axiomatic set theory". *Bulletin of the American Mathematical Society*, 61: 442.

Shapiro, Stewart (1991): *Foundations without Foundationalism. A Case for Second-order Logic.* Clarendon Press, Oxford.

Shapiro, Stewart (ed.) (1996): *The Limits of Logic: Higher-Order Logic and the Löweinheim-Skolem Theorem.* Dartmouth Publishing Company, Aldershot.

——— (2005): *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic.* Oxford University Press, Oxford.

Sheffer, Henry M. (1913): "A set of five independent postulates for Boolean algebras, with applications to logical constants". *Transactions of the American Mathematical Society*, 14: 481–488.

Skirbekk, Gunnar (ed.) (1977): *Wahrheitstheorien. Eine Auswahl aus den Diskussionen über Wahrheit im 20. Jahrhundert*. Suhrkamp, Frankfurt am Main.

Skolem, Thoralf (1920): "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen". *Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse*, 4: 1–36. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 252–263.

——— (1923*a*): "Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich". *Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse*, 6: 1–38. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 302–333.

——— (1923*b*): "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre". In *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4–7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse*, 217–232. Akademiska Bokhandeln. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 290–301.

——— (1930): "Einige Bemerkungen zu der Abhandlung von E. Zermelo 'Über die Definitheit in der Arithmetik' ". *Fundamenta Mathematicae*, 15: 337–341.

——— (1931): "Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik". *Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I. Matematisk-naturvidenskapelig klasse*, 7: 1–28.

——— (1934): "Über die Nicht-Charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariabeln". *Fundamenta Mathematicae*, 23: 150–161.

Smith, Peter (2007): *An Introduction to Gödel's Theorems*. Cambridge, Cambridge University Press.

Smith, Robin (1983): "Completeness of an ecthetic syllogistic". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24: 224–232.

Smorynski, Craig (1991): *Logical Number Theory I: An Introduction*. Springer, Berlin.

Smullyan, Raymond Merrill (1968): *First-Order Logic*. Springer, Berlin.

Sochor, Antonín (2001): *Klasická matematická logika.* Karolinum, Praha.

Stein, Howard (1990): "Eudoxus and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics". *Synthese*, 84: 163–182. Přetištěno a citováno podle Demopoulos [1995], 334–357.

Stekeler-Weithofer, Pirmin (1986): *Grundprobleme der Logik. Elemente einer Kritik der formalen Vernunft.* Walter de Gruyter, Berlin.

——— (1992*a*): *Hegels analytische Philosophie. Die Wissenschaft der Logik als kritische Theorie der Bedeutung.* Schöningh, Paderborn.

——— (1992*b*): "On Frege's platonism". Nepublikovaný manuskript.

——— (1992*c*): "Plato and the method of science". *History of Philosophy Quarterly*, 9: 359–375.

——— (1995): *Sinn-Kriterien. Die logischen Grundlagen kritischer Philosophie von Platon bis Wittgenstein.* Schöningh, Paderborn.

——— (1997): "Zeichenkonzeptionen in der Mathematik der griechischen und römischen Antike". In *Semiotik* (Roland Posner; Klaus Robering; Thomas A. Sebok, eds.), *Ein Handbuch zu den zeichentheoretischen Grundlagen von Natur und Kultur*, 1, 862–875. Walter de Gruyter, Berlin.

——— (2000): "Kritik der Erkenntnistheorie. Zur Logik von Gegenstandsbezug und Wahrheit bei Hegel (und Wittgenstein)". In *Hegels Seinslogik. Interpretationen und Perspektiven* (Andreas Arndt; Christian Iber, eds.), Hegel-Forschungen, 59–79. Akademie-Verlag, Berlin.

——— (2003): "Wahrheitswert- und Regellogik". In *Traditionelle und moderne Logik* (Ingolf Max, ed.), *Leipziger Schriften zur Philosophie*, 15, 99–128. Leipziger Universitätsverlag, Leipzig.

——— (2004): "Mathematisches und begriffliches Denken in Hegels Wissenschaft der Logik". In *Logik, Mathematik und Naturphilosophie im objektiven Idealismus* (Wolfgang Neuser; Vittorio Hösle, eds.), Festschrift für Dieter Wandschneider zum 65. Geburtstag. Königshausen & Neumann, Würzburg.

——— (2005): *Philosophie des Selbstbewußtseins. Hegels System als Formenalyse von Wissen und Autonomie.* Suhrkamp, Frankfurt am Main.

——— (2006): "Inferential semantics in the pragmatic theory of truth and reference". In Kolman [2006], 19–44.

——— (2008): *Formen der Anschauung. Eine Philosophie der Mathematik.* Walter de Gruyter, Berlin.

Stekeler-Weithofer, Pirmin & Kambartel, Friedrich (2005): *Sprachphilosophie. Probleme und Methoden.* Reclam, Stuttgart.

Stöltzner, Michael & Uebel, Thomas (eds.) (2006): *Wiener Kreis. Texte zur wissenschaftlichen Weltauffassung von Rudolf Carnap, Otto Neurath, Moritz Schlick, Philipp Frank, Hans Hahn, Karl Menger, Edgar Zilsel und Gustav Bergmann.* Felix Meiner, Hamburg.

Sundholm, Göran (2001): "Systems of deduction". In Gabbay & Guenthner [2001], 1–52.

Švejdar, Vítězslav (2002): *Logika: Neúplnost, složitost, nutnost.* Academia, Praha.

Tarski, Alfred (1931): "Sur les ensembles définissables de nombres réels". *Fundamenta Mathematicae*, 17: 210–239. Citováno podle anglického překladu otištěného in Tarski [1983], 110–142.

——— (1933): *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych.* Towarzystwo Naukowe Warszawskie, Warsaw. Citováno podle anglického překladu otištěného in Tarski [1983], 152–278.

——— (1935): "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen". *Studia philosophica*, 1: 261–405.

——— (1936): "O pojęciu wynikania logicznego". *Przegląd Filozoficzny*, 39: 58–68. Citováno podle anglického překladu otištěného in Tarski [1983], 409–420.

——— (1948): *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry.* RAND Corporation, Santa Monica, CA. Přetištěno in Sacks [2003], 548–608.

——— (1955): "The notion of rank in axiomatic set theory and some of its applications". *Bulletin of the American Mathematical Society*, 61: 443.

——— (1983): *Logic, Semantics, Metamathematics* (John Corcoran, ed.). Hackett Publishing Company, Indianapolis, IN, 2. vydání.

Thiel, Christian (1995): *Philosophie und Mathematik. Eine Einführung in ihre Wechselwirkungen und die Philosophie der Mathematik.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

Tiles, Mary (1989): *The Philosophy of Set Theory. A Historical Introduction to Cantor's Paradise.* Basil Blackwell, Oxford.

TROELSTRA, Anne Sjerp (1977): *Choice Sequences: A Chapter of Intuitionistic Mathematics*. Clarendon Press, Oxford.

TROELSTRA, Anne Sjerp & VAN DALEN, Dirk (1988): *Constructivism in Mathematics: An Introduction I–II*. North-Holland, Amsterdam.

TRUSS, John K. (1997): *Foundations of Mathematical Analysis*. Oxford University Press, Oxford.

TUGENDHAT, Ernst (1970): "The meaning of 'Bedeutung' in Frege". *Analysis*, 30: 177–189.

——— (1976): *Vorlesungen zur Einführung in die sprachanalytische Philosophie*. Suhrkamp, Frankfurt am Main.

TURING, Alan (1936): "On computable numbers, with an applications to the 'Entscheidungsproblem'". *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42: 230–265. Přetištěno in Davis [1965], 115–153.

VLASÁKOVÁ, Marta (2005): *Bernard Bolzano: Cesta k logické sémantice*. Filosofia, Praha.

VOPĚNKA, Petr (1989): *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín*. Alfa, Bratislava.

——— (2000): *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci. Souborné vydání rozprav s geometrií*. Práh, Praha.

VAN DER WAERDEN, Bartel Leendert (1971): *Algebra I*. Springer, Berlin, 8. vydání.

WEYL, Hermann (1910): "Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe". *Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter*, 7: 93–95, 109–113.

——— (1918): *Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Veit, Leipzig.

——— (1921): "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik". *Mathematische Zeitschrift*, 10: 39–79. Citováno podle přetisku in Weyl [1968], díl II, 143–180. Anglický překlad otištěn in Mancosu [1998], 86–118.

——— (1944): "David Hilbert and his mathematical work". *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50: 612–654.

——— (1968): *Gesammelte Abhandlungen I-IV* (Komaravolu CHANDRASEKHARAN, ed.). Springer, Berlin.

WIENER, Norbert (1914): “A simplification of the logic of relations”. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 17: 387–390. Přetištěno in van Heijenoort [1967], 224–227.

WITTGENSTEIN, Ludwig (1921): “Logisch-philosophische Abhandlung”. *Annalen der Naturphilosophie*, 14: 198–262.

——— (1922): *Tractatus logico-philosophicus* (F. P. RAMSEY; C. K. OGDEN, eds.). Routledge & Kegan Paul, London. Vydáno jako část Wittgenstein [1994*c*], díl I.

——— (1953): *Philosophische Untersuchungen/Philosophical Investigations* (G. A. ANSCOMBE; G. H. von WRIGHT; R. RHEES, eds.). Basil Blackwell, Oxford. Vydáno jako část Wittgenstein [1994*c*], díl I.

——— (1976): *Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge 1939* (Cora DIAMOND, ed.). Cornell University Press, Ithaca.

——— (1980): *Culture and Value* (Peter WINCH, překl.). University of Chicago Press, Chicago.

——— (1983): *Philosophische Bemerkungen*. Suhrkamp, Frankfurt am Main. Vydáno jako část Wittgenstein [1994*c*], díl II.

——— (1984*a*): *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (G. A. ANSCOMBE; G. H. von WRIGHT; R. RHEES, eds.). Suhrkamp, Frankfurt am Main. Vydáno také jako Wittgenstein [1994*c*], díl VI.

——— (1984*b*): *Wittgenstein und der Wiener Kreis. Gespräche, aufgezeichnet von Friedrich Waismann* (B. F. MCGUINNESS, ed.). Suhrkamp, Frankfurt am Main. Vydáno jako část Wittgenstein [1994*c*], díl III.

——— (1989): *Vortrag über Ethik und andere kleine Schriften* (Joachim SCHULTE, ed.). Suhrkamp, Frankfurt am Main.

——— (1994*a*): *Tagebücher 1914–1916*. Suhrkamp, Frankfurt am Main. Vydáno jako část Wittgenstein [1994*c*], díl I.

——— (1994*b*): *Vermischte Bemerkungen*. Suhrkamp, Frankfurt am Main. Vydáno jako část Wittgenstein [1994*c*], díl VIII.

——— (1994*c*): *Werkausgabe I–VIII*. Suhrkamp, Frankfurt am Main.

WOLF, Robert S. (2005): *A Tour through Mathematical Logic*. The Mathematical Association of America, Washington.

WRIGHT, Crispin (1983): *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen University Press, Aberdeen.

Zach, Richard (1999): "Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the development of propositional logic". *The Bulletin of Symbolic Logic*, 5: 331–366.

Zermelo, Ernst (1896): "Ueber einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie". *Annalen der Physik und Chemie*, 57: 485–494.

——— (1904): "Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann". *Mathematische Annalen*, 59: 514–516. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 139–141.

——— (1908*a*): "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung". *Mathematische Annalen*, 65: 107–128. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 183–198.

——— (1908*b*): "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I". *Mathematische Annalen*, 65: 261–281. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 199–215.

——— (1929): "Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik". *Fundamenta Mathematicae*, 14: 339–344.

——— (1930): "Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre". *Fundamenta Mathematicae*, 16: 29–47. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 1219–1233.

——— (1932): "Über Stufen der Quantifikation und die Logik des Unendlichen". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 41: 85–88.

Zeuthen, Hieronymus Georg (1910): "Sur la constitution des livres arithmétiques des Élements d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité". *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinge*, 5: 395–435.

Zink, Julia (2004): *Kontinuum und Konstitution der Wirklichkeit. Analyse und Rekonstruktion des Peirce'schen Kontinuum-Gedankens.* Disertace, Ludwig-Maximilians-Universität München, München.

Zlatoš, Pavol (1995): *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou. Úvahy o množinách, nekonečne, paradoxoch a Gödelových vetách.* Iris, Bratislava.

Zorn, Max (1935): "A remark on method in transfinite algebra". *Bulletin of the American Mathematical Society*, 41: 667–670.

Rejstřík

Z praktických důvodů křížového odkazování používám souhrnný rejstřík citací, věcných hesel a vlastních jmen. Citace jsou vlastnímu rejstříku předeslány, aby v něm samém mohly být výskyty jmen zachycovány výběrově. Definující výskyty ortoterminů jsou značeny tučně, výskyty hesel v poznámkách pod čarou kurzívou. Seznam symbolů, zkratek a způsobů zápisu se nachází ve zvláštním oddíle s ohledem na jiný způsob řazení.

A

B

C

Č

E

F

G

H

Ch

I

J

K

M

N

O

P

Q

R

Ř

T

U

V

W

Z

Seznam symbolů

Seznam symbolů, zkratek a způsobů značení má čtenáři umožnit najít ten z jejich výskytů, v němž byly v textu definovány. Až na výjimky, v nichž došlo během výkladu v posunu nebo upřesnění významu, jsou tedy jednotlivé položky spojeny s konkrétní stránkou v textu a podle ní i řazeny. Nemusí to být nutně stránka prvního výskytu, např. když některé symboly užíváme zprvu pouze v implicitním odkazu k dostatečně známé praxi. Jsou-li i takové výskyty z nějakého důvodu označeny, pak zpravidla kurzívou.

Filosofie čísla
Základy logiky a aritmetiky v zrcadle
analytické filosofie

Vojtěch Kolman

Typografie a sazba Vojtěch Kolman
Návrh obálky Jaroslava Šůstková
Odpovědná redaktorka Pavla Toráčová
Vědecký redaktor Libor Běhounek
Vydalo nakladatelství
Filosofia
jako svou 250. publikaci
Vytiskl PBtisk, s.r.o., Příbram
Vydání první
Stran 672
Praha 2008

Elektronické vydání první
ISBN 978-80-7007-716-0
Praha 2022

monografie je věnována základům aritmetiky a analýzy z pohledu moderní logiky a analytické filosofie. klasická témata filosofie matematiky (číslo, nekonečno, abstrakce apod.) jsou prezentována jako motivace a klíč k řešení problémů filosofie jazyka (význam, reference, pravda, existence apod.). východiskem je přitom fregův obrat k jazyku a s ním související objev moderní logiky jako apriori matematiky.

kniha je takto i příspěvkem k filosofii a dějinám logiky v tom nejširším slova smyslu. osu výkladu tvoří pojem reálného čísla, resp. kontinua v jeho vývoji od eudoxa, descarta a leibnize přes bolzana, cantora a dedekinda až po frega, brouwera, hilberta a wittgensteina. v knize jsou podrobně diskutovány všechny významné směry filosofie matematiky, tj. platonismus, formalismus, intuicionismus, logicismus, konstruktivismus, strukturalismus a další, a to nikoli abstraktně, ale na příkladech konkrétních výsledků či fenoménů moderní logiky a matematiky. mezi ně patří mj. cantorův diagonální argument, dedekindův rekurzivní teorém, bolzanova věta o mezihodnotě, russellův a jiné logické paradoxy, zermelův důkaz věty o dobrém uspořádání, skolemův paradox, brouwerova věta o spojitosti totální funkce na kontinuu, hilbertův program, gödelovy věty a další.

kniha obsahuje autorovy původní výsledky týkající se neudržitelnosti strukturalistické interpretace logicismu a komplexní obhajobu sémantického holismu, včetně jeho nejradikálnější, inferencialistické varianty.

Filosofia

VOJTĚCH KOLMAN

Vojtěch Kolman působí od roku 2002 na katedře logiky UK FF v Praze, kde přednáší formální logiku, historii logiky a filosofii matematiky. Akademický rok 2004/05 strávil jako stipendista nadace Alexandra von Humboldta na univerzitě v Lipsku u prof. Pirmina Stekelera. Badatelsky se specializuje na témata z analytické filosofie a filosofie jazyka, s důrazem na jejich vztah k filosofii tradiční, zejména klasické německé. Publikoval řadu statí, překladů a odborných polemik v našich i zahraničních periodikách. Vedle knihy Logika Gottloba Frega (Filosofia 2002), oceněné Bolzanovou cenou, nejvyšším oceněním rektora pro rok 2002, je editorem sborníků Možnost, skutečnost a nutnost (Filosofia 2005) a From Truth to Proof (UK FF 2006). Jeho dosud nejvýznamnějším textem je habilitační práce Filosofie čísla, jejíž knižní verzi držíte v ruce.

www.vojtechkolman.cz

ISBN 978-80-7007-279-0
9788070072790