Vojtěch Kolman
Vít Punčochář

formy jazyka

úvod do logiky a její filosofie

Vojtěch Kolman, Vít Punčochář

formy jazyka

úvod do logiky a její filosofie

Vojtěch Kolman, Vít Punčochář

FORMY JAZYKA

úvod do logiky a její filosofie

FILOSOFIA - ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ
Praha 2015

Práce na této publikaci a její vydání byly podpořeny z grantu GA ČR P401/11/0371 *Apriorní, syntetické a analytické od středověku po současnou filosofii řešeného na Filozofické fakultě Univerzity Karlovy v Praze a* programu rozvoje vědních oblastí na Univerzitě Karlově v Praze (P13) *Racionalita ve vědách o člověku, podprogram Poznání a normativita.*

Vědečtí recenzenti: Mgr. Igor Sedlár, Ph.D.
Mgr. Ludmila Dostálová, Ph.D.

ISBN 978-80-7007-438-1 (tištěná kniha)
ISBN 978-80-7007-710-8 (elektronická kniha, PDF)
DOI 10.47376/filosofia.2015.5

Věnováno zpěvnému ptactvu

Obsah

Poznámka

Tato kniha vznikala dlouhou dobu, původně jako podklad přednášek z logiky, které jsem od akademického roku 2005/2006 měl na Filosofické fakultě Univerzity Karlovy primárně pro obor filosofie, ale průběžně také pro některé další obory jako estetika a sociologie. Vítek Punčochář, který vedl ke kurzu cvičení, postupně přebral i výuku kurzu a podstatně ovlivnil jeho podobu, což se promítlo do obsahu, ale i do celkové koncepce textu. Ten s ohledem na naši další společnou agendu přestal mít pouhou podpůrnou roli a nabyl podobu samostatného projektu, od roku 2011 vtěleného do řešení grantu *Apriorní, syntetické a analytické od středověku po současnou filosofii.*

V tomto projektu nebylo podstatné řešení a výklad čistě technických záležitostí, ale především role formální logiky ve vztahu k ostatním vědám, jak ji obráží její zařazení do vysokoškolského curricula. Z hlediska původního textu tedy nešlo jen o prosté doplnění látky o relevantní filosofický a historický kontext, ale i o takové uspořádání obsahu, které umožní, aby pod tíhou idiosynkratických postupů logiky jako vědecké disciplíny nezanikly její původní motivace a cíle. Ty jsou zcela přirozeně filosofické, přispívající k reflexi našeho jazyka a úsudkových postupů. Tato reflexe ale není nijak přímočará a její produkty mohou být snadno obráceny proti ní samé, když je totiž uchopíme deskriptivně, např. jako popis toho, jak se usuzuje či usuzovat má. Hlavní role – a s ní související uspořádání – této knihy tedy není informativní, ale komparativní. Logické systémy, jejich složky a pojmy jako syntax, sémantika či axiomatizace jsou popisovány jen proto, aby mohly být komparovány a touto komparací přivedeny ke svému původnímu, mnohdy i zapomenutému účelu. S Wittgensteinem lze říci, že tímto účelem je „přehledné znázornění“ jisté praxe, které nezřídka vede k její další proměně, a to hledáním vhodných příkladů.[1] Tyto příklady přitom nemusí být nijak složité či inovativní – zásadní je právě jejich „přehlednost“ a prototypičnost. V našem případě se jedná o příklady systémů výrokové a predikátové logiky, sylogistiky, modální logiky a intuicionistické logiky.

Jako vždy platí, že výsledná podoba knihy není jen produktem zmíněných cílů, ale i práce dalších lidí, jak na dílčích podkladech a podnětech,

[1] Wittgenstein [1953, § 122].

tak na průběžných a finálních korekturách. S ohledem na to, jak dlouho tato kniha vznikala, bude seznam těchto přispívajících vždy nutně neúplný. Zmínit je každopádně třeba Martina Vítu, který koncipoval první cvičení ke kurzu a průběžně navrhoval další doplnění a úpravy textu. Dále pak Martina Fontána, který v rámci své diplomové práce zpracoval některá témata týkající se úplnosti Aristotelovy sylogistiky – tato práce sloužila jako podklad pro příslušné pasáže knihy, byť se uvedený důkaz úplnosti od Fontánova podstatně liší. Co se kontroly celého textu týče, zde patří díky především Aleně Bakešové, Tomáši Lávičkovi a Martě Vlasákové. Markéta Jelenová připravila nejen návrh obálky, ale ovlivnila i výslednou podobu sazby.

Vojtěch Kolman

Praha červenec 2015

Tož radím – aby se bystřil váš um –
nejdřív collegium logicum.
Je nutné, aby duch vám zkrot,
i přijde tam do španělských bot,
pak v rozvaze a rovnováze
se plíží po myšlenek dráze
a křížem krážem, jak noc ho mámí,
už netoulá se s bludičkami.
Poté vás dlouho budou mučit,
že na příklad jídlu se musíte učit,
a jenom tak pít, to se nepatří,
vše dělat je nutno dle ráz, dva, tři!
Dílna, kde myšlenka lidská se tká,
je věru jak dílna tkalcovská:
Sem a tam člunky lítají.
Šlápneš, a na sta pohne se nití.
Tekou tak rychle, že nelze je zříti.
Ráz – a sta se jich splítají.
Pan filosof k stavu pak přistupuje,
a že to být musí, dokazuje:
že prvé je tak a druhé tak,
ergo třetí a čtvrté tak:
když prvé a druhé by ubylo,
třetí a čtvrté by nebylo.
Toho se žáci vám nachválí!
A tkalci se přece z nich nestali.
Cos živého poznat a popsat-li zkusíš,
dřív ducha z toho vyhnati musíš,
abys částice všechny v svých rukou měl;
jen ztratil se pohříchu duševní tmel.

(Goethe, *Faust*)

1

Co je logika?

Očekává se od nás, že na úvod alespoň zhruba načrtneme, co je logika, jaký má předmět a čím se liší od ostatních věd a zkoumání. Tím už jsme ale postaveni před problém logicko-filosofické povahy. Zdá se totiž, že čtenář, který na danou otázku odpověď zná, tuto knihu nepotřebuje, a naopak čtenáři, který nemá určitý objem znalostí v této knize obsažených, příslušná definice příliš neřekne.

To je standardní problém vysvětlování něčeho neznámého něčím, co již musí být známé, a tedy zbytečné opakovat, v moderní filosofii zavedený jako tzv. *paradox analýzy*. Ten, spojený se jménem filosofa G. E. Moora,[1] se týká možnosti korektní analýzy, která by byla zároveň netriviální, a má také, jako většina paradoxů, antický precedent. Jedná se o tzv. *paradox Menónův*,[2] v němž je diskutováno, zda odpovědi na otázku typu

co je A?

nemůže porozumět nakonec jen ten, kdo už ví, co je A. Vše můžeme reformulovat jako problém možnosti smysluplné definice, neboť ta, má-li obecný tvar

[1] Konkrétně jde o knihu Moore [1903], v níž je probírána otázka nedefinovatelnosti pojmu „dobra“.
[2] Viz Platón [Men., 80d–e].

A je B,

vysvětluje A (*definiendum*) pomocí B (*definiens*), přičemž, jak se zdá, platí následující dilema: B je s A totožné, což činí příslušnou definici triviální, nebo B je od A odlišné, což ji činí nekorektní. Lapidárně řečeno, buďto víme, co něco (spravedlnost, ctnost, krása apod.) je, nebo to nevíme a další hledání nemá cenu. Tento problém je všechno jiné než banální, naopak je jedním z těch, jenž zahájil – v tázání Sókratově – éru západní filosofie a především éru samotné logiky, resp. dialektiky, jak byla původně logika nazývána. Neuškodí tedy se u něj pozastavit. Skutečnost, že je otázka „co je logika?“ identifikována přímo se základním problémem logiky, totiž co je smysluplná definice, dělá celou věc atraktivní z velmi širokého úhlu pohledu.

1.1 Co je definice?

Jako lákavý způsob, jak paradox analýzy či paradox Menónův obejít, se v případě vymezení pojmu logika může jevit *historický* exkurs, tj. vyčíslení toho, co bylo „kontingentně“ za logiku pokládáno a jaká jména byla s těmito logikami spjata. Na obecné rovině tento postup odpovídá snaze provádět definice (abstraktních) pojmů, např.

kočka,

výčtem (konkrétních) prvků, např.

Micka, Mikeš, Mour atd.,

tedy *extenzionálně*, tj. uváděním toho, co pod ně spadá. Na Sókratovu otázku „co je A“, konkrétně „co je statečnost“, „co je ctnost“ a „co je vědění“, odpovídají Lachés,[3] Menón[4] a Theaitétos[5] ve stejnojmenných dialozích nejprve výčtem prvků, tj. příklady statečnosti v pěchotě, v jízdě, ve válce, na mořích, v nemoci či v politice, resp. příklady ctností, jako jsou zdatnost muže spravovat věci obce či zdatnost ženy spravovat dům, resp. konkrétními typy vědění, jako jsou geometrie, ševcovství a další. Jsou za to pak Sókratem žertovně káráni v tom smyslu, že tázáni po *jednu* štědře dávají *mnohé*.

Obecné jádro námitky přitom spočívá v tom, že definice výčtem prvků nemůže nikdy zcela nahradit vymezení *intenzionální*, skrze slovo

[3] Viz Platón [Lac., 191d].
[4] Viz Platón [Men., 71e].
[5] Viz Platón [Thea., 141c–d].

(*logos*) vyjádřený pojem (ideu), jak to je nejlépe vidět na pojmech matematiky. Theaitétos takto přechází od původního pokusu o vymezení pojmu „vědění“ výčtem k jednoduššímu problému klasifikace přirozených čísel, jejichž odmocnina je iracionální, aby původní seznam

2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17

nahradil definicí

obdélníkové číslo.

Tím je míněno „číslo, které není čtvercové“, tj. nelze je vyjádřit jako součin téhož čísla, případně obrazcem tvaru čtverce. Zde je neredukovatelnost intenzionálního výměru na výměr extenzionální dána jasně rozdílem nekonečné extenze a konečného *logu*. Lepší příklad je proto pojem kružnice, který není jednoduše redukovatelný na empiricky nakreslené kružnice, neboť ty jsou vždy trochu šišaté, v rozporu s tím, co zachycuje *logos*:

křivka, jejíž body mají stejnou vzdálenost od bodu daného.

Tím není řečeno, že se bez konkrétního obrazce při určení toho, co kruh je, úplně obejdeme, ale jen že on sám k pochopení svého „skutečného“ významu, resp. k pochopení „skutečného“ významu slova „kruh“, nestačí. Platón tento proces dospívání od konkrétní sady exemplářů (více či méně typických reprezentací) k abstraktním významům (idejím) opisuje termíny rozpomínání se (*anamnésis*).

V moderní terminologii lze Platónův problém rozpomínání se na ideje formulovat jako otázku po významu slov. Předpokládáme přitom, že otázku, co význam je, nelze zodpovědět, aniž bychom věděli, jak tento význam poznáváme. Platónova řeč o anamnésis a Sókratovy opakované pokusy o pojmová určení jsou ostatně uchopitelné pouze na pozadí vědomé nutnosti toho, že je třeba spojit ontologický aspekt idejí s aspektem epistemologickým. Jinak by byly ideje od říše smyslů, tedy empirického světa, nepřeklenutelně odděleny.

Stejně jako u výše zmíněného slova „kružnice“ se přitom zdá, že rozumět slovu „kočka“ neznamená znát pouze nějaký (z povahy věci nutně omezený) počet empirických instancí (kočky, které jsem dosud viděl), ale ovládnout situačně nezávislá kritéria toho, kdy lze něco považovat za kočku a kdy zase ne, tedy ovládnout určité pravidlo, které je ve své aplikaci potenciálně nekonečné (aplikovatelné i na nové kočky), a tedy v jistém smyslu transcenduje konkrétní kočičí a kontra-kočičí exempláře. Tím se od Platónova pojmu rozpomínání dostáváme k Wittgensteinovu[6] pro-

[6] Wittgenstein [1953].

blému řízení se pravidlem (*Regelfolgen*, *rule-following*) a uvědomujeme si, že se vlastně jedná o dvě strany téže mince.

Tak jako se konkrétní empirická kružnice liší více či méně od abstraktního vymezení kružnicovosti, liší se i konkrétní kočka od pojmu či pravidla rozpoznání kočky – dejme tomu v jeho primitivním vymezení skrze pojmy chlupatého domácího zvířete, které mňouká a loví myši –, neboť si docela dobře dokážeme představit případ kočky, která se s myšmi přátelí nebo je němá. Vzato analyticky, říkáme vlastně, že je věta

kružnice je kulatá

pravdivá pouze v *intenzionálním* modu, totiž ve vztahu k abstraktnímu *logu* „kružnice" – někdy se říká také *de dicto* –, nikoli ve vztahu k jeho konkrétním empirickým instancím –, někdy se také říká *de re*. Stejně tak to platí pro větu

kočka je chlupatá,

která může individuálně selhat před instancí vypelichané kočky, či pro Platónův vlastní příklad

mistr se nikdy nemýlí.[7]

Ten lze chápat jako pravdivý pojmově, týká-li se totiž vymezení mistra jako toho, kdo stanovuje normu, tj. určuje, co je správné a co ne, a nepravdivý v případě konkrétní osoby, která příslušným normám správnosti také podléhá. Dogmatu o papežské neomylnosti je třeba rozumět právě na pozadí tohoto rozdílu, tj. papež se nikdy nemýlí coby úřad, *de dicto*, nikoli jako tento úřad zastávající osoba, *de re*. Zmíněné věty, jsou-li pravdivé, vypovídají vždy o příslušné ideji nebo o pravidle, nikoli o tom, co je jejich instancí, co má na příslušné ideji pouhou účast.

V důsledku rozlišení konkrétních věcí a idejí a také řeči o účasti prvních na druhých, se přirozeně otevírá problém, jak si lze ideje či pravidla osvojit a jak poznáme, že tak někdo učinil: vždyť k dispozici je pokaždé právě jen konečný počet cvičných či testujících případů. K tomu se Platón dostává sám ve svém *Parmenidovi*, kde je podrobena kritice jednoduchá, ontologická verze nauky o idejích. Tuto kritiku přebírá i empiricky orientovaný Aristotelés. Pro řešení problému je přitom podstatné, že se u zmíněného přechodu nejedná ani tak o krok od jednoho typu jsoucen (empirických) k jsoucnům jiným (abstraktním), ale od *deskriptivního* modu zacházení s týmiž jevovými reprezentacemi k modu *normativnímu*. Tento rozdíl si vedle uvedených případů člověka jako konkrétního jedince

[7] Viz Platón [Res., 340d–e].

a jako představitele určitého standardu či instituce snadno zpřítomníme na případu železné tyče, kterou lze užívat jak jako podpěru stolu, která má jisté vlastnosti fyzikální, tak jako měřící etalon (metr), na jehož funkci nemají tyto empirické vlastnosti přímý vliv. Tvrzení

> metr je kratší o pár milimetrů

tak dává smysl pouze v prvním, empirickém modu, nikoli v druhém, kdy je kontradiktorické. Podobné je to s tvrzením „$1 + 1 = 1$“ v aplikaci na empirické předměty (splývající kapky vody), kde může být snadno pravdivé, a v abstraktním významu ideálního výroku.

Analogicky pak platí následující. Na rozdíl od konkrétního vjemu, jejž přijímáme tak, jak je, v dále nekorigovaném smyslu, můžeme v dané situaci aplikovat slovo „kočka“, resp. s ním spojený pojem, správně, či mylně. Jednak tedy vidíme *kočku*, nikoli jen směs barevných skvrn, jednak je tento aktivní nebo reflektovaný vjem spojen s elementárním soudem „toto je kočka“ coby etalonem jeho správnosti. Jinými slovy, přinejmenším implicitně vidíme, *že* je před námi kočka, v čemž se na rozdíl od pouhého vjemu můžeme mýlit, tj. může se nám jen zdát, že vidíme kočku, ve skutečnosti je to ale pes. Díky této nové kvalitě je pojem (pravidlo) v nějakém smyslu na svých aplikacích (pravidelnostech) nezávislý, zároveň ale není jednou provždy fixován, tj. vždy se mohou vyskytnout nejasné případy a s nimi i potřeba jeho dalšího upřesnění, vývoje. Tento logický rozměr pojmovosti významně tematizuje Hegel.

K vývoji pojmu přitom dochází nutně právě proto, že je regulován konkrétními instancemi, jichž je vždy jenom omezený a situačně-závislý počet. Otázka, jaký počet koček potřebuji k tomu, abych se rozpomněl na příslušný pojem, osvojil si dané pravidlo, takto nedává smysl – je jen jasné, že to nemůže být pouze jedna, neboť, jak podotýká Wittgenstein, pravidlo aplikované jen jedinkrát není pravidlo,[8] a že žádný počet exemplářů nebude natolik velký, aby fixoval pojem jednou provždy. Můžeme to samozřejmě opsat tak, že si vždy vzpomínáme jen nedokonale, stejně tak dobře lze ale tvrdit, že ono rozpomínání je nedokonalé jen relativně k již stabilizovanému úzu. Ve vztahu k němu totiž už nedává smysl tvrdit, že si na daný pojem ve vší úplnosti nemohou rozpomenout všichni, neboť v případě, že by se jednalo o setrvalý stav, by tak přestal dávat smysl samotný pojem rozpomínání. Rovněž Prótagorova slavná *homo-menzura*

> člověk je měrou všech věcí, jsoucích, že jsou, nejsoucích, že nejsou

[8] Wittgenstein [1953, § 199].

dává smysl právě v intersubjektivním modu *de dicto*, tj. jakožto výrok o člověku coby druhu, resp. racionální bytosti strukturující svět, a nikoli v relativistickém modu *de re*, týkajícím se libovolného individua a jeho svévole. Fakticky se v těchto sociálně orientovaných čteních vyhýbáme extrému, kdy si jako jedinec mohu říkat, co chci (třeba, že „A je i není B“), stejně jako extrému, kdy nemohu říkat nic, co by význam slov, tj. svět, podstatně ovlivnilo.

Vrátíme-li se k naší otázce „co je logika?“, lze v dosavadních úvahách najít ospravedlnění toho, proč se v knize máme věnovat rozličným logickým systémům, a to z různých pozic, od čistě technických přes historické až po filosofické. Zároveň jsme si vědomi, že při vymezení pojmu logika potřebujeme kromě jednotlivých případů historických koncepcí formulovat také definici, která jednotlivé případy spojuje a zároveň překračuje, a tím umožňuje jednak jejich kritiku a změnu, a tedy další vývoj vymezované disciplíny, jednak tuto disciplínu ohraničuje vůči disciplínám jiným. V současnosti patří k těm standardním charakterizacím vymezení logiky jako:

> vědy o vyplývání v jeho nepsychologickém, abstraktním pojetí objektivního vztahu mezi výroky.

Značné limity této definice se pokusíme postupně odstranit právě kombinací věcného a historického výkladu. Začneme přitom výkladem historickým, spolu s několika hrubě načrtnutými rozlišeními různých pojetí logiky a logik, abychom ve vlastním textu předvedli konkrétní případy některých z nich. Těžištěm knihy přitom bude formální výklad tzv. *logiky klasické*, s níž pak budeme srovnávat jak její předchůdce, tak její následné revize a deviace, a rozvíjet i tradiční filosofické problémy logiky a jazyka v náležitě rozpracovaném kontextu. Pohyb výkladu bude *de facto* sledovat hermeneutiku soustředných kruhů, stálých oprav a zpřesňování dosavadního předvědění, jinak řečeno: v problému definice „A je B“ nebudeme předpokládat, že je A zcela neznámé a B zcela jasné. Tím paradox analýzy zmizí. To, co je vyplývání, se proto v pravém slova smyslu dozvíme až v průběhu učebnice samé.

Správnost a oprávněnost našeho postupu by měla potvrdit také následující úvaha a několik historických poznámek. K pochopení toho, jak se věci mají, nedospíváme často tím, že je nám vše explicitně vysvětleno, protože to by – analogicky k problému vět typu „A je B“ – znamenalo, že vše už v nějakém smyslu známe. V obecném případě nám není *vysvětlováno* něco něčím, ale probíhá jakýsi přímý *výcvik*, jenž vede nejprve ke zkusmému osvojení si, přijetí základních *pravidel* příslušného diskurzu, příslušné *jazykové hry*. Tato zdatnost odpovídá mohutnosti rozumu, kterou Kant nazýval rozvažováním (*Verstand*) a jež je vymezena právě jako schopnost osvojovat si slepě předem daná pravidla.[9] Vedle rozumu ve smyslu schopnosti pravidel (*Verstand*), a vedle rozumu dialektického (*Vernunft*), jenž má reflektující charakter, tj. je schopen příslušná pravidla vynalézat, revidovat či zcela změnit podle toho, jak plní svůj základní účel, zavádí ovšem Kant také tzv. soudnost (*Urteilskraft*) coby schopnost pod ona pravidla subsumovat, tj. schopnost jejich soudné aplikace, neboli nalézání předmětu k danému pravidlu, ale i naopak pravidla k danému předmětu.[10] Tato schopnost se již sama neřídí pravidly, tj. není založena na vysvětlení něčeho něčím, ale na stipulaci skrze vhodně (prototypicky) zvolené příklady a protipříklady. Tím se Kant vyhýbá bludnému kruhu, stejně jako jsme se výše vyhnuli paradoxu analýzy.

Obecné filosofické ponaučení je následující. Explicitní vysvětlování, definování či popis jsou možné vždy jen na pozadí jistých implicitních předpokladů, které z nich vysvětlování, definice či popisy dělají. Platón zachycuje tuto podmiňující složku poznání v ideji dobra reprezentované Sluncem coby podmínkou, za níž je teprve možné něco vidět, činit nějaká rozlišení.[11] Kantovo použití slova „idea“ má právě tento specifický charakter něčeho nevýskytového, co nepatří ke jsoucnu, ale podmiňuje jeho existenci, tj. má transcendentální charakter. V uvážení dalšího vývoje nauky o poznání, jak ho reprezentuje především Hegel a Wittgenstein, lze říci, že povaha těchto idejí není popisná, ale normativní, zachycena v aktivitách jistého společenství. Toto společenství a jeho dějiny jsou ve vztahu k definicím a tomu, co vymezují, včetně pojmu logiky, poslední instancí, k níž se lze při jejich zdůvodnění odvolat.

1.2 Eleatská schémata

Jako svébytný obor lidského bádání se logika etabluje záhy po vzniku filosofie, i když se zprvu nenazývá logikou, ale dialektikou, z řeckého slova pro „diskutovat“ (*dialegesthai*). Slovo logika se poprvé objevuje pravděpodobně u zakladatele stoické školy Zénóna z Kitia. Podle stoiků[12] tvoří filosofii tři základní části:

(1) fyzika,

(2) etika,

(3) logika.

[9] Kant [1781/1787, A 126].
[10] Kant [1781/1787, A 132/B 171].
[11] Platón [Res., 509d].
[12] Viz Diogenés Laertský [Vit., VII, 39].

Uvedené dělení, jakkoli hrubé a nepřesné, nám přinejmenším dovoluje vymezit jednotlivé disciplíny relativně, vůči sobě, když řekneme, že:

(1) fyzika studuje empirický svět,

(2) etika studuje svět humánní, lidský, svět společenských vztahů a norem,

(3) logika se věnuje reprezentaci těchto světů v naší mysli, resp. v jazyce.

Jak ještě vícekrát zmíníme, je v jistém smyslu naivní dívat se na zmíněné disciplíny jako na ostře oddělené, tj. správné je vidět v nich spíše jen rozličné aspekty přístupu k témuž, totiž k jednomu jedinému, chcete-li žitému či přirozenému světu. To ovšem vyžaduje jistý interpretační výkon, jenž není obsahem této knihy.

S jazykem je každopádně logika spjata již podle názvu (*logos*). V historické perspektivě to znamená především spjatost s řečnictvím – a skutečně, jeden z původů logiky je také nacházen v sofistické škole, a to se vším, co to s sebou nese, tedy i stigmatem jalovosti. Sofisté, typizovaní např. Euthydémem ze stejnojmenného Platónova dialogu, jsou známi jako lidé, kteří přesvědčují ostatní o něčem, co evidentně není pravda, na základě plauzibilně znějících argumentů. V Euthydémově (resp. Dionysodórově)[13] sofismatu

tento pes je můj,
tento pes je otec
―――――――――
tedy tento pes je můj otec

nebo v tzv. *Rohatci*, jenž je připisován Eubúlidovi[14]

cos neztratil, máš,
neztratil jsi rohy
―――――――――
máš rohy,

máme příklady aplikace úsudkových schémat obvykle považovaných za obecně platná. V druhém případě se dokonce jedná o (jistého druhu) *modus ponens*

jestliže platí A, pak platí B,
platí A
―――――
platí B,

[13] Platón [Euth., 298d–e].
[14] Viz Diogenés Laertský [Vit., VII, 186–187].

jenž je páteří tradiční i současné formální logiky. Právě z těchto sofismat pochází rozšířená představa logiky jako sbírky zákonů, jimiž se v praxi pro jejich velkou obecnost stejně nikdo neřídí, a když, tak se jen dostává do problémů. Seneca se tak např. v komentáři k argumentačním hříčkám a klamům, jmenovitě k Eubúlidovu *Rohatci*, vyjadřuje ještě mírně, když říká, že „neznalému neuškodí, znalému neprospějí“.[15] Eubúlidés každopádně kromě *eristiky*, tj. umění klamat, rozvíjel i metodickou stránku dialektiky, jak to platilo obecně pro členy tzv. *megarsko-stoické školy.* Ta vytvořila i jakýsi fragmentární systém logiky, jenž byl tradičně považován za konkurenta systému Aristotelova.

Podle Aristotela samotného je zakladatelem logiky Zénón z Eleje,[16] člen *eleatské školy*, která rovněž užívala schematických a paradoxně znějících úsudků, ovšem ne za účelem klamat nebo pobavit se, nýbrž upozornit, že pravá skutečnost je mnohdy odlišná od toho, co se na první pohled jako skutečné zdá. Tento úmysl je dnes díky všeobecnému vzdělání snadno osvětlitelný, když se např. v rozporu s tím, co vidíme a čemu odpovídá i náš jazyk, totiž že Slunce vychází na východě a zapadá na západě, učíme, že je tomu *ve skutečnosti* přesně naopak, totiž že Slunce stojí a rotuje Země, což vyvolává *zdání* pohybu Slunce. Podstatné je, že k tomuto obratu nestačí pouhé *pozorování*, deskripce založená na recepci smyslů, ale i *rozumová úvaha* o zapojení pozorovatele – vztažného bodu – do popisu toho, co je, tedy podstatný sociální normativ, jak jsme o něm mluvili v předchozím oddílu.

Nejslavnějšími případy eleatských úsudků jsou přitom Parmenidův argument pro neexistenci změn a Zénónovy paradoxy, zkonstruované na jeho obhajobu. Sám Parmenidův argument představuje jakési zobecnění Xenofanovy obhajoby věčnosti Boha, jež má zhruba následující podobu.[17] Tvrdí se, že:

(1) Bůh nevzniká ani nezaniká, tudíž je věčný.

Předpokládáme nejprve, že:

(2) Bůh vzniká.

Jelikož vše, co vzniká, nutně vzniká ze (s ním) stejnorodého nebo (k němu) nestejnorodého – tak zní alespoň Xenofanova premisa –, předpokládáme dále, že:

[15] Seneca [Epi., list 45, 8].

[16] Viz Diogenés Laertský [Vit., IX, 25].

[17] Původnost argumentu a souvislost Parmenidova učení s Xenofanovým je obvykle zpochybňována. Je docela dobře možné, ba pravděpodobné, že byl do eleatské podoby přepsán až později. Pro naši věc je to ale lhostejné. Při formulaci argumentu využíváme rekonstrukci von Fritzovu [1971, s. 38 n.].

(3) Bůh vzniká ze stejnorodého.

V důsledku toho ale Bůh vzniká sám ze sebe, což znamená, že už existoval, a tedy nevzniká. To je spor s předpokladem (2). Usuzujeme tedy na druhou možnost, totiž že:

(4) Bůh vzniká z nestejnorodého.

Podle Xenofana nutně platí, že nestejnorodé je buď slabší, nebo silnější. Předpokládáme tedy znova, že:

(5) Bůh vzniká ze slabšího.

Ze slabšího ale, tak zní další premisa, nemůže vzniknout silnější, usuzujeme tedy, že:

(6) Bůh vzniká ze silnějšího.

Jelikož Bůh je z definice nejsilnější, nemůže být to, co vzniká ze silnějšího, Bůh. Tak vyvracíme tvrzení (4), které je ale důsledkem předpokladu (2) a prokázané neplatnosti předpokladu (3), tj. vyvrátili jsme i předpoklad (2). Předpokládejme tedy finálně, že:

(7) Bůh zaniká.

To ale znamená, že se z něčeho (Boha) stává nic. Nic ale neexistuje, tj. náš finální předpoklad neplatí. Dospěli jsme tedy ke sporu jak s předpokladem, že Bůh vzniká, tak s předpokladem, že Bůh zaniká, a nepřímo usoudíme na jejich opak, a tím i platnost tvrzení (1).

Z tohoto argumentu, resp. z jeho samého závěru, lze snadno extrahovat Parmenidovu úvahu ve prospěch neexistence změn: Z neexistujícího nemůže vzniknout existující a *vice versa*, protože neexistující neexistuje; tudíž neexistuje ani změna, a tedy pohyb. Jelikož ve světě smyslů pohyb vnímáme, nemůže se jednat o svět skutečný, ale jen o svět pomíjivý, svět pouhého mínění (*doxa*), zatímco svět rozumový, svět stabilního poznání (*epistémé*), je nehybný.

Tyto úvahy, stejně jako paradoxy Zénónovy, jsou všechno jiné než jalové či klamné, neboť souvisí s úvahami o povaze významu, zejména ve vztahu k jeho nezničitelnosti, jak je v moderní filosofii opět tematizuje pozdní Wittgenstein.[18] Snadno k nim dospějeme úpravou uvedených argumentů, všimneme-li si, že věta „A se mění“ (případně „Sókratés zemřel“, „kámen se rozbil“) nemůže čistě z pojmového hlediska mluvit o A, protože ve chvíli, kdy tak činí, A neexistuje. To znamená, že vyjadřuje

[18] Viz třeba Wittgenstein [1953, § 39].

spor, v jehož důsledku musí být to, o čem se skutečně mluví, neměnné, resp. nezničitelné.

Na těchto závěrech nás v tomto momentu zajímá především jejich závislost na několika úsudkových schématech typu

$$\frac{\begin{array}{l}\text{platí } A \text{ nebo } B,\\ \text{neplatí } A\end{array}}{\text{platí } B,}$$

specificky pak na použití tzv. *nepřímého důkazu* neboli metaúsudku

> odvodíš-li z pravdivých vět S a z negace věty A spor, můžeš usoudit na A.

Ten totiž znamená následující. Dospěji-li manipulací znaků na papíře ke sporu, mohu usoudit, že skutečnost (mimo papír) se má opačně, nežli jsem předpokládal. Uvedený výklad v první řadě indukuje, že na rozdíl od rétorických sofistů jsou eleaté všechno jiné než relativisté, neboť věří v jedinou pravou realitu, k níž lze dospět racionální cestou. Nepřímý důkaz, který používají, totiž předpokládá, nikoli vyvrací tzv. *pravdivostní princip*, podle něhož:

> každá věta, kterou užíváme, má právě jednu ze dvou pravdivostních hodnot a každé dvě věty, z nichž jedna je negací druhé, mají hodnoty opačné.

Na druhé straně eleaté nereflektují omezenou povahu užitých předpokladů, tj. ženou svůj racionální optimismus, víru v argumentační strukturu světa až příliš daleko. Platón, jenž se k eleatům, jmenovitě k Parmenidovi, explicitně hlásí, upozorňuje ve svých dialozích zároveň na meze jejich metody. Dospěji-li při vymezování nějakého pojmu ve větě tvaru

> A je B

ke sporu, je předčasné usoudit, že platí věta

> A není B,

jak to umožňuje nepřímý důkaz. Nejprve je třeba zkoumat, navrhuje Platón, zda nelze odvodit spor i z tohoto předpokladu. Pokud ano, pak to nemusí znamenat popření pravdivostního principu, a tedy pojmový relativismus, ale metajazykové odhalení, reflexi toho, že

> A neexistuje,

resp. že účastníci dialogu zatím neví, *o čem* hovoří. Uvidíme, zvláště v kapitole 10, že k tomuto jevu dochází ve vývoji vědy zcela pravidelně, např. v rámci tzv. Russellova paradoxu a vůbec v argumentech teorie množin, která pak vlastně představuje jakési znovuzjevení eleatského ducha v moderním (nejen matematickém) myšlení.

Důležité je, že to, co po odvození sporu z věty i její negace padá, není pravdivostní princip, ale dosavadní koncept pravdivosti, který je následně třeba upravit tak, aby princip platil. Tím se nám odhaluje pravá podstata logických principů, totiž jejich nedeskriptivní, ale normativní povaha, jak se k ní dostaneme v příštím oddílu a jak se k ní ještě mnohokráte vyjádříme v průběhu knihy.

1.3 Descartova skepse

Jdeme-li po konkrétní historické linii vzniku a vývoje logiky, zejména s ohledem na její formální fragmenty, je jejím jasným zakladatelem Aristotelés. To nám samozřejmě nebrání hledat její původnější prameny, třeba v eleatské škole, nicméně rozdíl mezi logikou eleatů a Aristotelovým dílem je obvyklým rozdílem mezi anticipací, kterou samu o sobě nevidíme a vidět nemůžeme, nemáme-li již před sebou to, co je anticipováno, totiž více či méně jasně definovaný, uzavřený formální systém s důkladnou heuristikou (vztahem ke světu) na jedné straně a bohatým souborem metateoretických výsledků (např. větou o korektnosti či úplnosti příslušného formálního systému) na straně druhé. V moderní logice se ve zcela analogickém vztahu nacházejí Leibniz, resp. Bolzano vůči Gottlobu Fregovi.

Aristotelův logický kánon je zachován v pěti spisech tzv. *Organonu*, jehož tematické rozdělení se v principu udrželo dodnes, případně se k němu nevyhnutelně znovu vracíme. Vezmeme-li tyto spisy po pořádku, dostáváme:

(1) *Kategorie* (pojem),

(2) *O vyjadřování* (věta),

(3) *První analytiky* (úsudek),

(4) *Druhé analytiky* (důkaz),

(5) *Topiky* (praktická argumentace),

(6) *O sofistických důkazech* (sofismata).

Skutečnost, že místo slíbených pěti má náš seznam položek šest, není přehlédnutí, ale důsledek toho, že jsme do něho zařadili také spis *O sofistických důkazech*, který je ovšem pouhým dodatkem *Topik*. Co se týče předmětů dílčích logických nauk, které jsme poznamenali vpravo, pak platí, že *pojem* byl tradičně považován za nejmenší část, z níž se skládá *věta*, resp. *soud*, který je zase stavebním kamenem *úsudku*, jenž se používá v *důkazech* vět. Vedle užití úsudků v důkazech stojí jejich užití v *praktické argumentaci*, která by se měla vyhnout klamným a *sofistickým* úsudkovým formám.

Tento sled výkladu, od pojmu k důkazu, odpovídá filosofii tzv. *sémantického atomismu*, v níž je význam celku (věty či úsudku) ontologicky i epistemicky založen ve významu částí (pojmů, resp. pojmových výrazů coby částí vět, vět coby částí úsudku), tj. předpokládá se, že části jsou svou povahou jednodušší než celek a porozumění částem porozumění celku předchází. S tím je v rozporu teorie tzv. *sémantického holismu*, podle níž jsou významy částí definovány až skrze svoji roli při určení významu celku, tj. mají do značné míry *synkategorematický*, nesamostatný charakter. S radikální verzí tohoto přístupu, tzv. *inferencialismem*, jenž předpokládá, že každé poznání má bytostně inferenční strukturu, tj. začíná vždy klasifikací úsudků na správné a špatné, je spjat i názor, že praktická (materiální) argumentace předchází argumentaci formální. Výsledkem je komplexní převrácení aristotelského pořádku (1–6). K tomu všemu se ještě dostaneme.[19]

Ačkoli měl Aristotelův projekt také nepochybné univerzalistické tendence, byl design formálního fragmentu jeho logiky – tzv. *sylogistiky* – ve své finální podobě, s níž se seznámíme v 11. kapitole, dost možná ovlivněn Aristotelovými klasifikačními zájmy, tj. především potřebami vytváření konzistentní nomenklatury, např. názvosloví živočišných či rostlinných druhů. Scholastičtí učenci tuto okolnost vytěsnili a podobně jako eleaté, ale v mnohem větší míře, podlehli kouzlu jednoduchého schématu, které prohlásili za dokonalý kánon čistého myšlení, k němuž již pro jeho vnitřní uzavřenost není mnoho co dodat. To po nich jako samozřejmost, byť s negativním znaménkem, opakuje ještě Kant.[20] Tím ale sylogistice odebrali i její původní, byť značně omezený smysl. Gersonidés pak např. v komentáři k Porfyriově úvodu ke *Kategoriím* může psát, že:

> „Toto umění je základem všech věd, a proto učitel této vědy nepotřebuje znát vědy ostatní.“[21]

Přirozená otázka je, co vlastně učitel logiky znát potřebuje, resp. co dělá, když usuzuje podle logických pravidel. Absurdnost představy, že

[19] Úvod k problematice inferencialismu lze nalézt in: Peregrin [2014].
[20] Kant [1781/1787, B VII].
[21] Citace uvedena in: Prantl [1855–1867, díl II, s. 399].

nepotřebuje znát nic, a že za něj tedy logika v nějakém smyslu usuzuje sama, komentuje Hegel, když říká:

> „Je shoda v tom, že soudíme, zlato je žluté. Tato shoda je pravděpodobná. Není ale stejně pravděpodobné, že jsme zvyklí uvažovat následovně: Každý člověk je smrtelný, Gaius je člověk, tedy je smrtelný. [...] Říkají, že to probíhá, aniž jsme si toho vědomi. Pravda, hodně věcí námi probíhá, třeba moč z ledvin, ale když to vychází, držíme si nos. S takovým uvažováním je to stejné.“[22]

Neschopnost kloudné odpovědi či reakce na tyto typy námitek byla jedním z důvodů, proč po tisíci let vyspravování budovy, která byla již od počátku fakticky hotová, zavrhla novověká věda a filosofie sylogistiku a logiku vůbec jako neschopnou jakéhokoli užitku. Descartes tak v *Pravidlech pro vedení rozumu*[23] může vyjadřovat pohrdání nad metodou dialektiků, která právě pro svou zálibu v jazyce, nikoli v tom, co je tímto jazykem vyjádřeno, nedostává kritériím kladeným na vědeckou metodu hodnou toho jména, tj. kritériím „jasného a zřetelného“.

K tomuto postoji lze mít samozřejmě řadu výhrad, jak je zmíníme záhy, Descartova základní otázka po důvodech platnosti logických schémat je ale hluboká, a jako taková je centrálním problémem *filosofie logiky* coby specifického případu filosofie vědy, v němž se zaobíráme tím, jak je něco jako logika vůbec možné. Descartův problém lze formulovat jako otázku po tom, zda je logika možná, a poněkud obšírněji pak takto:

> Jak může pouhé schéma, např. *modus ponens*, garantovat přenos pravdivosti, tj. učinit nějaký úsudek platný, když víme, že to často nedělá, tj. že u něho narážíme na výjimky, jako byl třeba (*cum grano salis*) výše zmíněný *Rohatec*?

I my se na tuto otázku pokusíme alespoň částečně odpovědět. Jelikož těsně souvisí s tím, co je logika zač, rozviňme v tento okamžik alespoň běžnou charakteristiku logiky coby nauky o myšlení a argumentaci do několika běžně přijímaných alternativ. Použijme přitom základní dělení Popperovo,[24] podle něhož můžeme chápat pravidla logiky jako:

(A) zákony myšlení,

  (1) přírodní zákony, zákony toho, jak skutečně myslíme,

---

[22] Jedná se o poznámku z Hegelovy pozůstalosti, viz Rosenkranz [1844, s. 548]. Citace převzata z Pokorného překladu textu uvedeného in: Rezek [2000].

[23] Descartes [1701, s. 405 n.].

[24] Popper [1963, kap. 9, § 6].

(2) normativní zákony, zákony toho, jak bychom myslet měli,

(B) nejobecnější přírodní zákony, popisné zákony platící pro všechny předměty a situace,

(C) zákony jazyků, užití jejich slov a vět.

Připojme stručný komentář. Varianta (A1) ztotožňuje logiku s empirickou psychologií, potažmo s biologií. Jedná se tedy o určitou formu teoretického redukcionismu, jehož reprezentativními případy jsou např. psychoanalýza, která se v oblasti psychologie pokouší vysvětlit každé jednání ze sexuálních motivů, nebo starší redukce chemické, shrnuté v Moleschottově zvolání: „není myšlenky bez fosforu“ (*ohne Phosphor kein Gedanke*).[25]

Nezávisle na tom, jak jsou naivní a omezené, by ovšem bylo velmi nerozumné tyto pokusy v obecnosti zavrhovat. Ve skutečnosti je úspěch vědy a nárůst poznání obecně zaručován právě takovými redukcemi, resp. projekcemi známého, přehledného oboru na obor jiný, tj. spočívá na principu vysvětlování něčeho něčím. Vezměme např. vysvětlování empirických pravidelností matematickými formulemi, jak k němu došlo v novověké přírodovědě, či vysvětlování pravidelností Leibnizovy a Newtonovy analýzy formulemi Fregovy logiky, k němuž se záhy vyjádříme. Podstatné vždy je, že si jsme u těchto projekcí vědomi jejich explanačních mezí, které jsou v problematizovaném případě vztahu logiky a psychologie dány pozorováním, že logiku podobně jako etiku nezajímají případy skutečného usuzování, ale usuzování idealizovaného, tj. nikoli toho, jak *reálně* usuzujeme či jak jednáme, což přirozeně zahrnuje i chyby, ale jak bychom usuzovat či jednat *měli*, což teprve umožňuje ony chyby jako chyby rozeznat.

Takto máme od sebe odděleny disciplíny *deskriptivní*, klasifikující či popisné, jako je např. fyzika či biologie, od disciplín *preskriptivních*, jako je právě logika a etika. Nemožnost redukce toho, co by být mělo, na to, co je, se v dějinách filosofie zabydlela jako *Humova teze*. I ona je samozřejmě předmětem sporů a diskuzí. Problematizovat ji lze již na základě Kantova postřehu, že každá věda pracuje se zákony, jež se k poznání světa chovají *a priori*, tj. tomuto poznání předcházejí ve smyslu nemožnosti jejich vyvrácení pouhým pozorováním, a je tedy do značné míry normativní. Z druhé strany, jak poznamenává sám Kant, každé poznání začíná zkušeností, a má tedy neoddiskutovatelný empirický element.

Ohlášený normativní charakter logiky nám přitom bude v první řadě klíčem k překonání Descartovy skepse ohledně její vědeckosti, neboť před-

[25] Moleschott [1855, s. 378].

pisy nevyvrátíme tím, že se rozhodneme jednat v nesouladu s nimi. Konkrétně to znamená, že podobně jako fenomén sloučení dvou kapek do jedné jediné nepovede k vyvrácení tvrzení „$1+1=2$“, nebudeme výskyt věty, která není ani pravdivá, ani nepravdivá, ale neurčitá nebo nesmyslná, považovat za vyvrácení pravdivostního principu, ale naopak, tento princip postavíme jako důvod, proč příslušnou větu vyloučit z dalších úvah, případně proč upřesnit rozlišení, která jsou v ní vyjádřena. To, že i v logice začínáme nejprve nějakou zkušeností, totiž zkušeností s běžným usuzováním a jeho pravidelnostmi, není evidentně nic proti ničemu.

Ačkoli diskuze variant (B), (C) mírně přesahuje rámec našeho výkladu, od každého studenta filosofie či logiky se každopádně očekává, že se s nimi někdy dříve či později pokusí vyrovnat. Poznamenejme tedy, že z pozic analytické filosofie, která má k logice z různých důvodů velice blízko, jsou varianta (C) a varianta (A2) nerozlišitelné, což může být eventuálně považováno za jednu z ustanovujících analytických tezí. Platónovou dikcí[26] můžeme říci, že myšlení pro nás není nic jiného nežli tichý rozhovor duše samé se sebou. Usneseme-li se pak alespoň na tom, že je logika kánon argumentačních norem, pravidel, jak bychom měli usuzovat, lze rozlišit dvě strany toho, co logikou dále rozumíme:

(1) jednak je to studium konvenčně daných formálních systémů a jejich interních vlastností; tuto stranu logiky nazýváme *logikou formální*,

(2) jednak je to studium možností navrhovat takové systémy a studium jejich předpokladů; tuto stranu nazýváme *logikou filosofickou*.

Obě budou předmětem našeho zájmu, s větším důrazem na první z nich. V ní se totiž logika projevuje jako věda s přesně vymezeným předmětem, která se z historických důvodů stýká především s matematikou. Druhá koncepce logiky byla úmyslně formulována Kantovou dikcí, neboť tvrdíme, že stejně jako se Kantova *transcendentální logika* věnuje předpokladům našeho poznání, popisu empirického světa, byla moderní logika koncipována jako transcendentální vůči matematice, a to ve světle otázek typu: „jak je matematika možná?“, „jaké jsou její větné a úsudkové formy?“ apod. Tento postřeh je také součástí odpovědi na Descartovu skepsi. Ta se totiž vyhraňuje vůči projektu, jenž se zdá být – stejně jako Leibnizova touha po univerzální vědecké metodě – utopický. Tak tomu ale být nemusí, vezmeme-li vážně, možná vážněji než on sám, Fregova slova, podle nichž je každý logický systém jen

[26] Platón [Soph., 263e].

> „nástrojem vymyšleným pro jisté vědecké cíle, který nesmí být odsuzován za to, že se pro jiné nehodí“.[27]

V tomto ohledu nazýváme moderní logiku také *logikou matematickou*, i když se tato matematičnost obvykle týká jen jejího (velmi úzkého) fragmentu. Cestu k tomuto obratu popíšeme v následujícím oddílu.

1.4 Leibnizův optimismus

Přišel-li s Descartem naprostý soumrak logiky jakožto samostatné vědecké disciplíny, začalo se naopak již s Leibnizem blýskat na lepší časy. Descartovo pohrdlivé posuzování symbolických metod jakožto zbytných a odvádějících od mimosymbolické podstaty věci, od toho, co tyto symboly reprezentují, zpochybnil Leibniz hned několika výsledky na poli analytické matematiky, tedy matematiky, která kromě názorných, geometrických prvků užívá čím dál častěji i prvky operativně symbolické, algebraické. Při své práci na infinitezimálním kalkulu, k níž cestu paradoxně otevřel právě Descartes metodami analytické geometrie, které umožňují symbolickou reprezentaci a následnou klasifikaci komplikovaných geometrických forem, Leibniz zjistil, že dobře navržená notace a kalkul mohou vyřešit řadu obtížných problémů takříkajíc jednou ranou. To znamená, že i schematizace, přehledný soupis argumentačních norem, může mít přínos pro věc samu, již proto, že operování s *číslovkami* a operování s *větami* se od sebe zase tak neliší, resp. lišit nemusejí. Na této podobnosti aritmetiky s logikou je založena logika moderní. Při jejím vzniku hraje navíc Leibnizův a Newtonův kalkul nekonečně malých veličin ještě jednu, mnohem konkrétnější roli.

Sám kalkul byl vytvořen jako metoda řešení komplikovaných geometrických úloh, typicky výpočtů délek a obsahů zakřivených tvarů, a to s problematickým využitím pojmu nekonečně malého. Dodnes podržená Leibnizova notace integrálu

$$\int f(x)dx$$

odpovídala doslovně součtu („s“ jako suma) obdélníků s konstantní, ale nekonečně malou základnou dx, ležících mezi křivkou danou analytickým výrazem $y = f(x)$ a osou x. V rámci řešení tohoto a dalších problémů vyvstávaly četné rozporné závěry, např. když byl při obvyklém vyčíslování derivace rozvíjený výraz jednak dělen hodnotou dx, což předpokládá, že

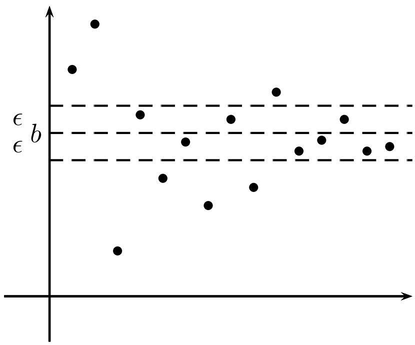
[27] Frege [1879, s. V].

$dx \neq 0$, jednak v něm byly zanedbávány členy, v nichž se dx vyskytovala v součinu, což zase indukuje $dx = 0$. Nevyzpytatelnost chování takto vágně zavedených infinitezimálií vedla postupně k vytěsňování nekonečně malého ze základů analýzy, resp. v jeho nahrazení teorií limit.[28]

Typická tvrzení o nekonečně malých veličinách, např. že se členy nějaké posloupnosti liší od nějaké pevné hodnoty b o nekonečně malou hodnotu či že se jejich vzdálenost od této hodnoty stává s rostoucími indexy nekonečně malá, byla přeložena podle schématu

> pro každou sebemenší (leč konečnou) hodnotu ϵ existuje člen posloupnosti takový, že rozdíl mezi následujícími prvky a hodnotou b je menší než ϵ,

tedy jako zmenšování příslušného rozdílu pod libovolnou (ale konečnou) mez. Viz obrázek 1.1. Pro nás je zde ale podstatné především to, že



Obrázek 1.1: Nekonečně malé rozdíly

došlo k užívání značně komplikovaných větných forem, jejichž struktura se v přirozené řeči ztrácí a je třeba ji symbolicky podpořit. Jako typický příklad expresivního deficitu přirozeného jazyka lze uvést např. případ spojitosti funkce, resp. křivky, kterou vyjadřuje, jež byla Cauchym[29] definována takto:

[28] Detaily tohoto příběhu zde nemůžeme rozvádět, jejich stručně načrtnutý výklad lze nalézt v úvodu knihy Kolman & Roreitner [2013] a dále v jednotlivých statích, které jsou v ní otištěny, zejména v překladu Berkeleyho [1734] *Analytika*. Technické náležitosti podává kniha Kolman [2008].

[29] Cauchy [1821, s. 23].

> „Funkce $f(x)$ je v daných mezích spojitá ve vztahu k x, jestliže mezi těmito mezemi nekonečně malý přírůstek proměnné způsobí nekonečně malý přírůstek funkce.“[30]

Tato formulace je radikální v tom, že na jedné straně opouští přirozený pojem spojitosti daný geometrickým názorem souvislé čáry, není z ní ale zároveň zcela jasné, zda se jedná o tzv. spojitost *bodovou* nebo *stejnoměrnou*, což pak může vést, a historicky i vedlo, ke značným konfúzím. Zapíše-li se vše moderní notací jako

(1) $(\forall\epsilon)(\exists\delta)(\forall x)(\forall y)\,(|x-y|<\delta \rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon)$,

(2) $(\forall\epsilon)(\forall x)(\exists\delta)(\forall y)\,(|x-y|<\delta \rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon)$,

je zřejmé, že se první definice (stejnoměrné spojitosti) liší od druhé (bodové spojitosti) pouze v pozici obecného kvantifikátoru („existuje δ takové, že pro každé x ...“ vs. „pro každé x existuje δ takové, že ...“).[31] Zamyslíme-li se dále, můžeme přijít i na to, že každá funkce spojitá stejnoměrně je spojitá i bodově a že tento přechod platí i pro konvergenci a jiné pojmy, v důsledku čehož pak můžeme posun od (1) k (2) označit za zdůvodnitelný schématem:

$$\frac{(\exists x)(\forall y)A}{(\forall y)(\exists x)A.}$$

Odtud již dospíváme k prohlášení příslušného úsudku za logicky platný, neboť postupuje bez ohledu na obsah části A. Je jasné, že řízení se takovýmito schématy, tj. ignorování obsahu příslušných vět, neobyčejně usnadňuje usuzování. Studiem platnosti a neplatnosti těchto inferenčních vazeb, a to právě v omezení na analýzu, pro niž je zřetězení kvantifikátorů typické, se věnuje *predikátová logika* Gottloba Frega. Jejím cílem je přitom jednak projekt *expresivní*, zabývající se transparentním zachycením relevantních sémantických rozdílů, které běžná řeč stírá (viz třeba rozdíl dvou druhů spojitosti), jednak projekt *deduktivní*, v němž jde o převedení studované úsudkové praxe na několik jednoduchých schémat, která jsou logicky platná. S oběma projekty je samozřejmě spjata otázka příslušné definice logické platnosti, což, jak uvidíme v knize, je otázka výstavby vhodné syntaxe a sémantiky, případně jejich následné kalkulizace.

Ač primárně vynalezený ve vztahu k matematice, Fregův logický kánon lze užít i na jiné diskurzy, což by nemělo být překvapivé. Matematika

[30] Citováno podle: Jahnke [1999, s. 196].

[31] Znak „$\rightarrow$“ je výrazem tzv. implikace, kterou v kontextu „$A \rightarrow B$“ čteme jako „jestliže A, pak B“. Řádné vysvětlení následuje mj. v oddílu 4.4.

je totiž jednak částí přirozeného jazyka, od chvíle, kdy se učíme základním počtům a měření, jednak se podílí i na sofistikovanějších formách poznání okolního světa, jak to ukazuje její role ve fyzice a v dalších vědeckých disciplínách. Obecnější využití Fregova logického konceptu takto můžeme názorně předvést na méně komplikovaném příkladě, totiž problému z komediální scénky Felixe Holzmanna, jenž je analogický záměně bodové a stejnoměrné spojitosti. Tvrzení

v Austrálii přejede auto každou hodinu jednoho chodce

je totiž v této scénce na pozadí otázky „jak to onen chodec může vydržet?“ čteno jako

(1) existuje chodec x takový, že pro každou hodinu y platí, že v hodině y přejede auto chodce x.

Zamýšleno přitom zjevně ale bylo, že:

(2) pro každou hodinu y existuje chodec x takový, že v hodině y přejede auto chodce x.

Ještě jednodušší, a proto ne tak pravděpodobný případ téhož omylu nabízí věta

každý má rád někoho,

totiž když v ní čteme výraz „někoho“ stejně jako slovo „Petra“ ve větě „každý má rád Petra“, tedy v odkazu na jednu jedinou fixní osobu. Dotaz „jak to ten někdo může vydržet?“ nás potom vede opět k možnému čtení

(1) existuje x takový, že pro každého y platí, y má rád x,

které je zjevně v rozporu se zamýšleným

(2) ke každému y existuje x takový, že y má rád x.

U všech příkladů je přitom zřejmé, že lze přejít od (1) k (2) a zároveň, že onen přechod nemusí platit obráceně, což lze ještě přesvědčivěji nahlédnout na případech nestejnoměrně spojitých funkcí (např. $\frac{1}{x}$), nebo přechodu, v němž se od věty, že pro každé číslo y existuje číslo x větší, dostaneme k větě, že existuje číslo větší než jakékoli jiné. Říkáme proto, že schéma

$$\frac{(\forall y)(\exists x)A}{(\exists x)(\forall y)A}$$

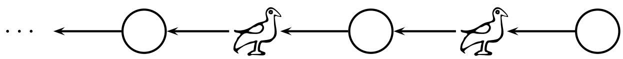
a na něm založené přechody od (2) k (1) nejsou logicky platné. Mezi argumenty tohoto vadného typu bývá standardně zmiňována Aristotelova úvodní úvaha z *Etiky Níkomachovy*[32]

$$\frac{\text{každé umění a každá věda směřuje k nějakému dobru}}{\text{existuje dobro, k němuž všechna zkoumání směřují,}}$$

či Lockovo[33]

$$\frac{\text{každá věc má nějakou příčinu}}{\text{existuje prvotní příčina všech věcí.}}$$

Na podobném úsudku je ale založeno také notoricky známé dilema *slepice nebo vejce*, tj. otázka, co z nich bylo dříve. Předpokládáme v něm totiž jednak, že ke každé slepici existuje vejce, a paralelně, že ke každému vejci existuje slepice. Z prvního pak usoudíme neplatným přechodem na existenci prvovejce a z druhého na existenci prvoslepice, z čehož pak odvozujeme spor. Dilema lze samozřejmě řešit tím, že onen proces od slepice k vejci a zpět je nekonečný, tj. žádné prvoslepice ani prvovejce neexistují. Viz obrázek 1.2. To ovšem zase naráží na představu konečného



Obrázek 1.2: Slepice nebo vejce

vesmíru. Jako hypotéza není nicméně konečnost vesmíru nijak přirozená či neproblematicky daná, jedná se naopak o jednu ze stran *antinomií Kantových*, totiž té, podle níž:

svět má počátek v prostoru a čase vs. svět je nekonečný.

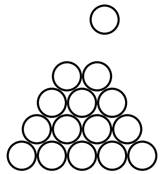
Pro obě teze se zdá být možné uvádět plauzibilní či „intuitivní" důvody. Realističtější řešení proto nakonec spočívá v předpokladu, že řada slepic a vajec nepokračuje zpět beze změny, tj. v nějaké fázi se ze slepice stane třeba ještěrka. Tato úvaha obsahuje nicméně zase náběh na *paradox hromady* a jemu podobné, rovněž připisované Eubúlidovi. Tento paradox staví na přijetí platnosti následujícího přechodu:

[32] Aristotelés [Eth., 1094a].

[33] Locke [1690, kniha IV, kap. 10, § 3]. Ponechme zde i v Aristotelově případu stranou, zda příslušní autoři argument v této formě skutečně zamýšlejí – ani z jednoho textu to není zcela zřejmé, tj. rekonstrukce argumentu se zakládá na relativně silném interpretačním vkladu.

$$\frac{\text{písek o } x \text{ zrncích je hromada}}{\text{písek o } x-1 \text{ zrncích je stále hromada.}}$$

Ten, jakkoli se zdá přirozený, je v rozporu s dalším přirozeným faktem, totiž že konečným odebíráním zrnek musíme dospět k prázdné množině zrnek, a tedy k něčemu, co již hromada není. Viz obrázek 1.3. Užitečnost



Obrázek 1.3: Paradox hromady

srovnání obou paradoxů spočívá v postřehu, že jsou všechny naše pojmy do jisté míry vágní, otevřené, tj. existují vždy případy, u nichž nevíme, zda o nich příslušný pojem (hromada, plešatost, chytrost apod.), resp. jeho přípis platí, či nikoli. To odpovídá našim úvodním úvahám o řízení se pravidlem a jeho otevřenosti dalším specifikacím. Paradox hromady je nicméně založen na tom, že některé pojmy, např. právě pojem hromady, jsou *systematicky vágní*, tj. můžeme je sice zpřesnit tak, aby splňovaly pravdivostní princip (do počtu n kusů to není hromada, od n výše ano), sníží se tím ale jejich aplikovatelnost (např. u hromady kamení stačí menší počet kusů než u hromady rýže apod.).

1.5 Fregův triumf

Ačkoli se moderní logika zrodila až v díle Gottloba Frega, má podobně jako sylogistika Aristotelova četné předchůdce a proroky. K nim patří samozřejmě Leibniz, jenž podtrhl význam formálních metod svým systematickým zájmem o symbolickou stránku poznání. Tento zájem přitom čítal jak otázku adekvátního vyjádření obsahu (*characteristica universalis*), tak mechanického ověřování jeho platnosti (*calculus ratiocinator*). Svou roli zde hrál také poukaz na možnou interpretovatelnost tradičních operací, jako je např. aritmetické sčítání, různým způsobem, např. ve smyslu logického součinu (adjunkce pojmových znaků: hnědý a kůň = hnědý kůň) a logického součtu (sjednocení tříd: hnědý a kůň = třída, do níž náleží všechno hnědé a také všechno, co je kůň).

Tím vším Leibniz anticipoval zejména tzv. *algebru logiky* Boolovu, zobecňující pojmovou logiku Aristotelovu, v podstatně flexibilnější kalkul tříd a tematizující současně i Aristotelova antického konkurenta, logiku megarsko-stoické školy, v níž dnes vidíme především předchůdce naší logiky výroků. Za ustanovující datum nejstarší z tradic moderní logiky je proto možné považovat vydání Boolovy knihy:

(1847) *The Mathematical Analysis of Logic.*[34]

Skutečnost, že se ji zdráháme považovat za vlastní počátek toho, co dnes logikou nazýváme, spočívá jednoduše v tom, že algebra logiky logiku tradiční v podstatných rysech nepřekročila, tedy určitě ne s ohledem na zamýšlený cíl nového *organonu* matematických inferencí, k jejichž adekvátnímu zpracování se hodí jen minimálně. Proto se jako významné ukazuje až datum druhé, totiž vydání Fregova *Pojmového písma* neboli:

(1879) *Begriffsschrift.*[35]

Tento spis byl z hlediska pojmové reformy matematiky, zejména matematické analýzy, podstatně úspěšnější, i když navržený projekt kompletního převedení matematiky na logiku se nakonec ukázal jako příliš ambiciózní. Soumrak Fregovy koncepce základů matematiky, tzv. *logicismu*, je sice spjat s logickými paradoxy, jeho skutečnou příčinou je ale právě faktické nedocenění mezí každého redukcionismu, tj. okolnosti, že mezi matematikou a logikou sice existují četné podobnosti, zároveň ale i přirozené rozdíly, jak je artikuloval Kant zakotvením matematiky v názorech prostoru a času, tj. formách (empirického) světa. Na zpětném obkreslování hranic potlačovaných či dávno zapomenutých rozdílů je také založena kritika Wittgensteinova, představující jakousi syntézu dialektického vývoje od smyslového názoru (Kantova teze) k rozumovému pojmu (Fregova antiteze) a zpět, resp. ke spojení obou ve smysluplné větě. Teprve ta totiž artikuluje nějaký rozdíl v jednom jediném žitém světě.

Stejně jako Descartova kritika scholastiků nesmí nám ale ani tato, ani jiné kritiky logických projektů zastřít, že přes různá dílčí selhání je Fregova predikátová logika historicky nejúspěšnějším projektem, jehož čistý, resp. formální rozum ve svých dějinách dosáhl. Tradiční systémy logiky pojmů a logiky výroků jsou v něm zastoupeny jako snadno kontrolovatelné fragmenty, které na rozdíl od Boolova zpracování netvoří disjunktní, ale vnořené, přirozeně související a kombinovatelné celky. Systém *Pojmového písma*, resp. jeho prvořádová část, se ukázal být motorem vzniku a vývoje do té doby nemyslitelných matematických disciplín a technik, stejně jako nedocenitelným korektivem disciplín tradičních, a jako takový je i dnes pevnou součástí, ne-li předpokladem vysokoškolského studia matematiky. Je na něm také založena tato kniha.

[34] Boole [1847].
[35] Frege [1879].

Logika vyšších řádů, která je ve Fregově díle také obsažena, se v současnosti pěstuje zejména ve vztahu k *teorii množin*, jíž Frege v jistém specifickém smyslu rovněž počítal k logice. V širším smyslu nauky o stratifikovaném nekonečnu ji ale založil Georg Cantor svými

(1883) *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*,[36]

i když uvést by se daly i jiné spisy, protože reprezentativní monografie z Cantorova pera chybí. Tím máme dány zhruba první tři ze čtyř základních tradic moderní logiky. Uvedeme-li je po řadě, včetně jmen těch, co se o ně nejvíce zasloužili, jsou to tradice:

(1) algebraická (Boole, Jevons, Schröder, Peirce),

(2) logicistická (Frege, Russell, Carnap, Wittgenstein),

(3) množinová (Cantor, Zermelo, Fraenkel, von Neumann),

(4) axiomatická (Dedekind, Peano, Hilbert).

Poslední z nich sahá přitom až k Aristotelovi a Eukleidovi a rozvíjí zejména mechanicko-deduktivní stránku logického projektu, aniž by si dělala nárok na disjunktnost s předchozími. Peana je tedy možné řadit také k tradici logicistické, Dedekinda k množinové a Hilbert se v nějakém smyslu podílel na rozvíjení každé z nich. K vývoji axiomatického myšlení navíc významně přispěli také Frege a Zermelo.

Status množinové tradice, stejně jako její vztah k logice, jsou přitom značně problematické. Teorie množin se z počáteční role abstraktního studia kontinua, tedy jakési abstraktní analýzy, přes teorii základů nekonečna vyvinula v doktrínu pretendující na to stát se ontologickou bází obojího, logiky i matematiky. Tím, alespoň co do dojmu, který vzbudila – neboť je takto stále vnímána většinou „pracujících matematiků“ –, dosáhla, ba překonala původní cíle Fregova logicismu. Že to není do všech důsledků udržitelné stanovisko, je jiná věc, my si však musíme zvyknout, že nějaký díl obecných úvah nad celky objektů a nad vlastnostmi a relacemi, které jsou nad nimi definovány, k logice a k abstraktnímu myšlení jednoduše patří. V tomto ohledu věnujeme část knihy také některým základním množinovým rozlišením a motivaci, která za celým Cantorovým spektáklem stojí.

Tím vším je dán, alespoň v náznacích, vztah moderní logiky k matematice. V rámci studia formálních vlastností jistých matematických kalkulů se část logiky vyvinula dokonce v samostatnou a velmi úspěšnou matematickou disciplínu, jíž se z nedostatku fantazie říká logika

[36] Cantor [1883].

matematická, v mutacích pak *metamatematika*. To, co bylo logice vytýkáno Descartem, totiž že se nezabývá (jen) vyjadřovaným obsahem, ale (také) tím, jak jej zapsat, postavilo logiku do úzké souvislosti s *informatikou*, jak ji v prvních dekádách dvacátého století rozvinuli matematičtí logikové jako John von Neumann a Alan Turing. Při programování je totiž možnost zapsat něco jednoduchým schématem, jež je navíc v nějakém smyslu efektivní, proveditelné, naopak zásadní. Primárně se přitom jednalo o proveditelnost principiální, tj. v konečném (byť libovolně velkém) počtu kroků, později i v antropomorfnějším smyslu proveditelnosti v „reálném“ prostoru a čase. Efektivností druhého typu se od jisté doby zabývá teoretická informatika v rámci tzv. *výpočtové složitosti*.

Co se týká vazeb moderní logiky na filosofii, ty jsou dány jednak tradicí, neboť jakkoli je po technické stránce logika Fregova nadřazena logice Aristotelově, v obecné rovině často řeší znovu, byť nevědomky, tytéž či velmi podobné problémy – to plyne jednoduše z kontinuity lidského myšlení napříč epochami a národy. Z druhé strany je třeba zase zohlednit fakt, že se myšlení napříč epochami a národy mění, tj. je třeba zohlednit specifické okolnosti vzniku Fregova korpusu. K těm patří v první řadě tzv. *obrat k jazyku*, což je zcela úmyslná narážka na Kantův koperníkovský obrat ve filosofii, obsažená již v proklamovaném transcendentálním charakteru moderní logiky vzhledem matematice. Na klasickou otázku

> co je číslo?,

kterou si Frege v rámci svého logicismu položil, si totiž vzápětí odpověděl v tom smyslu, že

> číslo je významem výrazu jistého typu,

přičemž to, jakého, určuje logika za tímto účelem vybudovaná. Bezprecedentnost tohoto postupu, jak poznamenal Dummett,[37] spočívá právě v tom, že je čistě lingvistická odpověď dána na nelingvistickou otázku. Přechod od otázek tvaru

> co je A?

k otázkám tvaru

> co je význam slova A?,

resp. metodické předřazení těch druhých prvním, je i obecným principem *analytické filosofie*. Ta, přinejmenším ve své původní podobě, vychází

[37] Dummett [1991, s. 112].

z teze, že neřešitelnost či pochybnost řešení mnoha tradičních filosofických problémů není dána ani tak obtížností otázky (toho, že přesahuje naše omezené lidské schopnosti), ale často již její chybnou formulací. Bezhlavě se pak často pouštíme do řešení problému, aniž bychom věnovali dostatečnou pozornost jazyku, v němž je formulován, či kritériím, za kterých dává jeho formulace vůbec smysl. Snad se podstata tohoto obratu ukáže lépe na následujících příkladech a komentářích k nim.

(1) Nejdrastičtějším a z obecně filosofického hlediska zcela základním problémem je možnost dosáhnout nějakého pevného poznání, nezávislého na libovůli či subjektivitě jednotlivce, resp. jeho druhu. Naivní verze realismu či platonismu se jej snaží řešit postulováním pevné, na našem kognitivním aparátu nezávislé skutečnosti, která afikuje naše smysly či naši mysl stejným způsobem a garantuje jak intersubjektivní přesah našich tvrzení, tak to, že se vůbec domluvíme, tj. že naše slova mají nějaký nám společný, nesoukromý význam. V principu se v ní tedy oddělují ontologické otázky (co je skutečnost) od epistemologických (jak ji poznáváme), čímž se připouští možnost, že pravá skutečnost je v principu nepoznatelná, přinejmenším není poznatelná ve své celistvosti a s rozumnou měrou jistoty. Analytický obrat spočívá na axiomu, že domluva s druhými je něco, co se při kladení každé otázky, tedy i otázky po objektivitě poznání, již předpokládá, a problém je tedy vyřešen triviálně. Z transcendentálního faktu, že se domluvíme, lze usoudit na možnost objektivního, resp. intersubjektivního poznání, nikoli naopak.

(2) Klasickými příklady pseudoproblémů mohou být různé ideologizující a teologizující otázky typu „má prezident plnit vůli lidu?“ či „jak může Bůh dopustit přírodní katastrofy?“, kdy se ke slovům „vůle lidu“ či „Bůh“ chováme jako k výrazům „slib“ či „Karel“ ve větě „aby splnil svůj slib, dopustil Karel, že se Eliška odstěhovala“. Ve své slavné kritice Heideggerovy filosofie a jejích obratů typu „nic nicuje“ Carnap,[38] jak známo, prohlašuje uvedené věty za pseudotvrzení, v nichž nebyl slovům či jejich spojením jako „vůle lidu“ či „Bůh“, resp. „nic“ dán žádný (empirický) význam. Můžeme navrhnout, že příslušné věty mají odlišnou logickou formu, než jakou se zdají mít, a po vzoru eliminace nekonečně malých veličin prohlásit výraz „Bůh“ za synkategorematický, tj. takový, jenž nemá samostatný význam, ale nabývá ho až v kontextu věty. To je Russellova myšlenka *neúplného symbolu.* V širším filosofickém kontextu to může znamenat, že po Kantově vzoru upozorníme, že slovo „Bůh“ by mělo

[38] Carnap [1931].

fungovat primárně jako regulativní idea, tj. šifra pro celek morálních rozlišení či formu fungujícího společenského života, nikoli jako označení něčeho, co je ve světě, a tedy samo subjektem morálních norem. „Vůle lidu“ může být takto buď demaskována jako zkratka za populistovy ambice učinit politiku závislou na okamžitých náladách ulice, nebo za soubor demokratických principů, kterými by se měl státník řídit, např. v respektování zvolených zastupitelů apod.

(3) Z běžné řečnické praxe je známa situace, v níž je někdo, např. obžalovaný u soudu, přesvědčen či donucen k zdánlivě rozumnému závazku odpovídat na každou položenou otázku po vzoru zásady „Vaše řeč budiž: ano, ano, ne, ne“, aby byl hned dotázán, zda už např. přestal bít svoji ženu. Výše uvedený závazek mu nyní znemožňuje rozlišit případy, kdy nebyl ženatý či svoji ženu vůbec nebil, od prostého přitakání či popření. Jinými slovy: nemůže reflektovat podmínky tvrzení jistých vět a závazků k nim. Provedeme-li tuto reflexi, vidíme, že existují věty, které musejí být pravdivé, aby jiné věty měly vůbec smysl, tj. aby se dalo na otázky, které se týkají jejich pravdivosti, odpovědět „ano“ či „ne“. Těmto větám se říká *presupozice*. V našem případě je presupozicí věty „přestal jsem bít svoji ženu“ věta „měl jsem ženu a bil jsem ji“. Již toto prosté rozlišení je zjevně jedním z významných výkonů filosofie jazyka.

(4) Na závěr zmiňme analýzu jednoho z důkazů Boží existence, v němž se na existenci Boha usuzuje z jeho definice coby dokonalé bytosti, která musí mít jako taková všechny pozitivní vlastnosti. Kdyby Bůh neexistoval, neměl by vlastnost existence, byl by tedy méně dokonalý, a nebyl by tudíž Bohem. Frege, stejně jako před ním Kant, zde poukazuje k tomu,[39] že existence není vlastnost, kterou může věc netriviálně mít nebo nemít, neboť nedává smysl, abychom něčemu připisovali atribut, jenž možnost tohoto připisování předpokládá, tj. nelze jej věci připisovat, aniž by jej již neměla. Hovoříme-li podle Frega o existenci smysluplně, např. ve větách typu „existují černé labutě“, je to tím, že ji nepřipisujeme objektům, ale vlastnostem těchto objektů („být černou labutí“), tj. jedná se přinejlepším o vlastnost vlastností, neboli vlastnost druhého řádu. Větu typu „Václav Klaus existuje“ lze nejlépe chápat jako presupozici k větě „Václav Klaus je držitel Puškinovy medaile“, resp. libovolné smysluplné věty, v níž výraz „Václav Klaus“ figuruje a která je smysluplná právě proto, že existuje něco, co tomuto výrazu odpovídá a čemu lze

[39] Viz jeho poznámky k dialogu s teologem Pünjerem otištěné in: Frege [1983, s. 60–75], kde lze najít také odkazy na příslušná místa v Kantovi.

případně připisovat nějaký atribut. Existenci lze takto také označit za atribut, ale triviální, resp. mající za extenzi množinu všech předmětů.

Pointa uvedených příkladů spočívá v tom, že v kontextu mnohých tradičních otázek působí zkoumání jazyka *terapeuticky*, tj. odstraňuje mnohé z nich jako pouhé noční můry. Ve Wittgensteinově pojetí se filosofie redukuje výhradně na tuto pomocnou roli při analýze jazyka, jíž je plně k dispozici aparát logiky predikátové. Proto je také tato analýza od dob Russella a Carnapa nazývána *analýzou logickou*. S touto úlohou filosofie jde pak ruku v ruce opětovná emancipace logiky coby filosofické disciplíny, případně coby nástroje filosofické argumentace. Zásadní roli zde hraje přesvědčení, že argument je to jediné, na čem filosofie, vlastního předmětu nemajíc, může stavět.

Analytická filosofie dnes v každém případě spolu s fenomenologií představují nejvýznamnější hráče na poli filosofických směrů, byť za tu cenu, že se pod ně schovaly disciplíny a metody práce, které vykazují jen povrchní podobnost s filosofiemi jejich zakladatelů. V případě analytické filosofie se tato podobnost často redukuje právě na jistou spřízněnost s logikou a jejími formálními metodami, jejichž automatické přejímání jako etalonů exaktnosti má přirozeně za následek pravý opak toho, k čemu by měla vést analýza jazyka, a nezřídka má jen skrýt, že jí proponenti příslušných formalismů nejsou fakticky mocni. Formule a formalismy v analytických textech tak často hrají podobně dvojsečnou roli jako řecká či německá slova v textech kontinentální tradice.

K analytické filosofii má jistý tradiční vztah také *filosofie jazyka*, která s ní bývá někdy neopatrně zaměňována. Jejich rozdíl je ovšem zásadní, neboť to, co je pro první transcendentálním východiskem a metodou, je pro druhou studované téma, podobně jako je pro filosofii matematiky tématem matematika a pro filosofii vědy věda. Jako taková může filosofie jazyka dospět k náhledu, že jazyk s poznáním souvisí jen kontingentně, jak to plyne např. z teorie epistemického realismu, zatímco pro analytickou filosofii představuje jazyk nutnou a postačující podmínku poznání, v jistém smyslu tedy vychází z rovnice:

jazyk = svět = mysl.

Tento postoj je adekvátně vyložen jak ve filosofii Wittgensteinově, viz

„hranice mého jazyka znamenají hranice mého světa“,[40]

tak Fregově, viz

[40] Wittgenstein [1922, § 5.6].

„skutečnost je věta [resp. myšlenka], která je pravdivá“,[41]

byť je druhý zmíněný někdy povrchně považován za proponenta (matematického) platonismu.[42] Uvedené příklady (1–4) přitom měly ukázat právě to, že analytickou filosofii není nutné nahlížet jako nějaký radikálně nový, např. vědečtější typ filosofie, ale že se jedná o tentýž původní podnik, vedený tentokráte s větším důrazem na již zmíněný obrat k jazyku. Opět se přitom jedná jen o jakousi dialektiku vývoje, nikoli závazné charakteristiky, řekneme-li, že:

(1) antická a středověká filosofie kladou důraz na objektivitu poznání (jinosvět idejí jako její garant),

(2) novověká filosofie klade důraz na subjektivitu poznání (soukromí individuální mysli jako záruka jistoty),

(3) analytická filosofie klade důraz na intersubjektivitu poznání (jazyk jako prostředník objektivního světa idejí a subjektivního světa smyslů).

Důraz na jazyk má také charakter pragmatický, neboť je zřejmé, že se stejně jako všechny lidské produkty a nástroje v průběhu času vyvíjí, a to jak podle našich okamžitých dispozic, tak podle cílů a potřeb. Explikace tohoto rozměru je v analytické filosofii spojena s Wittgensteinovým jménem, i když lze opět příslušný *pragmatický obrat* vysledovat až k Fregovi. Ten např. dospívá k interní kategorizaci jazykových výrazů, z nichž některé mají být typické pro čísla, právě tím, že popíše, jak jsou tyto výrazy užívány v rámci úsudků a vět. Na schematické úrovni to lze opsat jako další posun v metodě tázání, totiž záměnou otázek:

co je význam slova A? a jak je slovo A používáno?

Tím je učiněn další podstatný krok na cestě k jazykovému idealismu, který za transcendentální předpoklady poznání světa považuje jazyk, a to jazyk žitý a užitý. Frega s Wittgensteinem lze takto jasně zařadit do tradice kontinentální, rozvíjející východiska německého idealismu, zatímco velký zbytek analytické tradice, především skrze Russella a Carnapa, je ve své pozitivisticko-scientistické orientaci ovlivněn především empirismem britského střihu.[43]

[41] Frege [1918, s. 74].

[42] Jinde, např. in: Kolman [2002], bylo vyloženo, proč je tento výklad neadekvátní.

[43] Tématy uvedenými v tomto oddílu se podrobněji zabývá kniha Kolman [2011].

1.6 Brouwerova revoluce

V souvislosti s analytickou filosofií se občas setkáváme také s již použitým termínem filosofické logiky, tedy jakési filosofie vedené po vědeckém způsobu. To je mimořádně matoucí, neboť pod hlavičkami vědy a filosofie se skrývají dva kategoriálně odlišné projekty, a jejich míšení může vést nanejvýš k iluzi o filosofii jako o samostatném poznání vyššího typu, zkoumajícím třeba abstraktní jsoucna v tajemném jinosvětě platónských forem. Wittgensteinův důraz na terapeutickou roli filosofie měl přitom zabránit právě jejímu začlenění do korpusu věd, neboť jí stejně jako lékařství nejde o popis či *vysvětlení* nějakého jevu, ale o *vyléčení* choroby, resp. problému, který vznikl nedostatečnou reflexí východisek či předpokladů té které jazykové praxe. Právě v tom, že nestuduje přímo svět, ale jazyk, spočívá zmíněný obrat, jímž se má analytická filosofie odlišit od jiných filosofických tradic.

Na druhou stranu, radikalita některých Wittgensteinových prohlášení, známých např. z *Tractatu*, v němž je vše kromě empirických věd vyloženo jako nesmyslné, zatemňuje, že i na filosofii a logiku lze pohlížet jako na vědy (oblasti poznání), ale jiného řádu, ve stejném smyslu, v jakém je lékařství povoláním, které léčí lidi, aby mohli vykonávat jiná (prvořádová) povolání. Pro filosofii to především znamená, že se etabluje až poté, co vzniknou problémy v oblasti prvořádové, tj. má charakter reflexe na něco, co už je před ní. I k tomu lze vztáhnout slavnou Hegelovu větu, že Minervina sova vzlétá za soumraku.[44] Čistá filosofie je potom stejný nesmysl jako abstraktní lékařství léčící nemoci, které nikdo nemá. Existence něčeho, jako je teoretická medicína, která neléčí, ale vysvětluje, tento základní rozdíl nepopírá, jen ukazuje, že v praxi je vše složitější, tj. že dělba práce, kdy jeden dělá filosofii, druhý vědu a třetí žije obyčejný život, je jen iluzí, a to mimořádně hloupou a nebezpečnou.

Pod názvem filosofické logiky se ale skrývá také celek všech *neklasických logických systémů*, čímž jsou míněny všechny systémy jiné nežli Fregova *klasická výroková a predikátová logika*, a to ještě navíc v omezení na predikátovou logiku *prvního řádu*. V tomto kontextu hraje termín „filosofický“ pouhou vymezující roli, neboť zmíněná zkoumání, reprezentovaná zejména stále vydávanou mnohadílnou *Příručkou filosofické logiky* (*Handbook of Philosophical Logic*),[45] mají čistě formální, a tedy matematický charakter, tj. nejedná se v principu o nic jiného než kvantitativně odlišné variace na totéž fregovské téma. Okolnost, že se těmto variacím dávají kategoriálně odlišné názvy jako časová, dynamická či epistemická

[44] Hegel [1986*a*, s. 28].
[45] Gabbay & Guenthner [2001–].

logika, přitom na věci samé nic nemění, může nanejvýš mást, např. když se necháme přesvědčit, že je tzv. *fuzzy-logikou* možné zvládnout fenomén vágnosti, tj. že po rozlišení dostatečného počtu přechodů v rámci konfúzního světa smyslů dospějeme k reprezentaci reality takové, jaká je. Tato implicitní stipulace identity „jednoduchého“ schématu a světa, resp. celku naší zkušenosti je právě tím předsudkem, jemuž podléhají tvůrci logických systémů, matematikové a vědci vůbec, od eleatů přes Cantora po naši dobu.

I z těchto důvodů je to výskyt alternativ, co nás přivádí k hlubšímu zkoumání stávajících logických koncepcí a toho, co reprezentují. Následně tak můžeme dospívat k závěrům ohledně cílů a metod logiky jako takové, jejích aplikací a mezí, tedy k jakési *kritice formálního rozumu*.[46] Na tomto základě se kromě tradičních, předfregovských logik vyplácí studovat i revize a deviace vytvořené v reakci na vládnoucí systém, zároveň s motivy, které k tomu vedly. Zmiňme typově některé z nich.

(1) Z technického i filosofického hlediska je jistě nejvýznamnější deviací klasické logiky tzv. *logika intuicionistická* coby dítko pokusu holandského matematika L. E. J. Brouwera odvrhnout celý fregovský logický a logicistický program, protože jsou jeho zdánlivě přirozené principy v rozporu s matematickou praxí a intuicemi, které ji provázejí. Brouwer takto napadá v první řadě pravdivostní princip, ovšem ve specifickém čtení, podle něhož

> každou větu lze buď dokázat, nebo vyvrátit,

tj. předvést, že je pravdivá, nebo nepravdivá, což u mnoha smysluplných vět aktuálně možné není.[47] Pod palbu Brouwerovy kritiky se pro svoji nekonstruktivnost dostává i nepřímý důkaz a celá množinová metafyzika, jak to odpovídá konstruktivistickému naladění Kantovu, k němuž se Brouwer explicitně hlásí. Implicitní afinitu lze u Brouwera najít i vůči Descartově skepsi ohledně role logiky, tedy jazyka a jazykových schémat, v matematice.

Podle Brouwera totiž logika zachycuje jen jisté kontingentní pravidelnosti matematických aktivit, ale s vlastním zdrojem matematikových pravd v mentálních konstrukcích (v názoru času) kontakt nemá. Přes tento antagonistický vztah vytvořili Brouwerovi následovníci, tj. přívrženci jeho *intuicionismu*, případně obecněji pojatého *konstruktivismu*, návrhy prvních neklasických logik, v nichž byly zohledněny také efektivní rysy matematické pojmotvorby, zejména pak fakt, že vzhledem

[46] Viz také poukaz na podtitul knihy Pirmina Stekelera-Weithofera [1986], v níž je taková kritika systematicky prováděna.
[47] Viz jeho spis Brouwer [1908].

k (potenciálně) nekonečné povaze číselné posloupnosti $1, 2, 3, \ldots$ nedává (vždy) dobrý smysl hájit, že daná vlastnost platí buď pro všechna z nich (neboť bychom jich museli reálně projít nekonečný počet), nebo existuje některé, které ji nemá (neboť z toho, že jsme zatím nenašli žádné, které by ji nesplňovalo, neplyne, že se tak ještě nestane).

Z hlediska vývoje analytické filosofie byl revoluční především Brouwerův poukaz na to, že lze spoustu zdánlivě přirozených a nevyhnutelných zásad či jakýchsi „přirozených faktů“, včetně „tvrdých faktů“ klasické logiky a matematiky, jako je pravdivostní princip, revidovat, a dělat tedy „stejné věci“ radikálně odlišným způsobem. Brouwer tímto vhledem podstatně ovlivnil Wittgensteinovu pozdní filosofii s jejím konceptem jazykových her a řízení se pravidlem, jak ji známe z *Filosofických zkoumání*. V tom byl jeho příspěvek logice a filosofii vskutku revoluční. Méně zdařilá je jeho představa, že se při matematickém či jakémkoli jiném bádání obejdeme bez jakýchkoli schémat, tj. že je lidské poznání čistě spontánní, a tedy nezávislé na projektech minulosti. Že je i tyto projekty vždy třeba podrobit kritické revizi, tj. nebrat je jako danou věc, je docela jiná otázka.

(2) Zatímco vznik intuicionistické logiky byl veden z podnětů *matematických*, i když i na něm se podepsala témata filosofické povahy, např. spor o potenciální charakter nekonečna, je největší rozkvět neklasických logik spjat s podněty čistě filosofickými (odtud také termín „filosofické logiky“). Počátkem šedesátých let takto došlo díky Kripkovým úspěchům v oblasti formální sémantiky k velkému rozvoji tzv. *logik modálních*, zabývajících se modalitami možnosti a nutnosti, jak se běžně objevují ve filosofickém diskurzu. Právě na těchto logikách, jež lze v oblasti logik neklasických považovat za prominentní, vidíme, jak označení „neklasické“ rozumět. Z obecně historického hlediska je totiž teorie modálního sylogismu již částí Aristotelova *Organonu*, ba ve srovnání s naukou o kategorickém sylogismu částí preferovanou. Logikami příbuznými modálním logikám v rámci neklasické části logického spektra jsou např. *logika deontická*, v níž obratům

je nutné, že … je možné, že …

odpovídají obraty

je přikázáno, že … je povoleno, že …,

tj. jedná se o logiku norem a zákazů. Opět je mírně pomýlené chápat tyto logiky jako jakési obecné kánony normativity, neboť není jasné, proč by zrovna ty a ne jiné předpisy, resp. jejich formy měly být závazné, tj. platit nutně. Sémantika možných světů může naopak významný rozdíl mezi normativním a deskriptivním setřít, když tím, že převede modální *dictum* „je nutné, že A" na popisné „v každém možném světě platí, že A", vyvolává otázku, zda to, že něco platí v každém možném světě, je nutné, a dospívá tak k normativnímu regresu. Zde se ovšem názorně vyjevuje právě čistě filosofický původ zkoumání modalit, jež se v tomto specifickém smyslu nazývají modalitami *ontickými*, obecněji pak *aletickými*, neboť mají vztah k pravdě (z toho, že je něco nutné, plyne, že je to pravdivé, a z toho zase, že je to možné). To už neplatí u modalit deontických, kde přikázanost věty A neznamená, že je příslušný stav věcí realizován, a z toho, že je realizován, neplyne, že je povolen.

(3) Platí přitom, že analýza přirozeného (neodborného) jazyka vede spíše než k ontickým modalitám ke konceptu tzv. *modalit epistemických*, v němž se výrazy nutnosti a možnosti chápou jako posouzení vztahu nějaké věty ke stavu našeho vědění: nutnost nějaké věty A znamená, že A vyplývá z toho, co víme („zloděj nutně utekl oknem"), a její možnost, že A je s tím, co víme, slučitelná, tj. z našeho vědění nevyplývá negace A („zloděj možná utekl oknem"). Z příbuzných podnětů neomezujících se na odborný jazyk, tedy z obecných podnětů *sémantických* vzniká tzv. *logika intenzionální*, studující modifikace vět klauzulemi:

věří, že ...,

domnívá se, že ...,

ví, že ...,

apod.

Ty obecně vyjadřují vztah mluvčího k pronášené větě. Motivaci intenzionální logiky si lze případně ukázat na dalším z paradoxů připisovaných Eubúlidovi, známém jako *Zahalený*:

říkáš, že neznáš toho zahaleného muže,
ten muž je ale tvůj otec
---
neznáš tedy svého otce.

Ten lze případně formulovat jako tzv. *paradox Elektřin*, v němž je zahalený muž její bratr Orestés. Frege, jenž stojí nepřímo u zrodu příslušných logik, uvádí, že kdyby výraz jako „Jitřenka" znamenal v kontextu věty „Petr ví, že Jitřenka je nejjasnější hvězda na ranní obloze" totéž co ve větě „Jitřenka je nejjasnější hvězda na ranní obloze", bylo by jej tam možné nahradit výrazem „Večernice", neboť víme, že oba označují tentýž vesmírný objekt, totiž planetu Venuši, a mají tedy v tomto ohledu stejný význam.[48] Problém je, že úsudek

[48] Viz článek Frege [1892*b*].

Petr ví, že Jitřenka je nejjasnější hvězda na ranní obloze,
Jitřenka je Večernice
―――――――――――――――
Petr ví, že Večernice je nejjasnější hvězda na ranní obloze

není obecně platný, totiž v závislosti na Petrových znalostech. Frege z toho usuzuje na neplatnost druhé z premis, resp. její neplatnost v takovýchto – tzv. *nepřímých* – kontextech. Ty se totiž nevztahují přímo ke světu, ale k tomu, jak je v našem jazyce reprezentován. Významem užitých slov nejsou pak tedy významy obvyklé (např. fyzikální objekty), ale jejich *způsoby danosti*, obecně tedy něco, co je blíže výrazům než světu, v krajním případě tyto výrazy samy. To může vést k následující analýze uvedené věty:

> Petr ví, že výraz „Jitřenka" označuje nejjasnější hvězdu na ranní obloze, ale zároveň neví, že tutéž hvězdu označuje výraz „Večernice", což není v rozporu s ničím, protože výraz „Večernice" není identický s výrazem „Jitřenka".

Významy v těchto nepřímých kontextech nazývá Frege *smysly* výrazů, aby je odlišil od významů v kontextech přímých. Carnap pro tento rozdíl zavedl termíny *extenze* a *intenze*,[49] přičemž podle druhého z nich se nazývají logiky, které příslušný fenomén studují. V tradiční logice odpovídala tomuto dělení nauka o *rozsahu* a *obsahu*, kdy rozsahem pojmu, resp. pojmového slova byla míněna množina všech individuí, která pod něj spadají, a obsahem pak souhrn kritérií, která tuto množinu určují. Pojmy „člověk" a „neopeřený dvojnožec" takto mají stejný rozsah, ale různý obsah.

Fregovo rozlišení nás, možná překvapivě, vrací také zpět k výchozímu problému netriviální definice „A je B", resp. jejího odlišení od triviality „A je A". Zase tak překvapivé to ale není, uvědomíme-li si, že Frege příslušný rozdíl zavedl v analogickém kontextu rozlišení informativní věty tvaru „$A = B$" a bezobsažné věty „$A = A$". Na bázi Fregovy analýzy můžeme říci, že v korektní definici mají sice A i B stejný význam, tj. říkají totéž, ale nemají stejný smysl, tj. říkají to různým způsobem, v důsledku čehož se od sebe věty „A je B" a „A je A" liší.

Platón ve své dialektice přitom zcela analogicky osciluje mezi pojetím, v němž slovo A odkazuje k intenzionální entitě, smyslu, obsahu pojmu (*horos*, *genos*), a pojetím, v němž odkazuje k entitě extenzionální, množině, rozsahu pojmu (*meros*),[50] jak to ukazují již zmíněné příklady *de dicto* a *de re* čtení vět typu „kruh je kulatý". Tato věta

[49] Viz Carnap [1947].

[50] Srov. k tomu poznámky in: Stekeler-Weithofer [1995, s. 84].

je pravdivá *skrze* příslušnou ideu, intenzionální objekt, na rozdíl od věty „kruh je šišatý“, která je pravdivá *skrze* množinu jeho vždy nedokonalých reprezentací. Platón[51] takto diskutuje např. větu „pohyb je nehybný“, s tím, že může být vyhodnocena jako pravdivá *skrze* ideu a posléze jako nepravdivá *skrze* množinu hýbajících se věcí, protože ta není zcela určitě podmnožinou věcí nehybných.[52]

1.7 Shrnutí

Jedním z cílů předchozí expozice fenoménu neklasických logik, a v důsledku i celé úvodní kapitoly, mělo být v první řadě zjištění, že rozlišení motivů na filosofické, matematické či sémantické je jen pomocné, neboť logika nakonec zůstává především prostředkem reflexe užití jazyka v jeho přirozené (každodenní) i specializované (vědecké) podobě. Jako část filosofie, tedy ne jako speciální vědeckou disciplínu, ji pak není možné vměstnat do jediného schématu, tím spíše vymyslet univerzální kánon logiky *per se*, a to ani v případě zdánlivě skromnějších projektů, jako je Popperova logika vědeckého objevu[53] či Lorenzenův kánon pravidel rozumné argumentace.[54] Všechny tyto a podobné koncepty zůstávají jen utopickými pokusy o dosažení pevného bodu v oblasti tak bezbřehé, jako je správná argumentace a poznání, které se jí řídí. Skutečnost, že touze po takovém bodu propadají příležitostně i její ostrovtipní kritici jako Popper či pragmaticky orientovaní myslitelé jako Brandom nebo Lorenzen, jen ukazuje, jak vážná a ošemetná je otázka „co (a k čemu) je logika?“.

[51] Platón [Soph., 252d, 256b].

[52] Příklad zmiňuje Graeser [1993, kap. III, oddíl 3f], jenž se v příslušném oddílu zabývá právě rozdílem intenzionálního a extenzionálního čtení Platónových rozlišení.

[53] Popper [1935].

[54] Lorenzen & Lorenz [1978].

Část I

Klasická logika výroků

2

Co je výrok?

Z didaktických důvodů volíme obvyklý postup, tj. začínáme klasickou výrokovou logikou (zkráceně `KVL`), abychom teprve poté přešli ke klasické logice predikátů. Toto dělení má určitý historický základ, přibližně totiž odpovídá tradičnímu rozdílu

(1) stoické logiky,

pracující s celými výroky na jedné straně a

(2) aristotelské sylogistiky,

operující s predikáty a jejich vztahy na straně druhé. Věcně je ovšem tato paralela zavádějící s ohledem na vnitřní neslučitelnost obou historických systémů, kdy větu či úsudek analyzované jedním způsobem nelze již adekvátně zpracovat způsobem druhým. Ve Fregově analýze subjekt-predikátového soudu, na níž je moderní logika založena, a kterou tedy sleduje i náš výklad, byl přitom nalezen jakýsi společný jmenovatel obou tradic, jenž např. větu

psi jsou savci

chápe jako vztah predikátů „pes“ a „savec“, tj. ve smyslu sylogistického

(1) vše, co je A, je i B,

a zároveň jako hypotetický vztah dvou vět „Alík je pes“ a „Alík je savec“, tj. ve smyslu implikace

(2) jestliže platí A, pak platí B.

Jelikož se budeme momentálně zabývat výhradně druhou z uvedených forem, čiňme tak předem s vědomím, že pozdější přechod k predikátové logice, jejíž částí je i forma první, nemá charakter alternativy, ale dalšího zjemnění obou. Ve vztahu k formě (2) tak budeme ve skutečnosti opakovat již jednou probrané na podstatně komplexnější rovině.

2.1 Základní vymezení

Nyní již můžeme přejít k hrubému vymezení našeho předmětu, totiž toho, co nazýváme výrokem. Zde ovšem nemáme na mysli nějaký pokus o vyčerpávající charakterizaci jazykového fenoménu, nýbrž určité rozhodnutí, dohodu o tom, čemu se v dalším textu chceme věnovat, tj. na co se (z jistých důvodů) omezíme. V tomto opisném, poloformálním smyslu proto chápejme následující definici. Takovéto neformální či poloformální definice nebo definice předběžné budeme nazývat vysvětleními.

2.1.1 Vysvětlení (Výrok): *Výrokem budeme rozumět tvrzení, které je:*

(a) pravdivé nebo nepravdivé,

(b) nikdy ne obojí,

(c) nic dalšího.

Podmínce (a) se někdy říká *zákon bivalence*. Jejím úkolem je omezit počet pravdivostních hodnot na dvě. Tím je především vyloučena třetí možnost, v níž věta žádnou pravdivostní hodnotu nemá nebo má nějakou pravdivostní hodnotu nestandardní. Z těchto důvodů se také o podmínce (c) někdy hovoří jako o *zákonu vyloučeného třetího*. Ten v této verzi vyplývá z podmínky (a), a je tedy věcně redundantní. Podmínka (c) má proto především zdůrazňující charakter. Samostatný význam zákona vyloučeného třetího ovšem spočívá v jeho formulaci vůči větě a její negaci, kde říká, že je pravdivá alespoň jedna z nich, tj.:

$$\vartheta \vee \neg\vartheta.$$

To ale předbíháme, neboť nemáme ještě k dispozici příslušnou notaci a nevíme, co přesně znamená. Podobný problém dvojznačnosti může však nastat, řekneme-li, že je v podmínce (b) vyjádřen *zákon sporu*. Ten se totiž obvykle také formuluje jako tvrzení, že formule a její negace nemohou být pravdivé zároveň, tj.:

$$\neg(\vartheta \wedge \neg\vartheta).$$

Podstatné na naší definici je, že výrokem rozumíme tvrzení, které splňuje to, co jsme dříve (viz oddíl 1.2) nazvali pravdivostní princip, tj. je jednoznačně pravdivé nebo nepravdivé, čímž vylučujeme jednak možnost, že nemá pravdivostní hodnotu vůbec (je např. nesmyslné), a jednak možnost, že má obě hodnoty zároveň. Nejlepší způsob, jak takovéto úvodní vymezující definice zavést, spočívá ve zmínění doprovodných příkladů a protipříkladů, tj. v ukázce toho, co za výrok považujeme, co nikoli, a v upozornění na sporné případy.

(A) Příklady výroků:

  (1) první jarní den je 21. března,

  (2) Paříž leží na Seině,

  (3) 4 je prvočíslo.

(B) Protipříklady výroků:

  (1) dobrý den!,

  (2) přineste mi něco k pití!,

  (3) kolik platím?

(C) Problematické případy:

  (1) Václav je trémista,

  (2) Bonn je hlavní město Německa,

  (3) Othello uškrtil Desdemonu,

  (4) toto není žádná hromada,

  (5) největší prvočíslo je liché.

Vidíme, že za výrok považujeme cokoli, čemu připisujeme pravdivostní hodnotu, to znamená nejen věty běžného života, ale i věty teoretické matematiky. Ty jsou obvykle z hlediska naší definice považovány za nejméně problematické (jsou dokonce považovány za věčné či nutně pravdivé, resp. nepravdivé), zároveň však i v této oblasti panují nejasnosti týkající se např. tvrzení, která nebyla dosud dokázána ani vyvrácena.

Věty druhé skupiny (B) nejsou výroky jednoduše proto, že se nejedná o oznamovací věty. První (B1) je pozdrav, druhá (B2) žádost či rozkaz a třetí (B3) otázka. Věty poslední skupiny (C) na první pohled naší představě výroku odpovídají. Tento pohled je ovšem pohledem gramatickým, jejž později podřadíme pohledu *logické syntaxe*. Uvedené věty se povrchově podobají větám první skupiny, nesplňují ale vždy podmínky týkající se jednoznačné pravdivosti či nepravdivosti, které záhy podřadíme *logické sémantice*. V prvním případě (C1) není jasné, o kterém Václavovi mluvíme; bez dalšího určení tedy věta nemůže být ani pravdivá, ani nepravdivá, a nesplňuje tak podmínku (a) definice 2.1.1. Totéž se týká druhé věty (C2), neboť není určeno, ve které době byl výrok pronesen. Třetí výrok (C3) se týká fiktivních postav, přičemž fikci je ze samotného titulu často pravdivost upírána, a výrok (C4) je případ paradoxu hromady, pracujícího s vágními pojmy: právě proto, že není jasné, kde začíná a kde končí hromada, kdy je někdo již plešatý a kdy nikoli, kdy je někdo hlupák a kdy ne, může se pravdivost uvedené věty měnit vzhledem k situaci, případně se na příslušnou větu vůbec nevztahovat. Zatímco dosavadní příklady vět porušovaly definici výroku proto, že nemusely mít žádnou pravdivostní hodnotu, může se u příkladu (C5) stát, že má dokonce hodnoty obě, totiž když z toho, že jsou všechna prvočísla (větší než 2) lichá, usoudíme, že jím musí být i to největší, a z druhé strany, když z toho, že žádné takové prvočíslo neexistuje, usoudíme, že nemůže být ani liché, a tvrzení je tudíž nepravdivé.

My každopádně nechceme řešit otázky toho, zda jsou konkrétní věty pravdivé či nepravdivé, nýbrž jednoduše předpokládat, že tomu tak je. Na tomto a především na tomto předpokladu totiž staví aparát výrokové logiky. Na druhou stranu není příliš obtížné nahlédnout, jak ony výše uvedené problematické případy vět skupiny (C) upravit tak, aby vyhovovaly naší definici. První dvě jednoduše doplníme, třeba na:

(1) Václav Klaus je trémista,

(2) Bonn je hlavní město Německé spolkové republiky roku 1975.

V případě třetí věty se můžeme rozhodnout, že ji budeme klasifikovat (za určitých podmínek) buďto jako pravdivou či nepravdivou větu literatury, nebo ji a jí podobné doplňovat uvozující klauzulí, takže dostaneme:

(3) v Shakespearově hře Othello stojí, že Othello uškrtil Desdemonu.

Ve čtvrtém případě se můžeme rozhodnout, že hromada (toho kterého materiálu) začíná od určitého počtu, např. 500 kusů. Poslední příklad je diskutován v souvislosti s pojmem tzv. určité deskripce, a podle dvou z nejvlivnějších analýz je buďto nesmyslný, tj. nemá ani jednu pravdivostní hodnotu, nebo nepravdivý.[1] My budeme v každém případě dále předpokládat, že přinejmenším věty typu (C1–3) jsou výroky a jako takové je i používat v našich příkladech.

Další pojem, který potřebujeme vyjasnit, je pojem elementárního výroku. Zde se náš pokus o vymezení bude pohybovat na skutečně neformální rovině, kterou navíc později upravíme tak, že nebude s tímto návrhem slučitelná.

`2.1.2 Vysvětlení (Elementární výrok):` *Elementární výrok je takový výrok, jehož vlastní částí už nejsou výroky.*

Příkladem elementárního výroku jsou všechny věty skupiny (A), které nám sloužily jako příklady výroku. Jako protipříklady uveďme dvě skupiny vět.

(D) První skupina protipříkladů:

- (1) Othello uškrtil Desdemonu a Cassio probodl Rodriga,
- (2) jestliže je zapáleno v kamnech, kouří se z komína,
- (3) není pravda, že se Gottwald dostal k moci legálně.

(E) Druhá skupina protipříkladů:

- (1) je možné, že byl Mozart otráven,
- (2) Elektra nevěří, že je Orestés mrtev,
- (3) je zakázáno říkat, že se dr. Beneš nezasloužil o stát!

Pokud připustíme, že se zde pokaždé jedná o výroky, vidíme, že podle naší definice nejsou elementární. Rozdíl ve skupinách (D) a (E) spočívá v tom, že se z hlediska `KVL` u skupiny (E) o elementární výroky jedná. Důvod, jak později mnohokrát uvidíme, spočívá v tom, že v ní nedisponujeme prostředky, jak dané výroky rozložit na menší části, z nichž by některé byly větami. Jinými slovy: dané výroky neobsahují žádný výraz, který bychom z hlediska daného systému považovali za výraz logický. Z toho především vyplývá, že *pojem elementárního výroku je relativní vůči zvolenému logickému systému.* Uvedené věty skupiny (E) jsou elementárními větami logiky výroků, ale neelementárními nebo též komplexními větami jiných logik, a to po řadě:

(1) logiky modální,

(2) logiky intenzionální,

[1] K problému se stručně vyjádříme v kapitole 18.

(3) logiky deontické.[2]

Pokusme se nyní v tomto kontextu stručně naznačit, co chceme rozumět elementárním výrokem KVL. Lze tušit, že nás nezajímají obraty studované výše uvedenými logickými systémy, ale jen prostá spojení výroků obvyklými gramatickými spojkami, jak je známe z přirozeného jazyka. To nás vede k následující definici:

`2.1.3 Vysvětlení (Elementární výrok KVL):` *Výrok, který není složen pomocí spojek či pomocí spojení „není pravda, že ...“, „... a ...“, „... nebo ...“, „jestliže ..., pak ...“ a „... tehdy a jen tehdy, když ...“ z jednodušších výroků, nazýváme elementárním výrokem* KVL.

Bohužel hned na druhý pohled je tato definice nevyhovující. Ve výrokové logice nám totiž nejde ani tak o výskyt vyjmenovaných spojek ve studovaných větách, jako o způsob spojení, které reprezentují. Řekne-li někdo větu „když je zapáleno v kamnech, pak se kouří z komína“, míní tím nejspíš totéž, jako když já řeknu „jestliže je zapáleno v kamnech, pak se kouří z komína“, totiž spojení vět s jistými identickými pravdivostními podmínkami. V tomto smyslu jsou obraty „jestliže ..., pak ...“ a „když ..., pak ...“ synonymní neboli identické, protože znamenají totéž. Zároveň lze snadno najít příklady, v nichž se shodovat nebudou („když uviděl srnu, zamířil“), stejně jako případy, v nichž se s nimi zase budou shodovat jiné obraty. Je tedy iluzorní představa, že lze uvedené vysvětlení „opravit“ rozšířením o další spojky či jejich případná synonyma.

Vlastně zde stále bojujeme s víceznačnostmi, či chceme-li, s flexibilitou přirozeného jazyka, vůči němuž každé přirovnání kulhá a v němž lze ke každému obecnému tvrzení, které se ho týká, najít protipříklad. Trik, který použijeme, spočívá v dočasném „vyzávorkování“ přirozeného jazyka před naše zkoumání a ve vědomém omezení se na jazyk formální, jenž bude co do svých syntaktických i sémantických vlastností zcela pod naší kontrolou. K žádné z výše uvedených konfúzí tedy nebude moci dojít. Námitkám z libovolnosti tohoto kroku budeme později čelit praktickými pokyny, jak náš formalismus projikovat směrem ven na jazyk přirozený, s uvážením všech mezí, které to s sebou nese. Za tímto postupem se navíc neskrývá jakákoli z nouze ctnost, ale vhled, že každá teorie jazyka, každé vysvětlení, jak jazyk funguje, je vysvětlením jen potud, pokud je srozumitelnější než vysvětlovaný jazyk sám, což znamená, že musí nutně zjednodušovat, pracovat schematicky. O tom jsme ale již podrobně hovořili v úvodní kapitole. Zároveň je však dobré každému zvolenému schématu stále brousit rohy, diskutovat ho a uvádět do širších souvislostí.

[2] Některými z nich se budeme zabývat v poslední, IV. části knihy.

Proto před dalším formálním výkladem podejme ještě několik postřehů historicko-filosofických.

2.2 Věta, soud, obsah

Z předchozího oddílu plyne, že se logika zabývá výroky, a to co do jejich pravdivosti či nepravdivosti. Viděli jsme přitom, že vymezení výroku, natož pak elementárního, není zdaleka triviální a ve skutečnosti jsou s ním spjaty tytéž problémy jako s vymezením logiky samé, tedy zda a jak se vztahuje k našemu myšlení či jazyku. Spojení otázky, co je výrok, s otázkou, co je pravda, navíc vyvolává potřebu obecných úvah filosofických a epistemologických.

Zabývá-li se totiž logika tím, jak myslíme, je výrok nějaký akt nebo stav mysli (např. spojení představ) a jeho pravdivost či nepravdivost subjektivní pocit (jistota, pocit evidence) toho, kdo si jej myslí, případně pocit, že dochází k adekvaci v mysli spojených představ (kočky a černosti) se skutečností (faktem černé kočky). Platón v *Theaitétovi* kritizuje právě tuto koncepci, když v reakci na spřízněná vymezení, že poznání je totéž, co vnímání,[3] případně mínění jednotlivce, předvádí příměry mysli jako voskové tabulky[4] či holubníku.[5] Podle prvního vzniká poznání tím, že se vjemy vtiskují do struktur naší mysli, a v druhém zas, že je do ní lapáme jako holuby do klece. Oba troskotají na dvou základních problémech, totiž:

(1) jak vysvětlit možnost omylu, tj. vjemového klamu, případně nepravdivého mínění,

(2) jak zabránit tomu, aby to, co je pravdivé pro jednoho, nebylo nepravdivé pro druhého.

Kdyby bylo vědění vnímáním/míněním ve smyslu pouhé recepce vjemů/zděděných rozlišení, nejen (vzdělaný) člověk, ale i prase by bylo měrou všech věcí.[6] Pokud bychom omyl nechali pramenit z chybného porovnání vjemu/lapení jiného holuba nebo alternativně ze špatného (mělkého) vtisku/lapení „nepravdivého“ holuba, chyběla by nám objektivní kritéria pro posouzení této chyby, především tedy rozlišení dobrých a špatných vjemů, případně holubů. Řečeno Wittgensteinovými slovy, nebylo by rozdílu mezi větami

[3] Viz Platón [Thea., 151e].
[4] Viz Platón [Thea., 191e nn.].
[5] Viz Platón [Thea., 197c nn.].
[6] Platón [Thea., 161c].

toto je černá kočka,

zdá se mi, že toto je černá kočka,

tedy mezi situací, v níž se řídím pravidlem a v níž se mi zdá, že se řídím pravidlem,[7] tj. ani rozdílu mezi skutečností a fikcí, pravdou a nepravdou. K žádné chybě by vlastně ani nemohlo dojít.

Naznačený problém spočívá primárně v tom, že se mínění, a odvozeně pak poznání, chápe jako něco soukromého, jako stav nebo akt něčí mysli. Platón proto také na otázku, co je mínění, odpovídá, že mluvená řeč, případně tichá řeč duše sama se sebou.[8] Pravdivost a nepravdivost přitom náleží primárně větám,[9] tedy něčemu veřejně přístupnému, a omyl je pak vysvětlitelný jako normativní nesoulad s územ, a tedy jako něco, co není čistě deskriptivně vykazatelné. Deskriptivní teorie pravdivosti, prominentně tzv. teorie korespondenční, totiž narážejí na stejný problém jako úvodem zmíněný problém netriviální definice. Pravdivost věty (myšlenky, představy) A je v nich vysvětlena odkazem na korespondenci (adekvaci, shodu) se skutečností, k níž ale nemáme jiný přístup nežli skrze jinou větu (myšlenku, představu) B. Říkáme tedy vlastně

A je pravda tehdy a jen tehdy, když B,

přičemž podmínky pravdivosti B již předpokládáme. Můžeme samozřejmě také předpokládat, že vztah mezi větou a skutečností je nějak objektivně fundován nezávisle na našich kognitivních schopnostech, tím se ale vyhýbáme té nejdůležitější části logické práce, tj. pokládáme příslušnou otázku po pravdivosti nějakého tvrzení za zbytečnou.

Jak ukazuje kritika „přátel idejí“ v *Sofistovi* a *Parmenidovi*,[10] byl Platón sám, navzdory rozšířenému mínění, na hony vzdálen takovému druhu platonismu, jenž považuje pravdivost vztahů ve smyslovém světě za založenou vztahy odpovídajících idejí v nadsmyslovém jinosvětě, jejž není možné poznat buď vůbec, nebo jen nedokonale. Tím se totiž vylévá s vaničkou objektivně fundované pravdivosti i dítě jejího vztahu k lidskému poznání a jeho proměnám. Co je podle Platóna zapotřebí, je „nová dialektika“, metoda, která na bázi stabilního použití jistých slov dovolí podat výměr (*logos*) sporných termínů, jako je např. „sofista“, „vědění“ nebo „spravedlnost“, tedy dospěje od smyslové skutečnosti k něčemu (relativně) pevnému. Není tomu přitom tak, že by byl vysvětlovaný pojem,

[7] Wittgenstein [1953, § 202].
[8] Platón [Thea., 190a], Platón [Soph., 263e].
[9] Platón [Soph., 263b].
[10] Platón [Soph., 248], Platón [Par., 130–134].

např. sofisty, zcela neznámý, naopak, v pokusu o jeho vysvětlení vycházíme vždy z jistého předvědění, na jehož základě se snažíme vést ostré hranice v rámci souvisejících rodů a druhů (sofistika je druh umění takových a takových specifik). Nástrojem je zde potom tzv. metoda dělení (*diairesis*) a syntézy (*synagógé*) pojmů, východiskem pragmatický předpoklad, že lze vždy, při dobré vůli a kompetentnosti účastníků rozhovoru, dosáhnout nějaké shody, tj. že jistým tvrzením lze na bázi konsenzu přiznat jednoznačný pravdivostní status.[11]

Úskalím každé teorie pravdy a objektivního poznání je možnost omylu, nepravdy. V *Sofistovi* je kritizován právě ten rys Parmenidovy nauky, jenž takovou možnost vylučuje, neboť nepravdivé tvrzení hovoří o něčem, co není. To vede až k paradoxně znějící tezi, jíž má být Parmenidés „zavražděn“, totiž že

> nejsoucí existuje,[12]

kterou lze z novověkých, pozitivistických pozic napadat z podobných důvodů jako Heideggerovo „nic nicuje“, s tím, že jsou agramatické či že nedaly všem slovům („nic“) význam, tj. nemohou být ani jako celek pravdivé či nepravdivé. Výsledkem Platónových zkoumání je přitom komplikovaná dialektika směřující k smíření dvou extrémů, totiž:

(1) *materialistické* teze, podle níž bytí je jen tělesné, a jako takové stále plyne, hýbe se,

(2) teze *idealistů*, podle níž je naopak netělesné a strnulé.

Obě vylučují poznání, neboť to musí být v nějakém smyslu pevné, přístupné všem stejně a v nějakém smyslu pohyblivé, neboť proměňuje náš rozum, a tedy i svět. Syntézou obou tezí je výrok, že:

(3) „jsoucno a vše je jedno i druhé“,[13] pohyb i klid.

Lze také říci, že poznání je produktem smyslového i ideálního světa. To odpovídá i Platónovým příkladům elementárních vět jako

> Theaitétos sedí/letí,[14]

v nichž je kombinován smyslový vjem (názor) Theaitéta s pojmem (ideou, pravidlem) sezení/létání, resp. jméno se slovesem. Pravdivá, resp. nepravdivá věta je až výsledkem spojení obou.

[11] Pro bližší informace srov. Kolman [2011, s. 219–220, 351–353].
[12] Platón [Soph., 241d].
[13] Platón [Soph., 249d].
[14] Platón [Thea., 263a].

Otázka, k čemu přímo se pravdivost, resp. nepravdivost vztahuje, přitom zůstává stále otevřená. Řekli jsme, že Platón její přípis posunul z oblasti mentálna do oblasti jazyka, což je pozoruhodný pokrok již proto, že další vývoj, zejména v novověku, měl spíše opačné, radikálně psychologizující tendence. Problém s objektivitou přípisu pravdy tím ale vyřešen není, neboť věta jako „Theaitétos sedí/letí“ může svoji pravdivost měnit s místem a časem, resp. s vynálezy typu létacích strojů. Podobně věty jako „mám hlad“ nabývají pravdivostní hodnoty v závislosti na okolnostech promluvy, může se tedy eventuálně stát, že tatáž věta má v tomtéž čase a na tomtéž místě různou pravdivostní hodnotu, totiž v ústech různých mluvčí. To, že řeč, které Platón připisoval pravdivost, byla primárně řeč mluvená, se zde ukazuje jako obzvláště významné. Ve vztahu k termínu „věta“, resp. „výrok“ je totiž třeba učinit následující standardní rozlišení. V první řadě máme větu jako:

(1) *jazykový objekt*, artefakt, tj. určitou posloupnost znaků, rovněž artefaktů.

I zde musíme rozlišit dva základní případy, totiž:

(a) reprodukovatelné grafické či fonetické *schéma*, které nám dovolí napsat či vyřknout tutéž posloupnost znaků v různých dobách a místech,

(b) konkrétní časoprostorovou *realizaci* tohoto schématu.

Obecně se jedná o rozdíl *výskytu* neboli *token* a *typu* výrazu, podle něhož jsou např. číslovky

5 5

různá *token* téhož *typu*, přičemž růzností je míněna právě různost výskytu, hustota barvy atd., zatímco totožností je míněna totožnost tvaru, formy.

To, co nás zajímá, jsou výroky, tj. věty, které mohou být pravdivé či nepravdivé, Wittgensteinovými slovy: věty, kterými lze sdělit, že „něco se má tak a tak“. Aristotelés o nich hovoří jako o *apofantickém logu*,[15] tj. ukazující řeči, což je odlišuje od jiných, rovněž smysluplných vět, kterým pravdivost nenáleží, nebo jim náleží pouze v odvozeném smyslu. Přikázání A můžeme třeba chápat jako žádost, aby byl uskutečněn stav, v němž je A pravdivé. Ptát se na A znamená chtít vědět, zda je A pravdivé. Apod. Tyto rozdíly tkvějí v rozdílném performativním aktu

[15] Aristotelés [Int., 17a].

spojeném s větou A, jak je obvykle zachycován výrazy, *performátory*, jako:

$A!$ $A?$

Stejně jako přikázanost či problematičnost představuje i pravdivost jistý druh *performance*, specifického tahu, který lze provést s figurkou/větou A v rámci určité jazykové hry. Tím má být především řečeno, že pravdivost i nepravdivost nejsou vlastnostmi vět po způsobu fyzických charakteristik objektů, ale cosi spjatého s lidským jednáním, a tudíž s oblastí normativity. Podobně se nedá vlastnost figurky „být šachových králem“ odvodit z toho, že je ze dřeva, neboť to, že s ní lze, resp. nelze táhnout tak a tak, nemá nic společného s fyzikálními zákony, ale pouze a jen s pravidly šachu, tedy s něčím, čím se řídíme a čím se můžeme řídit dobře či špatně. Říci tedy, že se něco má tak a tak, znamená vydat se do prostoru, v němž se mohu mýlit, v němž mohu být požádán, abych podal důvody svého tvrzení či abych vyvodil příslušné důsledky, a v němž mohu podobné důvody a vyvozování požadovat od těch, kdo mým větám oponují. Jakožto uživatel jazyka se stávám součástí toho, co Sellars a Brandom nazývají *hrou na udávání a požadování důvodů*.[16] Pravdivost a nepravdivost se takto vztahují primárně k jednotlivým promluvám. To je další z možných čtení toho, co rozumíme termínem „věta“, který lze takto chápat jako:

(2) konkrétní *řečový akt*, provedení (tj. nikoli jen výsledek) příslušného schématu.

Výrok se od ostatních řečových aktů liší tím, že je vynesen s nárokem na pravdu, Fregovou terminologií, je doprovozen *tvrdící silou*, totožnou s formou oznamovací věty. Frege sám pro ni zavádí speciální značku $\vdash$, kdy

$\vdash A$

říká tolik, že je věta A pravdivá, což se liší od pronesení A v situacích, kdy pravdivost nárokována není, např. na divadle. Potřebnost takového symbolu je ovšem sporná, neboť, jak Frege sám poznamenává, říkat, že je věta A pravdivá, je v podstatě totéž co říkat A, tj. kumulace slov „pravdivý“ k vlastnímu sdělení věty A nic nového nepřináší, neboť je ekvivalentní pronesení A.[17] Naopak emfatické zdůrazňování pravdivosti A činí příslušného mluvčího podezřelým z vedlejších úmyslů, podobně

[16] Brandom [1994, s. 139].
[17] Frege [1983, s. 140].

jako iterování obratů typu „myslím to s tebou opravdu, ale opravdu dobře" typicky nepřesvědčí adresáta o dobrých úmyslech mluvčího.

Na pozadí takovýchto příkladů lze lépe porozumět Wittgensteinovým prohlášením o nevyslovitelnosti filosofie, případně etiky,[18] zvláště když nám radí, jak Fregovu performátoru dát dobrý smysl. Stačí ho totiž uchopit tak jako tečku za větou, tedy periodu, která odděluje performativní akt samostatného pronesení věty A od jejího použití v souvětí, např.:

jestliže B, pak A.

Zde není věta A tvrzena přímo, ale jen hypoteticky (za podmínky platnosti B), podobně jako je ve větě „A nebo B" tvrzena jako (nevylučující) alternativa.[19]

Z hlediska naší klasifikace různého užití termínu „věta" je zřejmé, že vyřčení samo coby fyzikální událost nečiní příslušnou větu pravdivostně relevantní, tj. samo o sobě ještě nevytváří žádný komunikačně-pragmatický rozdíl, něco, k čemu druzí mohou zaujmout normativní postoj, posuzovat to jako dobré (pravdivé) či špatné (nepravdivé) a vyžadovat z toho počet. Větu v tomto smyslu, tedy jako

(3) *intersubjektivní korelát* vyřčeného s nárokem na pravdu,

můžeme nazývat *soudem*, i když klasické pojetí používalo tento termín spíše pro psychologický akt mysli. Rozumíme-li pod myšlením tichou řeč samého se sebou, nepředstavuje pro nás toto užití problém a naopak umožňuje vysvětlit primát mluveného před psaným.

Věty coby artefakty (jazyková schémata) slouží k vynášení soudů, které lze pak považovat za pravdivé či nepravdivé. Schéma „Theaitétos sedí" může tedy v různých situacích vyjadřovat pravdivé i nepravdivé soudy. Lze ale říci, že jsou tyto (střídavě pravdivé a nepravdivé) soudy tytéž? V obecném smyslu je to spíše jedno, podstatné je, že je pravdivost konkrétního soudu v daný moment určena jednoznačně. Zbytek závisí na další dohodě. Je zřejmé, že to, kdy jsou dva soudy stejné, musí být do jisté míry nezávislé na užité větě, tj. ten, kdo říká v dané situaci

mám hlad,

a ten, kdo říká

jsem hladový,

[18] Viz Wittgenstein [1922] a Wittgenstein [1989].

[19] Wittgenstein [1953, § 22].

říkají ve zřetelném smyslu slova totéž. Problematické není ani rozšíření této identity na překladové varianty jako

I am hungry

apod. Jelikož lze očekávat, že tyto věty povedou v obvyklých situacích k témuž rozdílu, lze i o nich říci, že vyjadřují – nezávisle na tom, zda byly vyřčeny – tentýž soud. Jelikož soud je ale něco podstatně spojeného s aktem promluvy, je zde lépe hovořit o *obsahu* vyjádřeném danou větou. Ten může být v uvedeném normování v různých situacích pravdivý i nepravdivý. Chceme-li ho této fluktuace zbavit, můžeme se pokusit učinit ho nezávislým na dané situaci, tj. na konkrétním časovém či prostorovém určení, na osobě mluvčího apod., což znamená nahradit (implicitní) indexické výrazy jako „já“, „teď“, „zde“ atd. konkrétními jmény osob, časů, míst atd. Tato derelativizace obsahu směrem k věčně platným větám jako

Vojtěch Kolman má 7. července 2014 v 20:36 ve svém pražském bytě hlad

je jen iluzorní, neboť větu lze doplňovat neomezeně o další a další specifika (středoevropského času, v té a té ulici), která jsou závislá na dalších indexech (planeta Země, sluneční soustava, greenwichský poledník, narození Krista apod.). To se týká i zdánlivě neproblematických vět matematiky jako „$2+2=4$“, u nichž se doplňování časoprostorových parametrů může zdát jako kategoriálně pomýlené, což ovšem není tím, že by byly zcela nezávislé na naší časovosti, tj. nějak mimo prostor a čas, ale že doplnění časových údajů, na rozdíl od vět empirických, z hlediska jejich pravdivosti či nepravdivosti nedává zpravidla praktický smysl, tj. je zbytečné, stejně jako údaj, jakou barvou byla příslušná věta napsána.

Každopádně platí, že učiníme-li obsah (relativně) nezávislý na aktu pronesení, stane se (relativně) nezávislý na změnách pravdivostní hodnoty, tj. lze o něm přímo hovořit jako o pravdivém či nepravdivém, a skrze něj (skrze ekvivalenci synonymních vět) lze takto hovořit i o příslušné větě. Takovéto přenesení pravdivosti z promluvy na artefakt je ale vždy třeba chápat v daných souvislostech, tj. při vědomí toho, že tentýž obsah – komunikační rozdíl – by po zavedení patřičné konvence (permutaci obsahů) mohla reprezentovat i jiná věta, např.

jsem sytý,

totiž kdyby „sytý“ znamenalo „hladový“ a *vice versa*. Tyto poznámky se mohou zdát školometské a nepodstatné, právě na dostatečném (ne)uvážení podobných rozdílů je ale založen vznik a řešení všemožných logicko-sémantických paradoxů, jak se s nimi seznámíme později v kapitole 10. Obecně se jedná o problém, jak je obsah, resp. význam s výrazy spojován a jak je toto spojení pevné. Co dělá např. jméno jménem nějakého předmětu? Či ještě obecněji: V jakém smyslu je konvenční zavedení jistého slova či pravidla kontingentní (tj. mohlo by být zvoleno jinak, stejně jako bychom nemuseli jezdit po silnici vpravo, ale vlevo), a v jakém smyslu je nutné (tj. v jakém smyslu je pevná volba určité strany jízdy podmínkou plynulého provozu)?

2.3 Jednoduchý výrok

Řekli jsme, že otázka, jak vypadá struktura nejjednodušší promluvy, nedává zcela smysl, neboť elementárnost dané věty je vždy závislá na volbě logického systému, tj. není čistě gramatickou, ale logickou záležitostí. To znamená, že není vázána přímo na obecný úzus, ale i na jeho reglementaci pravidly té které logiky. Všechny tradiční odpovědi tak zároveň působily jako klapky na oči, které znemožnily v daných oblastech, např. v matematice, vývoj adekvátních logických forem.

Pomysleme v této souvislosti zejména na Aristotelovu nauku o subjekt-predikátové formě věty založené na teorii z Platónova *Sofisty.*[20] Podle té vzniká nejjednodušší věta spojením jména se slovesem, podmětu s přísudkem, čímž se nějakému objektu (jsoucímu) připisuje nějaký děj (pohyb). Modelem je zde zjevně výrok:

Theaitétos letí.

Podle Aristotela[21] je v jednoduché větě vždy něco (predikát) vypovídáno o něčem (subjektu), a to buďto v kladném smyslu, např. že

Sókratés je filosof,

nebo v záporném, že

Platón nemá vousy.

Subjekt a predikát jsou spojeny tzv. *kopulou* „je“, která ovšem často, např. v posledním z uvedených příkladů, vypadává. To není nutně na závadu, neboť danou větu lze snadno reformulovat[22] do tvaru

Platón není vousatý,

případně

[20] Platón [Soph., 262c–d].
[21] Aristotelés [Int., 17a].
[22] Viz Aristotelés [Met., 1017a28 nn.].

Platón je holobradý.

Tyto přepisy dále otevírají problematiku jednoduchých záporných soudů, jak se k ní dostaneme v oddílu 4.2 o negaci. Otázka kopuly se také dostává na pořad dne v problémech s její záměnou za identitu a existenci. Zvláště druhá z těchto záměn je zodpovědná za některé potíže s interpretací „existence nejsoucího“, pod níž lze myslet jednoduše a zcela neproblematicky artikulaci toho, že můžeme nějakému objektu (jsoucímu) něco odepřít, tj. říci, že to není (takové a takové), a ne hned popření jeho ontologické existence. Analytická tradice má tendenci problémy zmíněného typu nahlížet právě jako důsledky „zbytnění kopuly“ a považovat je za typické příklady nepochopení logické struktury jazyka. V tomto případě každopádně není obtížné vysvětlit, jak něco může zároveň být (takové) a nebýt (něco jiného).

Ke kritice těchto primitivních pojetí elementárních vět, či Aristotelovou terminologií, *jednoduchého apofantického logu*, se ještě dostaneme, především v souvislosti s relačními tvrzeními a celým aparátem Fregovy predikátové logiky.[23] Z obecného hlediska se přitom zdá být subjekt-predikátová koncepce věty vyvrácena již existencí jednoslovných vět jako

hoří (tamto stavení),

táta (přišel)

apod. Zde lze samozřejmě argumentovat tím, že v těchto větách jsou subjekt a predikát skrytě obsaženy, v závislosti na kontextu. Hlubší důvody k tomu však nejsou, neboť kontext je podstatný za každých okolností, tj. není důvod, proč by zrovna v tomto případě musel vést k požadované formě. Podstatné je, zda jsou dané věty v dané situaci schopny artikulovat nějaký soud, a mají tedy nějakou pravdivostní hodnotu.

Frege, jenž členění na subjekt a predikát odmítá třeba již s ohledem na relační věty jako „Řekové porazili u Platají Peršany“ a jejich možnou transformaci na sémanticky ekvivalentní „Peršané byli u Platají poraženi Řeky“, podotýká nicméně,[24] že lze plošného rozčlenění věty na subjekt a objekt dosáhnout do jisté míry násilně, když totiž substantivizujeme jejich obsah. U věty

Archimédés zahynul při dobývání Syrakús

to lze např. učinit jejím převedením na větu

[23] Srov. zvláště kapitolu 13.

[24] Frege [1879, § 3].

Archimédova násilná smrt při dobývání Syrakús je fakt.

Obrat „být faktem“, zachycený symbolem tvrzení $\vdash$, by byl jediným, a to společným predikátem všech vět – totiž vlastností, že jsou souzeny. Struktura každé věty A by pak vypadala takto: $\vdash A$, kde A je subjekt a $\vdash$ predikát. Tímto tahem, u Frega zmíněným jen hypoteticky, se samozřejmě podtrhává pragmatický smysl každé výpovědi, tj. především okolnost, že věty nemají žádný obsah, nejsou-li tvrzeny vůči někomu dalšímu. Na druhou stranu to neřeší otázku jejich vnitřní struktury, tj. chováme se tak ke všem jako k nerozborným celkům. Otázka, jak se od zprvu monolitických vět jako

(1) máma,

(2) bolí,

(3) králík

dostáváme k větám

(1) máma přišla,

(2) bolí mě noha,

(3) králík skáče

a osamostatňujeme v nich slova, je každopádně netriviální a hodná mimořádné pozornosti. W. V. O. Quine v této souvislosti přesvědčivě ukázal, že rozdíl mezi významy výrazů, které byly zavedeny ukázáním, neleží na straně stimulů, jimž jsme v procesu jazykové výuky vystaveni, ale v sofistikovaném užití těchto výrazů ve větách.[25] Konečná posloupnost deiktických příkladů

toto je/není P,

rozvíjejících význam výrazu P, vede sice obecně k osvojení kritéria aplikace tohoto výrazu vzhledem k potenciálně nekonečnému množství typických situací (tj. k ovládnutí příslušného pravidla), nikoli však k odlišení singulárního výrazu „máma“, označujícího relativně trvalý a kompaktní časoprostorový objekt, od obecného výrazu „červený“, jehož reference se podobně jako u výrazu „voda“ nachází roztroušena na mnoha místech, na rozdíl od něho však vždy nesamostatně, tj. na věcech, a oba tyto látkové termíny pak zase od sortálního predikátu „králík“, jenž sice má či může mít také větší počet instancí, jejich kumulací ani dělením však

[25] Quine [1960, § 17–25].

další instance nevznikají, tj. část králíka ani skupina králíků nejsou samy králíkem. Rozdíl mezi uvedenými druhy slov je intrajazykové povahy, tj. závisí na větném užití pomocných výrazů, které nemají žádný (přímý) observační význam, a proto je také v počátečních stadiích utváření jazyka zcela setřen. Jak říká Quine:

> „Bezchybná předmětná řeč vyžaduje, aby dítě zvládlo objemný aparát jazykových částic – ‚tentýž', ‚jiný', ‚tamto', ‚to', koncovku plurálu a mnohé další –, aparát, jenž je na úrovni observačních vět nedosažitelný."[26]

K osamostatnění pojmů ve smyslu částí věty, nikoli jen kvazisentencí oznamujících přítomnost jistých stimulů (více mámy, více vody, více králíka), dochází podle Quine až v souvislosti komplexních větných celků, např. při spojení věty

> toto je králík

s větou

> toto skáče

apod. do útvaru, v němž se z výrazu „toto" stane jakési ohnisko, zajišťující vazbu daných vět na tentýž objekt, a tedy osamostatnění jak jeho, tak doplňujících predikátů. Totéž se dotkne věty „kdykoli je něco králík, pak to skáče", resp.

> králíci skáčou,

v tom smyslu, že nebude závislá na okamžiku promluvy. K existenci větných částí obecně existuje ovšem celkem srozumitelný pragmatický důvod, jejž zmiňuje třeba Frege, totiž že je tak možné danou praxi obohatit o potenciálně nekonečné množství vět skládaných podle specifických (konečných) pravidel z předem získaných (konečně mnoha) částí:

> „Možnost toho, že rozumíme větám, které jsme nikdy neslyšeli, spočívá v tom, že je smysl věty vystavěn z částí, které odpovídají slovům. Nalezneme-li ve dvou větách totéž slovo, např. ‚Etna', rozeznáme něco společného také v odpovídajících myšlenkách, něco, co těmto slovům odpovídá. Jinak by byla řeč ve vlastním smyslu tohoto slova nemožná."[27]

[26] Quine [1973, s. ix].

[27] Frege [1976, s. 127]. Srov. také Frege [1983, s. 243].

Tento pragmaticko-transcendentální argument ve prospěch existence větných částí je lákavé spojit s argumentem potvrzujícím existenci složených vět, typu implikace a negace, v nichž jsou reflektovány vztahy mezi větami jednoduchými. U Brandoma nabývá podobná myšlenka podobu jakési transcendentální dedukce, která je vlastně i dedukcí potřeby logiky coby vědy, která se vztahy mezi větami zabývá.[28] Důvody pro existenci logiky jsou obecně opět pragmatické, založené na tom, že usnadňuje usuzování, tj. převádí případy konkrétních úsudků na jednotné vzory, úsudková schémata.

2.4 Zákon sporu

Vedle pravdivostního principu, s nímž je úzce spřízněn, představuje zákon sporu jeden z nejvýznamnějších zákonů spojených s logikou od jejích počátků až po současnost. Aristotelés ho formuluje coby nejjistější princip či počátek myšlení takto:

> „Totéž nemůže zároveň náležet a nenáležet témuž a v témž vztahu.“[29]

Pozoruhodná v celé formulaci a jejím následném zdůvodnění je užitá modalita, neboť nemusí být zcela jasné, v jakém smyslu

> „je nemožno, aby někdo mínil, že totéž je a není“.[30]

Od odpovědi na tuto otázku se pak odvíjí další charakterizace tvrzení logiky. První možné čtení je čistě výskytové, ve stylu rozhovoru: „Tady nemůžete stát! Ale vždyť vidíte, že můžu.“ Zákon pak vyjadřuje fyzickou nemožnost vyřčení opačných vět, což zní samozřejmě absurdně, neboť na paralelním tvrzení vět

tento míč je zelený   tento míč není zelený

nic nemožného není. Druhé čtení připouští možnost tvrzení protichůdných vět, ale popírá jejich současnou platnost, tj. chápe princip jako čistě ontologický, platící o světě. Není možné, říká např., aby ve světě nějaký míč byl zelený a nebyl zelený. Toto čtení je jen zdánlivě přijatelné, neboť si lze snadno představit smysluplné případy, kdy obě tvrzení platí, třeba:

[28] Viz Brandom [1994, kap. 6]. Pro stručný výklad argumentu srov. Kolman [2011, oddíl 10.1.4].

[29] Aristotelés [Met., 1005b19–20].

[30] Aristotelés [Met., 1005b24].

(1) když se jedná o různé míče,

(2) když má jeden míč více barev,

(3) když se jedná o tentýž míč v odlišném čase

apod.

Samozřejmá námitka může být, že tyto případy jsou ze zákona sporu vyňaty, tj. předpokládá se v něm již, že se jedná o tentýž objekt, že je uvažován v celku a v tomtéž čase. Takovýchto dodatečných určení ale je celá řada, tj. nelze je dopředu explicitně do zákona zahrnout, a tím se z něho stává buďto velmi vágní nebo velmi banální tvrzení. Jeho platnost je založena na jednoduchém *fiat*, aniž by byla zdůvodněna a v ontologickém duchu zdůvodnitelná. To je systematický problém.

V Leibnizově filosofii je (A) zákon sporu spolu s (B) *větou o dostatečném důvodu* a (C) *větou o identitě nerozlišitelného* považován za úhelné principy metafyziky a logiky, které prohlašují, že:

(A) skutečnost je bezesporná,

(B) každý jev má příčinu,

(C) dvě věci jsou stejné, mají-li tytéž vlastnosti.

Jak se ale máme přesvědčit o nevyhnutelnosti, resp. nutnosti příslušných principů, když není jasné, proč by nějaká věc *nemohla* mít opačné vlastnosti, proč by nemohl existovat jev bez příčiny a proč by nějaké *dvě* věci nemohly mít *stejné* vlastnosti, a být přesto různé.

Aristotelovo zdůvodnění zákona sporu je přitom vyloženě *pragmatické*, vycházející z toho, že účelem řeči je říkat něco určitého. V důsledku toho ten, kdo říká, že něco je a zároveň není, neříká nic, a podobá se tak květině.[31] Tvrdí-li dále Aristotelés, že zákon sporu nelze dokázat či vyvrátit přímo, anticipuje tím zřetelně standardní antiskeptické argumenty, podle nichž nelze zpochybňovat něco, co je v tomto zpochybňování již předpokládáno, totiž právě, že něco vůbec říkám. Možné zdůvodnění zákona musí tedy postupovat nepřímo, jakousi transcendentální oklikou, v níž je zákon brán právě jako podmínka možnosti smysluplné řeči. Ten, kdo od nás chce být ve svých tvrzeních brán vážně, nemůže zároveň zpochybňovat to, na čem je založeno partnerství v diskusi, tj. činí-li tak, přestává být oprávněn něco tvrdit. Z toho všeho plyne, že ona nemožnost vyslovená v zákonu sporu nemá ontologický, ale deontický charakter, tj. je výrazem zákazu, podle něhož nikdo není oprávněn ke dvěma protikladným tvrzením. Tento normativní status zákona sporu odpovídá našemu

[31] Aristotelés [Met., 1006a].

vymezení logiky jako vědy o tom, co by mělo být, nikoli o tom, co je. Svět toho, co je, a svět toho, co by být mělo, spolu samozřejmě souvisí, tj. příkazy týkající se (použití) jazyka mají vliv na podobu našeho světa. Podstatné je, že je tento vliv nepřímý. Wittgensteinovskou dikcí: Logika nepopisuje vztahy ve světě, představuje ale rámec, v němž jsou tyto vztahy artikulovány, je to lešení světa.[32]

Nechápeme-li nyní Platónův svět idejí ontologicky, ale jako vyjádření odlišné – normativní – povahy významů jazyka (pravidel), je i zřejmé, v jakém smyslu v něm platí logické zákony, totiž nikoli jako popisná tvrzení, artikulující vztahy nehybných idejí, např. že buďto v nějakém vztahu jsou (kočka je chlupatá), nebo nejsou (kočka není chlupatá), *tertium non datur*, ale jako příkazy, abychom naše pojmy – v závislosti na kontextu – artikulovali co nejostřeji, tj. aby naše řeč byla ve výsledku: ano, ano, ne, ne. Jsou-li tedy logické zákony chápány jako principy světa ideálního, pak se nabízí, že jejich opaky, totiž kontradiktorické věty, jsou zase zákony světa smyslů. A skutečně, dialektická tradice od eleatů přes Hegela po současnost tuto možnost připouští, ba systematicky rozvíjí tím, že empirický svět se všemi pohyby a nejednoznačnostmi označuje za inherentně sporný. Vlastností pohybu, jak ho tematizují třeba Zénónovy paradoxy, je totiž právě fakt, že nějaká věc někde je (stojí) a zároveň není (pohybuje se). Hegel tak může právem říci, že

> „kontradikce je pravidlem pravdy, ne-kontradikce nepravdy,“[33]

totiž podnětem pořádat protichůdné a mnohovrstevnaté perceptuální podněty do koherentního obrazu skutečnosti. Tím je v jistém smyslu rozporována Kantova alternativa, podle níž je třeba jako bezesporný uchopit sám svět a antinomie vyložit jako plynoucí ze sklonu rozumu překračovat povolené meze, když ve své jednotící roli aplikuje principy této jednoty mylně na sebe sama, tj. např. na celek možného empirického poznání (svět) či poznání obecně, případně morálního jednání a svobody (Bůh). To Hegel komentuje následovně:

> „Jsme tu ale ke světu příliš útlocitní, když z něho odstraňujeme rozpory a přemisťujeme je do ducha, do rozumu, kde jsou ponechány bez řešení. Ve skutečnosti je to duch, který je tak mocný, že je schopen snášet rozpor, ale který jej zároveň umí i překonat. Avšak to není důvod, proč by takzvaný svět (ať už jej nazýváme objektivním, reálným, nebo – podle transcendentálního idealismu – subjektivním nahlížením a smyslovostí, která

[32] Wittgenstein [1922, § 6.124].
[33] Hegel [1986*b*, s. 533].

> je určená kategoriemi rozumu) měl všude a zcela postrádat rozpor; spíše jej neumí unést, a proto je vydán napospas vzniku a zániku.“[34]

Tím je odmítnuto i Kantovo rozhodnutí, které později přijímá i Wittgenstein, totiž nepovažovat příslušné pojmy (Bůh, duše, svobodná vůle, kauzalita, jednoduchost) za pojmy ve vlastním slova smyslu, ale za jakési *regulativní ideje*, které řídí naše jednání, v empirickém i morálním světě, ale nepatří do něho právě pod hrozbou sporu. Wittgenstein hovoří v této souvislosti o pojmech formálních.[35] V Hegelově koncepci je takovéto dělení iluzorní, právě proto, že sporu se nejde tak jako tak vyhnout, ba jeho výskyt má charakter stimulující, neboť je fakticky motorem všech kognitivních změn, a tedy příčinou pokroku.

[34] Hegel [1986*c*, díl I, s. 276]. Používáme Matějčkové překlad části textu uvedený in: Kolman & Roreitner [2013, s. 198–199].
[35] Wittgenstein [1922, § 4.126].

3

Syntax

Z přirozeného jazyka, jímž denně mluvíme a sdělujeme druhým nějaký obsah, se předmětem našeho výzkumu nyní stávají pouhé symboly coby prostoročasové objekty (případně jejich abstraktní typy) bez uděleného významu. V tomto smyslu „nic neoznačujících znaků“ o nich hovoříme jako o objektech syntaktických, u nichž nás zajímá jen jejich grafická stavba. Zmiňujeme-li se tedy dále o

jazyce,

výrocích,

spojkách

atd.,

nemyslíme tím nejprve nic jiného než to, co bude dále definováno, a měli bychom proto systematicky mluvit o

formálním jazyce,

formálních výrocích,

logických spojkách

atd.

Místo termínu „formální výrok“ budeme ovšem používat běžnější „formule“. Navíc z úsporných důvodů obvykle na adjektivum „formální“ rezignujeme, a to zejména co se týče případné zkratky `KFVL` ve významu „klasické formální výrokové logiky“. V této kapitole chceme probrat její *syntax*, tj. nauku o stavbě věty.

3.1 Jazyk a formule

Nejprve popíšeme jazyk `KVL` ve smyslu úplného výčtu nejmenších částí, z nichž se skládá, a výrazových kategorií, do nichž tyto části řadíme.

`3.1.1 Definice (Jazyk):` *Jazyk* `KVL` *sestává z následujících typů výrazů:*

(1) výrokových proměnných $\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}, \ldots,$

(2) výrokových spojek $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow,$

(3) pomocných symbolů $(,).$

Název „výroková proměnná“ může být z hlediska dalších zkoumání mírně matoucí, zvláště ve srovnání s logikou predikátů, kde bývá s ohledem na jiné použití slova „proměnná“ zvykem hovořit na tomto místě o *výrokových konstantách.* Tento rozdíl ještě upřesníme. Didaktické důvody nás každopádně vedou k přijetí tohoto problematického kroku. Ze stejných důvodů jsme pro tento typ výrazů volili jiný typ písma, nežli užíváme v prostém textu, s cílem důsledného odlišování objektového jazyka od metajazyka. I tento rozdíl využijeme plně až v logice predikátů. Namísto znaků `p`, `q`, `r`, … jsme mohli napsat také

$$\mathtt{p}_1, \mathtt{p}_2, \mathtt{p}_3, \ldots,$$

totiž pro případ, že by nám s koncem abecedy došla možnost tvořit složitější formule. Stejnému cíli může sloužit např. sada

$$\mathtt{p}', \mathtt{p}'', \mathtt{p}''', \ldots,$$

k jejíž produkci je zapotřebí pouze dvou typů symbolů, totiž „$'$“ a „`p`“, což může mít výhody např. při počítačovém zpracování nebo při úvahách, které se nějak syntaktickou výstavbou formule zabývají.[1]

[1] K těmto úvahám patří třeba slavné Gödelovy věty o neúplnosti, v jejichž rámci je třeba přiřadit každé formuli uvažovaného formálního jazyka jednoznačný číselný kód. Detaily těchto vět ovšem v této knize neprobíráme, lze je ale najít třeba zde: Kolman [2008, kap. 8]. Teoretické výhody takovéhoto omezení jazyka na dva symboly využijeme např. v oddílu 9.4.

S definicí jazyka KVL máme všechno, co potřebujeme, abychom konečně definovali formální výrok neboli formuli KVL, a to jak formuli elementární, odpovídající našim neúspěšným pokusům zachytit elementární výrok KVL v přirozeném jazyce, tak formuli komplexní.

3.1.2 Definice (Formule): *Formule jazyka* KVL *jsou definovány následujícím způsobem:*

(1) každá výroková proměnná $\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}, \ldots$ *jazyka* KVL *je formule,*

(2) jsou-li ϕ, ψ *formule jazyka* KVL*, pak* $(\neg\phi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ *jsou také formule jazyka* KVL*,*

(3) nic jiného, než co je popsáno v bodech (1), (2), formule KVL *není.*

Výrokové proměnné přitom nazýváme formulemi atomickými, nebo jen atomy, ostatní formule složenými či molekulárními.

S touto definicí se také ocitáme zcela uprostřed vod standardních logických metod. Jsou to sice ještě vody mělké, ale i tak již můžeme cítit přítomnost silné idiosynkrazie. Předvedená definice má totiž netriviální formu tzv. *definice indukcí*. K ní se vyjádříme v dalším oddílu. Nyní ještě poznamenejme, že s ohledem na počet spojovaných formulí hovoříme o spojce $\neg$ jako o spojce *unární*, jednoargumentové, zatímco o ostatních uvedených spojkách jako o *binárních*, dvouargumentových. Pro ně, resp. pro formule, které spojují, zavádíme následující názvy:

3.1.3 Konvence (Názvy spojek a formulí): *Formule tvaru* $(\neg\phi)$ *se nazývá negace,* $(\phi \wedge \psi)$ *je konjunkce,* $(\phi \vee \psi)$ *je disjunkce,* $(\phi \rightarrow \psi)$ *je implikace,* $(\phi \leftrightarrow \psi)$ *je ekvivalence. Stejně tak se nazývají užité spojky. V případě konjunkce, resp. disjunkce nazýváme* ϕ *levý a* ψ *pravý konjunkt, resp. disjunkt, v případě implikace hovoříme o* ϕ *jako o jejím antecedentu a o* ψ *jako o jejím konsekventu, u ekvivalence lze mluvit o jejím levém a pravém členu.*

Formule budeme označovat řeckými písmeny $\phi, \psi, \ldots$, které o nich umožňují vynášet obecné soudy, tj. nemusíme mluvit pouze o nějaké specifické formuli či formulích. V logice hrají tedy tato písmena podobnou úlohu jako označení neznámých $x, y, \ldots$ v aritmetice.

3.2 Definice a důkaz indukcí

Definice indukcí zaujímá v matematice a logice zvláštní status, neboť je prostředkem, jak konečným způsobem zavést a kontrolovat nekonečné množiny objektů, případně množiny předmětů, jejichž počet není vhodné dopředu omezit nějakým přirozeným číslem. Prominentním případem definice indukcí je proto již sama definice přirozeného čísla ve stylu:

(1) 1 je číslo,

(2) je-li x číslo, je číslo i $x + 1$,

(3) nic jiného, než co je popsáno v bodech (1), (2), číslo není.

Jak vidíme, stejně jako v případě definice formule se i tato definice skládá ze tří částí. Jsou to:

(1) báze neboli počátek indukce,

(2) induktivní krok,

(3) induktivní uzávěr.

Induktivní krok nás z *induktivního předpokladu*, že již něco definováno máme, vede k dalšímu definovanému objektu. Třetí část induktivní definice se může jevit jako poněkud záhadná, protože zbytečná, totiž čteme-li definici procedurálně, jako soubor pravidel, jak generovat další a další objekty. Pak se rozumí samo sebou, že za definovaný objekt nebudeme považovat nic, co nevzešlo z těchto pravidel.

Zakládající charakter uvedené definice, která zavádí objekty jistého typu, se ukazuje již v tom, že jsme jistým způsobem nuceni přirozená čísla používat i v úvaze samé, totiž v číslování jednotlivých kroků. V dalších typech definice indukcí již typicky takovýto induktivně zavedený obor využíváme. Jako příklad uveďme definice aritmetických funkcí, např. faktoriál:

(1) $1! = 1$,

(2) $(x + 1)! = x!(x + 1)$.

Zde je induktivně zaváděna funkce $f(x) = x!$ na přirozených číslech tak, že je nejprve stanovena hodnota pro argument 1 a poté i pro argument $x + 1$ za předpokladu, že byla již pro x specifikována. Chybějící bod (3) by se tu jednoduše rovnal upřesnění, že

(3) funkce $x!$ není definována pro jiná než přirozená čísla,

tedy např. již ne pro 0, která mezi ně podle předchozí definice nebyla zahrnuta. Pokud by se tak stalo, musel by být faktoriál zvlášť definován také pro ni, a to předpisem:

(0) $0! = 1$.

Důvody, proč se prosadil výše způsob tříčlenného induktivního definování jako kanonický, jsou v jistém smyslu čistě konvenční, v jistém smyslu pak mají i co do činění s vědomým vymezením se moderní logiky vůči Kantově koncepci matematiky jakožto disciplíny žijící z *konstrukcí*, paradigmaticky právě z konstrukce číselné posloupnosti $1, 2, 3, \ldots$ Nová forma definice má mít pouze *deskriptivní*, strnulý charakter, v němž se popisuje, co budeme nazývat číslem a co nikoli.

Na tomto pozadí je význam klauzule (3) zřejmý. Popisuji-li např., kdo je člověk, mohu najít jednak nějaké ekvivalentní vyjádření, třeba „neopeřený dvojnožec“. Dejme tomu, že by nám pro jisté účely stačil i prostý výčet jmen. Pak se na celý problém díváme jako na popis určité množiny, v tomto případě množiny všech lidí. Jelikož je konečná, není nutné postupovat induktivně, na druhou stranu by příslušný seznam byl příliš dlouhý, proto si můžeme celou věc usnadnit tím, že specifikujeme nějaký výchozí bod, třeba Adama a Evu, a řekneme, že byl-li někdo již jako člověk identifikován, pak jsou lidmi také všichni jeho synové a dcery – to je varianta induktivního kroku. Díky tomuto způsobu také nemusíme náš seznam aktualizovat s narozením každého dalšího nemluvněte, což mj. znamená, že je takto popsaná množina všech lidí v jistém – potenciálním – smyslu nekonečná. V obou případech, tj. při popisu výčtem i při popisu induktivním, je ovšem podstatný dodatek, že je takto podaný výčet úplný, tj. že do příslušné množiny nepočítáme ještě nějaké další bytosti, které již nejsou potomky Adama a Evy. Tím je daná množina jednoznačně definována. Z hlediska našeho úvodního rozdílu extenzionální a intenzionální definice se zde *de facto* jedná o spojení obou: k vymezení příslušného pojmu užíváme jak jeho konkrétní instance (bázi indukce), tak tyto instance přesahující jazyková rozlišení (relaci následníka prostředkující induktivní krok).

Na definici objektů indukcí se zakládá tzv. *důkaz úplnou indukcí*, jenž vychází přímočaře ze způsobu, jímž byly jisté objekty definovány, totiž v oněch dvou krocích a pouze v nich. V tomto smyslu se podobá uvedené definici faktoriálu. Má přitom tvar následujícího úsudkového schématu:

(1) vlastnost P platí o 1,

(2) <u>z toho, že P platí o x, plyne její platnost o $x + 1$</u>

(3) P platí o všech číslech.

Toto schéma artikuluje, že dokážeme-li (1) a (2), dokázali jsme již (3). Máme v něm tedy k dispozici konečný způsob důkazu vět o nekonečně mnoha objektech (číslech), a to jednoduše proto, že toto nekonečné množství bylo definováno analogickým konečným způsobem. K osvojení si právě řečeného uveďme ilustrativní příklad.

`Příklad 3.2.1:` Dokážeme úplnou indukcí větu

$$1 + \cdots + n = \tfrac{n(n+1)}{2}$$

coby tvrzení platné pro každé n. To znamená nejprve dokázat základ indukce:

(1) $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Ten skutečně platí na bázi jednoduchého výpočtu. Dále vezmeme předpoklad induktivního kroku, tj. tvrzení

(2′) $1 + \cdots + x = \frac{x(x+1)}{2}$,

a snažme se odvodit jeho závěr

(2″) $1 + \cdots + x + (x+1) = \frac{(x+1)((x+1)+1)}{2}$.

Ten získáme z následujících rovností

$$1 + \cdots + x + (x+1) \overset{(a)}{=} \tfrac{x(x+1)}{2} + (x+1) \overset{(b)}{=} \tfrac{(x+1)((x+1)+1)}{2},$$

kde v rovnosti (a) je použit induktivní předpoklad (2′) a (b) je založena na jednoduché aritmetické úpravě. Jelikož tímto máme dokázány oba členy (1), (2) indukce, můžeme usoudit na úvodem formulované obecné tvrzení.

Po této obšírné ilustraci z oboru elementární aritmetiky se vraťme k našemu případu indukce v oboru elementární logiky. Podobnost definice formule s výše uvedenými příklady definic je více než zřejmá. V první fázi je specifikována báze indukce, totiž množina všech atomických formulí:

(1) $\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}, \ldots$

V druhé fázi je formulován induktivní krok. Na základě předpokladu, že již nějaké formule máme, je popsána konstrukce formulí jiných. Takto dostáváme nejprve formule

(2′) $(\neg\mathtt{p}), (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}), (\mathtt{p} \vee \mathtt{q}), \ldots,$

poté formule

(2″) $(\neg(\neg\mathtt{p})), (\mathtt{r} \rightarrow (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})), ((\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \vee \mathtt{p}), \ldots$

atd. Z třetí části definice pak plyne, že výrazy jako

(3) $((\mathtt{p}, (\rightarrow \mathtt{q}), \neg\mathtt{p}, (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r}), \ldots$

formule nejsou, neboť k nim uvedeným postupem nelze dojít. Tvrdíme-li nyní, že se nám skrze příslušnou definici podařilo zavést nekonečně mnoho formulí, je to jistého druhu truismus, neboť v definici samé počítáme s tím, že máme neomezenou zásobu formulí atomických. Indukcí definovaná množina všech formulí `KVL` je tedy nekonečná z triviálních důvodů. Na druhé straně i za předpokladu konečného počtu atomů bychom uvedeným postupem dospěli k nekonečnému počtu složených formulí, což můžeme dokonce dokázat jako naši první větu. Nejprve ovšem zaveďme pomocí indukce pojem délky formule ϕ jakožto číslo $|\phi|$ značící počet jejích symbolů, tj. výrazů jazyka `KVL` ve formuli ϕ.

`3.2.2 Definice (Délka formule):` *Délka formule je:*

(1) $|\phi| = 1$, *jestliže je* ϕ *výroková proměnná,*

(2) *máme-li definováno* $|\phi|$ *a* $|\psi|$ *pro formule* ϕ *a* ψ, *pak* $|(\neg\phi)| = |\phi| + 3$ *a* $|(\phi \wedge \psi)| = |(\phi \vee \psi)| = |(\phi \rightarrow \psi)| = |(\phi \leftrightarrow \psi)| = |\phi| + |\psi| + 3$.

Specifikace třetího, uzavírajícího kroku je zde zbytečná, stejně jako byla zbytečná u definice faktoriálu. Stačí nám totiž, že byla takto definována délka pro všechny formule. Délky jiných objektů nás nezajímají, a nemá cenu je proto z naší definice vylučovat. A nyní již ke slíbené větě:

`3.2.3 Věta (O počtu formulí):` *Množina* F *formulí jazyka* `KVL` *omezeného na konečný počet* $\mathtt{p}_1, \mathtt{p}_2, \ldots, \mathtt{p}_\mathtt{n}$ *výrokových proměnných je nekonečná.*

`Důkaz:` Budeme dokazovat sporem. Předpokládejme, že je F konečná. Pak musí obsahovat nějakou formuli ϑ maximální délky $|\vartheta|$ neboli: pro každou jinou formuli χ z F platí, že $|\chi| \leq |\vartheta|$. Z předpokladu, že je ϑ formule, lze ovšem podle definice 3.1.2 zkonstruovat formuli $(\vartheta \wedge \vartheta)$, která takto musí být také v F. Z maximality formule ϑ ovšem plyne $|(\vartheta \wedge \vartheta)| = |\vartheta| + |\vartheta| + 3 \geq |\vartheta|$, což je nemožné. Náš předpoklad je tedy mylný, což znamená, že formulí v F je neomezeně. `QED`

Značka `QED` je zkratkou za latinské „quod erat demonstrandum“, v překladu „což bylo dokázati“, a má funkci jakési důkazové tečky. V komplikovanějším textu by totiž nemuselo být jasné, kdy skončil důkaz a kdy pokračuje další výklad. Podobně by nemuselo být jasné, kdy končí definice či věta. Proto je tiskneme kurzívně. Na definici formule indukcí se zakládá následující typ důkazu indukcí.

`3.2.4 Definice (Důkaz indukcí pro formule):` *Indukce dle výstavby formule je důkazový princip, jenž nám z důkazu následujících dvou tvrzení*

(1) *vlastnost P platí o všech atomických formulích,*

(2) *z toho, že P platí o formulích ϕ, ψ, plyne její platnost o formulích $(\neg\phi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$*

dovolí usoudit na tvrzení

(3) *P platí o všech formulích jazyka* `KVL`*.*

Platnost tohoto principu je opět založena jen a pouze na induktivní definici formule. Je také zřejmé, že na rozdíl od definice čísla představuje definice formule poněkud komplikovanější případ definice indukcí, neboť jí popisované objekty nevznikají jeden po druhém, lineárně, ale v jakýchsi vrstvách. Podle dodatečných kritérií, jak tyto vrstvy v souladu s našimi potřebami pořádáme, se rozlišují různé varianty důkazu indukcí podle výstavby formule.

Ukažme si nyní důkaz indukcí *podle počtu výskytů proměnných*, tj. nezajímáme se pouze o různé typy proměnných, ale i o jejich opakování. Předtím učiňme následující úmluvu:

`3.2.5 Konvence (Libovolná spojka):` *Znak $\circ$ budeme používat ve významu libovolné binární výrokové spojky. Zápis $(\phi \circ \psi)$ je tedy zkratkou za libovolné zřetězení $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ výrazů ϕ, ψ.*

Její motivace je nasnadě již ze zbytečné obšírnosti předchozí definice. Nyní formulujme novou větu a vzápětí ji dokažme uvedeným způsobem induktivní definice.

`3.2.6 Věta (O nahrazení proměnné formulí):` *Mějme formule ϑ a χ. Jestliže některé výskyty některé výrokové proměnné ve formuli ϑ nahradíme formulí χ, pak výraz, který získáme, je opět formulí.*

`Důkaz:` Výsledek dosazení formule χ za nějaké (některé nebo i žádné) výskyty nějaké proměnné formule ϑ značme jako ϑ'. (i) Nejprve předpokládejme, že má formule jeden výskyt výrokové proměnné, dejme tomu `p`. Taková formule má buďto tvar `p`, nebo sestává ze samých negací `p`, tj. má formu $(\neg(\ldots(\neg \mathtt{p})\ldots))$. V prvním případě je výsledek nahrazení ϑ' identický s χ, a je tedy formulí. V druhém případě je identický s formulí $(\neg(\ldots(\neg\chi)\ldots))$, což znamená, že je formulí v souladu s definicí formule. (ii) Induktivní předpoklad bude mít nyní následující podobu: Nechť věta platí pro všechny formule, které mají méně než n výskytů výrokových proměnných, kde $n > 1$. Z toho chceme dokázat, že věta platí pro formule, které mají přesně n výskytů proměnných. Nechť ϑ je taková formule. (ii.i) Nejprve předpokládejme, že je ϑ tvaru $(\phi\circ\psi)$. ϕ, ψ jsou přitom formule, jejichž počty výskytů výrokových proměnných musí být nutně menší než n. To znamená, že můžeme aplikovat induktivní předpoklad. Platí tedy, že ϕ' a ψ' jsou formule. Podle definice formule je tak formulí i $(\phi' \circ \psi')$. Výsledek ϑ' nahrazení některých výskytů výrokové proměnné ve formuli ϑ má ovšem vždy tvar $(\phi' \circ \psi')$, a je tedy formulí. (ii.ii) Nyní předpokládejme, že ϑ nemá tvar $(\phi \circ \psi)$. Jelikož platí, že počet výskytů proměnných je $n > 1$, musí mít tvar $(\neg(\ldots(\neg(\phi \circ \psi)\ldots)))$. To ale znamená, že ϑ' má tvar $(\neg(\ldots(\neg(\phi' \circ \psi')\ldots)))$, přičemž víme, že $(\phi' \circ \psi')$ je formulí. V souladu s definicí formule musí být formulí i ϑ'. `QED`

Je zřejmé, že v závislosti na zvoleném uspořádání formulí do vrstev nabyl důkaz podstatně komplexnější podobu, než která byla avizována v definici principu indukce podle výstavby formule. To ale nemá na výsledek žádný vliv. Podstatné je, že byla věta dokázána pro libovolnou vrstvu formulí, v tomto případě pro libovolný počet n výskytů proměnných, a že každá formule náleží některé takové vrstvě, což platí, neboť každá formule má nějaký určitý počet výskytů proměnných. Tvrzení tudíž platí pro každou formuli.

Naše rozhodnutí dokázat příslušnou větu indukcí podle počtu proměnných bylo v tomto případě vedeno hlavně didaktickými důvody. Fakticky by šlo použít i základní model důkazu indukce podle složitosti formule, který by navíc celou úvahu podstatně zkrátil. Vypadala by pak takto:

`Důkaz:` Výsledek dosazení formule χ za některé (nebo i žádné) výskyty nějaké proměnné formule ϑ značme jako ϑ'. Postupujeme indukcí podle složitosti formule. (i) Pro libovolnou atomickou formuli $\mathtt{p}$ platí, že $\mathtt{p}'$ je buď identická s $\mathtt{p}$, nebo se jedná o formuli χ. V obou případech je to tedy formule. (ii) V induktivním předpokladu tvrdíme, že věta platí pro formule ϕ, ψ, tj. že posloupnosti symbolů ϕ', ψ' jsou též formulemi. (ii.i) Nejprve předpokládejme, že ϑ je formule $\neg\phi$. Pak ϑ' má tvar $\neg\phi'$ a induktivní předpoklad a definice formule zajišťují, že se jedná o formuli. (ii.ii) Nyní předpokládejme, že ϑ je formule $(\phi \circ \psi)$. Pak ϑ' má tvar $(\phi' \circ \psi')$ a induktivní předpoklad i v tomto případě vede k závěru, že výsledek nahrazení je formulí. `QED`

Možnost dokázat jednu větu více způsoby bude, jak zjistíme, každopádně dosti běžným fenoménem, stejně tak jako nutnost rozhodnout, který způsob je vhodnější. Přirozeně neplatí, že by šlo vždy použít libovolný postup, tj. volba té které metody neovlivní jen složitost celého důkazu, ale i to, zda bude úspěšný. Proto je vhodné různé důkazové postupy průběžně diskutovat.

3.3 Další důkazové techniky

Ačkoli je důkaz indukcí co do tvaru snadno kontrolovatelný, mnohost jeho variant může vést k příležitostnému přehlédnutí jistých věcných předpokladů a k chybnému závěru. Obecně bychom se měli vždy vyvarovat toho, abychom jakýkoli důkazový princip následovali příliš schematicky. Jako motivaci pro toto varování zde uveďme příklad chybné aplikace indukce v důkazu věty, že všechny kulečníkové koule mají stejnou barvu.

Příklad 3.3.1: Indukcí podle počtu prvků budeme chtít dokázat tvrzení, že:

> má-li množina koulí n prvků, jsou všechny koule, které obsahuje, stejnobarevné.

(i) Není obtížné nahlédnout, že tvrzení platí pro všechny jednoprvkové množiny koulí ($n = 1$), protože ty obsahují pouze jednu kouli, a ta je triviálně stejnobarevná sama se sebou, jinými slovy: každý prvek takové množiny má stejnou barvu jako jakýkoli další (jímž je vždy on sám). Tím máme vyřízen počátek indukce a potřebujeme učinit induktivní krok. (ii) V něm předpokládáme, že jsme již tvrzení dokázali pro množiny o n prvcích, a chceme ukázat, že platí pro všechny $(n + 1)$-prvkové. Nyní budeme jednotlivé kroky odsazovat:

(a) Mějme nějakou množinu A o $n + 1$ prvcích.

(b) Nechť pro ni tvrzení neplatí, tj. A není barevně homogenní.

(c) Vyjměme z A nějakou kouli a, čímž dospějeme k množině B, která má n prvků.

(d) Pro B již tvrzení platí z induktivního předpokladu, homogenitu tedy musela pokazit koule a.

(e) Vraťme tedy kouli a zpět a vyjměme jinou kouli b.

(f) Tím dospíváme opět k n-prvkové množině C, která je tedy barevně homogenní a náleží k ní a.

(g) To ale znamená, že a nemohla homogenitu pokazit, tudíž předpoklad (b) je neplatný.

(h) Dokázali jsme, že tvrzení platí i pro množiny $(n + 1)$-prvkové.

(iii) Tvrzení je tedy dokázáno pro množiny koulí o libovolném konečném počtu prvků n. Množina všech kulečníkových koulí je konečná a náleží jí nějaké číslo m. To znamená, že všechny její prvky mají stejnou barvu.

Samotný důkaz je pro nás zajímavý z několika důvodů. První se týká příslušné chyby, jejíž příčinu si nejsnáze objasníme, očíslujeme-li si uvedené koule množiny A takto:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}.$$

Množinu B a C nyní nechme vzniknout z A třeba odejmutím první a poslední koule jako:

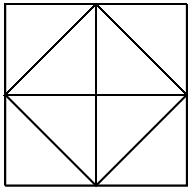
$B \quad a_1, a_2, \ldots, a_n,$

$C \quad a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}.$

Pak je jasné, že odkaz na homogenitu množiny A byl z předpokládané homogenity množin B a C odvozen tak, že byl uvažován nějaký jejich společný prvek. Neboť z toho, že mají dva prvky stejnou barvu jako nějaký třetí, od nich odlišný prvek, plyne, že mají stejnou barvu i navzájem. Tento předpoklad ale není splněn, má-li A pouze dva prvky, protože ty jsou konsekventně vyjmuty a množiny B a C tak nemají společného nic. Induktivní krok tedy funguje až pro tři prvky a výše, tj. nepřenáší se z dokázaného kroku (i) na krok (ii).

Další význam uvedeného důkazu spočívá v tom, že jsou v něm použity i jiné významné důkazové techniky. První z nich se objevuje v bodě (a), kde vezmeme nějakou množinu a pojmenujeme ji A. Toto pojmenování je pouze pomocné a připomíná situaci, kdy vyšetřujeme zločin, tj. víme, že existuje nějaký pachatel, a rozhodneme se mu pro účely případu říkat Jack (Rozparovač) nebo méně závazně třeba „pan X“. Uvažujeme pak třeba, že Jack musel přijít dveřmi (v místnosti není jiný vchod), a to po ránu (večer by ho viděl sluha) apod. Dáváme si také pozor, aby mezi našimi podezřelými již nějaký Jack (nebo pan X) nebyl, protože pak by mohlo dojít k nespravedlivému obvinění. Zjistíme-li, že o něco později došlo k jinému zločinu v blízkosti našeho místa, můžeme i tamního zločince označit jménem, opět novým, např. John (pan Y). Přirozeně se následně může ukázat, že Jack a John jsou titíž pachatelé ($X = Y$), s tím ale nelze počítat předem. Podstatné dále je, že o Jackovi nepředpokládáme nic kromě toho, co vyplývá ze zadání případu (spáchal ten a ten zločin), v našem příkladě tedy, že má množina A právě $n+1$ prvků. Tudíž dospějeme-li k nějakému závěru, např. že A musí být barevně homogenní, bude se vztahovat i na všechny množiny splňující zadání (na všechny případné pachatele zločinu), což znamená, že náš závěr bude obecný relativně k dané vlastnosti.

Abychom nemuseli čelit námitce, že tento princip představujeme na příkladě chybného úsudku, lze si projít předchozí důkazy, např. ten k větě 3.2.3, kde se zcela analogicky uplatňuje vůči formulím a jejich obecným pojmenováním. Popsanému přechodu od jednoho ke všem prvkům se říká *generalizace* a souvisí také s důkazem indukcí, totiž v její antické podobě tzv. *epagógé*. Podle ní lze z důkazu nějaké vlastnosti pro jeden jediný případ usoudit, že se týká všech, jak to demonstruje např. Sókratova výuka otroka v Platónově *Menónovi*.[2] V ní je na příkladě jednoho obrazce, viz obrázek 3.1, nahlédnuta obecná platnost věty, že čtverec zkonstruovaný



Obrázek 3.1: Epagógé

nad úhlopříčkou daného čtverce má dvojnásobný obsah. Pro geometrii je tento postup od konkrétního k obecnému typický, proto ji také Platón považuje za ideální příklad disciplíny, na níž lze cvičit ono již zmíněné rozpomínání se na ideje věcí. Lze říci, že *anamnésis* je jen jiný název pro epagogický důkaz.

Latinský doslovný překlad „epagógé“ jako „indukce“ je matoucí v tom smyslu, že si s ní dnes, ovšem kromě indukce matematické, spojujeme *indukci empirickou*, jak ji v novověku prosazovali Francis Bacon a John Stuart Mill. Metoda induktivní se v jejich pojetí stala vymezujícím prostředkem empirických věd, zatímco termín „dedukce“ coby překlad řeckého „apagógé“ si přivlastnily vědy apriorní, matematika a logika. Odlišnost novověké situace od situace antické vypadá přitom tak, že druhá z nich empirické vědy v moderním smyslu fakticky neznala a zmíněnými typy důkazů, epagogickým a apagogickým, charakterizovala především matematiku a logiku. Matematika totiž, zvláště v řecké, geometrizované podobě, používá metody

konstruktivní, názorné, přímé,

zatímco logika, v schematickém pojetí eleatů a sofistů, se soustředí na metody

pojmové, diskurzivní, nepřímé.

Tím dostáváme fakticky inverzi novověkého přístupu, v němž je indukce pouhou *pravděpodobnostní* technikou, která z toho, že všechny labutě,

[2] Platón [Men., 82b–85c].

které jsem kdy viděl, byly bílé, dovolí usoudit, že jsou bílé všechny, tj. staví na *neúplné indukci* typu:

$$\frac{a_1 \text{ má vlastnost } P,\ a_2 \text{ má vlastnost } P,\ \ldots,\ a_n \text{ má vlastnost } P}{\text{všechna } x \text{ mají vlastnost } P.}$$

Na rozdíl od vět, které jsou založeny na tomto principu, jsou věty matematiky, včetně těch založených na indukci výše popsaného matematického typu, nepochybné a nutné. V antice, jak jsme zmínili, byl sice matematice status apriorní, ideálně-platné disciplíny také přiznán, ale právě díky názorné povaze epagogické metody. Apagogická metoda sofistů naopak tuto vlastnost nemá; zachycuje – jak podotkli Descartes a Brouwer – jen pouhou pravidelnost nějakého úzu, a právě ona tedy má pouhý pravděpodobnostní charakter, tj. často nás může i klamat. Etymologicky navíc *apagógé* odpovídá v první řadě důkaz nepřímý, jenž nás od dokazovaného nejprve „odvádí“, zatímco s deduktivní metodou si spojujeme především přímé dokázání závěru z daných premis. To ovšem, jak jsme zmínili, nekoinciduje s názorným důkazem epagogickým, i když i ten může obsahovat, a zpravidla také obsahuje, nějakou deduktivní část.[3]

Co se týče *nepřímého důkazu*, resp. *důkazu sporem*, ten je jednou z významných technik použitých v diskutovaném příkladě 3.3.1. V bodě (b) totiž předpokládáme, že platí jedna věta (množiny o n prvcích jsou barevně homogenní) a neplatí druhá (množina A o $n+1$ prvcích není homogenní), odvodíme (i když chybně) spor a usoudíme, že při platnosti první věty musí platit i druhá, jak jsme to již jednou popsali v oddílu 1.2. Na tom není nic problematického, tedy uvědomíme-li si, že zde na metaúrovni předpokládáme pravdivostní princip, tj. máme za to, že za daného předpokladu první věty je druhá věta jednoznačně pravdivá nebo nepravdivá. Opět pro pořádek dodejme, že podobný postup, tj. metodu nepřímého důkazu, jsme již dříve předvedli na případě korektního úsudku v důkazu věty 3.2.3. Tento důkaz se vztahuje i k následujícímu problému.

Zajímavá je otázka, zda lze každý nepřímý důkaz transformovat na přímý, o což se z různých důvodů snažili prominentní logikové včetně Bolzana a Frega. Fregovi např. vadil již zmíněný fakt, že některé z vět, které v důkazu použijeme, musíme po jeho skončení škrtnout, protože je netvrdíme jako pravdivé absolutně, ale jen hypoteticky, pro účely důkazu, a nemohou tedy sloužit jako premisy k dalším úvahám.[4] Tento problém je zajímavý zejména v souvislosti s nekonečnými obory, neboť dokázat, že něco platí např. pro všechna čísla nebo obecně pro všechny prvky

[3] K charakterizaci metod *epagógé* a *apagógé* v kontextu antické vědy a filosofie viz von Fritz [1971].

[4] Frege [1983, s. 264–265]. Viz také Bolzano [1810, § 32–34].

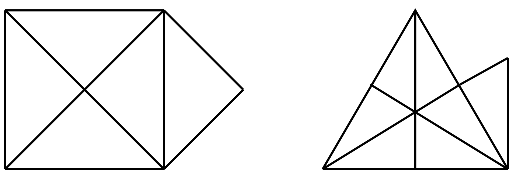
nekonečného oboru, v principu vyžaduje dokázat to pro každý z nich, což je fyzicky nemožné. Nabízí se tedy možnost předpokládat opak, že to pro všechna čísla, případně předměty neplatí a odvodit z toho spor. Na to, že tento způsob nemusí být vždy oprávněný, upozornil Brouwer ve svém užším vymezení pojmu důkazu a matematické pravdy. K tomu se vyjádříme později, v kapitole 21.

V konfrontaci s nekonečnem je každopádně koncepce přímého důkazu obtížně rekonstruovatelná v moderním, čistě konceptuálním rámci a vyžaduje dosti sofistikovanou revizi toho, co je *názorný* důkaz. Větu 3.2.3, kterou jsme dokazovali právě sporem, bychom přímo mohli dokázat jen tak, že bychom názorně předvedli, že je formulí `KVL` nekonečně mnoho, třeba explicitním uvedením členů nějaké posloupnosti a poukazem na to, jak konstruovat další, skrze obligátní „atd.“:

$\mathtt{p}, (\mathtt{p} \wedge \mathtt{p}), ((\mathtt{p} \wedge \mathtt{p}) \wedge \mathtt{p})$ atd.

Tvůrci moderního důkazového paradigmatu, počínaje Fregem a Dedekindem, ale právě exaktnost či (Brouwerovými slovy) „spolehlivost“ tohoto „atd.“ zpochybňují a snaží se je nahradit, nebo alespoň doplnit přidáním třetí induktivní klauzule, jak jsme již zmínili v předchozím oddílu.[5]

Jiný, podstatně starší způsob epagogického důkazu existence nekonečna (čísel, forem) nabízí geometrie. Platón např. v *Parmenidovi*[6] dokazuje existenci neomezené množiny čísel odkazem na posloupnosti mocnin čísel 2 a 3, které odpovídají geometrickým konstrukcím půlení čtverce a třetění rovnostranného trojúhelníka. Jejich části, tj. rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník a pravoúhlý trojúhelník, jehož kratší strana je polovinou jeho přepony, vedou totiž ke čtvercům a rovnostranným trojúhelníkům, k nimž se má výchozí čtverec, resp. trojúhelník právě v poměrech $\frac{2^n}{1}$ a $\frac{3^n}{1}$, viz obrázek 3.2.[7] Jak se ukáže v *Timaiovi*,[8] jsou obě kon-

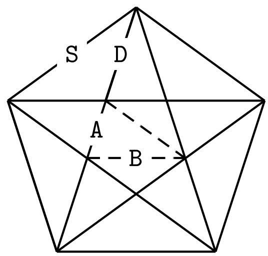


Obrázek 3.2: Rozdíly forem

[5] Podrobný rozbor celého příběhu lze najít in: Kolman [2008, kap. 5].
[6] Platón [Par., 144a].
[7] Srov. k tomu Stekeler-Weithofer [1995, s. 64 n.] a Stekeler-Weithofer [1992, s. 370].

strukce základem Platónovy kosmologie, totiž stavebními kameny jednotlivých elementů, molekul ohně coby čtyřstěnu, země coby šestistěnu (krychle), vzduchu coby osmistěnu a vody coby dvacetistěnu. To jsou tzv. *platónská tělesa* neboli pravidelné mnohostěny (jejichž stěny tvoří čtverec v případě šestistěnu a rovnostranný trojúhelník jinde), k nimž patří ještě dvanáctistěn, jenž – složen z pravidelných pětiúhelníků – reprezentuje celý vesmír skrze dvanáct znamení zvěrokruhu.[9]

Pětiúhelník coby znak pythagorejců umožňuje přitom mnohem zajímavější zpřítomnění nekonečna, a to skrze objev nesouměřitelnosti jeho diagonály a strany, jak to ukazuje obrázek 3.3. Lze totiž nahlédnout, že



Obrázek 3.3: Nesouměřitelnost v pětiúhelníku

hledání společné míry diagonály D a strany S nemůže terminovat, tj. příslušná míra neexistuje. Proces, který by vedl ke společné míře dvou úseček, tj. k úsečce, jejíž násobek by se do obou vešel beze zbytku, je znám jako *Eukleidův algoritmus* výpočtu největšího společného dělitele. V něm jsou výchozí veličiny A_1, A_2, kde $A_1 > A_2$, přezkoumávány ohledně toho, kolikrát se vejde A_2 do A_1, načež je poznamenán příslušný zbytek A_3. Ten je z definice menší než druhá veličina, tedy $A_2 > A_3$. Postup pak opakujeme. První veličina A_n, která se do předchozí vejde beze zbytku, tj. pro niž $A_{n+1} = 0$, je hledaný společný dělitel, a to největší. Aplikace téhož na diagonálu a stranu pětiúhelníku vypadá nyní takto: Jelikož je každá diagonála pětiúhelníku rovnoběžná s nějakou jeho stranou, platí pro stranu A a diagonálu B vkresleného pětiúhelníku a diagonálu D a stranu S výchozího pětiúhelníku vztahy $D = A + B + B$ a $S = A + B$. Aplikujeme-li nyní algoritmus na dvojici $D > S$, získáme nejprve diagonálu B menšího pětiúhelníku a vztah $S > B$. Další aplikace dává jako zbytek stranu A a vztah $B > A$. V tomto kroku už je jasné, že se algoritmus nemůže zastavit, neboť jsme hledání společné míry diagonály a

[8] Platón [Tim., 35b–36b, 54a–e].
[9] Platón [Tim., 55c].

strany výchozího pětiúhelníku převedli na hledání téhož v pětiúhelníku vepsaném. V jediném obrazci nám tedy vyvstává vnořující se posloupnost figur, vepsaných pětiúhelníků, která z teoretických důvodů, nikoli z důvodů empirických, nemůže nikdy skončit, neboť s posledním z nich bychom získali společnou míru všech.

3.4 Notační konvence

Než postoupíme ve výkladu, je vhodné provést určité úmluvy, které jej podstatně zpřehlední a zkrátí. První z nich se týkají užití závorek. V definici formule jsme jimi obklopovali každou formuli vzniklou aplikací spojky na formule předchozí, jednoduše proto, aby šlo od sebe rozlišit formule typu:

$$((\neg\phi) \vee (\psi \to \vartheta)) \qquad ((\neg(\phi \vee \psi)) \to \vartheta) \qquad (\neg(\phi \vee (\psi \to \vartheta))).$$

Je zřejmé, že na případnou víceznačnost nemá vůbec vliv užívání krajních závorek formule, které tedy můžeme od tohoto okamžiku vynechávat. Totéž se ovšem týká také závorek kolem negace. Z našich tří příkladů tak dostáváme:

$$\neg\phi \vee (\psi \to \vartheta) \qquad \neg(\phi \vee \psi) \to \vartheta \qquad \neg(\phi \vee (\psi \to \vartheta)).$$

Konvenci týkající se negace jsme si ale mohli ušetřit již v definici formule, když bychom v druhé klauzuli kolem ní jednoduše závorky neuvedli. Všimněme si, že uvedená zjednodušení nestírají rozdíl mezi

$$\neg\neg(\phi \vee \psi) \qquad \text{a} \qquad \neg(\neg\phi \vee \psi).$$

Další závorkové konvence již nepředstavují univerzální zjednodušení, ale jsou záležitostí tzv. „líného“ čtení, které dovolí vynechat závorky kolem spojkami sloučených formulí pouze v některých případech s tím, že je lze poté opět jednoznačně doplnit tak, aby byla výsledkem původní normovaná formule. My se v dalším textu obvykle přidržíme plné verze formule, uvedené konvence jsou ale běžně používané a je vhodné je znát. Takto se např. předpokládá, že lze závorky vynechat v případě formule

$$(\phi \wedge \psi) \to \vartheta,$$

neboť, jak říkáme, konjunkce váže silněji než implikace. Negace váže silněji než jakákoli spojka již na základě předchozího vynechávání závorek kolem ní, kdy formuli $\neg\phi \circ \psi$ čteme vždy ve smyslu $(\neg\phi) \circ \psi$, tj. nikoli jako $\neg(\phi \circ \psi)$. Pořadí síly ostatních spojek pak vypadá následovně:

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \to,\ \leftrightarrow.$$

To v praxi znamená, že

$$\phi \vee \neg\psi \wedge \vartheta \qquad \text{čteme jako} \qquad \phi \vee (\neg\psi \wedge \vartheta),$$

$$\neg\phi \to \psi \vee \vartheta \qquad \neg\phi \to (\psi \vee \vartheta),$$

$$\phi \to \psi \vee \vartheta \leftrightarrow \psi \qquad (\phi \to (\psi \vee \vartheta)) \leftrightarrow \psi.$$

V případě spojek stejné síly se zavádí čtení

$$\phi \wedge \psi \wedge \vartheta \qquad \text{jako zkratka za} \qquad \phi \wedge (\psi \wedge \vartheta),$$

$$\phi \vee \psi \vee \vartheta \qquad \phi \vee (\psi \vee \vartheta),$$

$$\phi \to \psi \to \vartheta \qquad \phi \to (\psi \to \vartheta),$$

což má ovšem, jak uvidíme později, fakticky význam jen u implikace, neboť sémantické důvody dovolují potlačit závorky v prvních dvou případech docela, protože jakékoli uzávorkování samých konjunkcí, případně disjunkcí nemá vliv na sémantickou hodnotu celku. Ačkoli je to předběžné, můžeme hned upozornit na paralelu s aritmetickými výrazy

$$8 \times 4 \times 2 \qquad 8 + 4 + 2,$$

u nichž nemá uzávorkování vliv na výsledný výpočet, na rozdíl od výrazu $8 \div 4 \div 2$, u něhož v případě $(8 \div 4) \div 2$ dostáváme výsledek 1, zatímco $8 \div (4 \div 2)$ dává 4. Sečteme-li tedy dosavadní úmluvy, dostáváme následující:

`3.4.1 Konvence (Vynechávání závorek):` *Co se týče vynechávání závorek ve formulích, platí následující pravidla:*

(1) nejkrajnější závorky formule lze vynechat,

(2) lze vynechat závorky obklopující negaci formule kdekoli uvnitř formule,

(3) lze vynechat závorky tam, kde obklopují formule spojené silněji vážící spojkou,

(4) vyskytují-li se ve formuli spojky téhož typu, pak silněji váže ta blíže ke konci.

Nyní můžeme přikročit ke konvencím uvozovkovým. Výrokové proměnné, spojky či formule jsou výrazy jazyka (byť formálního) a my se o nich potřebujeme bavit. Hovoříme tedy v *jazyce o jazyce* a z toho mohou vyvstat rozličné problémy. Uvažme třeba věty:

(1) Praha má jeden a půl milionu obyvatel,

(2) Praha má pět písmen.

V každé z nich znamená – *označuje* – výraz Praha něco jiného. V případě (1) město, v případě (2) slovo. Jednou je tedy výraz *použit* k označení něčeho mimo jazyk, empirického objektu, v druhém případě naopak k označení, *zmínění* sebe sama. Tento rozdíl se proto ve filosofii logiky a jazyka obvykle zachycuje anglickým dvojslovím „use“ vs. „mention“. K syntaktickému rozrůznění obou případů v rámci psaného jazyka používáme tzv. *citační uvozovky* pro druhý případ, tj. píšeme:

(2′) „Praha“ má pět písmen.

Všimněme si, že touto konvencí vlastně ošetřujeme jednu z mnoha víceznačností výrazů našeho jazyka, kterou obvykle dokladujeme na slovech jako „zámek“, „kolej“ apod. Stejně jako mohou tato slova odkazovat k různým významům, a to k šlechtickému sídlu a jištění dveří v případě prvním a ke stopě a studentské ubytovně v případě druhém, mohou také odkazovat samy k sobě, jak to činí věta (2′). Uvozovek je samozřejmě více druhů, mj. tzv. „sneer quotes“ ke zdůraznění atypického, např. ironického použití slova, dejme tomu, hovoříme-li jako nedávno o „líném“ čtení. Ze systematického hlediska je přitom v řeči o výrazech nutno dobře rozlišovat případy, kdy hovoříme konkrétně, např. o

spojce „$\wedge$“,

proměnné „$\mathtt{p}$“,

formuli „$\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}$“,

větě „Paříž leží na Seině“,

a kdy hovoříme obecně a pro ujasnění používáme proměnné. To se netýká jen řeči o výrazech, ale dejme tomu i transformace první z následujících vět na druhou

když někdo někoho praští, dostane odškodné,

když a praští b, dostane b odškodné,

kdy nám jde o upřesnění toho, k čemu se vztahují reference užitých výrazů. Podobně lze tento problém demonstrovat na dvojici:

přišil mu ucho, které mu ukousl pes,

a přišil b ucho, které b ukousl pes.

Je zřejmé, že zde proměnné fungují po způsobu zájmen, sloužících tzv. *anaforickému* odkazu k objektům zmíněným dříve. V našem výkladu jsme zcela analogicky používali obrat:

(A) jsou-li ϕ, ψ formule, pak i $(\phi \wedge \psi)$ je formule.

Pointa této poznámky spočívá v tom, že ve větách, jako je tato, sice hovoříme o výrazech, ale nikoli konkrétně, tj. výrazy „ϕ", „ψ" nejsou (jako právě teď) zmíněny, nýbrž užity v odkazu k výrazům jiným, jinými slovy: nejsou to na rozdíl od výrazů „$\mathtt{p}$" či „$(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$" výrazy studovaného, tzv. *objektového jazyka*, nýbrž výrazy jazyka, v němž tento jazyk studujeme, tzv. *metajazyka*. Na rozdíl od (výrokových) proměnných $\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}, \ldots$ se nazývají *proměnnými schematickými*, a nejsou tak ve větě, jako je výše zmíněná, obklopeny uvozovkami, jak by tomu mělo být v konkrétním případě:

(B) jsou-li „$\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}$", „$\mathtt{r}$" formule, pak i „$(\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}) \vee \mathtt{r}$" je formule.

Situace je ovšem složitější, neboť příležitostně jsou i objektové proměnné $\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}, \ldots$ užívány schematicky, jako např. v důkazu věty 3.2.6, kde „$\mathtt{p}$" v rámci „$(\neg(\ldots(\neg\mathtt{p})\ldots))$" reprezentuje libovolnou atomickou formuli. Z kontextu je vždy patrné, o který případ se jedná.

Pozoruhodným případem je také výraz „$(\phi \wedge \psi)$" v druhé části věty (A). Ten totiž obsahuje jak výrazy „(", „$\wedge$", „)" objektového jazyka, tak výrazy „ϕ", „ψ" metajazyka, což má za následek, že rozumným způsobem uzávorkovat nelze. Rigorózně vzato by věta (A) měla být vlastně formulována takto:

(C) jsou-li ϕ, ψ formule, pak i to, co vznikne zřetězením výrazu „(", formule ϕ, výrazu „$\wedge$", formule ψ a výrazu „)", je formule.

Aby si ušetřil tuto potíž, zavedl W. V. O. Quine[10] tzv. *kvaziuvozovky*, které obsáhlou frázi druhé části věty zkracují na:

(D) jsou-li ϕ, ψ formule, pak i $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$ je formule.

Tuto konvenci ovšem využívat nebudeme, tj. budeme předpokládat, že obvyklé čtení nečiní čtenáři potíže. Zpravidla ale nebudeme psát ani uvozovky kolem výrazů jazyka KVL, neboť jejich typografie, především tedy volba strojového písma pro výrokové proměnné, možným konfúzím s metajazykem přirozeně brání. Totéž se týká výrokových spojek, i když u nich se později stane záměna s výrazy metajazyka (např. spojkami jazyka přirozeného) velmi aktuální a bude se k ní třeba vyjádřit.

3.5 Podformule

Standardy spojené s definováním a dokazováním v moderní logice si můžeme procvičit a rozšířit na zdánlivě neproblematickém pojmu podformule. Hned je ovšem třeba upozornit na skutečnost, že na rozdíl

[10] Quine [1940, § 6].

od pojmu formule, jenž je *absolutní* vlastností určitých (posloupností) znaků, je pojem podformule vlastností *relativní*. Není tomu tedy tak, že by některé formule byly či nebyly podformulemi *per se*, ale že jsou či nejsou vždy podformulemi nějaké jiné formule. Tato poznámka je zároveň důležitým upozorněním na pečlivé, tj. především úplné čtení definic. Nedefinovali jsme např. pojem *formule*, ale *formule jazyka* `KVL`, což může být v některém kontextu triviálně zřejmé, v jiném ovšem netriviální a významné, např. když jako ve výše uvedeném důkazu věty 3.2.3 o nekonečnosti množiny formulí omezíme jazyk `KVL` na nějakou jeho část. – Ptáme-li se nyní, co všechno je podformulí nějaké formule, zdá se být jako první na řadě následující odpověď:

`3.5.1 Vysvětlení (Podformule):` *Podformulí formule jazyka* `KVL` *je jakákoli její souvislá část, která je formulí.*

Tato definice může být v mnoha ohledech postačující, na druhé straně nevyužívá prostředků, jimiž byl zaveden pojem formule jazyka `KVL`, a je tedy v tomto smyslu neekonomická. Užitý pojem „souvislosti“ je značně vágní, takže není třeba jasné, jak bychom o tom, zda je něco podformulí nějaké formule, mohli na tomto základě nechat rozhodovat stroj. To není samozřejmě *conditio sine qua non* úspěšné definice, v případě definice syntaktického pojmu je ale tento požadavek obvyklý, resp. za syntax jazyka – zvláště v jejím obecném vymezení vůči sémantice – se považuje právě ta jeho část, která je nějak mechanicky zpracovatelná, a definice by tedy měly být co nejpřesnější. Proto uvažme následující návrh:

`3.5.2 Definice (Podformule):` *Podformulí formule ϑ je:*

(1) formule ϑ samotná,

(2) je-li $\neg\phi$, resp. $\phi \circ \psi$ podformule ϑ, pak ϕ, ψ jsou podformule ϑ,

(3) nic jiného, než co bylo popsáno v bodech (1), (2), podformulí formule ϑ není.

Formuli ϑ nazýváme svou nevlastní podformulí, její ostatní podformule jsou vlastní. Množinu všech podformulí formule ϑ značme jako $\mathtt{Sub}(\vartheta)$.

Tato definice již splňuje výše uvedený požadavek ekonomičnosti, neboť využívá induktivní definice formule, i když způsobem *upside-down*. Alternativní přímý způsob definice téhož pojmu využívá konstruktivní povahy definice formule, tj. faktu, že je v ní sledována postupná aplikace výrokových spojek na atomické formule a formule, které z nich takto dostaneme. Zakládá se přitom na pomocném pojmu konstruující posloupnosti, což se zdá být zprvu zbytečná oklika, která se ale s ohledem na jeho víceré využití brzy vyplatí.

3.5.3 Definice (Konstruující posloupnost): *Říkáme, že konstruující posloupnost nějaké formule* ϑ *je konečná posloupnost* $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ *formulí, kde* $\phi_n = \vartheta$*, tj.* ϑ *je jejím posledním členem, a pro každý člen* ϕ_i $(1 \leq i \leq n)$ *platí jedna z následujících podmínek:*

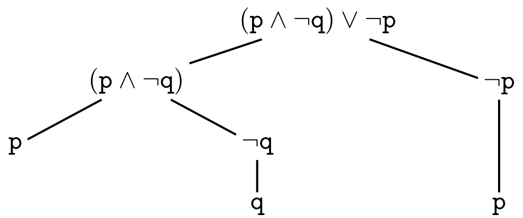
(1) ϕ_i *je výroková proměnná,*

(2) existují indexy $k, l < i$ *takové, že* ϕ_i *vznikla aplikací některé z výrokových spojek na předchozí formule* ϕ_k, ϕ_l*, tj.* $\phi_i = \neg\phi_k$ *nebo* $\phi_i = \phi_k \circ \phi_l$*.*

Pochopit, co je konstruující posloupnost, se nám snadno podaří v souvislosti s problémem zdůvodnění, zda je nějaký výraz ϕ skutečně formulí `KVL`. Vezměme např. výraz $(\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}) \vee \neg\mathtt{p}$. Pak můžeme argumentovat následovně:

> Výraz $(\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}) \vee \neg\mathtt{p}$ je formulí, neboť je získán aplikací spojky $\vee$ na výrazy $\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}$ a $\neg\mathtt{p}$, které jsou formulemi, neboť první z nich byl získán aplikací spojky $\wedge$ na výrazy $\mathtt{p}$ a $\neg\mathtt{q}$, které jsou formulemi, neboť se jedná o atom a výsledek aplikace spojky $\neg$ na atom, což je také případ druhého výrazu $\neg\mathtt{p}$.

V tomto složitém souvětí se přitom snažíme převést problém toho, zda je výraz formule, na problém toho, zda jsou formule jeho části, dokud nepostoupíme k výrokovým proměnným, které jsou jako formule specifikovány přímo, tj. bez odkazu na jiné výrazy. Konstruující posloupnost je



Obrázek 3.4: Konstruující strom

jedním z pokusů o schematizaci tohoto zdůvodnění. Jiným je tzv. *konstruující strom* nebo také strom konstrukce formule, jenž má v uvedeném případě formu zachycenou v obrázku 3.4.

Výhoda konstruující posloupnosti spočívá v linearizaci uvedeného zdůvodnění, což je úsporné jak pojmově, tak vynaloženým prostorem. Výraz $(\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}) \vee \neg\mathtt{p}$ je formulí právě proto, že je posloupnost

$\mathtt{p}, \mathtt{q}, \neg\mathtt{q}, \mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}, \neg\mathtt{p}, (\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}) \vee \neg\mathtt{p}$

posloupností konstruující. Druhou stranou mince tohoto postupu je nejednoznačnost, spjatá v první řadě s možností přehodit některé členy posloupnosti, např. první dvě výrokové proměnné, případně pořadí aplikace negací jako

$$\mathtt{q},\ \mathtt{p},\ \neg\mathtt{p},\ \neg\mathtt{q},\ \mathtt{p}\wedge\neg\mathtt{q},\ (\mathtt{p}\wedge\neg\mathtt{q})\vee\neg\mathtt{p}$$

apod. Potud tedy neexistuje žádný významnější problém. Ten vyvstane až tehdy, když se pokusíme některou z uvedených možností zachycení konstrukce dané formule použít k vymezení množiny jejích podformulí. To je v případě stromů možné okamžitě: podformulí je evidentně každá formule figurující v jeho zápisu a žádná jiná.[11] Kdybychom chtěli ale totéž učinit s konstruující posloupností formule, platila by pouze část uvedeného tvrzení, totiž že se každá podformule formule musí vyskytovat v její konstruující posloupnosti, nikoli však, že se tam vyskytují pouze její podformule. Přidáme-li totiž např. mezi členy konstruující posloupnosti formule nějakou formuli, která vzniká z aplikace nějaké výrokové spojky na členy předchozí, ale reálně není podformulí dané formule, např. $\neg\mathtt{p}\vee\neg\mathtt{q}$ v případě, který jsme uvedli

$$\mathtt{q},\ \mathtt{p},\ \neg\mathtt{p},\ \neg\mathtt{q},\ \neg\mathtt{p}\vee\neg\mathtt{q},\ \mathtt{p}\wedge\neg\mathtt{q},\ (\mathtt{p}\wedge\neg\mathtt{q})\vee\neg\mathtt{p},$$

jedná se podle definice stále o konstruující posloupnost pro $(\mathtt{p}\wedge\neg\mathtt{q})\vee\neg\mathtt{p}$. Obecně lze tohoto negativního efektu dosáhnout přidáním libovolné výrokové proměnné, která se v dané formuli nevyskytuje, mezi libovolné členy původní posloupnosti.

Způsob, jak vybrat z konstruující posloupnosti formule jenom ty členy, které jsou pro její odvození relevantní, je ale snadný. Stačí zavést následující pojem:

`3.5.4 Definice (Konstrukce):` *Konstrukcí formule ϑ nazýváme její konstruující posloupnost minimální délky.*

Takových posloupností je, jak jsme zmínili, také více, nám ale stačí, že je naší definicí odstraněna víceznačnost, která zabraňuje použít konstruující posloupnost k definici podformule. V důsledku toho můžeme formulovat následující tvrzení:

`3.5.5 Věta (O podformuli):` *Formule je podformulí formule ϑ tehdy a jen tehdy, je-li prvkem její konstrukce.* $\mathtt{Sub}(\vartheta)$ *je tedy množina všech prvků konstrukce ϑ.*

[11] Později zavedeme terminologický aparát, který nám dovolí popisovat stromy přesněji. Viz oddíl 16.1.

Skutečnost, že se nejedná o definici, ale o větu, je dána tím, že jsme již pojem podformule jednou definovali a nová definice téhož pojmu by byla nekorektní. Forma ekvivalence (tehdy a jen tehdy, když) uvedeného tvrzení ale zajišťuje, že lze uvedenou vlastnost vzít za alternativní definici podformule, a tu dříve použitou naopak odvodit. Právě ve volbě toho, co definovat a co odvodit, se mnohé logické a matematické texty odlišují, a čtenář si tedy musí dát dobrý pozor, jak autor svůj výklad buduje.

Co se týče důkazu věty 3.5.5, zakládá se jednoduše na postřehu, že induktivní definice podformule a konstrukce formule popisují tentýž proces odvození formule, i když inverzním způsobem. My ho ovšem uvádět nebudeme a namísto toho dokážeme následující větu o počtu podformulí. V její formulaci využijeme běžného úzu, kdy je symbolem absolutní hodnoty (který jsme již aplikovali pro označení počtu symbolů ve formuli, tj. její délku) značen také počet $|M|$ prvků množiny M. Toto značení, jak uvidíme později v kapitole 10, se vztahuje na množiny libovolné velikosti, včetně množin nekonečných.

`3.5.6 Věta (O počtu podformulí):` *Pro každou formuli ϑ platí vztah* $|\mathtt{Sub}(\vartheta)| \leq |\vartheta|$.

`Důkaz:` Větu budeme dokazovat indukcí podle délky formule ϑ. (i) Nejprve předpokládáme, že má délku jedna, a je tedy atomickou formulí. V takovém případě má jedinou podformuli, a tou je formule ϑ sama. Platí tedy $|\mathtt{Sub}(\vartheta)| = 1 \leq |\vartheta| = 1$. (ii) Nyní následuje induktivní krok. Předpokládáme, že má formule ϑ délku $n+1$ a že tvrzení $|\mathtt{Sub}(\phi)| \leq |\phi|$ platí pro každou formuli ϕ délky maximálně n. Chceme dokázat platnost $|\mathtt{Sub}(\vartheta)| \leq |\vartheta|$. Rozlišíme dva případy, totiž možnost, že (ii.i) $\vartheta = (\neg\phi)$ a že (ii.ii) $\vartheta = (\phi \circ \psi)$. V obou případech je nyní zřejmé, že $|\phi|$ a $|\psi|$ jsou ostře menší než $|\vartheta|$, a lze na ně tedy použít induktivní předpoklad, tj. $|\mathtt{Sub}(\phi)| \leq |\phi|$ a $|\mathtt{Sub}(\psi)| \leq |\psi|$. (ii.i) Uvažme případ $\vartheta = (\neg\phi)$. Platí:

$$|\mathtt{Sub}(\vartheta)| \overset{(a)}{=} |\mathtt{Sub}((\neg\phi))| \overset{(b)}{=} |\mathtt{Sub}(\phi)| + 1 \overset{(c)}{\leq} |\phi| + 3 \overset{(d)}{=} |(\neg\phi)| \overset{(e)}{=} |\vartheta| \,.$$

První rovnost (a) vyplývá z definice, druhá (b) zachycuje přidání formule $(\neg\phi)$ k množině podformulí formule ϕ, čímž z ní vznikne množina podformulí formule $(\neg\phi)$, bod (c) je dán induktivním předpokladem a jednoduchým aritmetickým vztahem, bod (d) spočívá v započítání symbolu $\neg$ a závorek do délky formule $(\neg\phi)$ a (e) plyne opět z definice. (ii.i) Nyní k případu $\vartheta = (\phi \circ \psi)$. Zde platí obdobně $|(\phi \circ \psi)| = |\phi| + |\psi| + 3$. S počtem podformulí je situaci mírně komplikovanější, neboť ϕ a ψ mohou mít nějaké podformule společné. Platí tedy $|\mathtt{Sub}((\phi \circ \psi))| \leq |\mathtt{Sub}(\phi)| + |\mathtt{Sub}(\psi)| + 1$. Dohromady tak dostáváme:

$$|\mathtt{Sub}(\vartheta)| \overset{(a)}{=} |\mathtt{Sub}((\phi \circ \psi))| \overset{(b)}{\leq} |\mathtt{Sub}(\phi)| + |\mathtt{Sub}(\psi)| + 1 \overset{(c)}{\leq}$$

$$|\phi| + |\psi| + 3 \overset{(d)}{=} |(\phi \circ \psi)| \overset{(e)}{=} |\vartheta|\,.$$

První rovnost (a) platí z definice, nerovnost (b) je založena na předchozí úvaze, že podformulí složené formule nemůže být více, než dává prostý součet podformulí obou plus formule samotné, (c) je induktivní předpoklad a jednoduchá aritmetika, (d) odpovídá rozšíření počtu symbolů o příslušnou spojku a závorky a (e) je definice. `QED`

Ačkoli jsme tuto větu, resp. její důkaz předvedli především kvůli procvičení principu indukce, má i jistý praktický význam, totiž coby horní odhad počtu podformulí, resp. počtu formulí v konstrukci nějaké formule. Na závěr tohoto oddílu použijeme ještě pojmu konstruující posloupnosti, resp. konstrukce formule k definici dvou významných syntaktických pojmů `KVL`.

`3.5.7 Definice (Hlavní spojka, rozsah):` *Hlavní spojkou formule ϑ nazýváme tu výrokovou spojku, jejíž aplikací na některé členy konstrukce formule ϑ tato formule vznikla. Rozsahem spojky ve formuli ϑ jsou ty podformule formule ϑ, na něž byla spojka v konstrukci formule ϑ aplikována.*

Hlavní spojka je vlastně tou spojkou, podle níž formuli nazýváme, tj. říkáme např., že má tvar konjunkce, jestliže vznikla aplikací $\wedge$ na formule ϕ a ψ, což zapisujeme jako $\phi \wedge \psi$. Všimněme si, že formule má sice z definice jenom jednu hlavní spojku, nicméně k jejímu určení nestačí obvykle říci její *typ*, ale popsat i její *výskyt*. Tak např. ve formuli

$$\vartheta = \mathtt{p} \vee (\mathtt{q} \to (\mathtt{r} \vee \mathtt{q}))$$

máme dva výskyty spojky $\vee$, ale pouze ten první je hlavní spojkou, což se projevuje v tom, že případným zápisem formule ϑ jako $\phi \vee \psi$ nemíníme spojení výrazů

$$\phi = \mathtt{p} \vee (\mathtt{q} \to (\mathtt{r} \qquad\qquad \psi = \mathtt{q})),$$

ale

$$\phi = \mathtt{p} \qquad\qquad \psi = (\mathtt{q} \to (\mathtt{r} \vee \mathtt{q})).$$

Posledně jmenované formule také tvoří rozsah hlavní spojky, zatímco rozsahem druhého výskytu spojky $\vee$ jsou formule $\mathtt{r}, \mathtt{q}$. Vlastně bychom tedy měli vždy hovořit o rozsahu výskytu spojky. O hlavní spojce hovoříme, je-li to nutné, vždy ve významu výskytu nějakého typu spojky.

3.6 Varianty notace

Letmé prolistování několika knih zabývajících se třeba jen velmi povrchně moderní logikou přivede čtenáře k náhledu, že námi používaný design formálního jazyka KVL není nijak kanonický. To platí jak ve vztahu ke znakům jednotlivých spojek (negace, konjunkce atd.), tak ve vztahu k jejich počtu v tom smyslu, že jsou některé z nich vynechávány či nahrazeny zcela jinými. Důvody pro tento druhý jev jsou ovšem sémantické povahy, nikoli povahy syntaktické, a budeme se jimi zabývat později, zejména v oddílu 5.4. První okolnost má, kromě historické zajímavosti, také jisté aspekty praktické a estetické, uveďme proto nejprve nejběžnější varianty našich spojek spolu se jmény těch, kteří je do logické literatury zavedli či pomohli jejich rozšíření:[12]

$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$	autor
non A	A et B	A vel B			lat.
$\neg A$	$A \wedge B$				Heyting
$\sim A$	$A.B$	$A \vee B$	$A \supset B$	$A \equiv B$	Russell
$\overline{A}$	$A \,\&\, B$		$A \to B$		Hilbert
$-A$	$A \cap B$	$A \cup B$			Peano
	AB	$A + B$			Boole

Všechny uvedené spojky, s výjimkou Hilbertovy negace, se užívají shodně s naším územ, tj. předepisují se před formuli v případě unárním a mezi spojované formule v případě binárním. Hilbertův zápis má tu výhodu, že se obejde bez často nepohodlných závorek. Ty si obvyklý, tzv. *infixový* zápis prakticky vynucuje, i když lze používat jisté dodatečné konvence, které mu tuto povinnost ulehčují. K nim patří různé tečkové úmluvy, vyskytující se v tradici *Principia Mathematica* a dílem i v tradici německé. Pro četbu příslušných děl mohou být znalosti těchto konvencí podstatné, zvláště proto, že již nejsou zpravidla vysvětlovány.

Základní princip spočívá v tom, že se spojky $\vee$, $\to$ a $\leftrightarrow$ podle potřeby po stranách doplňují skupinami teček tak, že spojkou vázaná formule na té které straně má konec u nejbližší *větší skupiny* teček, pokud taková existuje. Formuli

$$\psi \vee : \phi \to \chi \,.\!\leftrightarrow \psi \,.\!:\!\to .\, \phi \to \psi$$

je tak třeba číst jako

$$((\psi \vee ((\phi \to \chi) \leftrightarrow \psi)) \to (\phi \to \psi)).$$

[12] Podrobný vývoj logické notace je zachycen v knize Cajori [1928/1929, díl II], která je ovšem relativně stará.

Důvod, proč jsme neuvažovali konjunkci, spočívá v tom, že ji uvedená notace – stejně jako v případě symbolického násobení – buďto úplně vynechává a namísto $\mathtt{p}\wedge(\mathtt{q}\vee\mathtt{r})$ píše $\mathtt{p}(\mathtt{q}\vee\mathtt{r})$, nebo že konjunkci reprezentuje také tečkou jako $\mathtt{p}.(\mathtt{q}\vee\mathtt{r})$. V takovém případě je posílení konjunkce docíleno zvětšením počtu teček, přičemž platí, že formule vázaná tečkou, resp. skupinou teček konjunkce končí u nejbližší *stejné nebo větší* skupiny, pokud taková je. Formuli

$$\phi\,.\,\psi\,.\!\to\chi:\psi\vee\phi:\leftrightarrow\chi$$

tedy čteme

$$((((\phi\wedge\psi)\to\chi)\wedge(\psi\vee\phi))\leftrightarrow\chi).$$

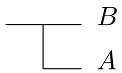
Závorky se ponechávají u negace, přičemž tečky vně závorek „nevidí" tečky uvnitř a *vice versa*, tj. k uzávorkované formuli se z hlediska konvencí chováme jako k samostatnému celku. S ohledem na naše konvence odvozené od síly spojek může být užitečné zmínit, že v tečkovém případě nastávají z hlediska čtení některých formulí snadno zaměnitelné situace, kdy např. formuli $\psi\,.\,\phi\to\chi$ čteme jako $\psi\wedge(\phi\to\chi)$, nikoli jako $(\psi\wedge\phi)\to\chi$. Další úskalí tečkové konvence nemá na této abstraktní úrovni cenu probírat a zájemce je vhodnější odkázat třeba na Quinovu učebnici.[13] Německá notace používá podobné konvence, s tím, že tečky jsou psány nad spojku, a ovlivňují tedy oba směry vazby. Formule

$$\phi\to\psi\mathrel{\dot{\to}}\chi\mathrel{\ddot{\to}}\xi$$

je takto čtena jako

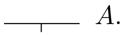
$$(((\phi\to\psi)\to\chi)\to\xi).^{[14]}$$

Další detaily si opět ušetříme. Zatímco tečková notace závorky nahrazuje jen z části, a i to spíše virtuálně, existují notace bytostně *bezzávorkové.* První notací, která se užití závorek vyhýbala, byl ovšem již zápis Fregův, který tak nečinil z úsporných, ale z ideových důvodů, jimiž se chtěl vyhnout linearitě zápisu. Frege používal také pouze dvě z uvedených spojek, a to implikaci $A\to B$



a negaci

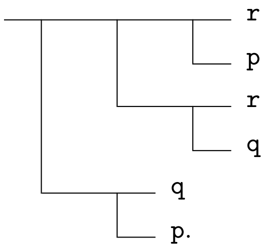
[13] Quine [1940, § 7].
[14] Viz třeba Lorenzen [1987, s. 64].



Toto dvojrozměrné písmo bylo nedílnou částí jeho projektu písma pojmového (*Begriffsschrift*), ospravedlněného zamýšlenou aplikací na úsudky matematiky, které jsou obvykle zaznamenávány právě řádek po řádku. To představuje – jak Frege poznamenává – hlavní výhodu psané řeči od řeči mluvené, a bylo by tedy, jak míní, nemoudré tohoto rysu jazyka nevyužít.[15] Zápis poměrně jednoduché formule

$$(\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \to ((\mathtt{q} \to \mathtt{r}) \to (\mathtt{p} \to \mathtt{r}))$$

nicméně ukazuje, proč dal pozdější vývoj, ovlivněný mj. i potřebou počítačového zpracování textu, ve volbě notace za pravdu Fregovým konkurentům, což samozřejmě nic nemění na teoretické hodnotě jeho výkonu:



Podstatně úspěšnější a vlastně i prototypickou bezzávorkovou notací je tzv. *polská notace*, zavedená Łukasiewiczem v rámci polské logické školy. Tento zápis spočívá v předepisování spojek před spojované formule, a je proto nazýván notací *prefixovou.* K jeho popisu nám bude stačit pár příkladů, přičemž formální náležitosti si čtenář doplní snadno sám. Nejprve ovšem zaveďme symboly

$$N,\ K,\ A,\ C,\ E$$

odpovídající spojkám

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \to \text{ a } \leftrightarrow.$$

Jako příklady ekvivalentních zápisů vezměme:

$$C\mathtt{pq} \qquad \mathtt{p} \to \mathtt{q},$$

$$K\mathtt{p}NC\mathtt{pq} \qquad \mathtt{p} \wedge \neg(\mathtt{p} \to \mathtt{q}),$$

$$CC\mathtt{pq}CC\mathtt{qr}C\mathtt{pr} \qquad (\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \to ((\mathtt{q} \to \mathtt{r}) \to (\mathtt{p} \to \mathtt{r})).$$

[15] Viz Frege [1896, s. 364].

Ač to tak možná na první pohled nevypadá, je polský způsob zápisu v nějakém smyslu přirozený, neboť odpovídá tomu, jak bychom formuli četli nahlas, např.

$$\mathtt{p} \wedge \neg(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q})$$

jako

konjunkce formule $\mathtt{p}$ s negací implikace formulí $\mathtt{p}$ a $\mathtt{q}$.

Tento postřeh nám usnadní formulaci algoritmů převádějících formule z jedné notace do druhé, nejprve z infixní do polské. Algoritmus značený jako ∇ se zakládá na následující sadě transformačních kroků:

$$\nabla(\neg\phi) = N\nabla(\phi),$$

$$\nabla(\phi \wedge \psi) = K\nabla(\phi)\nabla(\psi),$$

$$\nabla(\phi \vee \psi) = A\nabla(\phi)\nabla(\psi),$$

$$\nabla(\phi \rightarrow \psi) = C\nabla(\phi)\nabla(\psi),$$

$$\nabla(\mathtt{p}) = \mathtt{p}.$$

Jeho princip spočívá v tom, že se postupně vnořuje do formule, po částech ji přetváří do polské notace a skončí poté, co je formule zcela přepsána. Při každé aplikaci algoritmu na formuli najdeme tedy hlavní spojku formule, přeneseme ji na začátek, změníme v odpovídající výraz polské notace a algoritmus aplikujeme na obě zbylé formule (nebo na jednu – v případě negace). Ukážeme si to na příkladě.

`Příklad 3.6.1:` Vstupem algoritmu bude formule $\neg(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{r} \rightarrow (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}))$. Její transformace na formuli v polské notaci probíhá takto:

$$\begin{aligned}
&\nabla(\neg(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{r} \rightarrow (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}))) = \\
&K\nabla(\neg(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}))\nabla(\mathtt{r} \rightarrow (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})) = \\
&KN\nabla(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q})C\nabla(\mathtt{r})\nabla(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) = \\
&KNC\nabla(\mathtt{p})\nabla(\mathtt{q})C\nabla(\mathtt{r})K\nabla(\mathtt{p})\nabla(\mathtt{q}) = \\
&KNC\mathtt{pq}C\mathtt{r}K\mathtt{pq}.
\end{aligned}$$

Algoritmus převádějící polskou notaci do naší formulujeme rovnou v jednotlivých krocích. Předpokládáme, že je nám dána formule v polské notaci. Algoritmus nyní probíhá takto:

(1) Změň všechna N na $\neg$.

(2) Pokud je řetězec znaků, který jsme získali, formulí v naší notaci, jedná se již o transformovanou formuli, tj. algoritmus končí.

(3) Pokud ne, musí řetězec obsahovat alespoň jednu polskou binární spojku. V tomto případě máme řetězec znaků: $XS\phi\psi Y$, kde X, Y jsou řetězce znaků (mohou být i prázdné), S je polská binární spojka, která je nejvíce vpravo a ϕ, ψ jsou formule v naší notaci. Přepiš tento řetězec na řetězec: $X(\phi \circ \psi)Y$, kde $\circ$ je spojka naší notace odpovídající spojce S.

(4) Vrať se na krok (2).

`Příklad 3.6.2:` Převádíme formuli $KNC\mathtt{pq}C\mathtt{r}K\mathtt{pq}$ do obvyklé notace. Postupujeme podle algoritmu, tj. nejprve proměníme všechna písmena N na negaci $\neg$ a poté hledáme nejpravější polskou binární spojku a za ní dvě formule v naší notaci. Dospíváme tak k těmto krokům:

$$KNC\mathtt{pq}C\mathtt{r}K\mathtt{pq},$$

$$K\neg C\mathtt{pq}C\mathtt{r}K\mathtt{pq},$$

$$K\neg C\mathtt{pq}C\mathtt{r}(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}),$$

$$K\neg C\mathtt{pq}(\mathtt{r} \rightarrow (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})),$$

$$K\neg(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q})(\mathtt{r} \rightarrow (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})),$$

$$\neg(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{r} \rightarrow (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})).$$

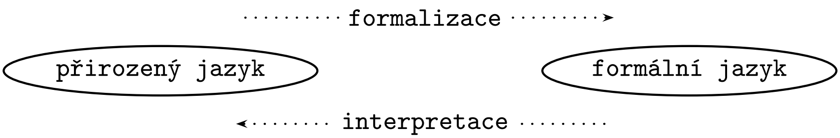
Tím je transformace hotova.

Uvedené algoritmy nejsou přitom významné jen samy o sobě, ale i jako poukaz na algoritmickou stránku logiky, s níž se poprvé seznámíme v kapitole 9 věnované axiomatizaci. V souladu s Wittgensteinovým pojetím významu jako pravidla se v těchto příkladech také otevírá problém toho, jak takováto pravidla – a mysleme třeba na operace sčítání a odčítání, které jsme si osvojili v dětství – explicitně zpřítomnit a k čemu takovéto zpřítomnění dále vede s ohledem na příslušnou praxi.

4

Formalizace a interpretace

Doposud jsme se zaměřovali především na *syntax* KVL, tedy na tu část studované logiky, která se zabývá symboly, aniž by přihlížela k tomu, co znamenají. Tématem tak byla hlavně otázka, co je – v ostře ohraničené oblasti klasické výrokové logiky – dobře utvořený výraz, z čeho se skládá a jak k němu dospět. Nyní přichází na řadu *sémantika* KVL, tedy nauka o významu výrazů. Než se však pustíme do příslušných definic, zaměříme se na jejich motivaci, a to tím, že naznačíme možné aplikace dříve zavedeného formálního aparátu, tj. jeho projekci na přirozený jazyk. Vynořují se nám tak dva inverzní procesy, jejichž filosofická důležitost spočívá v tom, že vytvářejí přemostění mezi jazykem, který běžně používáme, a formálním jazykem logiky. Viz obrázek 4.1. Prvním z těchto procesů



Obrázek 4.1: Sémantické procesy

je formalizace přirozeného jazyka, která pro nás bude v tomto momentu znamenat převádění vět tohoto jazyka na formule KVL. Jejím jádrem je tedy abstrakce od obsahu a zachycení logické formy. Druhým procesem je interpretace formálního jazyka, při které naopak přiřazujeme formulím KVL věty jazyka přirozeného. Podstatou interpretace je udělení obsahu bezobsažnému, formálnímu výrazu. Je třeba upozornit na to, že *interpretace formálního* jazyka ve smyslu jeho převodu na jazyk přirozený se bude lišit od *formální interpretace*, která bude exaktně definována v kapitole 5.

4.1 Formalizace přirozeného jazyka

Formalizace spočívá především v nalezení logické formy (struktury) dané věty. Forma je určena výrazy, které spadají do oblasti formální logiky. Nepanuje sice shoda na tom, které výrazy jsou obecně logické a které nikoli, ale v případě KVL na základě konvenčního rozhodnutí platí, že jsou to spojky $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Jak již jsme naznačili, těmito spojkami budeme formalizovat následující výrazy:

$\neg$	není pravda, že ...,
$\wedge$	... a ...,
$\vee$	... nebo ...,
$\rightarrow$	jestliže ..., pak ...,
$\leftrightarrow$	... právě tehdy, když ...

Máme tak první náznak toho, jak bude formalizace probíhat. Dostaneme-li zadanou větu přirozeného jazyka, nalezneme její elementární výroky a označíme je výrokovými proměnnými tak, aby témuž výroku odpovídala tatáž proměnná. Podle toho, jak je původní věta vystavěna z přirozených spojek v pravém sloupci, zkonstruujeme formuli ze spojek našeho formálního jazyka v levém sloupci. Přitom je zřejmé, že různé věty mohou mít stejnou logickou strukturu. Např. následující věty

(1) Verdi je autorem *Falstaffa* a Wagner napsal *Mistry pěvce*,

(2) 5 je prvočíslo a $2 + 3 = 5$

budeme obě formalizovat formulí

$$\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}.$$

Pokud bychom s těmito větami pracovali současně, je ovšem třeba přiřadit *různým* elementárním výrokům zcela *odlišnou* výrokovou proměnnou. V uvedeném případě bychom tedy dostali formule $\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}$ a $\mathtt{r} \wedge \mathtt{s}$. To nám ale nebrání tvrdit, že tyto věty se shodují – na úrovni KVL – co do své logické formy. Ve vztahu k ní tedy nehrají roli konkrétní názvy jednotlivých proměnných, ale jen jejich odlišnost v rámci dané formule. Věta

(3) 5 je prvočíslo a 5 je prvočíslo

má logickou formu

$\mathtt{p} \wedge \mathtt{p}$,

kterou zachycuje také formule $\mathtt{r} \wedge \mathtt{r}$, nikoli však $\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}$. V souvislosti s tímto příkladem se ale objevuje následující komplikace. Povolíme-li interpretovat *různé* proměnné *stejně*, což, jak uvidíme později, je v podstatě nevyhnutelné, mělo by být povoleno formalizovat také *stejné* elementární věty *různými* proměnnými. To by znamenalo, že i věta (3) má formu $\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}$, a tudíž jedna věta může mít více forem v rámci KVL samotné. Podstatné je, že je to tak v pořádku: formy vlastně zachycují třídy vět, které z nich lze dostat vhodnou interpretací, a jedna věta může zjevně náležet více třídám. Věta formy $\mathtt{p} \wedge \mathtt{p}$ je přitom vždy větou formy $\mathtt{r} \wedge \mathtt{s}$, nikoli obráceně.

Nyní se obraťme k příkladům, jejichž příslušnost k různým formám je dána sémantickou víceznačností příslušné věty. Čtenář si může rozmyslet, v jakém smyslu se následující příklad liší od těch předchozích.

`Příklad 4.1.1:` Mějme následující větu:

> jestliže přijde brzy podzim nebo v létě začne hodně pršet a bude zima, pak, jestliže budu odpočatý, napíšu slíbený článek a přečtu Kafkův *Proces*.

V této větě se nacházejí následující elementární výroky (pomiňme, že není explicitně určena doba a že věta hovoří o budoucnosti), kterým rovnou přiřadíme atomické formule:

$\mathtt{p}$ = přijde brzy podzim,

$\mathtt{q}$ = v létě začne hodně pršet,

$\mathtt{r}$ = bude zima,

$\mathtt{s}$ = budu odpočatý,

$\mathtt{t}$ = napíšu slíbený článek,

$\mathtt{u}$ = přečtu Kafkův *Proces*.

Nyní se zaměříme na to, jak se věta z uvedených elementárních výroků skládá. Při vytváření formule budeme muset být nejvíce opatrní na umístění závorek. Těm ve skladbě dané věty často nic neodpovídá (např.

čárky), což může být zdrojem víceznačností. Může to být také tak, že věta je míněna jednoznačně, ale nelze to vyčíst z pouhé její syntaktické struktury. Spíše je třeba sledovat obsah výpovědi, z čehož při formalizaci často vyplývají velké problémy. Zdá se, že nejlepší formalizace naší věty bude tato:

$$(\mathtt{p} \vee (\mathtt{q} \wedge \mathtt{r})) \rightarrow (\mathtt{s} \rightarrow (\mathtt{t} \wedge \mathtt{u})).$$

Museli bychom se však zeptat mluvčího, zdali ji nemínil např. spíše takto:

$$((\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge \mathtt{r}) \rightarrow (\mathtt{s} \rightarrow (\mathtt{t} \wedge \mathtt{u})).$$

A jistě by se daly nalézt ještě další možnosti uzávorkování, které by odpovídaly nějakému užití této věty.

Vidíme zde, že jednou z důležitých funkcí formalizace je odstranění jazykových nejednoznačností. Dále jsme ilustrovali, že formalizace se nemůže omezit na syntax a musí sledovat sémantiku formalizované věty, která může být určována i kontextem jejího vyslovení. Na tom se podepisuje také to, že elementární výroky nejsou ve větě vyjádřeny celé, a při rozkladu věty je tedy musíme doplnit. Tak je tomu v následujícím příkladě:

jestliže Kroisos překročil řeku Halys, pak zničil velkou říši.

Elementárními větami zde jsou totiž:

$\mathtt{p}$ = Kroisos překročil řeku Halys,

$\mathtt{q}$ = Kroisos zničil velkou říši.

V následujícím textu probereme zvlášť všechny spojky, protože se k nim vážou další specifické problémy formalizace. Často je daná spojka vyjádřena jinými výrazy přirozeného jazyka, než jaké jsou uvedeny v naší tabulce. Náš výčet specifických situací, se kterými je možno se setkat, pochopitelně nebude úplný. Jde spíše o jistý výběr.

4.2 Negace

Negace vyjadřuje, že negovaná věta není pravdivá. Pro každý výrok tedy platí, že je pravdivý buď tento výrok sám, nebo jeho negace. Výrok jsme totiž definovali jako větu, která je buď pravdivá, nebo nepravdivá, a v případě tedy, že je nepravdivá, je automaticky pravdivá její negace. Negace může být vyjádřena tím, že před negovanou větu napíšeme „není pravda, že“. Ekvivalentně lze také negovat pouze přísudek dané věty. Věty není pravda, že zásoby ropy vydrží stovky let,

zásoby ropy nevydrží stovky let

takto vyjadřují totéž a obě je budeme formalizovat prostřednictvím formule

$\neg\mathtt{p}$.

Někdy se oba tyto způsoby vyjadřování kombinují a získáváme pak dvojí zápor. Větu

není pravda, že přítel nepřišel

budeme formalizovat jako $\neg\neg\mathtt{p}$. Avšak pokud bychom se rozhodli, že tato věta znamená, že přítel přišel, neudělali bychom chybu, kdybychom ji formalizovali prostě jako $\mathtt{p}$. Tato dvojznačnost není na závadu. Později z našich definic vyplyne, že formule $\neg\neg\mathtt{p}$ a $\mathtt{p}$ jsou tzv. logicky ekvivalentní, což bude zhruba znamenat, že vyjadřují jiným způsobem totéž. Jak uvidíme v kapitole 21, není to něco obecně či přirozeně platného pro použití záporky, nýbrž prostý důsledek toho, jak v KVL chápeme pravdivost a negaci.

Zpochybníme-li třeba pravdivostní princip s tím, že ne každá smysluplná věta našeho jazyka bude mít pravdivostní hodnotu, ovlivní to i vztahy negovaných vět. Tvrzení, že nějaká věta není nepravdivá, může tedy znamenat jak to, že je pravdivá, tak to, že (zatím) nemá vůbec žádnou pravdivostní hodnotu. K dalším dvojznačnostem může dojít v případech, kdy není jisté, co je ve větě popíráno, zda predikát, nebo celá věta. Věta

všechny kočky nejsou věrné

může být míněna jako upření věrnosti všem kočkám, tj. ve smyslu

všechny kočky jsou ne-věrné,

což je ekvivalentní tezi, že žádná kočka není věrná, ale i jako popření toho, že by každá jednotlivá kočka věrná byla, tedy ve smyslu věty

není pravda, že všechny kočky jsou věrné,

v níž se netvrdí, že by nějaká kočka věrná být nemohla, tj. připouští se výskyt věrných koček, zároveň se však o některých tvrdí, že věrné nejsou. Tyto sémantické rozdíly budeme schopni v plné míře zachytit až v rámci predikátové logiky. Zabývala se jimi ovšem již Aristotelova sylogistika, která ale nedisponuje negací jako logickým operátorem, tj. záporka „ne“ není součástí symbolizace. Ve výrokové logice, v níž již tomu tak je, zase nemůžeme jít dovnitř elementární věty, tj. z hlediska formalizace musíme větu, v níž je negován predikát, nechat, jak je, což znamená: formalizovat proměnnou $\mathtt{p}$. V případě, kdy je negována celá věta, píšeme $\neg\mathtt{q}$.

Filosoficky zajímavý případ užití negace je v rámci tzv. *nekonečných soudů*, jak zní název jedné z Kantových kategorií. Tyto soudy mohou být gramaticky kladné, jako třeba

duše je nesmrtelná,

fakticky se však jedná o tvrzení záporná, po vzoru

duše není smrtelná.

Od obvyklých záporných vět se liší tím, že v nich negací „není dotčena kopula, nýbrž predikát“,[1] který je zasazen mimo tento obor do indefinitního oboru všech možných předmětů řeči, neboli: „nekonečný soud neukazuje pouze to, že subjekt není obsažen ve sféře predikátu, nýbrž že leží někde mimo něj v nekonečné sféře [...].“[2] To je lépe vidět na větách jako

(1) čísla nejsou zelená

a jejich srovnání s větami typu

(2) prvočísla nejsou sudá.

Řečeno dnešními slovy: v soudech nekonečného typu na rozdíl od těch obvyklých nevyjadřujeme nějaký přímočarý (mimojazykový) fakt, ale metajazykové (analytické) tvrzení týkající se užití jistých predikátů, tedy jazyka. Výrok (1) na rozdíl od výroku (2) takto není o číslech, ale o naší řeči o číslech, k níž nepatří empirické predikáty typu „zelený“ či „chlupatý“. Není tomu tedy tak, že bychom tyto predikáty *přímo* upírali samotným číslům, jako některým z nich upíráme sudost, ale že tyto predikáty vylučujeme z oboru smysluplných kombinací. Věta „číslo 5 je zelené“ tak není v objektovém modu nepravdivá, ale nesmyslná.

Pro nás je v tomto momentu případ negativních soudů zajímavý především ve spojitosti s tím, zda je nějaké věty možné označit za záporné v absolutním slova smyslu. Příležitostná možnost stáhnout záporku do predikátu po vzoru věty „duše je nesmrtelná“ či nahrazení negativního predikátu ekvivalentním pozitivním, např. ve větě „duše je věčná“, vzbuzuje otázku, zda zápornost soudu, a tedy jeho formalizace negací, není jen relativní vůči tomu, co je negováno. V důsledku toho by bylo jedno,

[1] Kant [1800, A 163].
[2] Kant [1800, A 161].

zda označíme za kladný soud „duše je smrtelná“ či „duše je nesmrtelná“, důležité je, že formalizujeme-li jeden z nich jako $\mathtt{p}$, bude druhý $\neg\mathtt{p}$ a *vice versa*. Předpoklad bytostně negativních, resp. pozitivních vět s sebou přináší klasické filosofické otázky typu:

(a) co jsou stavební kameny světa? (je smrtelnost přirozená a nesmrtelnost odvozená vlastnost?),

(b) existují negativní fakty? (odpovídá pravdivé záporné větě ve skutečnosti něco, co ji činí pravdivou?)

apod.

K tomu všemu se ještě dostaneme, např. v oddílu 5.2. Jako nejschůdnější řešení těchto problémových okruhů by se přitom mohlo nabízet paušální odmítnutí záporných vět, s tím, že existují jen věty kladné a zápor není záležitostí obsahu věty, ale jen řečového aktu, který s ním spojujeme. Negace nebo lépe popření věty je takto akt inverzní k aktu tvrzení, pro nějž lze po Fregově vzoru zavést nanejvýš speciální performátor:

$$\nvdash A.$$

Je ale otázka, zda se tím něco pozitivního získá, kromě toho, že se vyhneme tendenci považovat logické spojky za denotující, tj. mající nějaký mimojazykový význam (objekt). V rovině „přirozené“ sémantiky k problémům tohoto typu obvykle nedochází, neboť se v ní tradičně rozlišují výrazy na ty, které mají jako podstatná a přídavná jména vlastní význam, a ty, které jako zájmena či spojky slouží jen pro interní potřeby větné stavby. Z širšího sémanticko-filosofického hlediska je přitom možné hájit oba extrémy. Podle prvního jsou všechna slova synkategorematická, tj. platí tzv. *princip kontextuality*

(A) slova mají význam pouze v celku věty,

a nemá tak cenu hovořit o jejich samostatném významu. To je, jak víme, stanovisko sémantického holismu. Opačná teze, že všechna slova mají samostatný význam, tedy pozice sémantického atomismu, má tu výhodu, že dovoluje chápat významy celků jako vystavěné z významů částí v souladu s tzv. *principem kompozicionality.*[3] Ten budeme v dalším, zejména formálně-sémantickém výkladu používat i my, tj. budeme předpokládat, že každý jednoduchý výraz jazyka má nějaký dále specifikovaný samostatný význam a že:

[3] Oba principy formuloval Frege, viz Frege [1884, s. XI] a Frege [1892*b*, s. 35].

(B) význam výrazů složených je jednoznačně určen významy těch jednoduchých výrazů, z nichž je složen, a způsobu, jakým se tak stalo.

Tím ovšem nijak nepodepisujeme atomistický přístup k věci, neboť neříkáme, jak jsme k významům oněch jednoduchých částí dospěli, tj. je stále možné, že byly získány analýzou toho, jakou roli tyto výrazy hrály v kontextu věty či úsudku. Jaký význam přisoudíme logickým spojkám, včetně negace, uvidíme záhy.

4.3 Konjunkce a disjunkce

Konjunkce vyjadřuje, že obě věty, které spojuje, jsou pravdivé. Jedná se o prosté slučování těchto vět, tj. nepožadujeme, aby tyto věty spolu nějak obsahově souvisely. Větu

Václav je trémista a $2 + 3 = 4$

takto považujeme za dobrý případ věty formalizované jako

$\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}$.

Tento přístup platí pro všechny spojky, se kterými budeme pracovat. Naše konjunkce nevyjadřuje ani časovou následnost spojovaných vět, tj. pokud se rozhodneme pomocí této spojky formalizovat větu

(1) Václav nastartoval auto a odjel,

pak vyjádření sledu dějů ignorujeme a věta znamená totéž jako

(2) Václav odjel a nastartoval auto.

Konjunkce totiž vyjadřuje prostě pravdivost obou vět, a je tedy ve své pravdivosti nezávislá na tom, v jakém pořadí jsou uvedeny. Příslušná formalizace, přistoupíme-li k ní, proto může vést ke ztrátě relevantní informace. Podívejme se na další komplikace při dekódování obsahu dané věty, v níž může být skryta konjunkce. Máme-li formalizovat větu

(1) Sókratés a Aristotelés jsou filosofové,

rozepíšeme ji jako

(2) Sókratés je filosof a Aristotelés je filosof,

což můžeme formalizovat jako $\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}$. Tento postup však nelze aplikovat automaticky. Např. analogickým rozložením věty soužití psa a člověka trvá již 130 tisíc let

bychom získali větu zcela nesmyslnou. Velmi často se stane, že ve větě se vůbec nevyskytuje slovo „a“, a přesto je konjunkce vhodnou formalizací. Reformulujeme-li např. větu

(1) ani Karel, ani Petr nejsou trémisté

na

(2) Karel není trémista a Petr není trémista,

vidíme, že ji lze formalizovat jako $\neg \mathsf{p} \land \neg \mathsf{q}$, a že tedy v původní záporné větě spojka „a“ zmizela. Podobně se může konjunkce skrývat za slovy „ale“, „avšak“, „jenže“. Tyto spojky vyjadřují, že obě spojované věty jsou pravdivé, a navíc, že je mezi nimi jakýsi obsahový nesoulad. Pokud tento aspekt zanedbáme jako logicky irelevantní a nemající vliv na pravdivostní hodnotu věty, můžeme je formalizovat jako konjunkci. Příkladem mohou být věty:

snažil se mi pomoci, avšak nebylo to nic platné,

Petr přišel, ale už bylo pozdě,

myslel jsem, že přijde, jenže nepřišel.

Přistupme ale k další spojce. Disjunkce znamená, že alespoň jedna ze spojovaných vět je pravdivá. Nejedná se však o vyjádření vylučujících se alternativ, neboť celou větu budeme považovat za pravdivou, budou-li pravdivé obě její části. Představme si např. situaci, v níž bychom slyšeli Karla mluvit o svém sourozenci, aniž bychom věděli, zda se jedná o muže či ženu. Na tomto základě bychom mohli vyslovit větu:

Karel má bratra nebo sestru.

Kdyby byla pravda, že Karel má bratra i sestru, neznamenalo by to vzhledem k dané situaci nepravdivost naší věty. Jedná se tedy o nevylučující disjunkci, přesně v tom smyslu, v němž s ní budeme pracovat. Můžeme ji tedy formalizovat jako:

$\mathsf{p} \lor \mathsf{q}$.

Stejně tak žena, která slyší dlouho po půlnoci zvonek, může usoudit, že zvoní manžel nebo opilec, aniž by vylučovala pravdivost obou. Užije-li se v přirozeném jazyce spojky „nebo“ vylučujícím způsobem, jedná se z logického hlediska o jinou spojku (zkratku za „buď …, anebo …“). Nicméně tuto spojku lze lehce definovat pomocí konjunkce, disjunkce a negace. Větu buď si půjdu zahrát fotbal, anebo budu odpočívat,

o níž předpokládáme, že vylučuje současnou pravdivost obou svých částí, formalizujeme třeba jako

$(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge \neg(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$.

Definovatelnost nových spojek pomocí spojek základních však bude pozdějším tématem, viz zvláště oddíl 5.4. V souvislosti s rozdílem vylučující a nevylučující disjunkce vzniká obecnější otázka, která se týká logických výrazů jako takových, totiž zda v případech, kdy spojované věty nemohou být současně pravdivé, je tato nemožnost vyjádřena v samotné disjunkci (resp. v příslušném logickém výrazu), nebo zda spočívá v něčem jiném, mimologickém (např. v nějaké fyzikální teorii, která leží v základu našeho diskurzu). Třeba větu

klíče od auta mám na věšáku nebo v bundě

bychom mohli klidně formalizovat pomocí naší nevylučující disjunkce. To by však znamenalo, že nemožnost současné pravdivosti obou spojovaných vět (předpokládáme-li, že se jedná o jedny a tytéž klíče) ze samotné této věty nevyplývá, nýbrž vyplývá z nějaké jiné věty, kterou běžně předpokládáme a která vyjadřuje, že žádná materiální věc nemůže být v jednom čase na dvou různých místech. Dále existuje mnoho matoucích případů, jako je třeba následující věta:

(1) na poskytnutí příspěvku nebo půjčky není nárok.

Zde musíme být opatrní a sledovat, co se opravdu ve větě říká. Chybou by bylo přepsat ji takto:

(2) na poskytnutí příspěvku není nárok nebo na poskytnutí půjčky není nárok,

tj. formalizovat ji jako formuli $\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}$. Větu můžeme správně reformulovat dvěma různými způsoby. Jednak takto:

(3) na poskytnutí příspěvku není nárok a na poskytnutí půjčky není nárok.

Zde se nám ztratila spojka „nebo“. Zjevná je v druhé formulaci:

(4) není pravda, že je nárok na poskytnutí příspěvku nebo že je nárok na poskytnutí půjčky.

První z těchto verzí, tj. věta (3), je formalizována jako $\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}$, druhá, tj. věta (4), jako $\neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$. Brzy uvidíme, že i tyto dvě větné formy vyjadřují totéž, tj. jsou logicky ekvivalentní.

4.4 Implikace a ekvivalence

Snad nejdůležitější z našich spojek je implikace. Užším důvodem této důležitosti, který budeme záhy studovat, je její blízkost centrálnímu pojmu formální logiky – *vyplývání*. Obecným důvodem je její souvislost s úsudkem coby přechodem od nějaké věty A k nějaké větě B. Tento přechod činí implikace explicitním ve formě:

jestliže A, pak B.

Z toho plyne i její obecný význam podmínkového spojení dvou vět, kdy první, antecedent, tvoří podmínku pravdivosti té druhé, konsekventu, a zjevně platí, že v případě, kdy je antecedent pravdivý a konsekvent nepravdivý, musí být nepravdivá i celá implikace. Implikace v `KVL` je přitom tradičně pojata tak, že tento případ nepravdivosti příslušného větného spojení je případem jediným, tj. pokud nenastává tato situace, budeme považovat celou implikaci za pravdivou. Pro tento druh spojky se vžilo také označení *materiální implikace*.

Zaměřme se nyní na standardní námitku, že spojku v této podobě málokdy používáme. Vezměme si nějaký běžný případ, např. v rámci úvahy o něčem neznámém či o nějakém budoucím ději, o kterém nevíme, jak dopadne. Uvažme větu:

jestli sedím ve správném vlaku, pak budu v Praze někdy kolem druhé hodiny.

Představme si reálnou situaci, v níž tuto větu vyslovíme, a zamysleme se podrobně nad podmínkami její pravdivosti. Mohou zde nastat čtyři různé situace:

(a) sedím ve správném vlaku a v Praze budu někdy kolem druhé hodiny,

(b) sedím ve správném vlaku a v Praze nebudu někdy kolem druhé hodiny,

(c) nesedím ve správném vlaku a v Praze budu přesto někdy kolem druhé hodiny,

(d) nesedím ve správném vlaku a v Praze nebudu někdy kolem druhé hodiny.

Pokud by nastal první případ, řekli bychom, že se naše domněnka potvrdila, a tudíž byla pravdivá. Naopak druhý případ naše tvrzení vyvrací. Za této situace je nepravdivé. Problematický je třetí a čtvrtý případ, ale pokud bychom tuto větu skutečně vyslovili a věřili v její pravdivost, jistě bychom ji neoznačili za nepravdivou, kdybychom zjistili, že nesedíme ve správném vlaku. Je tedy smysluplné i v těchto případech považovat naši větu za pravdivou. Formalizace naší spojkou je tedy v těchto případech vhodná. Nyní se podívejme na případy problematické. Spojka „jestliže …, pak …“ bývá užívána k vyjádření obecných zákonů jako:

> jestliže se voda nachází v prostředí chladnějším než 0 °C, pak se začíná měnit na led.

Její přímočará formalizace do podoby

$$\mathtt{p} \to \mathtt{q}$$

ovšem zastře, že se věta nevztahuje na jednotlivé situace, jak tomu bylo v předchozím příkladě, ale na všechny fyzikálně možné případy, a že jsou tímto odkazem (referencí k téže „vodě“) obě věty věcně spojeny. Adekvátněji proto bude věta formalizována v predikátové logice, kde budeme mít k dispozici kvantifikátory. Materiální implikace při tom přijde také ke slovu, pouze struktura formule bude komplexnější.

Specifické problémy nastávají u tzv. *dispozičních vlastností*, jako je hořlavost, výbušnost, rozpustnost apod., které se nevykazují přímo empiricky, tj. nelze je obvykle najít čistě na věci samé. Souvisejí totiž až s její schopností (dispozicí) reagovat v jisté situaci jistým způsobem. Opět ponechme stranou zajímavý filosofický problém, zda v nějakém smyslu nejsou všechny vlastnosti vlastnostmi dispozičními a podívejme se na věty jako tato:

> tato jaderná elektrárna (Temelín) je výbušná.

Pokud bychom ji přepsali do následujícího tvaru

> jestliže dojde k takové a takové chemické reakci (nebo zemětřesení apod.), pak jaderná elektrárna vybouchne,

pak by v případě, že daný vztah uchopíme jako materiální implikaci, automaticky platila o všech jaderných elektrárnách, u nichž k dané reakci nedošlo, stejně jako by věta „tento nerost je rozpustný“ platila o všech nerostech, které ještě nebyly vhozeny do vody. Proto se obvykle předpokládá, že daný vztah vyjadřuje cosi jako nutnou platnost, tj. platnost ve všech možných situacích, v nichž dojde k podmínce vyjádřené v antecedentu. Má tedy vlastně podobu tvrzení:

> nutně platí, že jestliže A, pak B.

Takto modálně podpořené implikaci se říká *implikace striktní.* Zda je to vhodná formalizace, je samozřejmě otázka, neboť jednodušší se může zdát upravit rovnou původní implikaci tak, aby prosté nesplnění antecedentu k pravdivosti nevedlo. Prozatím se musíme každopádně spokojit s tím, že klasická výroková logika není nejšťastnějším prostředkem pro zachycení těchto vět. To však opět není vinou charakteru naší spojky, ale spíše vinou neschopnosti této logiky vyjádřit *explicitně* obecnost.[4]

Implikace má také v přirozeném jazyce mnoho alternativních vyjádření. Může být použita např. přípona „-li“ či slůvka „když ...“, „pokud ...“ atd. Dalšími použitelnými spojeními jsou „... jen tehdy, když ...“, „... pouze tehdy, když ...“ a řeč tzv. nutných a postačujících podmínek. Situaci si ilustrujeme na matematické větě:

(1) jestliže je daný trojúhelník rovnostranný, pak se shodují alespoň dva z jeho vnitřních úhlů.

Tato věta je pravdivá pro kterýkoli trojúhelník, a znamená tedy jistě něco jiného než věta

(2) jestliže se alespoň dva z vnitřních úhlů daného trojúhelníka shodují, pak je tento trojúhelník rovnostranný,

která v některých případech pravdivá není (konkrétně v těch, kdy se dva vnitřní úhly trojúhelníka shodují a třetí je odlišný). Formalizace (1) je $\mathtt{p} \to \mathtt{q}$, formalizace (2) $\mathtt{q} \to \mathtt{p}$. Nyní předvedeme, že vsunutí slov „jen tehdy“ (či „pouze tehdy“) před slovo „jestliže“ znamená obrácení směru implikace. Tvrzení (1) můžeme ekvivalentně vyjádřit také takto:

(1′) alespoň dva z vnitřních úhlů daného trojúhelníka se shodují, jestliže je tento trojúhelník rovnostranný.

Tvrdili bychom však něco odlišného, kdybychom řekli:

(2′) alespoň dva z vnitřních úhlů daného trojúhelníka se shodují jen tehdy, jestliže je tento trojúhelník rovnostranný.

Tato věta odpovídá tvrzení (2), protože protipříkladem na její obecnou platnost jsou opět přesně ty případy, v nichž se v daném trojúhelníku shodují právě dva z vnitřních úhlů, a tento trojúhelník tudíž není rovnostranný. Tedy obecně platí, že příslušné věty formalizujeme takto:

A jen tehdy, když B $\qquad\qquad A \to B$,

[4] K problému se vrátíme ještě v rámci logik modálních, zvláště v oddílu 20.3. Diskutována bude i souvislost modalit a obecnosti.

A, když B $\qquad B \to A.$

Důležité je v této souvislosti rozlišení tzv. nutné a postačující podmínky. *Postačující podmínka* odpovídá antecedentu implikace a *nutná podmínka* jejímu konsekventu. Věta (1) může být tedy vyjádřena dvěma dalšími ekvivalentními způsoby:

(3) nutná podmínka toho, že je daný trojúhelník rovnostranný, je, že se shodují alespoň dva z jeho vnitřních úhlů,

(4) postačující podmínka toho, že se shodují alespoň dva z úhlů daného trojúhelníka, je, že je tento trojúhelník rovnostranný.

Opět obecně platí následující přepisy:

B je nutná podmínka A $\qquad A \to B,$

B je postačující podmínka A $\qquad B \to A.$

Jak již bylo naznačeno v souvislosti s konjunkcí, chceme, aby si výrokové spojky udržely maximální možnou míru aplikovatelnosti. Neklademe tedy žádné omezující podmínky týkající se obsahu spojovaných vět. Tak ani v případě implikace nepožadujeme, aby antecedent časově předcházel konsekventu nebo byl jeho příčinou či důvodem. Spojované výroky spolu vůbec nemusejí souviset. Na čem záleží, je pouze jejich pravdivostní hodnota. A právě v případě implikace je tento přístup nejvíce kritizován.

Z toho totiž, jak jsme tuto spojku výše vymezili, plyne, že každý pravdivý výrok je implikován libovolným výrokem, a dále že libovolný výrok je implikován každým nepravdivým výrokem. Uvnitř našeho formálního systému se to projeví tak, že pro libovolné formule ϕ, ψ budeme považovat následující dvě formule

$$\phi \to (\psi \to \phi) \qquad\qquad \neg\phi \to (\phi \to \psi)$$

za tzv. *logicky pravdivé*.[5] Tyto jevy bývají označovány jako *paradoxy materiální implikace*. Vezmeme-li v úvahu, jak byla tato implikace vymezena a jaký je současný stav světa, dostáváme rovněž pravdivost následujících vět:

jestliže Zemi podpírají sloni stojící na velké želvě, pak je Praha hlavním městem České republiky,

jestliže Platón nebyl filosof, pak Zemi podpírají sloni stojící na velké želvě.

[5] Logickou pravdivost řádně definujeme v kapitole 6.

Mnozí by je ovšem považovali spíše za nesmyslné a nepokládali by je za výroky, tj. tvrdili by, že těmto větám nenáleží žádná pravdivostní hodnota. Silným důvodem pro takové pojetí může být pragmatický pohled na věc. Není totiž nijak zřejmé, v jaké situaci by tyto věty mohly být smysluplně použity.

My však nebudeme nijak předem vymezovat přesné hranice smysluplnosti, což by byl extrémně obtížný úkol vzhledem k množství faktorů, které by zde mohly vstoupit do hry. Chceme naopak, aby hranice aplikovatelnosti logiky byly co nejširší. Pro ilustraci toho, že spojování obsahově nesouvisejících vět není cizí ani přirozenému jazyku, můžeme uvést např. větu:

jestli já jsem komunista, pak ty jsi papež.

Opět se ptejme, v jaké situaci by tato věta mohla být vyslovena. Zřejmě tehdy, kdy by mluvčí chtěl vyjádřit, že první ze spojovaných výroků není pravdivý. Sledujme však, jakým nepřímým způsobem by to udělal. Předpokládal by, že druhý výrok je nepravdivý a že o tom ví ten, komu to říká. Vyslovení celé věty by pak znamenalo, že tvrdí, že celá implikace je pravdivá. Protože je implikace pravdivá a její konsekvent je nepravdivý, musí být nepravdivý i antecedent. Celé to vlastně kopíruje logicky platný úsudkový postup výrokové logiky, jenž je variantou *modu ponens* známou jako *modus tollens*:

$$\begin{array}{l} \text{jestliže platí } A\text{, pak platí } B\text{,} \\ \underline{\text{neplatí } B} \\ \text{neplatí } A. \end{array}$$

Jeho platnost ale není důsledkem ničeho jiného nežli interpretace užitých spojek a sémantických principů spjatých s `KVL`, významně tedy principu pravdivostního. Při troše námahy lze najít také příklady vět, jejichž části vnitřně souvisí a materiální implikace u nich dává oporu soudům, které by jako přirozené posuzovány nebyly.

`Příklad 4.4.1:` Předvedeme sémantickou verzi důkazu Boží existence. Ta vychází z následující plauzibilně znějící věty

(†) jestliže Bůh neexistuje, pak není pravda, že modlím-li se, mé modlitby budou vyslyšeny,

kterou lze snadno formalizovat takto

$$\neg \mathtt{p} \rightarrow \neg(\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r}).$$

Z předpokladu, že se nemodlím čili že neplatí $\mathtt{q}$, lze nyní snadno usoudit na platnost $\mathtt{p}$, tedy větu, že Bůh existuje, neboť neplatí-li $\mathtt{q}$, je celá implikace $\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r}$ coby výraz materiálního kondicionálu pravdivá a její negace $\neg(\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r})$ nepravdivá. Aby mohla být nyní celá věta (†) pravdivá, musí být – opět z definice materiálního kondicionálu – při nepravdivosti konsekventu nepravdivý i její antecedent čili $\mathtt{p}$ musí být pravda.

Tím považujme naše rámcové poznámky k (materiální) implikaci za skončené, k problematice se ovšem budeme vyjadřovat průběžně. Poslední ze spojek KVL je ekvivalence. Ta ovšem nepředstavuje řádově jiný problém nežli právě probraná implikace, je jen jakýmsi jejím neproblematickým rozšířením. Ekvivalence vyjadřuje, že oba ze spojovaných výroků mají stejnou pravdivostní hodnotu a v tomto ohledu má stejný význam jako oboustranná implikace, tj. konjunkce implikace v jednom směru s implikací v druhém směru:

$$(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi).$$

Tomu také odpovídá přepis:

$$(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\phi \rightarrow \neg\psi).$$

V přirozeném jazyce se často ekvivalence skrývá za pouhou implikací. I zde je vše ale otázkou dalších rozhodnutí. Vezměme si následující případ. Vysloví-li někdo větu

(1) když mi dají výplatu, zaplatím ti pivo,

cítíme v ní, přes její formu prosté implikace, skrytý nevyřčený dodatek

(2) když mi výplatu nedají, pivo ti nezaplatím.

Otázkou nyní je, zda máme tento dodatek zahrnout do formalizace a formalizovat tak větu jako ekvivalenci

$$\mathtt{p} \leftrightarrow \mathtt{q},$$

či se držet jejího doslovného znění a uchopit ji jako $\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}$. Rozhodnutí, které tak musíme učinit, je ekvivalentní rozhodnutí, zda by se původní věta stala nepravdivou v situaci, kdy by dotyčnému výplatu nedali, a on by přesto zmíněné pivo zaplatil. Zdá se, že takovou situaci si lze lehce představit. Dotyčný se např. může k peněžnímu obnosu dostat jiným způsobem. Původní věta se proto nestala nepravdivou a vhodnější je formalizovat ji jako implikaci. Avšak nelze říci, že by takovéto případy byly zcela jednoznačné. Většinou je do problému opět zahrnuta pragmatická stránka výpovědi. Vezměme jiné příklady:

> v autobusu mohu jet bez místenky pouze tehdy, když není plně obsazen lidmi, kteří místenku mají,
>
> auto si koupím jen v případě, že udělám zkoušky.

Plyne z těchto vět, že není-li autobus plně obsazen lidmi s místenkou, mohu v něm jet bez místenky, resp. že udělám-li zkoušky, koupím si auto? Zdá se, že ano, ale pouze z toho důvodu, že kdyby tomu tak nebylo, neviděli bychom praktický smysl takto vyslovené věty. Za jistých okolností by bylo vhodné chápat tyto věty jako ekvivalence (např. v případě, že by první věta byla uvedena v nějakých předpisech). Avšak opět zde narážíme na mnohoznačnost přirozeného jazyka.

Ekvivalence se také často objevuje v souvislosti s obecností, s tím, že nějaké dvě situace nastávají vždy současně, a v `KVL` tak můžeme čelit analogickým problémům jako v případě implikace. Ekvivalence se také používá v definicích, tj. v takových specifických větách, jejichž znalost nemá rozšiřovat naše poznání, ale náš slovník, jako třeba:

> sloučenina je karboxylová kyselina právě tehdy, když obsahuje skupinu `-COOH`.

Uchopení ekvivalence jako oboustranné implikace vede k tomu, že tuto spojku vyjadřujeme také pomocí obratu „… tehdy a jen tehdy, když …“ či že mluvíme o „nutné a postačující podmínce“, jako např. ve větách:

(1) číslo a je dělitelné šesti tehdy a jen tehdy, když je dělitelné dvěma a zároveň třemi,

(2) nutnou a postačující podmínkou pro to, aby bylo přirozené číslo a dělitelné šesti, je, že je dělitelné dvěma a zároveň třemi.

Uvědomme si zde, že tato věta je skutečně pravdivá pro každé přirozené číslo; pro takové, které dělitelné šesti je, i takové, které dělitelné šesti není (takové číslo pak není dělitelné dvěma nebo není dělitelné třemi).

4.5 Interpretace formálního jazyka

Užívání slova „interpretace“ v logice si zaslouží objasňující poznámku. Neměli bychom smyslu tohoto slova rozumět jako hledání skrytého a předem přítomného významu, spíše se zde jedná o *udělování* jednoho z možných významů. I to může samozřejmě vypadat podezřele a připomínat pojetí významu, které kritizuje Wittgenstein v úvodu svých *Filosofických zkoumání*, pojetí připisované svatému Augustinovi, které má za to, že výuka jazyku spočívá v pojmenovávání předem daných významů, typicky předmětů.[6] Wittgensteinova námitka je známá: tato teorie skrytě předpokládá, že dítě už jazyk fakticky umí,[7] a slova jsou mu tedy objasňována stejným způsobem jako v explicitní definici „A je B“, kde je zcela zřejmé, co je B, a zcela otevřené, co je A.

Tím se ocitáme v problémové situaci, kterou jsme popsali na začátku knihy. Naše momentální pozice je ale přesto jiná, a to v tom, že se na základě předchozího výkladu k plné znalosti jazyka explicitně přiznáváme a proces interpretace vedeme z hlediska plně kompetentních uživatelů jazyka. Ve vztahu k problému smysluplného určení významu v obratech jako „A je B“ se tím nic nemění, protože jazyková kompetence není stav, ale proces, který se vyvíjí mj. právě systematickou reflexí a pokusy o jeho schematizaci, jako je tento. Můžeme si tedy dovolit předpokládat obojí, totiž (1) že jazyk známe a (2) že ho dalším upřesňováním, třeba v procesech interpretace, dále rozvíjíme a poznáváme, také co do jeho možností. Po těchto poznámkách přistupme k vlastnímu popisu interpretace v rámci `KVL`.

V každém formálním logickém jazyce je základní slovník rozdělen na *logické výrazy* a *mimologické výrazy*. Dále jsou v něm ještě *pomocné symboly*, které ale nyní ponecháme stranou. Ve vymezení sémantiky bude logickým výrazům přidělen konstantní význam nezávisle na interpretaci. Naproti tomu mimologické výrazy si ponechají jistou významovou otevřenost, a budou tedy interpretaci podléhat. V jazyce `KVL` jsou výrazy rozděleny takto:

logické symboly	výrokové spojky,
mimologické symboly	výrokové proměnné.

V pojmu proměnné, který systematicky užíváme, se obráží právě ona zmíněná interpretovatelnost různými významy. Vezměme si např. formuli:

$$(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee \mathtt{r}.$$

Prozatím to je řetězec symbolů, který nemá žádný význam. Vyslovíme-li tuto formuli, nic tím netvrdíme. Chceme-li ji nyní interpretovat, tj. převést na větu přirozeného jazyka, můžeme přiřadit výrokovým proměnným $\mathtt{p}$, $\mathtt{q}$ a $\mathtt{r}$ libovolné elementární výroky, např.

$\mathtt{p}$ = Krumlov je perla jižních Čech,

[6] Wittgenstein [1953, § 1].
[7] Wittgenstein [1953, § 32].

$\mathtt{q} = 2 + 2 = 5,$

$\mathtt{r} =$ kardinál Ratzinger je Benedikt XVI.

Avšak v případě výrokových spojek podobnou libovůli nemáme. Následující přiřazení je již dáno:

$\wedge$ … a …,

$\vee$ … nebo …

Získáváme tak větu:

> Krumlov je perla jižních Čech a $2 + 2 = 5$ nebo kardinál Ratzinger je Benedikt XVI.

Již nás nepřekvapí, že spojené výroky spolu nijak nesouvisí. Větu, kterou jsme po interpretaci získali, chápeme jako dobře utvořenou a smysluplnou, tj. něco vypovídající, pravdivou nebo nepravdivou. Ve skutečnosti víme, že je tato věta pravdivá, protože kardinál Ratzinger je Benedikt XVI., a tedy je splněna podmínka, že alespoň jedna z vět spojovaných spojkou „nebo“ je pravdivá. Dále nás nepřekvapí, že se věta stala víceznačnou, protože v tomto případě nemáme po ruce jednoduché syntaktické prostředky (přirozeného jazyka), které by odpovídaly uzávorkování formule. V případě potřeby bychom ale jistě našli způsob, jak větu opsat tak, aby nejednoznačnost – alespoň do nějaké míry – vyloučila.

Protože nepožadujeme věcnou souvislost a protože pro pravdivostní hodnotu celé věty je podstatná pouze pravdivostní hodnota jejích částí, učiníme nyní jedno poměrně radikální opatření a redukujeme celý význam věty na její pravdivostní hodnotu. Tento krok podnikl sám zakladatel moderní logiky Frege. Význam věty ztotožnil nejprve s tím, co se tradičně nazývalo jejím *obsahem*, jejž nazýval obsahem souditelným (*beurtheilbarer Inhalt*),[8] aby od něho pak ve finále odhlédl a z logického hlediska uznal za relevantní pouze okolnost, že je takovýto soud jednoznačně pravdivý, či nepravdivý.[9] Zpočátku přitom namísto s pojmy pravdivosti a nepravdivosti operoval s pragmatickými termíny *potvrditelnosti* a *popření*, jak to názorně ukazuje jeho zavedení materiální implikace. Citujeme:

> „Znamenají-li A a B souditelné obsahy, máme zde následující čtyři možnosti:
>
> (1) A je potvrzen a B je potvrzen,

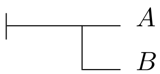
[8] Frege [1879, § 2].

[9] Tento přechod komentuje Frege [1893/1903, díl I, s. X, příp. § 2].

(2) A je potvrzen a B je popřen,

(3) A je popřen a B je potvrzen,

(4) A je popřen a B je popřen.



nyní znamená soud, že třetí z těchto možností neplatí, ale že platí jedna ze tří zbývajících.“[10]

Toho, že se při nahrazení pragmatického potvrzování a popírání obsahů ontologickými pojmy pravdivosti a nepravdivosti jedná o kontroverzní krok, si byl přitom Frege plně vědom, a proto také později vedle *významu* výrazu začal operovat i s jeho tzv. *smyslem* coby způsobem, jímž je nám význam dán.[11] Jelikož je nyní významem věty pravdivostní hodnota, jsou pro Frega smyslem příslušné pravdivostní podmínky, resp. způsob, jak je nám pravdivostní hodnota věty dána, resp. jak dospějeme od významu jejích částí k významu celku. Ten se u komplexních vět téže pravdivostní hodnoty může samozřejmě značně lišit. Je třeba zřejmé, že pravda podaná jako disjunkce se liší od pravdy podané jako implikace. U elementárních výroků v `KVL` ovšem zjevně žádné rozdíly smyslů neexistují, tj. věta je buď pravdivá, nebo nepravdivá, a jiný rozdíl nevidíme.

Jelikož se ztotožněním významu věty s pravdivostními hodnotami vzdalujeme obvyklému úzu, hovořme nyní raději v dalších sémantických úvahách o formálním významu.

`4.5.1 Definice (Formální význam věty):` *Formální význam věty je vždy jedna z pravdivostních hodnot, tedy buď pravda, kterou budeme značit číslicí* `1`*, nebo nepravda – tu označíme číslicí* `0`*. Ve vlastním textu se k těmto hodnotám někdy odkazuje také jako k „jedničce“ a „nule“.*

V důsledku toho mají všechny pravdivé věty tentýž význam a všechny nepravdivé též. Interpretací formule bude tedy nyní nějaké ohodnocení proměnných pravdou a nepravdou. U výše uvedené formule $(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee \mathtt{r}$ tak získáváme posloupnost:

$\mathtt{p} = 1$ $\qquad\qquad$ $\mathtt{q} = 0$ $\qquad\qquad$ $\mathtt{r} = 1.$

[10] Frege [1879, § 5].
[11] Frege [1892*b*].

Všimněme si, že se tím možnost stejné interpretace různých proměnných stává prakticky nevyhnutelná, tj. musíme zpětně operovat i s možností formalizovat dvě stejné elementární věty různými proměnnými, jak to bylo zmíněno v oddílu 4.1.

4.6 Pravdivostní funkce

Ve formuli jsou kromě proměnných také logické spojky. Je proto třeba vysvětlit, co na formálně-sémantické úrovni odpovídá jim. To je, jak jsme zmínili, zprvu obtížné zodpovědět právě pro jejich synkategorematickou povahu. Zaměříme-li se proto raději na roli, jakou mají hrát ve větách, můžeme dojít k závěru, že mají spojovat věty do vět takovým způsobem, že lze pravdivost jedněch odvodit z pravdivosti druhých, totiž pravdivost komplexních vět z pravdivosti vět jednodušších. To je tzv. *funkcionální* vztah. Řeč o funkcích byla přitom právě v tomto kontextu do sémantiky zavedena Fregem a je pro moderní logiku charakteristická. Setkáme se s ní opakovaně na mnoha úrovních. Zatím stavíme především na obecné zkušenosti s matematickými pojmy. K řádnému zavedení dospějeme až později v souvislosti s logikou predikátů a částečně při výkladu některých partií teorie množin.[12] Vzhledem k důležitosti pojmu funkce uveďme několik objasňujících poznámek. Nejprve se pokusíme o obecnou definici či spíše vysvětlení doprovozené několika příklady.

4.6.1 Vysvětlení (Funkce): *Přiřazení f, které libovolné uspořádané n-tici prvků nějaké množiny M přiřadí právě jeden objekt, se nazývá n-argumentová funkce. Jestliže $x_1, \ldots, x_n$ jsou argumenty této funkce (tj. prvky množiny M) a y je objekt, který funkce f těmto argumentům přiřazuje, píšeme $f(x_1, \ldots, x_n) = y$.*

Klasickým příkladem 2-argumentové funkce je sčítání reálných čísel, protože přiřazuje každé dvojici těchto čísel právě jedno reálné číslo. Označíme-li tuto funkci jako f_+, můžeme psát:

$$f_+(1,4) = 5,\ f_+(20,45) = 65 \text{ atd.}$$

Druhá mocnina je 1-argumentová funkce, neboť přiřazuje každému reálnému číslu právě jedno reálné číslo. Označíme ji f_{sq}. Pak platí:

$$f_{sq}(2) = 4,\ f_{sq}(5) = 25 \text{ atd.}$$

[12] Viz oddíl 12.3.

1-argumentovou funkcí je ale také např. pokrevní otcovství. Každému člověku je přiřazen právě jeden jeho pokrevní otec. Mohli bychom např. psát:

$$f_{\text{otec}}(\text{Karel IV.}) = \text{Jan Lucemburský}.$$

Pokrevní bratrství už funkcí není, protože někteří lidé mají více než jednoho bratra, někteří nemají bratra žádného – ti všichni porušují podmínku, že argumentu či argumentům musí být přiřazena právě jedna hodnota.[13] Nyní se vraťme k interpretaci našich formulí, modelované na obvyklé praxi ohodnocování formulí aritmetiky. Výraz

$$x \times y$$

chápeme jako aplikaci funkce přiřazené symbolu $\times$, což je, jak víme, standardně funkce násobení, na ohodnocení proměnných x a y. Máme-li následující sémantická přiřazení

$$x = 2 \qquad \times = f_\times \qquad y = 3,$$

je zřejmé, že význam přiřazený celému výrazu bude 6, neboť $f_\times(2,3) = 6$. Podobnost s interpretací symbolů výrokové logiky je markantní. Máme-li výraz

$$\mathtt{p} \wedge \mathtt{q},$$

získáme přiřazením

$$\mathtt{p} = \mathtt{1} \qquad \wedge = f_\wedge \qquad \mathtt{q} = \mathtt{1}$$

hodnotu `1`. Každá ze spojek takto funguje jako tzv. pravdivostní funkce, tj. operuje na pravdivostních hodnotách a na základě vstupních hodnot počítá hodnoty výstupní.

`4.6.2 Definice (Pravdivostní funkce):` *Funkce přiřazující pravdivostní hodnoty n-ticím pravdivostních hodnot se nazývá n-argumentová pravdivostní funkce.*

Např. konjunkce je 2-argumentová pravdivostní funkce, která přijímá dvojice hodnot, a jsou-li obě tyto hodnoty pravda, vrátí nám též hodnotu pravda, ve všech ostatních případech dává hodnotu nepravda. Protože možných argumentů pravdivostních funkcí je vždy konečný počet, lze je charakterizovat pomocí tabulky, která udá, jakým argumentům jsou přiřazeny jaké hodnoty. Pro případ negace máme tabulku dvouřádkovou

[13] Podrobně se příklady, jako je tento, budeme zabývat v oddílu 18.3.

x	$f_\neg(x)$
1	0
0	1

a čtyřřádkovou pro případ ostatních spojek

x	y	$f_\wedge(x,y)$	$f_\vee(x,y)$	$f_\rightarrow(x,y)$	$f_\leftrightarrow(x,y)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Takto již můžeme snadno definovat, co je formální význam logické spojky.

`4.6.3 Definice (Formální význam spojek):` *Formální význam spojky* $\neg$ *je* 1*-argumentová funkce* $f_\neg$ *a formální významy spojek* $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ *jsou* 2*-argumentové funkce* $f_\wedge, f_\vee, f_\rightarrow$ *a* $f_\leftrightarrow$.

Podíváme-li se pro ilustraci na význam spojky $\vee$, předchozí definice nám říká, že se jedná o 2-argumentovou funkci, jejíž argumenty jsou pravdivostní hodnoty a o níž platí $f_\vee(\mathtt{1},\mathtt{1}) = \mathtt{1}$, $f_\vee(\mathtt{1},\mathtt{0}) = \mathtt{1}$, $f_\vee(\mathtt{0},\mathtt{1}) = \mathtt{1}$ a $f_\vee(\mathtt{0},\mathtt{0}) = \mathtt{0}$, tedy že dává jedničku, když alespoň jeden z jejích argumentů je jedna. Všimněme si také, že implikace je skutečně nepravdivá pouze v případě, že první argument je pravda a druhý nepravda. Je přitom zřejmé, že např. sčítání bychom podobným způsobem definovat nemohli, protože dvojic čísel, které jsou argumenty této funkce, je nekonečně mnoho. Potřebovali bychom k tomu tudíž nekonečně velkou tabulku:

x	y	$f_+(x,y)$
1	1	2
1	2	3
2	1	3
2	2	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Konečnost příslušných tabulek – a *de facto* tedy přiřazovaných formálních významů – je mimořádně velká výhoda výrokové logiky, kterou již logika predikátová nemá. Sama o sobě nás vrací k zamyšlení nad tím, že osvojení si významu nemůže spočívat v prostém přiřazení nějaké entity ke konvenčně zvolenému výrazu, protože není jasné, jak by tento proces v nekonečných případech, jako je operace sčítání, vlastně vypadal. Uvědomíme-li si, že většina významů, třeba slova „kočka“, je ve svém použití nekonečná potenciálně, dostaneme zobecnění celého problému daleko za specifický případ matematiky. Rozvedeme ho v dalším oddílu. Matematický kontext nám momentálně dovoluje nahlédnout, jak lze v případě, že již nějaké významy osvojené máme, tvořit významy nové, opět v potenciálně nekonečném množství. Aritmetické funkce lze totiž různě skládat a vytvářet tím další funkce. Např. 3-argumentovou funkci f můžeme definovat tak, že každé trojici reálných čísel přiřadíme reálné číslo podle následujícího předpisu:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_\times(f_+(x_1, x_2), x_3) = (x_1 + x_2) \times x_3.$$

Tak jsme složením dvou funkcí dostali funkci třetí, pro niž platí např.:

$$f(1, 2, 3) = (1 + 2) \times 3 = 9.$$

Totéž lze dělat i s funkcemi pravdivostními, které tak odpovídají komplexním formulím. Formuli vlevo např. odpovídá funkce vpravo:

$$(\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \vee \neg\mathtt{r} \qquad\qquad f_\vee(f_\to(x, y), f_\neg(z)).$$

Podobnost aritmetických a logických operací jde mnohem dál, proto se také konjunkci říká logické násobení a disjunkci logické sčítání. Důvodem je již to, že kopírují odpovídající aritmetické operace na hodnotách `0`, `1`, tj. pro x a y nabývajících hodnot `0`, `1` platí:

$$f_\times(x, y) = f_\wedge(x, y) \qquad\qquad f_+(x, y) = f_\vee(x, y).$$

Výjimku tvoří „sčítání“ dvou `1`, kdy pro logický případ dostáváme

$$f_\vee(\mathtt{1}, \mathtt{1}) = \mathtt{1},$$

nikoli 2. Platí také některé aritmetické zákony, např. komutativita či asociativita, k nimž se ještě dostaneme později, zejména v oddílu 8.5, kde se budeme věnovat i vybraným historickým okolnostem srovnání logických a aritmetických operací. Několik poznámek filosofického a historického charakteru týkajících se interpretace výrokových spojek učiňme ale ještě teď.

4.7 Hypotetické a disjunktivní soudy

Ačkoli je výroková logika velmi malým fragmentem toho, co se dnes nazývá logikou klasickou a co Frege v jednom kuse podal ve svém *Pojmovém písmu*, považoval Łukasiewicz ještě v polovině třicátých let ve své pionýrské práci o dějinách výrokové logiky[14] za nutné zdůraznit to, „co se dokonce ani v Německu nezdá být obecně známo, totiž že zakladatelem

[14] Łukasiewicz [1935, s. 112].

moderní výrokové logiky je Gottlob Frege". Zároveň v ní upozornil na odkaz stoiků, jenž byl do té doby rovněž opomíjen ve prospěch Aristotelovy sylogistiky, a to zejména díky vlivu Carla Prantla, jenž ve svých *Dějinách západní logiky* odepsal stoickou logiku jako hloupou a triviální.[15] Vedle nedostatku přímých pramenů zde byla nepochybně důvodem také řevnivost peripatetické a megarsko-stoické školy, která se přenesla i do vyjádření pozdějších učenců, a to ve prospěch první z nich. V logice se mezi nimi podle všeho vedl vášnivý a dlouhotrvající spor o prioritu, resp. nadřazenost či podřazenost Aristotelova kategorického sylogismu, v němž jsou k sobě vztahovány pojmy, sylogismu hypotetickému, v němž se pracuje s celými větami. Z dnešního hlediska se zdá být tato hádka samozřejmě malicherná, a lze se proto domnívat, že za ní bylo více, než se moderním očím zdá.[16]

Tvrzení, že i Aristotelés používal a vlastně musel ve svých úvahách používat hypotetické úsudky, nelze brát přitom jako vážný argument, neboť takto by byly již všechny logické systémy dávno vynalezeny skrze své potenciální vnoření do přirozeného jazyka. Významnou roli zde proto hraje Łukasiewiczův postřeh,[17] že rozdíl obou škol nespočívá ani tak v typu studovaných úsudků, jako spíše v rozdílnosti systematického využívání proměnných (schematických písmen) pro slova pojmová v případě Aristotelově a pro věty v případě stoiků. U těch druhých tak můžeme najít úsudky, resp. úsudková schémata jako

jestliže první, pak druhé,
první
tedy druhé,

případně

buď první, nebo druhé,
ne druhé
tedy první.

S tím je spojen i explicitní nárys sémantiky příslušných spojek. V případě implikace zde máme její faktické vymezení dříve zmíněným materiálním stylem, v němž je nepravdivá právě tehdy, když je antecedent (první věta) pravdivý a konsekvent (druhá věta) nepravdivý, jinak je vždy pravdivá. Jelikož je toto vymezení připisováno Filónu z Megary, nazývá se tento typ implikace také *implikace filónská*, přičemž logika stoické školy byla

[15] Prantl [1855–1867, s. 408].
[16] Srov. k tomu třeba Frede [1987, kap. 6].
[17] Łukasiewicz [1935, s. 111].

známa právě diskusemi o povaze kondicionálu. V nich se příležitostně přechýlila také ke zmíněnému konceptu modálně posílené, tzv. striktní implikace. Separátně bylo pak drženo pojetí kauzální. Vedle implikace nacházíme u stoiků ze spojek ještě disjunkci, a to ve vylučujícím pojetí (i když existují i náznaky pojetí nevylučujícího), dále konjunkci a negaci. Co se týče tradice aristotelské, v ní najdeme primárně schémata typu

$$\frac{\begin{array}{l}\text{každé } A \text{ je } B,\\ \text{žádné } B \text{ není } C\end{array}}{\text{žádné } A \text{ není } C,}$$

jejichž platnost závisí na vztahu užitých pojmů A, B, C a jejich kvantifikaci, a teprve odvozeně na vztazích jednotlivých vět. Vztahy mezi větami každopádně nejsou dále explikovány, tj. neexistuje zde markantní rozdíl mezi větou

(1) $A \to B$

coby objektovým tvrzením a úsudkovým schématem

(2) $\dfrac{A}{B},$

které uvedená věta nějakým způsobem zachycuje. To je v jistém smyslu problém, neboť na rozdíl od věty (1) není příslušné schéma (2) něčím, co bychom přímo tvrdili či popírali spolu s větami A, B, ale tím, co s nimi děláme a co, má-li to být zachyceno v jazyce, vyžaduje vhodný metajazyk. Ten v našem případě čítá vertikální zápis obou vět a jejich oddělení čarou.

Spojitost logických spojek coby částí objektového jazyka s původní usuzovací praxí je ale podstatná právě s ohledem na otázku, zda ony spojky denotují, tj. označují něco samostatně, a v širších souvislostech pak s problematikou řízení se pravidlem. Podle našeho výkladu z předchozích oddílů bychom totiž větě tvaru

$$A \wedge B$$

měli rozumět proto, že známe její konstituenty, totiž obsah, resp. pravdivost vět A, B a význam spojky $\wedge$, jenž byl identifikován s příslušnou pravdivostní funkcí. U aritmetického výrazu

$$M + N$$

to zcela obdobně vede k předpokladu znalosti termů M, N a funkce sčítání, jejíž tabulka je ovšem nekonečná. Nelze tedy očekávat, že by se ten, kdo ovládl sčítání, naučil tabulku jako celek, řádek po řádku, ale jen v nějakém potenciálním, ne čistě ontologickém smyslu. Je přitom zřejmé, že tento smysl musel postupovat přes uchopení celých vět typu

$$1 + 2 = 3,\ 2 + 2 = 4,\ 3 + 4 = 7,\ \ldots,$$

neboť lze vyloučit, že by se někdo funkci sčítání naučil zcela abstraktně, bez sčítání konkrétních čísel. To je jasný poukaz k doktríně větného holismu, neboť ani význam jednotlivých číslovek nelze oddělit od jejich aritmetické funkce něčeho, co slouží k počítání, sčítání a násobení.

To, co tematizuje Wittgenstein ve svých *Filosofických zkoumáních* pod hlavičkou „řízení se pravidlem", se nyní týká již naznačeného problému:

> Jak je možné, že jsem se něco nekonečného, jako je funkce sčítání, naučil na konečně mnoha případech? Jak s ohledem na to ohlídám, že tuto funkci v konkrétním případě používám správně, tj. v souladu s tím, co se ode mě očekává? Jak vím, že ten, kdo sečetl čísla M a N, je sečetl správně, když všichni lidé dohromady provedli k danému okamžiku vždy jen konečné množství součtů, tj. všechny tabulky sčítání, které jsme napsali, skončily vždy nějakým řádkem?

V empirickém smyslu, v němž je platnost nějaké věty ospravedlněna srovnáním jejího předchozího výskytu v kanonické „tabulce", nemáme evidentně co s čím porovnat. Řešení tohoto problému spočívá v následující reformulaci: Osvojení si významu nějakého výrazu, např. znaménka $+$, není primárně záležitostí nahlédnutí či prostého přiřazení jedné entity entitě druhé, nýbrž záležitostí získání jisté dovednosti, připojení se k jisté praxi, která obnáší schopnost řídit se pravidlem sčítání. Nelze ji přitom oddělit od pozitivních a negativních sankcí, které regulují správnost a nesprávnost použití daného pravidla. Tím je dán i ontologicko-epistemický status rozlišení, které je v daném pravidle artikulováno. Na jedné straně to znamená, že kdyby nebylo příslušné praxe, nebylo by ani funkce sčítání a vůbec žádného rozlišení, na druhé straně, že je i tento – relativně pevný – pojem stále v nějakém smyslu jen rozlišením zavedeným pro naše účely. Jako takové je inherentně nejisté, vágní a otevřené dalším specifikacím, i když zatím v posuzování jeho aplikace jako správné či špatné docházelo obvykle k takřka jednoznačné shodě.

V tomto momentu je pro nás určující postřeh, že výrazy jako $+$ či $\rightarrow$ nejsou jmény nějakých prefabrikovaných entit či částí univerza, ale výrazy spontánní činnosti vedoucí k ovládání a spoluvytváření skutečnosti, v tomto případě tedy k počítání a měření empirického světa a k vedení úsudků, které se ho týkají. Wittgensteinovo rané prohlášení z *Tractatu*

> „mou základní myšlenkou je, že ‚logické konstanty' nezastupují"[18]

je tedy kromě jasné anticipace klíčových témat jeho pozdní filosofie také jasným přihlášením se k zásadám Kantova transcendentalismu. Podle nich není soud pouhým otiskem předem dané skutečnosti, ale až produktem spontánní aktivity lidské mysli spočívající ve spojování představ (reprezentací), případně vět, které tyto představy (názory a pojmy) zahrnují.

Kantova tabulka kategorií coby rozumových funkcí, které souzení zjednávají, tj. zajišťují jednotu různých pojmů (souzeného) v jednom soudu, a kterým pak odpovídají různé typu soudů, je pokusem o shrnutí dosavadní tradice a zároveň o systematické vyčerpání, úplnou dedukci všech možností dané jednoty. Základem je přitom dialektická představa, podle níž k poznání dochází až spojením dvou světů, smyslového světa jednotlivin, jimž na úrovni reprezentací odpovídá *názor* čili jedinečná představa, např. tohoto kamene, a rozumového světa obecných *pojmů*, např. právě kamene, žuly či bělosti. Pojmy přitom nejsou chápány jako samostatné objekty (platónské ideje či aristotelské substance), ale právě jako momenty objektivního poznání, tj. nejsou to stavební kameny poznání, ale jeho konstitutivní předpoklady, dedukované z faktu, že je takovéto poznání vůbec možné. Tím je na pravou míru uvedena atomisticky vyznívající představa, že pojmy aktu souzení, který je pořádá, v nějakém smyslu předcházejí. Kant také výmluvně píše:

> „jediné, co může rozum [resp. *Verstand*, překládaný jako „rozvažování"] dělat s pojmy, je soudit s nimi."[19]

V duchu zmíněné dialektiky světa smyslů a světa rozumu platí, že má-li mít soud nějaké opodstatnění, musí se skrze užité pojmy nějak vztahovat k smyslovému předmětu. V bezprostřední rovině se tento vztah objevuje v rámci percepčních soudů typu

> toto (je) P,

kde je příslušný smyslový předmět přímo zastoupen příslušným názorem („toto") a jeho podřazením pod pojem P. Na tomto „proto-soudu" jsou založeny všechny způsoby, jimiž se mohou pojmy v „plnohodnotných" soudech složených vždy ze dvou pojmů vztahovat k objektům. Rámcově je pak lze schematizovat do čtyř typů zobrazitelných přehledně v tabulce

[18] Wittgenstein [1922, § 4.0312].

[19] Kant [1781/1787, A 68/B 94].

4.2.[20] V typu (1) se pojem vztahuje ke zkušenosti v subjektu soudu skrze příslušný percepční soud „toto (je) S". V případě (2) je pojem predikátem soudu o smyslovém objektu. V případě (3) je predikátem soudu, jehož subjektem je rovněž pojem, jenž se k předmětu vztahuje nepřímo, skrze své instance typu „toto (je) S", „tamto (je) S" atd. V případě (4) se pojem vztahuje k předmětu skrze řetězec dalších soudů, jako je třeba výše uvedený, a skrze následnou inferenci: tedy S je P.

(1) toto **S** je P

(2) toto S je **P**

(3) (každé) S je **P**

(4) S je M, M je **P**

Obrázek 4.2: Vztah pojmu k předmětu

Tyto čtyři základní možnosti, jak zjednat jednotu soudu, pak určují jeho rozdělení do čtyř typů, totiž podle (1) kvantity, (2) kvality, (3) relace a (4) modality. Každému z nich odpovídají tři podtypy (momenty), jak je zobrazuje schéma 4.3. Kvantitě odpovídá různá kvantifikace pojmu

(1) kvantita

(a) obecný (každé S je P)
(b) částečný (některé S je P)
(c) jedinečný (toto S je P)

(2) kvalita

(a) kladný (S je P)
(b) záporný (S není P)
(c) nekonečný (S je ne-P)

(3) relace

(a) kategorický (každé S je P)
(b) hypotetický (když S je P, pak Q je R)
(c) disjunktivní (buď S je P, nebo S je Q)

(4) modalita

(a) problematický (S je možná P)
(b) asertorický (S je P)
(c) apodiktický (S je nutně P)

Obrázek 4.3: Tabulka forem soudů

[20] Zde sledujeme zhruba výkladovou linii Rosenbergovu [2005, s. 99 nn.].

v subjektu, tj. možné odpovědi na otázku, kolik předmětů spadá pod daný subjekt, a z toho vycházející kvantitativní typy soudů. To odpovídá v principu Aristotelově dělení, přidán je ale soud jedinečný, jenž se tradičně podřazoval soudu univerzálnímu, v tom smyslu, že větu „Sókratés je smrtelný“ bylo z formálního hlediska doporučené číst stejně jako větu „lidé jsou smrtelní“, tj. obsaženost (účast) subjektu v predikátu. Kant tuto identifikaci uznává, připisuje ji ale jen logice formální, zatímco jím navrhované členění náleží logice transcendentální, logice podmínek možnosti poznání empirického světa, kde je uvedený rozdíl podstatný.[21] To bude platit i o dalších rozlišeních, hned tedy u kvalitativního dělení soudu, v němž se ptáme, jak je predikát připisován subjektu, z čehož dostáváme soudy kladné, záporné a nekonečné. Jak jsme již vysvětlili v oddílu 4.2, nekonečný soud je z formálního hlediska soud kladný, z transcendentálního hlediska se ale jedná o výraz reflexe na smysluplné užití jistých rozlišení v daném kontextu a popření toho, že jsou případná.

Relace soudu zahrnuje jak vztahy pojmů v jednom soudu, tak soudů navzájem. Zde dochází jasně k pokusu o syntézu doktríny Aristotelova *kategorického sylogismu*, vztahujícího k sobě subjekt a predikát, s *hypotetickým* a *disjunktivní sylogismem* stoiků, vztahujícím k sobě dvě věty. Rozdíl je v oněch transcendentálních dodatcích. Hypotetický soud je v principu chápán kauzálně, jako forma našeho zákonitého poznání světa; disjunktivní soud pak výlučně, a to ve specifickém smyslu rozdělení sféry téhož subjektu do vyčerpávající sady alternativ, které se jednak vylučují, jednak se vzájemně doplňují. Kant zde jako příklad uvádí větu:

> „svět vznikl buďto čirou náhodou, nebo z vnitřní nutnosti, nebo z vnější příčiny.“[22]

Poslední typizace soudů se týká modality vztahu daného pojmu k předmětu, jak byla dána příslušnou inferencí:

$$\begin{array}{l} S \text{ je } M, \\ \underline{M \text{ je } P} \\ S \text{ je nutně } P. \end{array}$$

Námi navržené čtení je zjevně relativní, tj. S je nutně P ve vztahu k daným premisám. Stejně tak je věta „S je P“ problematická, je-li dána jako součást disjunktivního soudu „S je buď P, nebo Q“, neboť z dané premisy nutnost příslušného závěru nevyplývá, plyne z ní ale reálná možnost, že je pravdivá, v relativním smyslu věty „S je možná P“. Nabízí se

[21] Viz Kant [1781/1787, A 71/B 96].
[22] Kant [1781/1787, A 74/B 99].

samozřejmě i čtení absolutní, v němž je např. Sókratés nutně (esenciálně) člověkem, protože bez účasti na tomto pojmu by přestal sám existovat. Pro první, relativní čtení hovoří každopádně Kantova poznámka,[23] že modality samy nepřispívají k obsahu soudu, ale týkají se vztahu kopuly (resp. soudu) k myslícímu subjektu. V moderní terminologii to znamená, že – stejně jako Wittgensteinovy logické spojky – neoznačují, ale mají jistý performativní charakter zajišťovaný postojem mluvčího.

Názvy funkcí rozumu, které dávají vzniknout specifické jednotě soudu, resp. jeho specifické formě, nazývá Kant *kategoriemi* a hovoří o nich také jako o čistých pojmech rozvažování. Fakticky se jedná o druhořádové pojmy, resp. relace mezi pojmy s empirickou platností. Podejme nejprve jejich vyčíslení v tabulce 4.4. Tabulka, jak vidno, přímo odpovídá tabulce

```
(1) kvantita
    (a) jednota
    (b) mnohost
    (c) veškerost

(2) kvalita
    (a) realita
    (b) negace
    (c) limitace

(3) relace
    (a) inherence a subsistence (substantia et accidens)
    (b) kauzalita a závislost (příčina a účinek)
    (c) vzájemnost (vzájemné působení jednajícího a trpícího)

(4) modalita
    (a) možnost - nemožnost
    (b) existence - neexistence
    (c) nutnost - kontingence
```

Obrázek 4.4: Tabulka kategorií

forem soudů. Lze samozřejmě pochybovat o tom, zda je Kantem uvedené vyčíslení nutné a vyčerpávající, zda, jak poznamenal Schopenhauer, spíše nepoukazuje na jeho zálibu v symetriích.[24] Kantův princip dedukce kategorií ve smyslu ospravedlnění možných forem soudu je na druhé straně ve svém založení ve vztahu pojmu k předmětu (smyslové zkušenosti), resp. predikátu k subjektu relativně průhledný, a zdá se, že z tohoto úhlu

[23] Kant [1781/1787, A 74/B 99].
[24] Schopenhauer [1819, s. 581].

pohledu nelze uvést jiné možnosti než výše zmíněné. Takto lze nalézt i jisté pochopení pro Kantovo tvrzení, že Aristotelovo vyčíslení kategorií je ve srovnání s jeho systémem pouhou rapsodickou sbírkou,[25] již proto, že se Aristotelova klasifikace týká samotných pojmů, nikoli jejich postavení v soudu.

[25] Kant [1781/1787, A 81/B 107].

5

Sémantika

V předchozích kapitolách jsme naznačili, že sémantikou neboli naukou o významu budeme rozumět primárně sémantiku formální, odpovídající formální – umělé – povaze studovaného jazyka, a že se v ní pro případ `KVL` omezíme na pravdivostní hodnoty `1`, `0` a pravdivostní funkce na nich definované. Jedním z hlavních cílů, ke kterému budeme dále směřovat, je definice logické pravdivosti a logické platnosti v `KVL`, které jsou, jak jsme zmínili úvodem, standardně považovány za vlastní předmět (formální) logiky jako vědy. K tomu si musíme připravit několik pomocných pojmů, z nichž základním bude pojem

(formální) interpretace

a s ním související

Tarského definice pravdy,

která pojem interpretace vztahuje ke všem formulím jazyka. Formální interpretace se přitom omezuje pouze na ohodnocení jednotlivých proměnných, neboť význam spojek budeme považovat vždy za fixní, daný příslušnou definicí jednotlivých pravdivostních funkcí. Z tohoto důvodu se spojky na rozdíl od výrokových proměnných nazývají logickými konstantami. Součástí kapitoly bude také otázka, zda byly příslušné konstanty vybrány adekvátně, tak aby pokryly výrazový prostor sémantiky pravdivostních hodnot a jejich funkcí.

5.1 Tarského definice pravdy

Stejně jako význam logických konstant budeme i (formální) interpretaci samu považovat za funkci, a to takovou, která přiřazuje pravdivostní hodnoty výrokovým proměnným. Již tím je dáno, že se jedná o pojmy jiné úrovně, kdy jeden patří ke zkoumaným objektům sféry formálního významu, druhý k prostředkům, jimiž tento význam zkoumáme a vztahujeme ho ke sféře formální syntaxe. Oba pojmy funkce každopádně náleží sféře formální sémantiky.

`5.1.1 Definice (Interpretace):` *Interpretace proměnných je každá funkce, která výrokovým proměnným přiřazuje pravdivostní hodnoty. To, že proměnné* $\mathtt{p}$ *byla interpretací* I *přiřazena hodnota* $\mathtt{1}$*, resp.* $\mathtt{0}$*, zachytíme jako* $I(\mathtt{p}) = \mathtt{1}$*, resp.* $I(\mathtt{p}) = \mathtt{0}$*.*

Interpretace budeme také někdy nazývat „ohodnocení proměnných“, což lépe evokuje smysl právě zavedeného pojmu. Řekli jsme dále, že logické spojky budou mít na rozdíl od proměnných konstantní význam. A již jsme také naznačili, jaký význam to bude, totiž určitá pravdivostní funkce $f_{\neg}, f_{\wedge}, f_{\vee}, f_{\rightarrow}, f_{\leftrightarrow}$. Máme-li takto fixován význam spojek, můžeme pro dané ohodnocení proměnných definovat pravdivostní hodnotu každé formule.

`5.1.2 Definice (Hodnota formule v interpretaci):` *Hodnota formule* ϑ *v interpretaci* I*, značená jako* $I(\vartheta)$*, bude definována induktivně:*

(1) je-li formule ϑ *proměnná, přiřazuje jí interpretace pravdivostní hodnotu přímo,*

(2) je-li formule ϑ *tvaru* $\neg\phi$*, pak* $I(\vartheta) = f_{\neg}(I(\phi))$*; je-li formule* ϑ *tvaru* $\phi \circ \psi$*, pak* $I(\vartheta) = f_{\circ}(I(\phi), I(\psi))$*.*

Definice nám říká, že hodnota složené formule závisí na hodnotách formulí, z nichž se skládá, a povaha této závislosti je určena významem spojek. To je princip kompozicionality v praxi. Konkrétní význam definice si osvětleme na příkladě.

`Příklad 5.1.3:` Předpokládejme, že jsme v interpretaci I přiřadili atomickým výrokům $\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}$ hodnoty tímto způsobem:

$$I(\mathtt{p}) = \mathtt{1} \qquad I(\mathtt{q}) = \mathtt{0} \qquad I(\mathtt{r}) = \mathtt{0}.$$

Jakou hodnotu má v této interpretaci formule:

$$(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}) \vee \neg\mathtt{r}?$$

Pokud bychom chtěli při zodpovídání této otázky postupovat přesně podle definice, vypadalo by to takto:

$$\begin{aligned} I((\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \vee \neg\mathtt{r}) &= f_\vee(I(\mathtt{p} \to \mathtt{q}), I(\neg\mathtt{r})) \\ &= f_\vee(f_\to(I(\mathtt{p}), I(\mathtt{q})), f_\neg(I(\mathtt{r}))) \\ &= f_\vee(f_\to(\mathtt{1}, \mathtt{0}), f_\neg(\mathtt{0})) \\ &= f_\vee(\mathtt{0}, \mathtt{1}) \\ &= \mathtt{1}. \end{aligned}$$

Tento postup je trochu nepřehledný. Není za ním však nic jiného než následující úvaha: $\mathtt{p}$ má hodnotu $\mathtt{1}$, $\mathtt{q}$ má hodnotu $\mathtt{0}$, takže $\mathtt{p} \to \mathtt{q}$ má hodnotu $\mathtt{0}$; $\mathtt{r}$ má hodnotu $\mathtt{0}$, takže $\neg\mathtt{r}$ má hodnotu $\mathtt{1}$; $\mathtt{p} \to \mathtt{q}$ má hodnotu $\mathtt{0}$, $\neg\mathtt{r}$ má hodnotu $\mathtt{1}$, takže $(\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \vee \neg\mathtt{r}$ má hodnotu $\mathtt{1}$. To je také vše, co k určení hodnoty dané formule potřebujeme.

Významné je, že použitím techniky skládání funkcí daná definice pojem interpretace ve své aplikaci rozšířila z výrokových proměnných na všechny formule, tj. začali jsme funkcí I, která ohodnocuje jednotlivé proměnné, a na ni, resp. na její hodnoty jsme aplikovali funkce odpovídající jednotlivým spojkám. Výsledkem je funkce, která operuje na celých formulích a kterou – s ohledem na konstantní povahu funkcí odpovídajících spojkám – ztotožňujeme s výchozí funkcí I. Z I se v důsledku stává funkce, která formulím přiřazuje pravdivostní hodnoty, tj. kromě

$$I(\mathtt{p}) = \mathtt{1}, \text{ resp. } \mathtt{0}$$

můžeme pro libovolnou formuli ϑ `KVL` psát také

$$I(\vartheta) = \mathtt{1}, \text{ resp. } \mathtt{0}.$$

Srovnejme to s paralelním ohodnocením aritmetických proměnných čísly, tj. uvažme následující příklad.

`Příklad 5.1.4:` Výraz $(x \times y) + z$ lze učinit jménem nějakého čísla tak, že nejprve ohodnotíme příslušné proměnné čísly, např. takto:

$$I(x) = 2 \qquad I(y) = 3 \qquad I(z) = 1.$$

Za předpokladu, že výrazy $+$ a $\times$ označují obvyklé funkce sčítání f_+ a násobení $f_\times$, lze pak toto ohodnocení rozšířit na všechny výrazy složené z daných proměnných a symbolů $+$ a $\times$, obdobně jako v definici 5.1.2. Pro náš konkrétní výraz bude takto vůči danému ohodnocení I proměnných platit:

$$\begin{aligned} I((x \times y) + z) &= f_+(f_\times(I(x), I(y)), I(z)) \\ &= f_+(f_\times(2, 3), 1) \\ &= 7. \end{aligned}$$

Souvislost mezi ohodnocením aritmetického výrazu a ohodnocením logické formule, kdy obě ohodnocení vidíme jako skládání funkcí, je tím snad dostatečně objasněna.

Definice ohodnocení komplexních výrazů z ohodnocení výrazů jednoduchých se v případě logických formulí obvykle prezentuje jako důsledek následující standardní definitorické formy.

`5.1.5 Definice (Tarského definice pravdy):` *Formule* ϑ *je pravdivá v interpretaci* I*, resp. interpretace* I *splňuje formuli* ϑ*, symbolicky* $I \vDash \vartheta$*, jestliže platí jedna z následujících podmínek:*

(1) $\vartheta = \mathtt{p}$ *a* $I(\mathtt{p}) = \mathtt{1}$,

(2) $\vartheta = \neg\phi$ *a neplatí* $I \vDash \phi$,

(3) $\vartheta = \phi \wedge \psi$ *a* $I \vDash \phi$ *a* $I \vDash \psi$,

(4) $\vartheta = \phi \vee \psi$ *a* $I \vDash \phi$ *nebo* $I \vDash \psi$,

(5) $\vartheta = \phi \rightarrow \psi$ *a jestliže* $I \vDash \phi$*, pak* $I \vDash \psi$,

(6) $\vartheta = \phi \leftrightarrow \psi$ *a* $I \vDash \phi$ *tehdy a jen tehdy, když* $I \vDash \psi$.

V opačném případě je formule ϑ *v interpretaci* I *nepravdivá, což zapisujeme také jako* $I \nvDash \vartheta$.

Definice má jistou formulační výhodu, neboť se v ní nechováme k pravdivosti jako k předmětu, ale jako k něčemu, co náleží větě. Nepopisujeme tedy, kdy je větě (resp. formuli) přiřazena pravdivostní hodnota pravda, ale za jakých podmínek je pravdivá. Z technického hlediska je to samozřejmě jedno, tj. v zápisech

$$I \vDash \vartheta, \qquad \text{resp.} \qquad I \nvDash \vartheta$$

máme přímé alternativy k zápisům

$$I(\vartheta) = \mathtt{1}, \qquad \text{resp.} \qquad I(\vartheta) = \mathtt{0}.$$

Tato dvojznačnost není příjemná, ale z jistých důvodů si ji podržíme. Podstatné je, aby daná interpretace ohodnotila danou formuli jednoznačně, tj. aby daná formule byla v dané interpretaci buď pravdivá, nebo nepravdivá, *tertium non datur*. To nemusí být z příslušných ustanovení jasné hned napoprvé, přičemž Tarského definice pravdy může vzbuzovat nedůvěru zvláště v otázce, zda nějaká formule nedostala náhodou obě hodnoty. Přesvědčit se o opaku lze ale snadnou indukcí založenou na předpokladu, že interpretace I ohodnocuje jednoznačně proměnné a hodnota komplexní formule je určena skládáním jednotlivých pravdivostních funkcí, které – s ohledem na svoji funkcionalitu – dávají libovolné kombinaci argumentů právě jednu konkrétní hodnotu. Tím je zachován pojem formálního výroku coby objektu formálního jazyka, jemuž je danou interpretací přiřazena právě jedna pravdivostní hodnota, a je tedy v tomto smyslu jednoznačně pravdivý, či nepravdivý.

Další podezření týkající se Tarského definice pravdy se netýká její případné nekorektnosti, ale zbytečnosti. Tarski ve stati „Sémantické pojetí pravdy a základy sémantiky“[1] uvádí větu

> věta „sníh je bílý“ je pravdivá tehdy a jen tehdy, když sníh je bílý

jako případ tzv. *kritéria materiální adekvátnosti*, jemuž by každá definice pravdy měla dostát. Čtenář zde může být zmaten, proč je takováto ekvivalence vůbec spojována se slovem „definice“, když, zdá se, každá z jejích stran předpokládá ke svému porozumění tu druhou. Věc je ale složitější. Všimněme si nejprve, že u vět komplexní formy, jako „jestliže hrají Johanna Strausse ml., pak je mi do tance“, lze na frázi

> věta „jestliže hrají Johanna Strausse ml., pak je mi do tance“ je pravdivá tehdy a jen tehdy, když je věta „hrají Johanna Strausse ml.“ nepravdivá nebo když je pravdivá věta „je mi do tance“

pohlížet jako na skutečné vymezení (definici) jejích pravdivostních podmínek. Jedná se o uchopení spojky „jestliže . . . , pak . . . “ coby materiálního kondicionálu, který, jak jsme viděli v oddílu 4.4, nevyžaduje žádnou věcnou či kauzální souvislost spojovaných vět, jejich časovou následnost apod. U elementárních vět je situace mírně odlišná, neboť reprezentují bázi potenciálně nekonečného počtu disciplín a oblastí lidské činnosti, což znamená, že stanovení globálních kritérií pravdy je prostě nemožné. Podle Tarského navíc takovýto pokus vede ke sporům následujícího typu. Máme-li větu (c), která tvrdí

(c) věta (c) je nepravdivá,[2]

pak podle kritéria adekvátnosti platí

> věta „věta (c) je nepravdivá“ je pravdivá tehdy a jen tehdy, když je věta (c) nepravdivá.

---

[1] Tarski [1944, s. 343]. V této stati jsou shrnuty výsledky Tarského [1933] slavné práce k pojmu pravdy.
[2] Tarski [1933, s. 158].

Výraz „(c)“ přitom označuje větu „věta (c) je nepravdivá“, tj. po dosazení dostáváme spor:

> věta (c) je pravdivá tehdy a jen tehdy, když je věta (c) nepravdivá.

Tarski z toho usuzuje, že přirozený jazyk nesplňuje kritérium adekvátnosti, a definici pravdivosti tak pro něj není možné podat. Tato situace podle něho přitom nastává u všech jazyků, které jsou, jak říká, *sémanticky uzavřené*, což znamená, že je v nich možné hovořit o jazyce samém a jeho pravdivosti.[3] V našem čtení paradoxu se jedná především o upozornění, jak důležité je pečlivé rozlišení mezi jazykem v čistě syntaktickém smyslu a jeho sémantickou funkcí, a to primárně v duchu oddílu 2.2 s jeho rozdílem mezi větou coby artefaktem a větou coby artikulující soud, odvozeně pak i v duchu právě studovaného rozdílu syntaxe a sémantiky. Podrobněji se k tomuto závěru vyjádříme v oddílu 10.3, který bude věnován dalším paradoxům reflektivního typu. Tarského antinomie se v něm ukáže být jednou z variant tzv. paradoxu lháře, v němž o sobě jistý člověk tvrdí, že lže, a vzniká otázka, za jakých podmínek je toto tvrzení pravdivé.

5.2 Korespondenční teorie pravdy

Z uvedeného je zřejmé, proč je Tarského definice pravdy spojována nejen s tzv. *korespondenční teorií pravdy*, ale i s *teorií pravdy redundanční*. Korespondenční je proto, že charakterizuje pravdu skrze korespondenci věty, resp. toho, co věta tvrdí, se skutečností, a nepravdu jako nepřítomnost takové shody (adekvace). Rámcově tomu odpovídá Aristotelovo slavné vymezení:

> „Omylem jest, jestliže řekneme, že jsoucí není anebo nejsoucí jest; pravdou jest, řekneme-li, že jsoucí je a že nejsoucí není.“[4]

To bývá citováno spolu s vymezením Tomáše Akvinského:

> „Veritas est adequatio rei et intellectus.“[5]

Korespondenční teorie se zdá být natolik samozřejmá, že ji neměli problém podepsat ani filosofové odlišného ražení. To ji ale zároveň snadno dělá teorií redundanční. Je-li totiž pravdivé to, co existuje, pak pojem

[3] Tarski [1944, s. 348].
[4] Aristotelés [Met., 1011b26–28].
[5] Tomáš Akvinský [1970–, quaestione 1, a. 1].

pravdivosti vlastně nepotřebujeme, tj. vystačíme si pouze s pojmem jsoucího. Již platónské problémy s nepravdivostí a s bytím nebytí každopádně naznačují, že věc nebude tak jednoduchá, neboť pravdivé mohou být jednak věci, které nejsou (abychom užili Tomášův příklad: to, že je nějaký muž mrtvý, říká, že tento muž není), jednak není jasné, s čím se shodují věty nepravdivé. Z našeho pohledu tyto těžkosti poukazují primárně k tomu, že pojem pravdy je možné jen stěží založit na bezprostřední *popisnosti* a že do věci musí vstoupit i aspekt prostředkující, totiž záležitosti *normativity*, jež vysvětlí, proč může nějaké poznání v nároku na pravdivost selhat. Na popisné rovině se tato potřeba ukazuje ve zcela základních problémech, totiž v otázkách:

(1) co a jak je srovnáváno s čím?,

(2) v čem spočívá shoda srovnávaného?

V jistém smyslu zde totiž máme opět platónské problémy dvou světů a jejich oddělení, s čitelnou snahou fixovat možnost stabilního, pravdivého poznání, nezávislého na zvůli jednotlivce, v objektivní realitě, která ho přesahuje. V tomto čtení je korespondenční teorie protiváhou k *utilitaristické teorii pravdy* sofistů, podle níž je pravdivé to, co se mně, případně nám jako druhu hodí, nezávisle na tom, jak to je, či není. Aristotelés tento protirelativistický motiv svého vymezení jen potvrzuje, když říká:

> „Nejsi totiž proto bílý, že míníme, že jsi opravdu bílý, nýbrž protože jsi bílý, mluvíme pravdu, říkajíce to.“[6]

Že lze korespondenční devízu chápat i jinak, totiž ani realisticky, ani utilitaristicky, ale v transcendentálním smyslu, ukazuje Wittgenstein ve svém *Tractatu*, když říká:

> „Nikoli: ‚Komplexní znak ‚aRb‘ říká, že a stojí ve vztahu R k b‘, nýbrž: to, *že* ‚a‘ stojí v jistém vztahu k ‚b‘, říká, *že* aRb.“[7]

Jinými slovy, obraty jako ten korespondenční, podle něhož je věta „A“ pravdivá tehdy a jen tehdy, když A, není třeba vždy chápat jako klasickou explicitní definici, v níž pravá strana (coby *definiens*) vysvětluje levou (*definiendum*), ale právě naopak zleva doprava, jako upřesnění toho, co nazýváme „faktem“, „světem“ či „skutečností“. Právě to dělá Frege, když mluví o faktu jako o pravdivé větě (resp. myšlence).[8] Uvedený obrat ve čtení korespondenční formule, ne nepodobný Kantovu obratu

[6] Aristotelés [Met., 1051b8–10].
[7] Wittgenstein [1922, § 3.1432].
[8] Viz citát z oddílu 1.5.

koperníkovskému, umožňuje také vyřešit výše uvedené problémy s korespondencí. To, co je srovnáváno, nemůže být přímo věta a kus reality, neboť to by, jak řekl Frege, mohlo vést s ohledem na nehomogennost relát jen k přibližné shodě:

> „Pravost bankovky můžeme testovat tak, že se ji pokusíme stereoskopicky překrýt s pravou bankovkou. Avšak pokus o stereoskopické překrytí dvacetimarkovky s kusem zlata by byl směšný. Překrytí představy s nějakou věcí by bylo možné jen tehdy, kdyby i ona věc byla představou. A kdyby se pak ona první s tou druhou dokonale shodovaly, sloučily by se vjedno. To ale právě tehdy, určujeme-li pravdu jakožto shodu představy s něčím skutečným, nechceme. Právě při tom je podstatné, že se skutečné od představy liší. Pak ale neexistuje žádná dokonalá shoda, žádná dokonalá pravda. Pak by nebylo vůbec nic pravdivé; neboť co je pravdivé jen zpola, není pravdivé vůbec. Pravda se neslučuje s žádným více či méně.“[9]

Srovnávána je tedy vždy *věta* a *věta*. Z toho snadno plyne, že každá teorie pravdy je ve svém výsledku redundantní, neboť vysvětluje pravdivost A skrze B, jejíž pravdivost již musí být známa, aby měla celá definice smysl. Tím se ovšem nemá nutně říci (byť to tak Frege zamýšlel), že pravdivost nelze vůbec definovat, ale že je tato definice (pravdivosti A) vždy jenom lokální, vztažená k relativně vyjasněné oblasti pravd (větě B). Vezmeme-li třeba větu „$(2 + 23) = 4 \times 6$“, můžeme její pravdivostní hodnotu vztáhnout k operacím s číslovkami, jejichž transformacemi – kontrolovanými v názoru – lze dospět k číslovkám jednodušším (25, 24) a ty vzájemně porovnat. Slovo „pravdivý“ má v tomto podniku pouhou expresivní roli, což znamená, že činí cosi, co je implicitní v naší praxi tvrzení a popírání vět, totiž Fregovu tvrdící sílu či formu oznamovací věty, explicitním. S ohledem na to je příslušná teorie pravdy *deflační* či *performativní*, protože se v ní příslušného predikátu zbavujeme jako nevlastního, a to na úkor jazykové praxe. Odvozujeme něco, co říkáme (že je A pravda), z něčeho, co děláme (tvrdíme A). To neznamená, že by byl predikát pravdivosti zbytečný, ale že je odvozený z prvotní praxe tvrzení, kterou nemůže nahradit (vysvětlit, definovat), protože tvrdit, že A je pravda, je totéž co tvrdit A, a samo připojení výrazu „je pravda“ k větě ji ještě pravdivou nedělá.

Podle teorie *Tractatu* se tedy slovo „pravdivý“ zdá mít stejnou funkci jako logické spojky a operátory, které rovněž nezastupují, neoznačují nic ve světě, ale ukazují jisté souvislosti mezi elementárními fakty.

[9] Frege [1918, s. 60].

Tímto postřehem se primárně vyhýbáme zavádění metafaktů typu faktu, že je A faktem, stejně jako rozličných komplexních faktů, např. disjunktivních či implikačních. Mírný otazník zůstává u faktů negativních, které se zdají být vhodnými kandidáty na vyřešení problému, co dělá nějakou větu nepravdivou. Z hlediska korespondenční teorie pravdy se totiž nabízí, aby podobně jako dělá větu pravdivou příslušný fakt (kus reality), ji dělal nepravdivou také fakt, jen s opačným ontologickým znaménkem. Je dost možné, že Platón rozuměl řeči o bytí nebytí právě v tomto smyslu, v němž je věta „A není B“ chápána jako „A je ne-B“, kdy ne-B náleží negativní stránce reality, s níž je identifikováno A. Problém spočívá v tom, že se tím otázka pravdivosti či nepravdivosti věty vlastně neřeší, ale jen přesouvá směrem ke světu, resp. k problému, co dělá nějaký fakt pozitivním, a co negativním.

Řešení, které nepravdivost vysvětlí jednoduše neexistencí příslušného faktu, má tu nevýhodu, že nedokáže rozlišit mezi větou *nepravdivou* a větou *nesmyslnou*, neboť ani té by ve světě neměl odpovídat žádný pozitivní fakt. Návrh, který předkládá Wittgenstein ve svém *Tractatu*, je předem vymezit sféru smysluplnosti, toho, co je možné říci, přičemž pravdivost a nepravdivost jsou dva póly, které smysluplná věta – v závislosti na kontingentním stavu světa – může mít. Obor smysluplnosti je samozřejmě situačně závislý a mění se spolu s dobou. To, že mohu hrát na ukulele, závisí na vynalezení ukulele, tj. zatímco věta „Vojtěch Kolman umí hrát na ukulele“ je jednoduše nepravdivá, věta

Sókratés uměl hrát na ukulele

nedává smysl, stejně jako nemusí v daném kontextu dávat smysl věta „existují mimozemské civilizace“ či „smrkám palcem u nohy“. Není tomu tak proto, že by si pod nimi nešlo něco představit, ale že jim je v tomto okamžiku obtížné přiřknout nějaký praktický význam. Z hlediska `KVL` přitom situace Wittgensteinova *Tractatu* vhodně doplňuje náš výklad. (Elementární) smysluplné větě odpovídá stav věcí (*Sachverhalt*) neboli možný fakt (*Tatsache*), něco, co může, ale nemusí nastat. Svět je pak určen tím, které stavy věcí nastávají, Wittgensteinovými slovy:

„Svět je určen fakty a tím, že jsou to všechny fakty.“[10]

Patří-li k našim elementárním větám např. „Paříž leží na Seině“, „Obama je běloch“ a „Berlín je hlavní město Německa“, je náš aktuální svět určen tím, že stavy věcí vyjádřené první a poslední větou nastávají, a nic jiného. Jiná ohodnocení určují alternativní světy. V kontextu `KVL` zde

[10] Wittgenstein [1922, § 1.11].

máme výrokové proměnné coby reprezentanty elementárních vět, jejichž možné ohodnocení (interpretace) určuje možný svět, daný alternativně popisem toho, které proměnné dostanou hodnotu `1`, a poznámkou, že jsou to všechny, tj. že ostatní dostávají hodnotu `0`. Posloupnost nul a jedniček přiřazená pevně fixované posloupnosti našich proměnných je tedy jednoduchým konceptem možného světa výrokové logiky:

$\mathtt{p}_1$	$\mathtt{p}_2$	$\mathtt{p}_3$	$\mathtt{p}_4$	...
1	0	1	1	...

V sylogistice a logice predikátů se nám daný koncept pravdivosti podstatně zkomplikuje, a přiblíží se tak našim obvyklým představám světa coby skupiny individuí s prostorem vlastností a vztahů. Zároveň s tím se ale zkomplikuje Wittgensteinův požadavek:

> „Něco může být fakt nebo ne a vše ostatní zůstane stejné.“[11]

Ten *de facto* říká, že má být ohodnocení elementárních vět, resp. výrokových proměnných vzájemně nezávislé, tj. to, že je jedné z nich přiřazena nějaká hodnota, nemá žádné důsledky na ohodnocení vět ostatních. V rámci `KVL` to především znamená, že pracujeme se všemi možnými ohodnoceními výrokových proměnných, tj. žádná z nich nejsou – příslušnými závislostmi – vyřazena jako nepřípadná. V druhé řadě má ovšem nezávislé ohodnocení výrokových konstant vliv na to, že je toto ohodnocení jednoznačné, z čehož pak plyne také jednoznačné ohodnocení komplexních vět příslušné logiky. To není nijak banální, neboť, jak naznačíme v oddílu 10.2, Frege tím, že ve svém systému podmínky ohodnocení elementárních vět vzájemně provázal, a učinil je tedy na sobě závislými, nedokázal zabránit ohodnocení dalších vět oběma hodnotami, v důsledku čehož jeho systém zkolaboval.

5.3 Formule a funkce

Ohodnotíme-li proměnné libovolné formule, můžeme díky významu spojek vždy vypočítat hodnotu celku. To lze chápat tak, že každá formule obsahující n různých proměnných nám také počítá nějakou funkci přiřazující n-ticím pravdivostních hodnot pravdivostní hodnoty. Protože různých n-tic pravdivostních hodnot je konečný počet, konkrétně

$$2^n,$$

[11] Wittgenstein [1922, § 1.21].

bude opět možné funkci vyjádřenou příslušnou formulí zachytit nějakou tabulkou s 2^n řádky. Ilustrujme to na formuli

$$(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}) \vee \neg\mathtt{r},$$

kterou označíme jako ϑ. Funkci, kterou tato formule vyjadřuje, označíme jako f_ϑ. Její tabulku můžeme vypracovat takto:

$\mathtt{p}$	$\mathtt{q}$	$\mathtt{r}$	$\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}$	$\neg\mathtt{r}$	$(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}) \vee \neg\mathtt{r}$
x	y	z	$f_\rightarrow(x, y)$	$f_\neg(z)$	$f_\vee(f_\rightarrow(x, y), f_\neg(z))$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1

První dva řádky představují dva alternativní způsoby, jak zapsat záhlaví tabulky. Druhý řádek sice bezprostředněji naznačuje výpočet, který byl proveden, avšak budeme používat spíše přehlednější notaci prvního řádku. Další řádky zachycují všechna možná ohodnocení tří proměnných, které se ve formuli vyskytují. Tyto řádky jsou zároveň všechny možné trojice argumentů funkce f_ϑ. Proto má tabulka bez záhlaví osm řádků. Čtvrtý a pátý sloupec představují pomocné výpočty. Mohli bychom tyto sloupce vynechat. Nevynechali jsme však žádný krok, aby bylo z prvního řádku patrné, že jsme při výpočtu prošli celou konstrukci formule. Podstatný je poslední sloupec ukazující výsledné hodnoty funkce f_ϑ. Z tabulky můžeme vyčíst, že např.

$$f_\vartheta(0, 0, 1) = 1 \qquad \text{či} \qquad f_\vartheta(1, 0, 1) = 0.$$

Podobnou tabulku můžeme sestrojit k libovolné formuli ϑ. Místo přesného označení „tabulka definující funkci, kterou vyjadřuje formule ϑ“ budeme říkat prostě *tabulka formule* ϑ. Nyní podáme přesnější definici toho, co znamená, že formule vyjadřuje funkci.

5.3.1 Definice (Funkce vyjádřená formulí): *Je-li ϑ formule obsahující právě n různých proměnných $\mathtt{p_1}, \dots, \mathtt{p_n}$ (které pokládáme za fixně uspořádané), pak řekneme, že ϑ vyjadřuje funkci f_ϑ přiřazující n-ticím pravdivostních hodnot pravdivostní hodnoty. Funkci f_ϑ definujeme takto: Nechť $h_1, \dots, h_n$ jsou libovolné pravdivostní hodnoty. Vezměme interpretaci I, která přiřazuje každé proměnné $\mathtt{p_i}$ hodnotu h_i $(1 \leq i \leq n)$. Pak platí, že $f_\vartheta(h_1, \dots, h_n) = I(\vartheta)$.*

Již v oddílu 4.7 jsme zmínili, že funkce, které vyjadřují formule, jsou přesně ty funkce, které lze získat skládáním základních funkcí. Základními funkcemi přitom míníme funkce, jež jsou významem spojek, které používáme. Např. pro naši formuli $\vartheta = (\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \vee \neg\mathtt{r}$ platí:

$$f_\vartheta(x, y, z) = f_\vee(f_\to(x, y), f_\neg(z)).$$

Každá formule tedy vyjadřuje nějakou pravdivostní funkci, která odpovídá složení pravdivostních funkcí základních, které jsou významy užitých spojek. Pravdivostních funkcí je nekonečně mnoho, protože pro každé n existuje alespoň jedna n-argumentová funkce. Ve skutečnosti s rostoucím n počet n-argumentových funkcí stále roste, a to velmi rychle. Celkem existuje

$$2^{2^n}$$

všech možných n-argumentových pravdivostních funkcí. Z právě řečeného plyne, že je $2^{2^1} = 4$ možných 1-argumentových pravdivostních funkcí:

	f_1	f_2	$f_{3\neg}$	f_4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Mezi těmito funkcemi se nachází funkce definující negaci (pod číslem 3). To však znamená, že bychom mohli definovat 4 jednomístné spojky typu negace. Dále zde máme $2^{2^2} = 16$ možných 2-argumentových pravdivostních funkcí:

		f_1	$f_{2\vee}$	f_3	f_4	$f_{5\to}$	f_6	$f_{7\leftrightarrow}$	$f_{8\wedge}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

		f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

V tabulce jsme označili, které z těchto funkcí jsou přiřazeny našim vybraným binárním spojkám. Kdybychom chtěli zavést další spojky, mohli bychom k tomu využít některé ze zbylých funkcí. Např. význam spojky „buď ..., anebo ...“ bychom definovali jako funkci, která má v naší tabulce číslo 10. Celkem bychom tedy mohli zavést 16 dvoumístných spojek fungujících na analogickém principu jako ty, které jsme skutečně zavedli. Naznačme, jak rychle počet funkcí roste s rostoucím n:

počet 3-argumentových funkcí je 256,

počet 4-argumentových funkcí je 65536,

počet 5-argumentových funkcí je 4294967296,

počet 6-argumentových funkcí je 18446744073709551616

atd.

Nyní soustředíme pozornost na otázku, zda zvolený jazyk, který obsahuje pouze pět vybraných spojek, postačuje k tomu, aby vyjádřil celou tuto rozmanitost. V následujícím oddílu se ukáže, že tomu tak je, a předvedeme dokonce, že by stačil jazyk omezený na jednu jedinou spojku.

5.4 Adekvátnost spojek

Změňme nyní dočasně úhel pohledu. Dosud jsme se zabývali tím, kterou funkci zadaná formule vyjadřuje. Nyní se budeme ptát, zda k zadané funkci vůbec existuje formule, která tuto funkci vyjadřuje – a pokud ano, zda jsme schopni některou takovou formuli nalézt podle nějakého předem stanoveného postupu. Ptáme se tak vlastně, zda jsme s to vytyčený sémantický prostor pokrýt také syntakticky a zda lze toto pokrytí provést podle nějakého přehledného vzorce. Jelikož pravdivostní funkce lze definovat tabulkami, můžeme je s nimi pro jednoduchost ztotožnit. Problém pak vypadá takto: Dosud jsme hledali tabulky k formulím, nyní budeme hledat formule k tabulkám.

5.4.1 Definice (Adekvátní množina spojek): *Řekneme, že množina spojek M je adekvátní, když pro každou pravdivostní funkci existuje formule, která tuto funkci vyjadřuje a v níž se vyskytují jen spojky z množiny M.*

Někdy se místo „adekvátní“ používá také slovo „úplná“, čemuž se chceme vyhnout, neboť pojem úplnosti, jak ještě uvidíme, má v logice řadu dalších důležitějších významů. Nyní budeme směřovat k důkazu tvrzení, že je množina spojek $\{\neg, \wedge, \vee\}$ adekvátní.[12] Dokážeme-li příslušné tvrzení, bude to zhruba znamenat, že v našem ostře vymezeném rámci není

[12] Uvedený zápis $\{a, b, c\}$ budeme v této chvíli užívat velmi obecně, ve smyslu prostého uskupení objektů a, b, c v jeden celek, k němuž je pak možno referovat. Náležité zavedení pojmu množiny, příslušné notace a zodpovězení otázek, které se k nim váží, probereme až později, v rámci kapitoly 10.

nic, co bychom nebyli schopni vyjádřit formulí obsahující pouze negaci, konjunkci a disjunkci. Tím bude ospravedlněn náš výběr spojek a poukázáno na to, že se lze dokonce dále omezit na jeho část. Ponecháme si však všech pět spojek, protože nám to umožní vyjadřovat vše pohodlnějším a přehlednějším způsobem.

Hlavní myšlenka v důkazu zmíněného tvrzení není obtížná, je však obtížně zapsatelná. Komplikovanost zápisu je dána tím, že se chceme držet jistých kritérií obecnosti a rigoróznosti, která se později ukážou jako nosná, tj. budou nutná k tomu, aby byl příslušný důkaz vyjádřen bez mezer a úsudkových skoků a aby v něm pokud možno nebylo nic přebytečného. V tuto chvíli, kdy je vlastní idea důkazu celkem jednoduchá, však tyto náležitosti její pochopení spíše brzdí. Proto vlastnímu důkazu předešleme úvahu, která jeho jádro předvede na bázi konkrétního případu.

Jde nám tedy o to, abychom nahlédli ideu samotného důkazu a mohli se tak ve vlastním provedení již soustředit na jeho pojmovou obecnost a „čistotu“. To nejsou přirozeně nějaké absolutní kvality, ale něco, co vyplyne ze srovnání tohoto důkazu s dalšími důkazy. Začněme tím, že si prohlédneme následující tabulku:

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

V záhlaví třetího až šestého sloupce jsou uvedeny formule, které popisují jednotlivé řádky tabulky dvou proměnných. To znamená, že funkce, kterou taková formule vyjadřuje, přiřazuje hodnotu pravda hodnotám uvedeným v daném řádku a těm v jiných řádcích přiřazuje hodnotu nepravda. Představme si nyní, že máme 2-argumentovou pravdivostní funkci, která přiřazuje pravdu v prvním a třetím řádku a jinak přiřazuje nepravdu. Tuto funkci můžeme vyjádřit disjunkcí formulí popisujících první a třetí řádek:

p	q	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

Obdobným způsobem lze vyjádřit každou 2-argumentovou pravdivostní funkci. Taková funkce je totiž vždy přiřazením pravdivostních hodnot čtyřem řádkům tabulky pro dvě proměnné. Jsou-li některým řádkům přiřazeny jedničky, pak formule vyjadřující funkci je disjunkce formulí popisujících tyto řádky. Funkci implikace bychom pomocí tohoto postupu vyjádřili formulí:

$$(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\neg \mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\neg \mathtt{p} \wedge \neg \mathtt{q}).$$

Problémem není ani tabulka funkce přiřazující svým argumentům samé nuly. Vyjadřuje ji třeba formule:

$$(\mathtt{p} \wedge \neg \mathtt{p}) \vee (\mathtt{q} \wedge \neg \mathtt{q}).$$

Zobecněním této úvahy na libovolný počet argumentů dojdeme k postupu, jak vyjádřit pomocí negace, konjunkce a disjunkce každou pravdivostní funkci. Např. funkci zadanou následující tabulkou

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

bychom vyjádřili formulí

$$(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q} \wedge \mathtt{r}) \vee (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q} \wedge \neg \mathtt{r}) \vee (\neg \mathtt{p} \wedge \mathtt{q} \wedge \mathtt{r}) \vee (\neg \mathtt{p} \wedge \neg \mathtt{q} \wedge \mathtt{r}).$$

Naznačili jsme ideu řešení naší úlohy. Přesnější popsání této myšlenky předvedeme v rámci důkazu slíbené věty.

5.4.2 Věta (O adekvátnosti spojek): *Množina spojek* $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *je adekvátní.*

Důkaz: Nechť je dána libovolná n-argumentová pravdivostní funkce f. Chceme popsat formuli ψ_f, která ji vyjadřuje. Rozlišíme dva případy. Jestliže funkce f přiřazuje libovolným argumentům vždy hodnotu nepravda, pak ji vyjádříme formulí:

$$(\mathtt{p}_1 \wedge \neg \mathtt{p}_1) \vee \cdots \vee (\mathtt{p}_n \wedge \neg \mathtt{p}_n).$$

To, že vyjadřuje příslušnou funkci, je zřejmé. Ve zbytku důkazu proto předpokládejme, že funkce f přiřazuje některým n-ticím pravdivostních hodnot hodnotu pravda. Funkci chápeme jako tabulku, která ji definuje. Popíšeme postup, jak k této tabulce sestrojit formuli, která ji vyjadřuje.

Začneme tím, že – stejně jako v úvaze předcházející vlastní důkaz – popíšeme argumenty j-tého řádku této funkce nějakou formulí ϕ_j. Tento řádek vypadá takto: $h_1, \ldots, h_n, h$, kdy $h_1, \ldots, h_n$ jsou argumenty pro j-tý řádek a h je hodnota, kterou funkce f těmto argumentům přiřazuje. Platí tedy, že $f(h_1, \ldots, h_n) = h$. Nyní vezmeme proměnné $\mathtt{p_1}, \ldots, \mathtt{p_n}$ a sestrojíme formuli

$$\phi_j = l_1 \wedge \cdots \wedge l_n$$

podle následujícího klíče

$$l_i = \begin{cases} \mathtt{p_i} & \text{jestliže } h_i = \mathtt{1}, \\ \neg\mathtt{p_i} & \text{jestliže } h_i = \mathtt{0}. \end{cases}$$

Dále dokážeme pomocné tvrzení (†), podle něhož:

(†) ϕ_j je pravdivá v interpretaci odpovídající j-tému řádku tabulky a v žádné jiné.

Vezměme i-tý člen l_i konjunkce ϕ_j. Podívejme se do j-tého řádku její tabulky. Nechť I_j je interpretace, která odpovídá tomuto řádku. Je-li $I_j(\mathtt{p_i}) = \mathtt{1}$, pak l_i je proměnná $\mathtt{p_i}$, a je jí tedy přiřazena hodnota $\mathtt{1}$. Je-li $I_j(\mathtt{p_i}) = \mathtt{0}$, pak l_i je $\neg\mathtt{p_i}$ a této formuli je opět přiřazena hodnota $\mathtt{1}$. Tedy každý člen konjunkce ϕ_j je v řádku j pravdivý, takže celá konjunkce je zde pravdivá. Vezměme naopak k-tý řádek tabulky odlišný od j-tého řádku. Ten se musí od j-tého řádku lišit alespoň na jedné pozici. Řekněme, že se liší v i-tém členu. Je-li $I_j(\mathtt{p_i}) = \mathtt{1}$, pak $I_k(\mathtt{p_i}) = \mathtt{0}$ a l_i je proměnná $\mathtt{p_i}$. Je-li $I_j(\mathtt{p_i}) = \mathtt{0}$, pak $I_k(\mathtt{p_i}) = \mathtt{1}$ a l_i je $\neg\mathtt{p_i}$. V obou případech je i-tý člen konjunkce nepravdivý v k-tém řádku, tedy celá konjunkce je zde nepravdivá. Tím je pomocné tvrzení (†) dokázáno.

Nyní již k vlastnímu důkazu. Předpokládejme, že f přiřazuje hodnotu pravda v řádcích $j_1, \ldots, j_m$. Pak funkci f vyjádříme formulí ψ_f, která vypadá takto:

$$\psi_f = \phi_{j_1} \vee \cdots \vee \phi_{j_m}.$$

Tím je hotova první, konstruktivní část práce. Nyní zbývá dokázat, že předvedená konstrukce skutečně plní svůj účel, tj. platí:

formule ψ_f vyjadřuje funkci f.

Vezměme si libovolný k-tý řádek tabulky funkce f. Jestliže f přiřazuje tomuto řádku hodnotu pravda, pak formule ϕ_k je členem disjunkce ψ_f a je v tomto řádku podle pomocného tvrzení (†) pravdivá. Tedy celá ψ_f je v tomto řádku pravdivá. Jestliže f přiřazuje tomuto řádku hodnotu nepravda, pak každý člen disjunkce ψ_f popisuje nějaký z jiných řádků a v řádku k je podle pomocného tvrzení (†) nepravdivý. Tedy celá disjunkce ψ_f je v tomto řádku nepravdivá. Protože ψ_f je složena pouze z negace, konjunkce a disjunkce, jsme hotovi. QED

Tvrzení, které jsme právě dokázali, je odrazovým můstkem pro mnoho dalších výsledků týkajících se adekvátnosti spojek. Některé z nich si nyní předvedeme.

5.4.3 **Věta:** *Množiny spojek* $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$ *a* $\{\neg, \rightarrow\}$ *jsou adekvátní.*

Důkaz: Pomocí negace a disjunkce můžeme vyjádřit konjunkci. Tím míníme, že formule $\phi \wedge \psi$ vyjadřuje stejnou funkci, jakou vyjadřuje formule $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$. A to nezávisle na tom, jaké formule dosadíme za ϕ a ψ. Lze to ověřit tím, že porovnáme funkce $f_\wedge(x, y)$ a $f_\neg(f_\vee(f_\neg(x), f_\neg(y)))$, resp. jejich tabulky. Zjistíme totiž, že jsou totožné. Dostaneme-li nyní libovolnou pravdivostní funkci f, můžeme k ní podle předchozí věty vzít formuli obsahující ze spojek pouze konjunkci, disjunkci a negaci. V této formuli pak postupně každou podformuli tvaru $\phi \wedge \psi$ nahradíme podformulí $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$. Tím eliminujeme všechny výskyty konjunkce a získáme formuli, která již obsahuje pouze disjunkci a negaci. Tato formule bude vyjadřovat stejnou funkci jako formule původní, tj. funkci f. Tím jsme zdůvodnili, že množina spojek $\{\neg, \vee\}$ je adekvátní.

Podobně se zdůvodní adekvátnost množin $\{\neg, \wedge\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$. V obou případech využijeme již dokázané tvrzení, že množina $\{\neg, \vee\}$ je adekvátní. V prvním případě je třeba ukázat, že lze vyjádřit disjunkci pomocí negace a konjunkce. To platí díky tomu, že pro libovolné ϕ, ψ formule $\phi \vee \psi$ vyjadřuje stejnou funkci jako formule $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$. V druhém případě stačí, když vyjádříme disjunkci pomocí negace a implikace. Platí, že pro libovolné ϕ, ψ vyjadřují formule $\phi \vee \psi$, $\neg\phi \rightarrow \psi$ stejnou pravdivostní funkci. QED

První důkaz adekvátnosti pro skupinu $\{\neg, \vee\}$ provedl roku 1921 Emil Post.[13] U Frega, který používal pouze skupinu $\{\neg, \rightarrow\}$, není příslušný důkaz podán, platnost věty je ale tvrzena spolu s nárysem toho, jak ji dokázat.[14] Skutečnost, že vhodný výběr spojek není zcela samozřejmý, lze ukázat na případech skupin, které úplné nejsou. Ukázali jsme přitom, že máme-li negaci, stačí nám k vyjádření všech pravdivostních funkcí, když k ní přidáme disjunkci, konjunkci či implikaci. Avšak když k negaci přidáme ekvivalenci, adekvátní množinu nedostaneme.

[13] Post [1921].

[14] Frege [1923, s. 48].

`5.4.4 Věta:` *Množina spojek $\{\neg, \leftrightarrow\}$ není adekvátní.*

`Důkaz:` Budeme postupovat menší oklikou. Nejdříve dokážeme následující pomocné tvrzení:

(‡) Nechť jsou dány dvě posloupnosti nul a jedniček: $a_1, \ldots, a_n$ a $b_1, \ldots, b_n$. Předpokládejme, že v obou posloupnostech je sudý počet nul i jedniček. Pak tvrdíme, že počet všech indexů i takových, že $a_i = b_i$, je také sudý.

Toto tvrzení dokážeme sporem. Nejdříve si uvědomme, že platí:

sudé číslo + sudé číslo = sudé číslo,

liché číslo + liché číslo = sudé číslo,

sudé číslo + liché číslo = liché číslo.

Protože obě posloupnosti obsahují sudý počet jedniček, musí být celkový součet všech jedniček v obou posloupnostech také sudý. Pro důkaz sporu budeme předpokládat, že počet všech indexů i takových, že $a_i = b_i$, je lichý, tedy opak toho, co chceme dokázat. Z toho odvodíme, že pak by musel být lichý i celkový součet všech jedniček v obou posloupnostech, což, jak víme, není pravda. Budeme postupovat tak, že projdeme všechny indexy $1, \ldots, n$. Pro každý index i zvážíme, kolika jedničkami do celkového součtu přispěje dvojice a_i, b_i. Indexy si rozdělíme do dvou skupin:

(1) První skupinu budou tvořit indexy, na nichž se členy obou posloupností rovnají. Patří sem tedy takové indexy i, pro něž platí, že $a_i = b_i$. Ve dvojici a_i, b_i jsou tedy buď dvě jedničky, nebo dvě nuly. Proto celkový počet jedniček na celé této skupině indexů musí být sudý.

(2) Druhou skupinu tvoří zbylé indexy, tj. takové indexy i, pro které platí $a_i \neq b_i$. Předpoklad našeho důkazu je, že počet indexů ve skupině (1) je lichý. Počet všech indexů je sudý. Tedy počet indexů ve skupině (2) musí být lichý. Pro každý index i zde platí, že dvojice a_i, b_i obsahuje jednu jedničku a jednu nulu. Protože těchto dvojic je lichý počet, musí být lichý také počet všech jedniček na celé této skupině indexů.

První skupina indexů přináší do celkového součtu sudý počet jedniček, druhá skupina indexů přináší lichý počet jedniček. Celkový počet jedniček je tedy lichý, což je spor. Máme-li dokázáno tvrzení (‡), můžeme si představit libovolnou formuli sestavenou ze spojek $\neg, \leftrightarrow$, která má alespoň dvě různé proměnné. Představme si tabulku funkce, kterou tato formule vyjadřuje, i s pomocnými sloupci pro výpočty (v záhlaví je vypsána celá konstrukce formule). Tvrdíme, že v každém sloupci musí být sudý počet nul a sudý počet jedniček. Máme zde sloupce pro proměnné a sloupce, které znamenají aplikaci našich spojek na některou dvojici z předchozích sloupců. Můžeme tedy postupovat indukcí podle počtu sloupců tabulky.

(i) Kdyby se ve formuli vyskytovala jen jedna proměnná, měla by tabulka pouze dva řádky a sloupec této proměnné by měl lichý počet jedniček (jednu) a lichý počet nul (jednu). Protože ale uvažujeme formule s více různými proměnnými, mají všechny sloupce u proměnných sudý počet nul a sudý počet jedniček. (ii.i) Předpokládáme, že nějaký sloupec je aplikací spojky $\leftrightarrow$ na formule, jejichž sloupce pravdivostních hodnot mají oba sudý počet nul i jedniček. Podle tvrzení (‡) se tyto sloupce shodují na sudém počtu řádků. Spojka $\leftrightarrow$ přiřazuje jedničku tam, kde se sloupce shodují. Výsledný sloupec má tedy sudý počet nul i jedniček. (ii.ii) Nyní předpokládáme, že nějaký sloupec je aplikací spojky $\neg$ na formuli, jejíž sloupec hodnot má sudý počet nul i jedniček. Aplikace negace změní všechny jedničky na nuly a nuly na jedničky. Výsledný sloupec tedy musí mít také sudý počet nul i jedniček. To dokazuje, že pomocí $\leftrightarrow$ a $\neg$ nelze vyjádřit víceargumentové funkce, které přiřazují lichý počet jedniček i nul. `QED`

O něco jednodušším způsobem lze zdůvodnit, že odstraníme-li z naší základní skupiny spojek negaci, dostaneme se též k neadekvátní množině spojek. Představme si nějakou formuli neobsahující jiné spojky než $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ a $\leftrightarrow$, např.:

$$\mathtt{p} \wedge ((\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \rightarrow (\mathtt{q} \wedge \mathtt{r})).$$

Představme si dále interpretaci, v níž je každé proměnné přiřazena jednička. Pak celé formuli musí být přiřazena také jednička, protože konjunkce, disjunkce, implikace i ekvivalence pravdivých formulí jsou vždy také pravdivé. To ale znamená, že v množině spojek $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ nejsme schopni vyjádřit žádnou pravdivostní funkci, která samým jedničkám přiřazuje nulu. Na této myšlence je založen následující důkaz.

`5.4.5 Věta:` *Množina spojek* $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ *není adekvátní.*

`Důkaz:` Dokazujeme indukcí, že každá formule sestavená ze spojek $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ a $\leftrightarrow$ je pravdivá v interpretaci ohodnocující proměnné samými jedničkami. Tím bude dokázáno, že v této množině spojek nelze vyjádřit funkce přiřazující jedničkám nulu. (i) V prvním kroku je třeba zvážit, zda je každá proměnná pravdivá v interpretaci ohodnocující vše samými jedničkami. To platí zcela triviálně. (ii) Přistupme k induktivnímu kroku.

Mějme interpretaci ohodnocující proměnné samými jedničkami a předpokládejme, že $I(\phi) = 1$ a $I(\psi) = 1$. Pak platí:

$$\begin{aligned}
I(\phi \wedge \psi) &= f_{\wedge}(I(\phi), I(\psi)) = f_{\wedge}(1,1) = 1,\\
I(\phi \vee \psi) &= f_{\vee}(I(\phi), I(\psi)) = f_{\vee}(1,1) = 1,\\
I(\phi \rightarrow \psi) &= f_{\rightarrow}(I(\phi), I(\psi)) = f_{\rightarrow}(1,1) = 1,\\
I(\phi \leftrightarrow \psi) &= f_{\leftrightarrow}(I(\phi), I(\psi)) = f_{\leftrightarrow}(1,1) = 1.
\end{aligned}$$

(iii) Tím jsme hotovi. QED

Je zřejmé, že vedle spojek, které jsme oficiálně zavedli, bychom mohli do formálního jazyka KVL zavést další spojky a obdařit je též významem, tedy přiřadit jim nějakou pravdivostní funkci. Jednou z takových spojek, která má jistý korelát v přirozeném jazyce, neboť odpovídá výrazu „ani …, ani …“, je tzv. Peircova šipka (*Peirce's arrow*).

5.4.6 Definice (Peircova šipka): *Významem $\downarrow$ je funkce f_{15} z tabulky 2-argumentových funkcí. To znamená, že $\phi \downarrow \psi$ je pravdivá právě tehdy, když je ϕ nepravdivá a ψ je nepravdivá.*

Dokážeme, že jazyk obsahující pouze tuto jedinou spojku má stejné vyjadřovací možnosti jako jazyk, s nímž budeme pracovat. To znamená, že pomocí Peircovy šipky lze také vyjádřit každou pravdivostní funkci.

5.4.7 Věta: *$\{\downarrow\}$ je adekvátní množina spojek.*

Důkaz: Stačí ukázat, že pomocí spojky $\downarrow$ lze vyjádřit negaci a disjunkci. Pokud chceme tvrdit, že neplatí ϕ, můžeme říci, že neplatí ani ϕ, ani ϕ. Jinými slovy, formule $\neg\phi$ a

$$\phi \downarrow \phi$$

mají stejnou tabulku. Tím máme vyjádřenou negaci. Podíváme-li se na tabulku naší nové spojky a na tabulku disjunkce, je vidět, že jsou vůči sobě inverzní. To znamená, že tabulka pro formuli $\phi \vee \psi$ je stejná jako tabulka pro $\neg(\phi \downarrow \psi)$. Navíc negaci již umíme eliminovat. Disjunkci $\phi \vee \psi$ tedy můžeme nahradit formulí:

$$(\phi \downarrow \psi) \downarrow (\phi \downarrow \psi).$$

Je-li tedy dána libovolná pravdivostní funkce f, pak podle věty 5.4.3 k ní existuje formule, která obsahuje pouze negaci a disjunkci a která funkci f vyjadřuje. Z této formule můžeme odstranit všechny výskyty negace a disjunkce podle právě popsaného postupu. Získáme formuli, která vyjadřuje funkci f a obsahuje pouze spojku $\downarrow$. QED

Spojku $\downarrow$ zavedl americký logik a filosof Ch. S. Peirce kolem roku 1880.[15] Její adekvátnost tvrdil, ale nedokázal. Podobně zavedl roku 1902 v nepublikované stati[16] spojku odpovídající obratu „neplatí zároveň … a …“, která též stačí sama k vyjádření libovolné pravdivostní funkce. Ta se dnes nazývá Shefferův pruh (*Sheffer's stroke*).

5.4.8 Definice (Shefferův pruh): *Významem* $|$ *je funkce* f_9 *z tabulky 2-argumentových funkcí. To znamená, že* $\phi|\psi$ *je nepravdivá právě tehdy, když je* ϕ *pravdivá a* ψ *je pravdivá.*

H. M. Sheffer,[17] po němž je tento druhý Peirců operátor pojmenován, ukázal, že lze všechny spojky Russellových a Whiteheadových *Principia Mathematica*[18] vyjádřit Peircovými operátory. S výjimkou Peircovy šipky a Shefferova pruhu žádné jiné binární spojky (lépe řečeno: jednoprvkové množiny binárních spojek) adekvátní nejsou, což však dokazovat nebudeme. Mezi těmito dvěma adekvátními operátory přitom panuje jistá spřízněnost, kterou podrobněji nahlédneme v oddílu 8.4. Často je podporována i symbolicky tím, že se Shefferův pruh značí obrácenou šipkou $\uparrow$. My jí snadno nahlédneme ze vztahu formulí

(1) $(\phi \downarrow \psi)$ $\qquad (\neg\phi \wedge \neg\psi)$ $\qquad \neg(\phi \vee \psi)$,

(2) $(\phi \uparrow \psi)$ $\qquad (\neg\phi \vee \neg\psi)$ $\qquad \neg(\phi \wedge \psi)$,

kdy formule na tomtéž řádku vyjadřují tutéž funkci. V případě Peircova operátoru se přitom jedná o funkci získanou negací disjunkce, u Shefferova operátoru o negaci konjunkce. Odtud také z elektroniky známé zkratky `NOR` a `NAND` pro logická hradla. K nim se stručně vyjádříme v oddílu 8.3.

Není náhodou, že Peirce sám je (kromě teorie logických obvodů) také autorem metody pravdivostních tabulek, kterou pak zpopularizoval Wittgenstein ve svém *Tractatu*. V něm je také podstatně zužitkován Peirců operátor,[19] i když větší filosofický význam tento tah nemá, snad až na to, že volba té které adekvátní sady spojek je čistě konvenční povahy, tj. může být nahrazena jinou, aniž by tím vyjadřovací schopnosti nějak utrpěly. To neznamená, že nelze výběr určité skupiny spojek dobře zdůvodnit, jak jsme viděli v oddílu 3.6 v souvislosti s Fregem, který např. argumentoval při volbě skupiny $\{\neg, \rightarrow\}$ tím, že implikace $A \rightarrow B$ přímo odpovídá úsudku z A na B, jejž se snaží logika zachytit.

[15] Peirce [1931–1958, IV, § 15–20].
[16] Peirce [1931–1958, IV, § 265].
[17] Sheffer [1913].
[18] Russell & Whitehead [1910–1913].
[19] Wittgenstein [1922, § 5.51].

5.5 Smysl a význam

Wittgensteinův *Tractatus* nám může zprostředkovat další reflexi na probíraná rozlišení a pomoci tak v dalším výkladu. Jedno z těchto rozlišení souvisí s Fregovou sémantickou dvojicí smyslu a významu, jak jsme o ní předběžně hovořili v úvodním oddílu 1.6. Ve vlastním textu jsme nicméně zatím pracovali výhradně s pojmem významu výrazu, jejž chápeme jako cosi jazyku externího, to, o čem tento jazyk pojednává. Po Fregově vzoru jsme se přitom rozhodli ve formálních úvahách tento význam v případě vět, resp. formulí omezit na jejich pravdivostní hodnotu. Ztotožnění významu logických spojek s pravdivostními funkcemi je rovněž Fregovo, jenž k němu dospěl uvažováním tzv. *nenasycených výrazů*, v našem případě vět, z nichž byly odstraněny věty elementární, po nichž zůstala pouze prázdná místa

jestliže ... a ..., pak ... nebo ne ...,

případně proměnné

$$(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \rightarrow (\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{r}).$$

Tak je tomu ve formulích našeho formálního jazyka, jenž má tu markantní výhodu, že je v něm možné naznačit věcnou souvislost vyjmutých míst napsáním téže proměnné. Takto vzniklé výrazy nemají pravdivostní hodnotu samy o sobě, ale až po zaplnění (nasycení) prázdných míst výroky, resp. po ohodnocení proměnných pravdivostními hodnotami. Spíše než pravdivostní hodnoty symbolizují tedy to, jak od pravdy či nepravdy coby argumentů dospívat k pravdě a nepravdě coby výsledné hodnotě. Je dobré si uvědomit, že řeč o pravdivostních *hodnotách* je právě důsledkem tohoto substitučně-funkcionálního příměru, nikoli záměnou věty s nevětným výrazem, speciálně jménem nějakého předmětu, jak to bývá Fregovi pravidelně předhazováno.[20]

Analogie výpočtu hodnoty s sebou ovšem přináší problém, který si lze ilustrovat nejprve na aritmetickém příkladě. Z hlediska svého složení označují výrazy

$$(x + y) \times z \qquad\qquad x \times z + y \times z$$

odlišné způsoby výpočtu hodnot pro dané argumenty, což – chápeme-li funkci algoritmicky – znamená, že označují odlišné funkce. Obecná platnost rovnice

$$(x + y) \times z = x \times z + y \times z$$

[20] Viz např. Baker & Hacker [1984].

před nás klade otázku, čeho rovnost se tady vlastně tvrdí. Frege upozorňuje,[21] že to primárně není totožnost funkcí, ale jejich hodnot pro dané vstupy. Uznává zároveň, že odvozeně lze také hovořit o rovnosti funkcí v tomto zobecněném smyslu, který se omezuje pouze na relaci

$$\text{vstup} \mapsto \text{výstup},$$

tj. ignoruje konkrétní cestu od prvního k druhému. V tomto redukovaném významu jsme *de facto* pojmu funkce rozuměli dosud i my. Příslušná rovnost tedy vyjadřuje, že jsou složené funkce f_1 a f_2 definované jako

$$f_1(x, y, z) = f_\times(f_+(x, y), z),$$
$$f_2(x, y, z) = f_+(f_\times(x, z), f_\times(y, z))$$

totožné. Vrátíme-li se do `KVL`, není obtížné nahlédnout, že zcela analogicky uvedenému příkladu mohou dvě různé výrokovělogické formule vyjadřovat stejnou funkci. Porovnáním tabulek formulí $\neg(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$ a $\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}$ řádek po řádku

p	q	p ∧ q	¬(p ∧ q)	p	q	¬p	¬q	¬p ∨ ¬q
1	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1	1

např. zjistíme, že tyto formule vyjadřují totožnou funkci, a mají tak stejný význam, přestože k funkčním hodnotám dospíváme jiným způsobem. Rozdíl se nám ukazuje na sloupcích mezi argumenty a hodnotami. Právě tomuto způsobu danosti významu říká Frege *smysl* a jeho prostřednictvím pak vysvětluje, čím se liší banální rovnost typu

$$(x + y)^2 = (x + y)^2$$

od netriviálního vzorečku

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Přestože znamenají totéž, totiž tutéž funkci, liší se svým smyslem, totiž tím, jak je nám tato funkce dána. Toto rozlišení, jak jsme zmínili úvodem, řeší také problém netriviální definice či analýzy „A je B“ nebo paradoxy typu *Zahaleného*. Smysl je něco, co nám umožňuje porozumět výrazu, aniž bychom museli být přímo obeznámeni s jeho významem – stačí jen, že víme, jakým způsobem je nám dán. To, že Elektra nezná význam

[21] Frege [1891, s. 9–10].

výrazu „onen zahalený muž“, neznamená, že nezná význam slova „Orestés“, jež má evidentně zcela jiný smysl. Na úrovni věty to znamená, že mohu rozumět tomu, co věta říká, aniž bych musel vědět, zda je pravdivá, či nepravdivá. To je celkem významný rys Fregovy dvojúrovňové sémantiky, který vysvětluje, proč se např. mohu snažit dokázat Goldbachovu domněnku, tj. tvrzení

(G) každé sudé číslo větší než dvě je součtem dvou prvočísel,

aniž bych věděl, zda je pravdivé, nebo nepravdivé, což, jak známo, nebylo dosud rozhodnuto. Tato věta má totiž jasně popsané pravdivostní podmínky (víme, za jakých okolností je a za jakých není pravdivá), tj. způsob danosti svého významu, není ale zatím jasné, jaký význam – pravdivostní hodnota – to je.

Totéž se týká vět, resp. formulí jazyka `KVL`, s tím rozdílem, že zde je ověření jejich pravdivosti či nepravdivosti (při dané interpretaci) otázkou několika jednoduchých kroků odpovídajících příslušnému výpočtu. To souvisí se zmíněnou konečností báze výrokové logiky, resp. s faktem, že pravdivostní hodnotu věty (formule) počítáme z konečného množství elementárních vět (výrokových proměnných). Uvedené tvrzení (G) se oproti tomu skrze úvodní kvantifikátor („každé číslo, které je sudé a větší než dvě ...“) odvolává k nekonečně mnoha elementárním větám typu

$x + y = z$, $x \times y = z$, případně $x < y$,

a příslušný „výpočet“ jeho pravdivosti – ve smyslu provedení nekonečně mnoha výpočtů – je tedy nemožný. Museli bychom totiž pro každé číslo $1, 2, 3, \ldots$ ověřit, zda v případě, že je sudé a větší než dvě, existují dvě prvočísla, z nichž se skládá. Tím ale předjímáme situaci klasické logiky predikátů, k níž se dostaneme později. V aritmetice je situace o to specifičtější, že je již pravdivost jedné elementární věty, např. „$2 + 2 = 4$“, *de facto* závislá na pravdivosti nekonečně mnoha elementárních vět dalších, totiž skrze společnou funkci sčítání, a neplatí tedy zmíněný požadavek nezávislosti báze, jak jsme se k ní vyjádřili v oddílu 5.2. Pravdivost „$2+2 = 4$“ zjevně souvisí s pravdivostí vět „$2+1 = 3$“ a „$2 > 4$“, a nejde je tedy ohodnotit nezávisle. Tím se ale nyní nemusíme zabývat.

Co nás naopak zajímá, je fakt, že z hlediska významu sice vyjadřují formule o počtu n proměnných přesně vymezený počet 2^{2^n} funkcí, jelikož ale tatáž funkce může být vyjádřena neomezeně mnoha formulemi, je fregovských smyslů identifikujících tentýž význam, tj. jednu jedinou funkci, již nekonečně mnoho. Zmíněné zúžení pojmu funkce na pouhé vztahy vstupu a výstupu takto vlastně kopíruje rozhodnutí omezit se v sémantice věty jen na její pravdivostní hodnotu. Stopy této simplifikace lze vidět i ve Wittgensteinově *Tractatu*, i když se jeho a Fregova koncepce smyslu a významu nikoli nepodstatně liší. Smysl je na jedné straně pro Wittgensteina stejně jako pro Frega tím, čemu na větě rozumíme, přičemž:

> „[r]ozumět větě znamená vědět, co nastává, je-li pravdivá. (Můžeme jí tedy rozumět, aniž bychom věděli, zda je pravdivá.)“[22]

Na rozdíl od Frega ale u Wittgensteina smysl náleží pouze větám, ba je tím, co věty od ostatních výrazů odlišuje, neboť v protikladu k nevětným výrazům věta pouze neoznačuje (pravdivostní hodnotu, případně fakt), ale něco říká, totiž že se svět má tak a tak, je-li pravdivá.[23] Právě v této dvojpólovosti – možnosti zobrazovat svět pravdivě a nepravdivě – spočívá její (šíře pojatá) smysluplnost.

Podíváme-li se nyní na ohodnocení (interpretace) daných proměnných jako na popis možného světa, pak smysl věty (formule) je to, co nám ve vztahu k tomuto možnému světu umožňuje říci, zda je v něm tato věta (formule našeho jazyka) pravdivá, nebo nepravdivá. V omezení na n elementárních vět (proměnných) dané formule existuje jen 2^n možných světů (interpretací), v nichž může být pravdivá, nebo nepravdivá. Wittgenstein je nazývá *pravdivostními možnostmi* věty (*Wahrheitsmöglichkeiten*). Ty interpretace (světy), v nichž je formule pravdivá, se nazývají *pravdivostními důvody* věty (*Wahrheitsgründe*). V rámci příští kapitoly o nich budeme hovořit jako o modelech a vzhledem k nim studovat formule a jejich vztahy. Formule, které jsou pravdivé v týchž možných světech, resp. které mají tytéž pravdivostní důvody, mají z Wittgensteinova hlediska stejný smysl.[24]

To, jak jsme viděli, neodpovídá pojetí Fregovu, pro nějž je smysl něčím úzce spjatým se strukturou výrazu, avšak odpovídá to Carnapovu „vylepšení“ Fregovy distinkce smyslu a významu jako *intenze* a *extenze*.[25] Intenzí výrazu je přitom extenze relativizovaná k možným světům, jimž můžeme rozumět jako alternativním situacím, v nichž např. dané jméno označuje někoho jiného než ve světě aktuálním či danému predikátu odpovídá jiná množina předmětů. Z toho lze seznat, že extenzí je zpravidla míněno něco, co se nachází v (empirickém) světě, např. předměty, případně jejich množiny. Intenze je pak funkce z množiny možných světů do příslušného oboru extenzí, v případě jmen tedy do množiny předmětů, v případě predikátů (vlastností) do množiny množin předmětů a v případě vět do množiny pravdivostních hodnot. Coby funkce je

[22] Wittgenstein [1922, § 4.024].
[23] Wittgenstein [1922, § 3.142, 3.3].
[24] Wittgenstein [1922, § 4.2].
[25] Carnap [1947].

Carnapova intenze *de facto* extenzionalizací Fregova pojetí smyslu, neboť v něm je funkce významem (nenasycených) výrazů, nikoli jejich smyslem, jenž zůstává spíše metajazykovým, nepřímým fenoménem. Tyto rozdíly zmiňujeme jen okrajově a omezujeme se pouze na vágní vymezení, že:

> výrazy (větné i nevětné) mají tutéž intenzi, pokud se jejich extenze shoduje v každém možném světě.[26]

Výraz „člověk“ má např. v našem světě stejnou extenzi jako výraz „neopeřený dvojnožec“, protože oběma odpovídají tytéž množiny předmětů, stejnou intenzi však nemají, totiž připustíme-li možnost neopeřených dvojnohých tvorů, kteří nejsou lidmi, a tedy možný svět, v němž se obě extenze liší. Jelikož Carnap ve shodě s Fregem považuje za extenzi věty její pravdivostní hodnotu, mají stejnou intenzi věty, které platí v týchž možných světech. Např. věty „Řekové porazili u Platají Peršany“ a „Peršané byli u Platají poraženi Řeky“ se tuto podmínku zdají splňovat, protože se liší jen gramatickou konstrukcí, nikoli obsahem.

Protože dále Carnap stejně jako Wittgenstein chápe příslušné možné světy empiricky a protože oba předpokládají, že matematika je na stavu empirického světa nezávislá, nese s sebou tato konvence intenzionální totožnost všech vět matematiky, resp. všech pravdivých vět matematiky s větami pravdivými a vět nepravdivých s větami nepravdivými. Všimněme si, že právě to je zcela v rozporu s koncepcí Fregovou, podle něhož mají výrazy

$$2+2 \qquad\qquad \text{a} \qquad\qquad 3+1$$

stejně jako věty

$$2+2=3+1 \qquad\qquad \text{a} \qquad\qquad 2+2=2+2$$

stejný význam, ale různý smysl. Podobným a z hlediska sémantiky `KVL` podstatně relevantnějším případem vět stejné intenze jsou ty, jimž odpovídají formule, které ve své pravdivosti nezávisejí na interpretaci proměnných, tj. ty, jež vyjadřují funkci

$$f_1, \qquad\qquad \text{resp.} \qquad\qquad f_{2^{2^n}}$$

příslušných tabulek n-argumentových funkcí. Ty jsou známy jako formule (věty) tautologické, resp. kontradiktorické, a bude jim věnována následující kapitola. Z Wittgensteinova dvojpólového hlediska je ovšem tento

[26] Pojem možného světa necháme zatím v této podobě. V technickém smyslu ho budeme používat později v rámci výkladu tzv. modálních logik a také v logice intuicionistické, viz kap. 20 a 21.

typ totožnosti smyslu, totiž to, že je zcela nezávislý na stavu možného (a tedy i našeho) světa, signálem, že příslušné formule (věty) žádný smysl nemají, neboť nejsou s to činit žádný smysluplný rozdíl. Jinak řečeno, jelikož platí v každém, resp. v žádném možném světě, nerozdělují možné světy na ty, v nichž platí, a na ty, v nichž neplatí. Proto v *Tractatu* čteme:

> „Všechny věty logiky říkají totéž. Totiž nic.“[27]

A proto tyto věty nazývá Wittgenstein *nesmyslnými*. To se přenáší na celou logiku jako vědu o formě věty, nikoli o tom, co se touto větou (smysluplně) vyjadřuje.

[27] Wittgenstein [1922, § 5.43].

6

Logická pravdivost

V této kapitole se budeme zabývat dvěma speciálními typy pravdivostních funkcí, resp. formulemi, které je vyjadřují. Jsou to ty, které dostávají při *libovolném* ohodnocení proměnných hodnotu *pravda*, a ty, které naopak dostávají vždy *nepravdu*. V tomto ohledu bude naše téma jen jedním z řady témat věnovaných *algebře jedniček a nul*, jak jsme se jí v předchozích kapitolách začali věnovat v souvislosti se zavedením pravdivostních tabulek a funkcí. V této „číselné“ kombinatorice budeme pokračovat zavedením pojmů:

model,

tautologie,

kontradikce,

vyplývání,

splnitelnost,

logická ekvivalence.

Ve skutečnosti se ale teprve nyní dostáváme k něčemu, skrze co bychom mohli vymezit logiku bez ohledu na dějinné období a systém, totiž k pojmu *logické pravdivosti*. Ten, zdá se, ospravedlňuje logiku jako disciplínu s vlastním předmětem studia. Jak však již naznačoval předchozí výklad, především tedy Wittgensteinovo slavné prohlášení logicky pravdivých vět za nesmyslné, může se toto ospravedlnění ukázat jako matoucí, a ve skutečnosti i matoucím je, jak na to upozorníme hned v následující kapitole věnující se logické platnosti. Na druhé straně platí, že otázky neempirických, analytických a *a priori* pravdivých vět, mezi něž věty logiky patří, jsou staré jako filosofie sama. Touto kapitolou se tedy dostáváme přímo do centra tradičních diskusí a sporů, jejichž prezentaci zahájíme několika technickými rozlišeními.

6.1 Model, tautologie a kontradikce

Z předchozích úvah vyplynulo, že zabýváme-li se interpretacemi nějaké formule nebo (konečné) množiny formulí, zajímá nás zpravidla jen ohodnocení proměnných v této formuli (formulích) obsažených, neboť ohodnocení zbylých proměnných nemá na výslednou hodnotu formule vliv. Obecně bychom měli v takovém případě hovořit o *interpretaci proměnných dané formule*, případně *daných formulí*, obvykle to bude ale jasné z kontextu. Víme, že pro formuli, resp. množinu formulí o n různých proměnných existuje nejvýše 2^n různých interpretací. Skutečnost, že je jich právě tolik, plyne z toho, že jednotlivé proměnné ohodnocujeme nezávisle, tj. nemáme důvod některé kombinace hodnot vyloučit jako nepřípadné.

Stejně jako pojem interpretace definujme nejprve i pojem modelu zcela obecně pro libovolnou množinu formulí. Zpravidla pak budeme ale pracovat s množinami konečnými, a tudíž i s konečnými množinami ohodnocovaných proměnných.

6.1.1 Definice (Model): *Nechť I je interpretace, ϑ je formule a T je množina formulí. Řekneme, že I je modelem formule ϑ, když $I(\vartheta) = 1$. Řekneme, že I je modelem množiny formulí T, když I je modelem každé formule z T.*

Předpokládejme, že dostaneme formuli $(\mathtt{q} \to \mathtt{p}) \to \mathtt{p}$. Označme si ji jako ϑ. Vytvoříme její tabulku:

	p	q	$(\mathtt{q} \to \mathtt{p}) \to \mathtt{p}$
I_1	1	1	1
I_2	1	0	1
I_3	0	1	1
I_4	0	0	0

V tabulce jsme označili jednotlivé interpretace (dané formule). Vidíme, že formule ϑ má stejnou tabulku jako disjunkce $\mathtt{p} \vee \mathtt{q}$. Jaké jsou její modely? Jsou to ty interpretace, v nichž je formule pravdivá, tedy interpretace I_1, I_2, I_3. Interpretace I_4 není jejím modelem. Co kdybychom vzali negaci formule ϑ, tj. formuli $\neg((\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{p}) \rightarrow \mathtt{p})$? Je zřejmé, že tato formule bude mít tabulku inverzní k tabulce formule ϑ. To znamená, že $\neg\vartheta$ bude pravdivá pouze v interpretaci I_4 a tato jediná bude jejím modelem.

Kdybychom hledali modely nějaké množiny formulí, řekněme množiny $T = \{(\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{p}) \rightarrow \mathtt{p}, \neg(\mathtt{r} \rightarrow \mathtt{p})\}$, postupovali bychom analogicky. Museli bychom však sestrojit jednu tabulku pro obě formule, tj. tabulku, v níž by byly interpretace ohodnocující všechny proměnné, které se v některé z formulí vyskytují. Tato tabulka by vypadala takto:

	p	q	r	$(\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{p}) \rightarrow \mathtt{p}$	$\neg(\mathtt{r} \rightarrow \mathtt{p})$
I_1	1	1	1	1	0
I_2	1	1	0	1	0
I_3	1	0	1	1	0
I_4	1	0	0	1	0
I_5	0	1	1	1	1
I_6	0	1	0	1	0
I_7	0	0	1	0	1
I_8	0	0	0	0	0

Modelem množiny T je každá interpretace, při níž jsou pravdivé všechny formule z množiny T. To však splňuje pouze interpretace I_5. Interpretace I_5 je tedy jediným modelem množiny T. Jedná-li se tak jako v našem případě o konečnou množinu formulí, zřejmě by šlo při hledání modelů této množiny postupovat také tak, že spojíme všechny členy množiny konjunkcí a pak hledáme modely této jediné formule.

Všimněme si, že kdybychom chtěli zodpovědět otázku, kolik má formule $\neg(\mathtt{r} \rightarrow \mathtt{p})$ modelů, pouze na základě uvedené tabulky, mohli bychom snadno říci, že dva, totiž I_5 a I_7. To je ale omyl, protože tyto modely jsou *de facto* tytéž, tj. shodují se v ohodnocení proměnných `p` a `r`, přičemž jiné proměnné v dané formuli nejsou. Pokud bychom chtěli do pojmu modelu dané formule zahrnout i ohodnocení jiných proměnných, můžeme. A je to i v souladu s naší definicí, která primárně chápe model jako paralelní ohodnocení nekonečně mnoha proměnných jazyka `KVL`. V tom případě by ale otázka počtu modelů zpravidla nedávala smysl, protože pokud by existoval jeden model k dané formuli, existovalo by jich k této formuli i nekonečně mnoho. Nanejvýš by šlo buď tvrdit, že daná formule nemá žádný model, nebo že má alespoň jeden model, nebo že jsou všechny interpretace jejími modely. Tento poslední případ budeme nyní studovat podrobněji.

`6.1.2 Definice (Tautologie):` *Formule je tautologií, když každá interpretace je jejím modelem.*

Při rozpoznávání toho, zda je daná formule tautologií, se můžeme držet následujícího postupu:

(1) Napíšeme si tabulku formule.

(2) Pokud je formuli v každém řádku přiřazena jednička, je to tautologie; pokud je v nějakém řádku formuli přiřazena nula, není to tautologie.

Např. formule $(\mathtt{q} \to \mathtt{p}) \to \mathtt{p}$ není tautologie. Když si připomeneme její tabulku, zjistíme, že ne každá interpretace je jejím modelem. Příkladem jednoduché a důležité tautologie je formule

$$\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p}$$

odpovídající tzv. zákonu vyloučeného třetího. V přípravných úvahách jsme jako výroky připustili jen takové věty, které jsou buď pravdivé, nebo nepravdivé. V souladu s tímto nárokem jsme budovali sémantiku `KVL` a důsledkem je právě platnost příslušné formule. Tabulka formule $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p}$ vypadá takto:

$\mathtt{p}$	$\neg\mathtt{p}$	$\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p}$
1	0	1
0	1	1

V každém řádku je danému ohodnocení proměnných přiřazena jednička a tím je zdůvodněno, že uvedená formule platí. Jiným příkladem tautologie je formule:

$$\mathtt{p} \to (\mathtt{q} \to \mathtt{p}).$$

To lze opět lehce ověřit sestrojením tabulky:

$\mathtt{p}$	$\mathtt{q}$	$\mathtt{q} \to \mathtt{p}$	$\mathtt{p} \to (\mathtt{q} \to \mathtt{p})$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Je zřejmé, že tautologií je nekonečně mnoho. Můžeme totiž vzít třeba nějakou formuli ϑ, o které již víme, že je tautologií, a vytvořit nekonečnou posloupnost formulí:

$$\vartheta, \vartheta \wedge \vartheta, \vartheta \wedge \vartheta \wedge \vartheta, \dots$$

Každá formule v této posloupnosti musí být zase tautologií. Některé konkrétní tautologie mají ale specifický význam, třeba když zachycují některé významné sémantické vztahy KVL. Zde slovo „význam“ používáme zjevně nefregovsky, jako synonymum jisté hodnoty, ceny. Z Fregova hlediska mají všechny tautologie pochopitelně stejný význam, totiž stejnou pravdivostní hodnotu. Mají ale zároveň různý smysl, čímž lze také vysvětlit, proč mezi nimi chceme dále rozlišovat. Uvedeme proto seznam několika z nich i s jejich tradičními názvy:

(1) $\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{p}$ (zákon totožnosti),

(2) $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p}$ (zákon vyloučeného třetího),

(3) $\neg(\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{p})$ (zákon sporu),

(4) $\mathtt{p} \rightarrow (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{p})$ (zákon simplifikace),

(5) $(\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{p}) \rightarrow \mathtt{q}$ (zákon Dunse Scota),

(6) $((\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r})) \rightarrow (\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{r})$ (tranzitivita implikace),

(7) $(\neg\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{p}) \rightarrow \mathtt{p}$ (1. reductio ad absurdum),

(8) $((\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{p} \rightarrow \neg\mathtt{q})) \rightarrow \neg\mathtt{p}$ (2. reductio ad absurdum).

Zrcadlovým obrazem logické pravdy je logická nepravda, které říkáme „kontradikce“.

6.1.3 Definice (Kontradikce): *Kontradikce je taková formule, která nemá žádný model.*

Z této definice je ihned patrné, že mezi tautologiemi a kontradikcemi existuje přímočarý vztah, který vyjadřuje následující věta.

6.1.4 Věta: *Formule ϑ je tautologie právě tehdy, když formule $\neg\vartheta$ je kontradikce. Inverzně také platí, že ϑ je kontradikce právě tehdy, když formule $\neg\vartheta$ je tautologie.*

Důkaz: Nechť ϑ je tautologie. Pak ϑ má v každém řádku své tabulky jedničku. Pak $\neg\vartheta$ má v každém řádku své tabulky nulu, a je to tedy kontradikce. Nechť ϑ není tautologie. Pak ϑ má v některém řádku své tabulky nulu. Pak $\neg\vartheta$ má v některém řádku své tabulky jedničku, a není to tedy kontradikce. Dokázali jsme tedy, že ϑ je tautologie právě tehdy, když $\neg\vartheta$ je kontradikce. Zbývá doplnit, že ϑ je kontradikce právě tehdy, když $\neg\neg\vartheta$ je kontradikce, což platí podle právě dokázaného právě tehdy, když $\neg\vartheta$ je tautologie. QED

Příslušný důkaz nám může posloužit také k reflexi jisté důkazové techniky. Věta sama má formu metajazykové ekvivalence ($\Leftrightarrow$), tj. o dvou tvrzeních ($A =$ „formule ϑ je tautologie“, $B =$ „formule $\neg\vartheta$ je kontradikce“) říká, že platí buďto současně, nebo obě neplatí, tj.:

$$A \Leftrightarrow B.$$

Obvyklý postup důkazu spočívá v rozdělení tohoto tvrzení do dvou metajazykových implikací:

$$A \Rightarrow B \qquad\qquad A \Leftarrow B.$$

Alternativní možností, které jsme ve výše uvedeném důkazu využili, je provedení *kontrapozice* jedné z implikací, díky níž se pak nemění směr důkazu, ale hodnota dokazovaných vět, tj. máme:

$$A \Rightarrow B \qquad\qquad \text{ne-}A \Rightarrow \text{ne-}B.$$

Volba toho kterého postupu závisí na dokazovaném tvrzení a je více méně prakticko-estetické povahy. Nyní ještě ověřme, že je např.

$$(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \leftrightarrow (\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q})$$

kontradikcí. Postupovat lze jednoduše tabulkovou metodou a kontrolou příslušných řádků:

p	q	¬p	¬q	p ∧ q	¬p ∨ ¬q	(p ∧ q) ↔ (¬p ∨ ¬q)
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0

Vidíme tedy, že sémantické otázky KVL jsou v důsledku záležitostí kombinatoriky pravdivostních hodnot seřazených v tabulkách, tj. záležitostí toho, jaké jsou v příslušných řádcích kombinace jedniček a nul, zda koincidují apod. Z hlediska ověřování příslušných vztahů není tato metoda vždy nejpraktičtější, proto zmiňme některé alternativy. V důsledku to ovšem neděláme ani tak pro ně samé, jako s ohledem na naše pozdější (meta)teoretické potřeby, zejména v rámci logiky predikátů.

6.2 Metoda protipříkladu

Tabulková metoda je spolehlivým a jednoduchým prostředkem, který lze teoreticky aplikovat na každou formuli a který nám vždy poskytne jednoznačnou odpověď, zda tato formule je tautologií, nebo ne. Z praktického hlediska je ale tato metoda výhodná jen pro formule, které obsahují malý počet (typů) proměnných. Jak jsme totiž zjistili, s rostoucím počtem proměnných velice rychle roste počet řádků tabulky. Kdybychom dostali formuli, která má např. 10 různých atomů, a chtěli ověřit tabulkovou metodou, zda je to tautologie, museli bychom projít 1024 řádků a v každém vypočítat hodnotu formule. V konkrétních případech můžeme nicméně provést určitou úvahu, a ušetřit si tak značnou a někdy i reálně nemožnou práci s procházením celé tabulky.

`6.2.1 Definice (Protipříklad):` *Protipříkladem formule je libovolná interpretace, která není modelem této formule.*

Nyní si musíme uvědomit, že formule je tautologií právě tehdy, když k ní neexistuje protipříklad. V některých případech (často, když se jedná o implikaci či disjunkci) zjistíme, zda je formule tautologií tak, že k ní systematicky hledáme protipříklad. V mnoha případech úvaha o tom, co musí být splněno, aby formule byla nepravdivá, vede poměrně rychle buď k nalezení konkrétního protipříkladu (pak formule není tautologií), nebo k závěru, že protipříklad nemůže existovat (a pak formule je tautologií). Ukážeme si několik příkladů aplikace této metody systematického hledání protipříkladů.

`Příklad 6.2.2:` Zkusme zjistit, zda je tautologií $(p \to q) \to (q \to p)$. Zvažujeme, jestli existuje protipříklad k této implikaci. Aby byla implikace nepravdivá, musel by být její levý člen pravdivý a pravý nepravdivý. Uvažujeme tedy, zda je možné, aby $p \to q$ byla pravdivá a $q \to p$ nepravdivá. Aby byla $q \to p$ nepravdivá, musela by být q pravdivá a p nepravdivá. Zbývá ověřit, že za této situace je skutečně $p \to q$ pravdivá, což očividně nastává. Tak jsme nalezli protipříklad. Je jím ohodnocení, které proměnné p přiřazuje nulu a proměnné q jedničku. Formule tedy není tautologií. Schematicky můžeme tuto úvahu vyjádřit tabulkou:

(p	→	q)	→	(q	→	p)
			0			
	1				0	
				1		0
0		1		1		0

Jak by situace vypadala, kdyby se jednalo o tautologii, a protipříklad by tudíž neexistoval? Pak by jistě vedl předpoklad jeho existence ke sporu. Ukažme si to na příkladě formule, o které již víme, že je tautologií.

`Příklad 6.2.3:` Formule $p \to (q \to p)$ je implikací. Aby byla nepravdivá, musela by být p pravdivá a $q \to p$ nepravdivá. Aby byla $q \to p$ nepravdivá, musela by být q pravdivá a p nepravdivá. Řekli jsme však, že $\mathtt{p}$ musí být pravdivá. Za předpokladu existence protipříkladu se tedy dostáváme do sporu a můžeme usoudit, že protipříklad neexistuje. Formule je tedy tautologií. Vyjádřeno tabulkou:

p	→	(q	→	p)
	0			
1			0	
1		1		0

Ukažme si také příklad, kde je metoda hledání protipříkladu jednoznačně výhodnější než tabulková metoda.

Příklad 6.2.4: Řekněme, že máme zjistit, zda formule

$$((\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \land (\mathtt{q} \to (\mathtt{r} \to \mathtt{z}))) \to ((\mathtt{p} \to \mathtt{r}) \to (\mathtt{p} \to \mathtt{z}))$$

je tautologií. Zde se jedná o formuli se 4 různými proměnnými. Užití tabulkové metody by představovalo poměrně pracný výpočet. Museli bychom projít tabulku, která by měla 16 řádků a 12 sloupců (pokud bychom v záhlaví vypsali celou konstrukci formule). Museli bychom vyplnit hodnotu ve 192 kolonkách. Ukážeme řešení metodou hledání protipříkladu:

	((p	→	q)	∧	(q	→	(r	→	z)))	→	((p	→	r)	→	(p	→	z))
1										0							
2				1										0			
3		1				1						1				0	
4															1		0
5	1								0		1				1		0
6	1		1		1		1		0		1		1		1		0
7							1	1	0								

Tuto tabulku doplníme komentářem podle příslušných řádků:

(1) Předpokládáme, že celá implikace je nepravdivá.

(2) Musí být tedy levý člen implikace pravdivý a pravý nepravdivý.

(3) Levý člen je konjunkce. Má-li být pravdivá, musejí být oba její členy pravdivé. Pravý člen je implikace. Má-li být nepravdivá, musí být její levý člen pravdivý a pravý nepravdivý.

(4) Protože podformule $\mathtt{p} \to \mathtt{z}$ má být nepravdivá, dostáváme, že proměnná $\mathtt{p}$ je pravdivá a proměnná $\mathtt{z}$ je nepravdivá.

(5) Můžeme připsat příslušnou hodnotu proměnným $\mathtt{p}, \mathtt{z}$ pod všechny jejich výskyty ve formuli.

(6) Nyní můžeme doplnit hodnoty pod všechny výskyty proměnných. Víme totiž, že $\mathtt{p} \to \mathtt{q}$ má být pravdivá a $\mathtt{p}$ je také pravdivá, musí být tedy pravdivá také $\mathtt{q}$. Zcela analogicky: $\mathtt{p} \to \mathtt{r}$ je pravdivá, $\mathtt{p}$ je pravdivá, tedy $\mathtt{r}$ je také pravdivá. Celkem tedy dostáváme, že proměnné $\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}$ jsou pravdivé a $\mathtt{z}$ je nepravdivá.

(7) Tak se ale dostáváme do sporu. Víme, že $\mathtt{q} \to (\mathtt{r} \to \mathtt{z})$ je pravdivá, $\mathtt{q}$ je pravdivá, musí být tedy pravdivá i $\mathtt{r} \to \mathtt{z}$, přitom $\mathtt{r}$ je pravdivá a $\mathtt{z}$ je nepravdivá, protipříklad proto nemůže existovat a formule je tautologií.

Někdy můžeme danou metodou odhalit více než jeden protipříklad.

`Příklad 6.2.5:` Implikace $((\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \to \mathtt{r}) \to \mathtt{p}$ je nepravdivá jen tehdy, když formule $(\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \to \mathtt{r}$ je pravdivá a $\mathtt{p}$ nepravdivá. Pak protože $\mathtt{p}$ je nepravdivá, je $\mathtt{p} \to \mathtt{q}$ pravdivá nezávisle na pravdivostní hodnotě proměnné $\mathtt{q}$. Pak musí být pravdivá i proměnná $\mathtt{r}$. Do sporu jsme se nedostali. Nalezli jsme dva protipříklady I_1, I_2:

$$I_1(\mathtt{p}) = 0 \qquad I_1(\mathtt{q}) = 0 \qquad I_1(\mathtt{r}) = 1,$$

$$I_2(\mathtt{p}) = 0 \qquad I_2(\mathtt{q}) = 1 \qquad I_2(\mathtt{r}) = 1.$$

Vyjádřeno tabulkou:

((p	→	q)	→	r)	→	p
					0	
			1			0
0	1					
0		?		1		0

Formule tedy není tautologií.

Metoda protipříkladu není ovšem pokaždé tak dobře použitelná jako v uvedených případech. Důvodem je, že u některých formulí se úvaha následující předpoklad existence protipříkladu začne větvit, a je pak potřeba sledovat každou větev, dokud na některé nenalezneme určení protipříkladu nebo dokud nezjistíme, že každá větev vede ke sporu. Čtenář si může tento efekt ověřit, pokusí-li se aplikovat metodu protipříkladu třeba na formuli

$$(\mathtt{p} \vee (\mathtt{q} \wedge \mathtt{r})) \leftrightarrow ((\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{p} \vee \mathtt{r})),$$

která je také tautologií. Později se budeme věnovat tzv. metodě sémantických stromů, která bude představovat systematizaci metody protipříkladu a umožní přehledně zpracovávat i větvící se případy. Také ji půjde rozšířit na komplikovanější situaci sémantiky predikátové logiky.

Na okraj poznamenejme, že pro specifické typy formulí mohou existovat specifické metody řešení otázky, zda daná formule je či není tautologií. Jak jsme právě viděli, pro formule tvaru ekvivalence není metoda protipříkladu příliš efektivní, protože předpoklad nepravdivosti ekvivalence nás nevede jednoznačně k nějakým dalším krokům, ale dochází k větvení. Pokud však např. formule neobsahuje jiné spojky než ekvivalenci a negaci, můžeme při zjišťování tautologičnosti použít následující rychle ověřitelné kritérium.

`6.2.6 Věta:` *Nechť ϑ neobsahuje jiné spojky než $\leftrightarrow$ a $\neg$. Pak ϑ je tautologie právě tehdy, když je v ní počet výskytů každé z proměnných sudý a počet výskytů negace je také sudý.*

`Důkaz:` Pro každou interpretaci I zkonstruujeme funkci f_I přiřazující formulím buď číslo 1, nebo číslo -1 podle následujícího předpisu:

$$f_I(\chi) = \begin{cases} +1 & \text{jestliže } I(\chi) = \mathtt{1}, \\ -1 & \text{jestliže } I(\chi) = \mathtt{0}. \end{cases}$$

Pak platí následující dva vztahy:

$$f_I(\phi \leftrightarrow \psi) = f_I(\phi) \times f_I(\psi) \qquad\qquad f_I(\neg\phi) = -1 \times f_I(\phi).$$

Nechť ϑ je formule ze znění věty a počet výskytů každé z proměnných je sudý a počet výskytů negace je také sudý. Pak pro libovolnou interpretaci I je hodnota $f_I(\vartheta)$ rovna součinu, ve kterém se vyskytují pouze hodnoty 1 a -1. Hodnota -1 se v tomto součinu vyskytuje tolikrát, kolikrát se ve formuli ϑ vyskytuje nějaká taková proměnná, které je přiřazena hodnota nepravda, plus kolikrát se ve formuli vyskytuje negace. Součet všech takových výskytů je jistě sudý. Tedy celkový součin je 1 a $I(\vartheta) = \mathtt{1}$. Protože to platí pro každou interpretaci, je ϑ tautologie. Máme tedy dokázanou jednu implikaci ($\Leftarrow$) naší věty. Nyní dokážeme opačnou implikaci ($\Rightarrow$). Nechť je nejprve počet výskytů negace sudý a počet výskytů alespoň jedné proměnné lichý. Vezměme si nějakou takovou proměnnou a označme ji $\mathtt{p}$. Vezměme si interpretaci I, která každé proměnné přiřazuje hodnotu pravda až na $\mathtt{p}$, které je přiřazena nepravda. Pak je hodnota $f_I(\vartheta)$ určena součinem, ve kterém se vyskytují pouze čísla 1 a -1. Přitom číslo -1 se v tomto součinu vyskytuje tolikrát, kolikrát se ve formuli ϑ vyskytuje negace plus kolik je v této formuli výskytů proměnné $\mathtt{p}$, což je liché číslo. Celý součin tedy musí mít hodnotu -1. Proto $I(\vartheta) = \mathtt{0}$ a ϑ nemůže být tautologie. Zvažme poslední možnou situaci. Nechť je počet výskytů negace lichý. Vezměme si interpretaci I, která každé proměnné ve formuli ϑ přiřazuje hodnotu pravda. Pak je hodnota $f_I(\vartheta)$ určena opět součinem, ve kterém se vyskytují pouze čísla 1 a -1 a číslo -1 se v tomto součinu vyskytuje přesně tolikrát, kolik je ve formuli výskytů negace. Protože máme ve formuli lichý počet výskytů negace, platí zase $f_I(\vartheta) = -1$, tedy $I(\vartheta) = \mathtt{0}$, což znamená, že ϑ nemůže být tautologií. QED

V dalších oddílech přejdeme od praktických problémů *ověřování* tautologičnosti k teoretickým problémům jejího *vymezení*. Začneme přitom významným technickým výsledkem, který ukáže, že z hlediska našeho jazyka již tautologičnost nemůže být v jistém smyslu vymezena obecněji.

6.3 Postova úplnost

Jak uvidíme v kapitole 21, existují některé alternativní logiky, které jsou založeny na kritice určitých klasických logických principů (tautologií) a tyto logiky navrhují alternativní sadu principů jakožto logicky pravdivých formulí. Vše si můžeme představit také tak, že každá logika je vedle jazyka reprezentována určitou sadou formulí, které považuje za logicky pravdivé. Klasická výroková logika, kterou nyní studujeme, je reprezentována právě množinou svých tautologií.

Klasickou logiku můžeme rozšiřovat třeba tak, že modifikujeme její jazyk, tj. přidáme nějaké nové symboly (v kapitole 20 např. přidáme symbol pro nutnost $\Box$). Tím se nám může rozšířit také množina logicky pravdivých formulí, protože se objeví takové, které charakterizují chování nově přidaných symbolů. Avšak omezíme-li se na jazyk KVL, lze v určitém technickém smyslu tvrdit, že klasická výroková logika je maximální možná a nelze ji nijak rozšiřovat, tj. zachovat všechny logické pravdy a přijmout navíc nějaké nové. Naším úkolem nyní bude specifikovat, zpřesnit a zdůvodnit toto tvrzení.

Idea je taková, že ne všechny množiny formulí si mohou činit nárok na to, že představují nějakou logiku a že existují určité vlastnosti, které vyjadřují podstatu toho, co to logika je, a u kterých tedy (s jistou rezervou) očekáváme, že je bude každý logický systém splňovat, např. že se logická pravdivost týká formy věty a nikoli jejího obsahu, a že proto každá věta, která má stejný tvar jako logicky pravdivá věta, by měla být také logicky pravdivá. Abychom mohli tuto představu formalizovat v našem objektovém jazyce, zavedeme si pojem substituční instance dané formule.

6.3.1 Definice (Substituční instance): *Nechť ϑ, χ jsou libovolné formule a* p *je libovolný atom. $\vartheta[\mathtt{p}|\chi]$ je formule, která vznikne z formule ϑ tak, že v ní nahradíme všechny výskyty atomu* p *formulí χ. Říkáme, že formuli $\vartheta[\mathtt{p}|\chi]$ jsme získali z formule ϑ substitucí formule χ za atom* p*. Pokud se atom* p *v χ nevyskytuje, pak $\vartheta[\mathtt{p}|\chi] = \vartheta$. O formuli ξ řekneme,* *že je to substituční instance formule ϑ, pokud ji lze získat z formule ϑ pomocí nějaké řady substitucí.*

Vezměme například formuli

$$(\mathtt{q} \to \mathtt{r}) \wedge (\neg\mathtt{q} \to \mathtt{s})$$

a proveďme v ní substituci formule $\mathtt{q} \wedge \mathtt{t}$ za $\mathtt{q}$. Výsledkem je:

$$((\mathtt{q} \wedge \mathtt{t}) \to \mathtt{r}) \wedge (\neg(\mathtt{q} \wedge \mathtt{t}) \to \mathtt{s}).$$

Tuto formuli tedy můžeme zapsat jako:

$$((\mathtt{q} \to \mathtt{r}) \wedge (\neg\mathtt{q} \to \mathtt{s}))[\mathtt{q}|\mathtt{q} \wedge \mathtt{t}].$$

Substituční instance formule $(\mathtt{q} \to \mathtt{r}) \wedge (\neg\mathtt{q} \to \mathtt{s})$ jsou všechny formule tvaru $(\phi \to \psi) \wedge (\neg\phi \to \chi)$. To znamená, že kdykoli nahradíme ϕ, ψ a χ nějakými konkrétními formulemi, získáme jednu konkrétní substituční instanci formule $(\mathtt{q} \to \mathtt{r}) \wedge (\neg\mathtt{q} \to \mathtt{s})$. Nyní definujeme vlastnost množin formulí, která (neformálně řečeno) vyjadřuje, že do příslušné množiny spadají všechny formule určitých tvarů.

`6.3.2 Definice (Uzavřenost na substituci):` *Nechť T je množina formulí. Řekneme, že T je uzavřena na substituci, když s každou formulí ϑ, která je obsažena v T, jsou v T obsaženy také všechny substituční instance formule ϑ.*

Předchozí definice tedy vyjadřuje, že pokud je množina T uzavřena na substituci a obsahuje např. formuli $(\mathtt{q} \to \mathtt{r}) \wedge (\neg\mathtt{q} \to \mathtt{s})$, pak musí obsahovat také každou formuli tvaru $(\phi \to \psi) \wedge (\neg\phi \to \chi)$. Nyní očekáváme, že tuto vlastnost bude mít např. množina všech tautologií, protože tautologičnost má zachycovat pojem logické pravdivosti, což je čistě otázka tvaru vět. Ukážeme, že to tak skutečně je, tj. že množina tautologií je uzavřena na substituci.

`Příklad 6.3.3:` Abychom přiblížili ideu důkazu, ilustrujeme problém na nějakém konkrétním příkladě. Proveďme například substituci formule $\mathtt{q} \wedge \mathtt{t}$ za $\mathtt{p}$ v tautologii $\neg\mathtt{p} \vee \mathtt{p}$. Po této substituci obdržíme formuli:

$$\vartheta = \neg(\mathtt{q} \wedge \mathtt{t}) \vee (\mathtt{q} \wedge \mathtt{t}).$$

Uzavřenost na substituci nám pak zajistí, že také ϑ je tautologií. Proč tomu tak musí být? To, že je formule $\neg\mathtt{p} \vee \mathtt{p}$ tautologií, znamená, že je pravdivá nezávisle na hodnotě proměnné $\mathtt{p}$. Dosadíme-li pak za $\mathtt{p}$ formuli $\mathtt{q} \wedge \mathtt{t}$, můžeme také říci, že formule ϑ je pravdivá nezávisle na tom, jakou hodnotu má podformule $\mathtt{q} \wedge \mathtt{t}$. Tedy ať už ohodnotíme proměnné $\mathtt{q}$ a $\mathtt{r}$ jakkoli, bude ϑ pravdivá, a musí to být tedy tautologie.

Na této úvaze by se nic nezměnilo, ani kdybychom za výchozí formuli vzali jakkoli složitou tautologii s libovolným počtem proměnných. Každá tautologie totiž představuje určitou formu, kde proměnné mohou přijímat jakékoli hodnoty, aniž by to ovlivnilo pravdivost celé formule. Pokud za proměnné dosadíme složité formule, vyhodnocením těchto formulí při libovolné interpretaci bude opět nějaká pravdivostní hodnota, která vstoupí na místo původní proměnné. Následující věta patří k těm, za nimiž se skrývá velmi jednoduchá idea, ale její přesný a obecný důkaz vyžaduje určitou technickou práci a působí nepřehledným dojmem. Důkaz pro úplnost uvádíme, ale pokud čtenář z předchozího výkladu ideu pochopil, může ho přeskočit.

`6.3.4 Věta (O uzavřenosti na substituci):` *Množina tautologií je uzavřena na substituci.*

`Důkaz:` Musíme dokázat, že pokud je ϑ tautologie, ξ je libovolná formule a $\mathtt{p}$ je nějaká proměnná, která se vyskytuje v ϑ, pak nahradíme-li každý výskyt proměnné $\mathtt{p}$ ve formuli ϑ formulí ξ, výsledek tohoto nahrazení bude opět tautologií. Tedy dokazujeme, že je-li ϑ tautologie, pak $\vartheta[\mathtt{p}|\xi]$ je také tautologie. Přímý postup indukcí zde vhodný není, protože se jedná o tvrzení o všech tautologiích (nikoli o všech formulích) a tautologie jsme nedefinovali induktivně. Můžeme však dokázat indukcí obecnější tvrzení, ze kterého již bude naše tvrzení lehce vyplývat. Postup bude ten, že relativně vůči danému atomu $\mathtt{p}$ a formuli ξ přiřadíme každé interpretaci I interpretaci I^*, kterou definujeme následujícím předpisem:

$$I^*(\mathtt{q}) = \begin{cases} I(\mathtt{q}) & \text{jestliže je } \mathtt{q} \text{ odlišné od } \mathtt{p}, \\ I(\xi) & \text{jestliže je } \mathtt{q} \text{ identické s } \mathtt{p}. \end{cases}$$

Předpokládejme, že χ je libovolná formule. Pro jednoduchost budeme formuli $\chi[\mathtt{p}|\xi]$ označovat jako χ^*. Tedy připíšeme-li k nějaké formuli v tomto důkazu hvězdičku, znamená to, že jsme v této formuli substituovali každý výskyt atomu $\mathtt{p}$ formulí ξ. Dokážeme nyní, že platí:

$$I^*(\chi) = I(\chi^*).$$

Budeme postupovat indukcí podle složitosti formule χ. (i) První krok indukce, v němž je χ výroková proměnná, dokážeme zvlášť pro $\mathtt{p}$ a zvlášť pro ostatní proměnné. Pro $\chi = \mathtt{p}$ platí:

$$I^*(\mathtt{p}) = I(\xi) = I(\mathtt{p}^*).$$

Když $\mathtt{q}$ je proměnná různá od $\mathtt{p}$, platí:

$$I^*(\mathtt{q}) = I(\mathtt{q}) = I(\mathtt{q}^*).$$

Tím máme induktivní bázi. (ii) V induktivním kroku předpokládejme, že tvrzení máme dokázáno pro formule ϕ, ψ. Dokazujeme tvrzení pro formule z nich složené:

$$I^*(\neg\phi) = f_\neg(I^*(\phi)) = f_\neg(I(\phi^*)) = I(\neg\phi^*) = I((\neg\phi)^*),$$

$$I^*(\phi \circ \psi) = f_\circ(I^*(\phi), I^*(\psi)) = f_\circ(I(\phi^*), I(\psi^*)) = I(\phi^* \circ \psi^*) = I((\phi \circ \psi)^*).$$

Tím je celé pomocné tvrzení dokázáno. Nyní se vraťme k původnímu tvrzení. Máme tautologii ϑ a dokazujeme, že ϑ^* je také tautologie. Vezměme libovolnou interpretaci I. Podle pomocného tvrzení platí $I^*(\vartheta) = I(\vartheta^*)$. Protože ϑ je tautologie, platí $I^*(\vartheta) = \mathtt{1}$. Tedy také $I(\vartheta^*) = \mathtt{1}$. Tuto úvahu lze provést pro každou interpretaci. To znamená, že ϑ^* $(= \vartheta[\mathtt{p}|\xi])$ musí být při každé interpretaci pravdivá, a je to tedy tautologie. QED

Uvědomme si nyní, jak je důležité dbát na přesné znění našeho tvrzení. Zvažme např. jeho následující obdobu:

> Nechť je ϑ tautologie, ξ libovolná formule a χ podformule formule ϑ. Nahradíme-li každý výskyt formule χ ve formuli ϑ formulí ξ, je výsledek tohoto nahrazení opět tautologií.

Tato věta již pravdivá není. Chceme-li toto obecné tvrzení vyvrátit, stačí uvést protipříklad. Nechť třeba ϑ je tautologie $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p}$, za podformuli χ této formule vezměme $\neg\mathtt{p}$ a za formuli ξ vezměme proměnnou $\mathtt{p}$. Po nahrazení dostaneme formuli $\mathtt{p} \vee \mathtt{p}$, což jistě není tautologie.

Výše jsme uvedli seznam několika tautologií i s jejich běžnými názvy. Pokud bychom ale chtěli být důslední, nenazývali bychom např. zákonem vyloučeného třetího konkrétní formuli $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p}$, jak jsme to učinili výše, ale zákon vyloučeného třetího by odpovídal tvrzení, že každá formule tvaru $\vartheta \vee \neg\vartheta$ je tautologií. To víme na základě věty 6.3.4. Zápis „$\vartheta \vee \neg\vartheta$“ nepředstavuje jednu konkrétní tautologii, ale nekonečně mnoho různých tautologií. Takovému obecnému zápisu se říká schéma. Díky větě 6.3.4 je vhodné chápat tautologie v této schematické podobě a tabulku patřičně upravit. Mluvíme-li dále o rozšíření množiny tautologií, máme na mysli její vlastní nadmnožinu, tj. množinu, která obsahuje všechny tautologie, a mimo to ještě alespoň jednu další formuli, která tautologií není. Z následující věty bezprostředně plyne, že každé rozšíření klasické logiky (tj. množiny tautologií), které je uzavřené na substituci, obsahuje kontradikci. Této vlastnosti se říká *postovská* či *Postova úplnost* podle jejího objevitele.[1]

[1] Post [1921].

Pokud přijmeme uzavřenost na substituci jako základní podmínku, kterou by mělo splňovat vše, co si činí nárok na to být logikou, pak zde již máme první argument ve prospěch tvrzení, že nelze mít výrokovou logiku, která by byla silnější než ta klasická. Podle následujícího tvrzení by tato logika musela obsahovat nějakou kontradikci. Ovšem tento argument není zcela důsledný, protože to, co je logicky nepravdivé z hlediska naší logiky, nemusí mít tento status v nějaké alternativní logice. V principu by se mohlo stát, že nějaká kontradikce naší logiky by byla v alternativní logice považována za logicky platnou formuli. Již nyní je však vidět, že taková alternativní logika by musela mít velmi podivné vlastnosti.

`6.3.5 Věta (O Postově úplnosti):` *Je-li množina formulí uzavřena na substituci a obsahuje-li formuli, která není tautologie, pak obsahuje také nějakou kontradikci.*

`Důkaz:` Přiřaďme nejprve relativně k dané interpretaci I každé formuli ϑ formuli ϑ_I tak, že v ϑ nahradíme všechny atomy určitými komplexními formulemi. Postup je ten, že jestliže $\mathtt{p}$ je atom vyskytující se v ϑ, pak:

pokud $I(\mathtt{p}) = \mathtt{1}$, každý výskyt $\mathtt{p}$ nahradíme formulí $\neg\mathtt{p} \vee \mathtt{p}$,

pokud $I(\mathtt{p}) = \mathtt{0}$, každý výskyt $\mathtt{p}$ nahradíme formulí $\neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{p}$.

Tedy např. pokud $\vartheta = \mathtt{p} \to \mathtt{q}$ a interpretace I je taková, že $I(\mathtt{p}) = 1$ a $I(\mathtt{q}) = 0$, pak $\vartheta_I = (\neg\mathtt{p} \vee \mathtt{p}) \to (\neg\mathtt{q} \wedge \mathtt{q})$. Nyní platí:

jestliže $I(\vartheta) = \mathtt{1}$, pak ϑ_I je tautologie,

jestliže $I(\vartheta) = \mathtt{0}$, pak ϑ_I je kontradikce.

Obě tato tvrzení lze dokázat najednou indukcí podle složitosti formule ϑ, což přenecháme čtenáři. Nyní se vraťme k našemu problému. Máme množinu formulí T, která je uzavřena na substituci a obsahuje nějakou formuli ϑ, která není tautologie. To znamená, že existuje interpretace I taková, že $I(\vartheta) = \mathtt{0}$. Tedy formule ϑ_I je kontradikce. Protože je množina T uzavřena na substituci a obsahuje ϑ, musí obsahovat také ϑ_I, protože to je substituční instance formule ϑ. Tedy T obsahuje kontradikci. `QED`

Uzavřenost na substituci není jedinou vlastností, kterou bychom očekávali u každé logiky. Další základní vlastností je tzv. uzavřenost na *modus ponens*. Motivací je následující úvaha. Pokud předpokládáme, že nějaká věta A je logicky pravdivá a pokud je zároveň logicky pravdivá věta „pokud A, pak B“, pak by měla být logicky pravdivá též věta B.

`6.3.6 Definice (Uzavřenost na` ***`modus ponens`***`):` *Pro množinu formulí T platí, že je uzavřena na modus ponens, když z toho, že obsahuje nějaké formule ϑ a $\vartheta \to \chi$, plyne, že obsahuje též formuli χ.*

Očekáváme tedy, že množina tautologií by měla být uzavřena na *modus ponens*. Že tomu tak je, dokážeme vzápětí.

6.3.7 Věta (O uzavřenosti na *modus ponens*): *Množina tautologií je uzavřena na modus ponens.*

Důkaz: Dokazujeme, že pokud ϑ a $\vartheta \to \chi$ jsou tautologie, pak je tautologií i formule χ. Předpokládejme, že ϑ a $\vartheta \to \chi$ jsou tautologie. Nechť I je libovolná interpretace. Víme, že $I(\vartheta) = \mathtt{1}$. Kdyby $I(\chi) = \mathtt{0}$, pak by $I(\vartheta \to \chi) = \mathtt{0}$, což není pravda. Tedy $I(\chi) = \mathtt{1}$ pro libovolnou I, což znamená, že χ musí být tautologie. QED

Nyní můžeme dokončit argument, že klasická logika je v jistém smyslu maximální možná logika, tj. že neexistuje žádné rozšíření množiny tautologií KVL, které bychom byli ochotni považovat za logiku.

6.3.8 Věta: *Jediné rozšíření množiny tautologií, které je uzavřeno na substituci a modus ponens, je množina všech formulí.*

Důkaz: Nechť je dána množina T, která splňuje uvedené vlastnosti:

(a) T obsahuje všechny tautologie,

(b) T obsahuje nějakou formuli χ, která není tautologií,

(c) T je uzavřena na substituci,

(d) T je uzavřena na *modus ponens*.

Ve větě 6.3.5 jsme ukázali, že z (b) a (c) plyne, že T obsahuje nějakou kontradikci. Nazvěme ji třeba ξ. Nechť je dána libovolná formule ϑ. Potřebujeme dokázat, že ϑ musí být v T. Povšimněme si, že formule $\xi \to \vartheta$ je tautologie. Díky (a) je formule $\xi \to \vartheta$ obsažena v T. V T je tedy jednak ξ a jednak $\xi \to \vartheta$. Díky (d) pak musí být v T i ϑ. Jelikož ϑ byla libovolná formule, je T množina všech formulí. QED

V závěrečných dvou oddílech se na problém tautologičnosti podíváme z historicko-filosofického hlediska, v němž je tento pojem úzce spjat s problémem vět, jejichž pravdivost plyne čistě z analýzy pojmů.

6.4 Analytická věta

Pojem analytické věty, pod nějž se tradičně řadí i pravdy logiky, se přirozeně vyskytuje v dvojici s pojmem věty syntetické a zhruba mu odpovídá takové zdůvodnění pravdivosti, k němuž nepotřebujeme nic jiného nežli pojmy ve větě obsažené, zatímco v případě vět syntetických je zapotřebí ještě něčeho dalšího. U Huma takto např. nacházíme opozici *vztahů idejí* (*relations of ideas*), které jsou založené na operacích mysli, a to jako protipólu *záležitostí faktu* (*matters of fact*), které se navíc opírají o evidenci smyslů.[2] Tento rozdíl je samozřejmě značně vágní a samo rozdělování vět do podobných kategorií bylo tradičně napadáno, a to jak co do konkrétního provedení, kdy např. věty matematiky (případně v omezení na aritmetiku či geometrii) byly střídavě rozpoznávány jako analytické (Hume, Leibniz, Bolzano, Frege), syntetické (Kant, Poincaré, Brouwer), případně jako konglomerát obojího (Hilbert, Lorenzen), tak co do smysluplnosti. Tento druhý typ útoku vedl zejména Quine.[3]

Za praotce konceptu analytičnosti, jenž byl do filosofie zaveden Kantem, je obvykle považován Locke[4] se svými „triviálními větami“ (*trifling propositions*), jež jsou charakterizovány třemi podmínkami:

(1) nerozšiřují naše poznání,

(2) jsou jisté,

(3) jsou čistě verbální, tj. nedosahují reálné pravdivosti, ale týkají se jen jistých konvencí užití jazyka.

Patří k nim věty jako „A je A“, ale také věty jako „grošák je strakatý“, jejichž pravdivost je důsledkem konvence, podle níž je grošák zaveden jako zkratka za strakatého koně. Po analýze příslušných pojmů tedy zjistíme, že je predikát již obsažen v subjektu uvedené věty, kterou lze přepsat jako „strakatý kůň je strakatý“. Lockův vlastní příklad, jenž později přejímá i Kant,[5] je poněkud kontroverznější, totiž:

zlato je žluté.[6]

Ve své analytičnosti se totiž zdá být závislý na předchozí stipulaci nebo na představě, kterou jsem si o zlatě udělal a jejímž mentálním rozborem dospěji k tomu, že je v něm již obsažena představa žlutosti. Toto druhé pojetí analýzy nazývá Coffa[7] *chemickou doktrínou reprezentace* a spojuje ji s Kantovou definicí, podle níž:

> „Buďto náleží predikát B subjektu A jako něco, co je v pojmu A (skrytě) obsaženo, nebo leží B zcela mimo A, ačkoli s ním

[2] Hume [1748, oddíl IV, část I, s. 23–30].
[3] Quine [1953, kap. 2].
[4] Locke [1690, kniha IV, kap. VIII, § 1].
[5] Kant [1783, A 26].
[6] Locke [1690, kniha IV, kap. VIII, § 5].
[7] Coffa [1991, s. 9].

třeba souvisí. V prvním případě nazývám soud *analytickým*, v případě druhém *syntetickým*.“[8]

Podle této teorie jsou pojmy obsaženy v pojmech jiných nikoli ve vztahu k jejich extenzím (mereologicky), ale jakýmsi latentním způsobem, podobným tomu, jakým je chlor obsažen v soli. V prve uvedeném pojetí, které odpovídá koncepci Leibnizově a které lze s ohledem na dříve užité rozlišení nazvat intenzionálním, je predikát v subjektu obsažen spíše jako jedna z položek seznamu, tj. je identický s jedním z predikátů vymezujících pojem subjektu po vzoru věty:

$A(= BCD)$ je D.

Za tím je samozřejmě dost jednoduchá představa o definici pojmu, a tedy i o logicky pravdivých větách, které jsou podle Leibnize[9] redukovatelné na identity (predikátu a subjektu, resp. jeho části), jejichž opak vyjadřuje spor. Leibnizův koncept analytičnosti a s ním spojené rozlišení pravd rozumu (*vérités de raisonnement*) mají navíc ten problém, že se zdají příležitostně figurovat jako kritérium nejen pravdivosti logické, ale jakékoli, včetně rozlišení pravd faktických (*vérités de fait*).[10]

Kant oproti tomu vymezuje kritérium identity a sporu jednoznačně jako *principy analytických soudů*.[11] To je velký pokrok jak ve srovnání s Lockovým kritériem jistoty, tak ve srovnání s pocity nutnosti, evidence, nepředstavitelnosti či nemyslitelnosti opaku, které (i podle Leibnize a Kanta) analytický či apriorní soud doprovázejí a které mají jasný subjektivistický, psychologický charakter. Problematičnost takovýchto určení je vidět již na tom, že právě s ohledem na ně (resp. na jasnost a zřetelnost) Descartes (a později Brouwer) věty tradiční logiky vyřadil z kánonu věd jako nespolehlivé. Na rozdíl od kritéria identity, které je závislé na tehdejším chudém pojetí logické formy, je navíc spor při zdůvodnění analytičnosti věty použitelný i v logice moderní, jak jsme to viděli v předchozím oddílu věnovaném metodě protipříkladu. Formulujeme-li toto kritérium explicitně, pak:

analytická pravda je ta, jejíž negace nás dovede ke sporu.

Široká aplikovatelnost tohoto pravidla je samozřejmě dána i tím, že je ještě příliš obecné, neboť není jasné, jakými prostředky bychom ke sporu

[8] Kant [1781/1787, A 6/B 10].

[9] Leibniz [1714, § 33, 35].

[10] Viz Leibniz [1960, s. 204].

[11] Kant mezi oběma kritérii přechází, identitu uvádí např. in: Kant [1781/1787, A 6/B 10], spor in: Kant [1781/1787, A 154/B 193].

měli dospět, zda tedy např. to, že prší, nelze analyticky potvrdit vlhkostí papíru, na němž jsme napsali opak, nebo tím, že je nám v dané situaci opak proti mysli.

Než se k tomuto problému vrátíme, zaměřme se ve stručnosti na alternativní vymezení analytičnosti, které podstatně ovlivnilo další chápání tohoto pojmu a *de facto* anticipuje Tarského definici vyplývání, jak ji předvedeme v další kapitole. Tím je definice Bolzanova, za jejíž jádro můžeme označit postřeh, že čistě pojmové věty a úsudky jsou pravdivé, resp. platné spíše na základě toho, že většinu pojmů ignorují, než že by z nich čerpaly. Zajímavá pak není ani tak pravdivost či nepravdivost uvažovaných vět, ale to, co dělá s pravdivostí věty změna některých jejích částí. U Bolzana čteme:

> „Má-li věta A tu vlastnost, že jsou pravdivé všechny věty, které z ní lze získat, jestliže si myslíme pouze představy $i, j, \ldots$ jako proměnlivé, [...] můžeme ji nazývat *obecně* nebo *úplně platnou.*“[12]

Věta „prší a když prší, je mokro, tudíž je mokro“ je potom pravdivá nejen proto, že byl ignorován pojmový obsah jejích dílčích vět, ale že byly tyto věty ignorovány úplně, tj. včetně jejich skutečných pravdivostních hodnot. To odpovídá tomu, že je logika formální věda, která od obsahu zcela odhlíží. Toto odhlížení, a to je mimořádně podstatné, je ovšem v Bolzanově definici relativizováno vůči sadě výrazů $i, j, \ldots$

K této relativizaci vedl Bolzana postřeh, že by jinak něco jako obecná platnost věty vůbec nemohlo vzniknout, neboť variací různých částí bychom vždy mohli z libovolné věty pravdivé získat nepravdivou (a *vice versa*), např. z věty „prší nebo neprší“ náhradou spojky „nebo“ za „a“ větu „prší a neprší“. To má ovšem také svou druhou stranu, totiž nutnost specifikace těch výrazů, jejichž gramatické typy být nahrazeny mají, resp. těch, které být nahrazeny nemají. Bolzano si byl vědom toho, že věta, jako je výše uvedená, je pravdivá nejen proto, že jisté obsahy necháváme proměnnými, ale i proto, že jiné fixujeme – totiž obsahy pojmů logických, jako je např. výrokovělogická spojka „jestliže ..., pak ...“.[13] Vlastní vymezení logických pojmů ovšem nakonec vzdal, protože, jak tamtéž uvádí, rozdíl mezi nimi a jinými pojmy „není tak ostře ohraničen, aby se o tom již nedal vésti spor“. Jisté východisko se zdá sice nabízet jeho návrh definice *analytické* věty jako takové, v níž

[12] Bolzano [1837, § 147].
[13] Bolzano [1837, § 148].

> „existuje alespoň *jedna jediná* představa, kterou lze libovolně variovat, aniž by tím byla porušena pravdivost či nepravdivost věty“,[14]

který na jednu stranu vyhovuje jakémusi širšímu pojetí analytičnosti, takto obsáhnuvšímu i věty (a úsudky) jako

> jestliže Řekové porazili u Platají Peršany, pak byli Peršané u Platají poraženi Řeky

pro variabilní „Řekové“, „Peršané“. Na druhou stranu se zdá být až příliš široký, neboť mu dostojí i kontingentně (empiricky) pravdivé obecné výroky jako

> je-li Willy savec, není to ryba,

zůstane-li proměnlivý jen „Willy“. Možná, že z jistého úhlu pohledu lze i takovéto věty považovat za nutné (ve vztahu k biologickým zákonitostem), sotva však za platné z pouhé znalosti pojmů „savec“ a „ryba“. Touto definicí se tedy Bolzano nebezpečně přiblížil Leibnizovi, implicitně stírajícímu rozdíl mezi pravdou pojmovou a pravdou prostou. Nová logika – zahrnující stanovení pevné sady logických konstant a kategorizaci syntaxe, tedy typů výrazů, které mohou být variovány, neboli k jejichž obsahu se nebude přihlížet – musela proto se svým zrodem počkat až na Fregův spis *Pojmové písmo.*

Stejně jako Bolzano si i Frege uvědomil, že tzv. formální vědy netěží ve zdůvodnění pravdivosti svých vět z pouhé abstrakce, zaměnitelnosti obsahu, ale i z toho, že určitý obsah ponechávají zachován, a v jistém smyslu je tedy jejich „formálnost“ relativní. Frege píše:

> „Stejně jako má geometrie pojem bodu, má i logika své vlastní pojmy a relace a ty také tvoří její obsah. Vůči těmto se nechová formálně. Žádná věda není zcela formální; ale do jisté míry je i gravitační mechanika formální, pokud jsou jí všechny optické a chemické vlastnosti lhostejné. Tělesa různé hmotnosti pro ni zaměnitelná nejsou; ale nic nestojí v cestě zaměnitelnosti těles odlišných vlastností chemických.“[15]

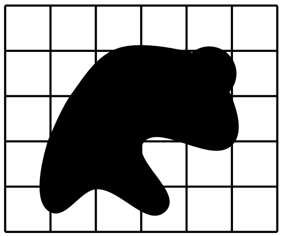
Vědomí této relativity mu však nezabránilo v tom, aby na rozdíl od Bolzana zužitkované logické pojmy popsal. Byl si přitom plně vědom toho, že tak činí ve vztahu k jistým vědeckým cílům, tj. že jeho logika

[14] Bolzano [1837, § 148].
[15] Frege [1906, s. 428].

nemá a nemůže mít zcela univerzální nárok.[16] Z tohoto postřehu lze také odvodit umírněnější postoj k pojmu analytického, který, tak jako Quine, nenavrhuje jeho odmítnutí, ale uvědomuje si jeho relativitu:

> analytické a syntetické, stejně jako logické a mimologické jsou vztažné pojmy, pevně fixované teprve ve své opozici, nikoli jako absolutní určení.

Instruktivní pro formulaci tohoto rozdílu může být Wittgensteinův oblíbený příklad, který užívá k objasnění své koncepce pravdivosti, tj. věty jakožto obrazu skutečnosti.[17] Máme si představit černou skvrnu (fotografii) na bílém papíře (svět), kterou máme za úkol popsat. Viz obrázek 6.1. K tomu nám poslouží nějaký rastr (jazyk), jenž na ni (něj) při-



Obrázek 6.1: Popis světa

kládáme. Povaha tohoto rastru je zcela v našich rukou, může být tedy čtvercový či trojúhelníkový, jemnější či hrubší atd. Podstatné je, že nějakou podobu mít nakonec musí. To, jaká bude, není určeno předem, ale musí odpovídat nějakým externím cílům, vůči nimž skvrnu popisujeme. Předpokládejme, že jsme zvolili rastr čtvercový, a to tak, aby bylo v principu každé z jeho políček považováno za (dostatečně) černé nebo bílé, *tertium non datur*. Za elementární větu zvolme tvar

$$C(x, y),$$

jenž má za úkol říkat, že je čtvereček o souřadnicích (x, y) černý, přičemž x a y jsou nějaká přirozená čísla z předem daného fragmentu číselné řady. Je jasné, že celou skvrnu pak můžeme zachytit popisem černých bodů a tím, že to jsou všechny. Jak jsme již řekli v oddílu 5.5, rozumět větě, znát její smysl, znamená pro Wittgensteina podobně jako pro Frega vědět, za jakých podmínek je pravdivá, resp. nepravdivá, v případě elementární

[16] Frege [1879, s. XI].

[17] Wittgenstein [1922, § 4.063, 6.341].

věty tedy její vztah ke škále možných obarvení políčka rastru. Teprve na základě tohoto předpokladu, tedy předpokladu nějaké fixní palety možných barev a fixní škály hodnot souřadnic (x, y), určené velikostí papíru, mohou sloužit věty jako

$$\neg C(a, b) \qquad \text{či} \qquad C(a, b) \wedge \neg C(c, d)$$

k zobrazování (komplexních) faktů, konkrétně tedy toho, že políčko (a, b) není černé či že je černé políčko (a, b) a bílé políčko (c, d). Je to tedy forma smysluplné elementární věty, co určuje formu možného světa, v tomto případě možné fotografie černobílým fotoaparátem na film daných rozměrů – jinými slovy: prostor toho, co je možné (přípustné) a co ne. Zatímco u vět jako $\neg C(a, b)$ je zřejmé, že popisují ty z možných fotografií, v nichž není uvedené políčko (a, b) černé, odmítá u vět typu

$$C(a, b) \vee \neg C(a, b)$$

Wittgenstein o popisu, zobrazování světa, vůbec hovořit. Nahlížet tuto větu jakožto vyjadřující fakt, že je dané políčko rastru černé nebo bílé, znamená zapomenout, že volba barevné škály a škály rastru sama nebyla součástí zobrazovaného, nýbrž jeho formy, vymezení toho, co budeme pokládat za přípustnou, tedy smysluplnou elementární větu. Tato smysluplnost se u Wittgensteina na rozdíl od Frega nepřenáší z elementárních na věty komplexní, a to jednoduše proto, že zatímco kritériem smyslu – přípustnosti – věty Fregovy formální logiky byla prostá dvouhodnotovost, Wittgenstein ji svou transcendentální aplikací zjemnil na artikulovatelnost rozdílu mezi možnými světy.

To, co nás danou logiku, daný rastr, opravňuje nazývat nutným či apriorním, ve smyslu něčeho, co předchází zkušenosti, není ovšem nějaký jejich samostatný rys, ale jejich vztah vůči zobrazované skutečnosti. Jsou to tedy relativní nutnosti, relativní *apriori*. To, že některé políčko nebude celočerné, nebo že bude obsahovat spíše skvrnu šedivé barvy, nelze vyloučit, zároveň to ale nelze považovat za objev v rámci zobrazovaného výjevu, nýbrž za aberaci, kterou je třeba potlačit, aby mohla být – s ohledem na zvolený reprezentační aparát – uspokojena potřeba úspěšného zobrazení celku. Stejně tak nás výskyty vágních predikátů či nejasných případů nevedou k potlačení vyloučeného třetího, neboť ten nechápeme jako vyjádření nejobecnějšího z faktů, ale jako konvenci, která nám má nějaké fakty teprve pomoci artikulovat. Nešokuje nás potom ani možnost, že lze tento princip zpochybnit a nahradit jiným, jak to učinil Brouwer a jeho následovatelé,[18] totiž když se v nějakém kontextu počet

[18] Viz kap. 21.

případných aberací stane neúnosným, tj. z občasné výchylky se začne stávat pravidlo. To, že lze naopak ke každému pravidlu najít výjimku, jen poukazuje na fakt, že jazyk (rastr), jímž formujeme svět (skvrnu), a tento svět samotný jsou dvě odlišné věci. Z tohoto plyne, že jeden druhému uniká. Řečeno logickou terminologií: ke každé tautologii lze nakonec najít protipříklad. Podstatné je, že jej za jistých okolností nalézt nechceme.

6.5 Syntetická věta

Závěr předchozího oddílu je samozřejmě dosti podezřelý, neboť se zdá, že *de facto* stírá rozdíl mezi analytickým a syntetickým, když po Wittgensteinově vzoru podřazuje *formální* logiku pod logiku *transcendentální*, jež má ovšem s ohledem na vztah k formám smyslovosti – prostoru a času – syntetické rysy. A v jistém ohledu je to i pravda, nejprve je ale třeba vysvětlit, co rozumí Kant syntetickou větou. Jak jsme řekli, je analytická věta v užším Kantově pojetí zdůvodněna pouhou analýzou pojmů. U syntetických soudů musí přistoupit něco dalšího,

> nějaké X,[19]

které syntetizuje užité pojmy dohromady, a jelikož z pojmů samých vznikají pouze analytické věty, je třeba se po onom X poohlédnout v prostoru empirické zkušenosti. U empirických soudů typu

> (tato) kráva je černá

je takovýmto pojítkem názor, v tomto případě názor nějaké černé krávy. V Kantově hledáčku ale bylo především ospravedlnění vět, které nejsou zjevně empirické, ale nelze je vydávat ani za čistě logické, konkrétně např. případ kauzálního zákona, jehož nutnost Hume zpochybnil tím, že v konkrétním jevu A nenalezl nic, co by vedlo s nutností k jevu B.[20] Podle Kanta zde musí být pojítkem opět názor; aby však mohl být příslušný zákon nahlédnut jako nevyhnutelný, musí se jednat o názor čistý, v tomto případě tedy názor času. Zákon kauzality se tak spolu s dalšími stane syntetickým *a priori*, tj. něčím, co nelze vyvrátit zkušeností, protože ji v nějakém smyslu předchází, zároveň se k ní ale vyjadřuje, spoluurčuje ji, na rozdíl od jazykových konvencí, které se se zkušeností mohou míjet, např. při vytváření pojmů, jako je „jednorožec“ či „kulatý čtverec“. V Kantově systému jsou s každou kategorií spjaté jisté základní věty,

[19] Viz Kant [1781/1787, A 9/B 13].
[20] Hume [1748, oddíl IV].

jejichž platnost je nahlédnuta jako syntetická *a priori*. Jedná se o principy zmíněné ve schématu 6.2.[21] První dvě skupiny artikulují podmínky

(1) axiomy názoru

(2) anticipace vjemu (3) analogie zkušenosti

(4) postuláty empirického myšlení vůbec

Obrázek 6.2: Principy čistého rozumu

měření extenzivních veličin (počtu, délky) a intenzivních veličin (teploty, váhy). Třetí skupina principů, tzv. analogie zkušenosti, je nejzávažnější, neboť je na ní založeno vyvrácení Humovy skepse ohledně objektivní platnosti (Newtonových) přírodních zákonů. Jednotlivým modům kategorie relace odpovídají:

(a) zákon zachování substance (hmoty),

(b) zákon kauzality (nutného spojení příčiny a účinku),

(c) zákon interakce (akce a reakce).

První z nich představuje reakci na Humovo zpochybnění identity věci v prostoru a v čase,[22] které jde zpět až k antickým paradoxům nemožnosti dvojího vstoupení do jedné řeky či k problému Théseovy lodi, která byla prkno po prknu přestavěna na loď jinou. U Kanta je, známým obratem perspektivy, identita rozpoznána jako konstitutivní, nikoli akcidentální rys předmětnosti, neboť: jelikož věc nemůže existovat bez své reprezentace, je vlastně tím, co zůstává zachováno v představách, jež jsou – skrze jistá kritéria identity – rozpoznány jako reprezentace téhož.[23] Neměnnost substance je takto vlastně (transcendentálním) předpokladem, tj. nikoli důsledkem jakékoli objektivně platné řeči, která by – jak ukazují paradoxy Zénónova typu – za předpokladu stálé změny předmětu řeči nebyla vůbec možná. Tuto jednotu přitom negarantuje proměnlivá skutečnost, ale transcendentální subjekt, resp. to, co Kant nazývá *transcendentální jednotou apercepce*.

[21] Kant [1781/1787, A 161/B 200].
[22] Hume [1739/1740, kniha 1, oddíl II, VI].
[23] Více k tomu řekneme také v kap. 18.

Kritéria identity věcí v čase (a prostoru) jsou přitom řízena dalšími analogiemi, kdy druhá říká, že se všechny změny dějí podle vztahu příčiny a účinku a třetí, že jsou všechny substance vnímané v prostoru jako současné ve vzájemné interakci. Poznání takto nelze vysvětlit jako důsledek kontingentního opakování shody dvou jevů, a tedy *zvykem*, jak to dělá Hume, neboť již pozorování jejich současného výskytu předpokládá zařazení do objektivní struktury času a prostoru, na rozdíl od posloupnosti subjektivních vjemů. Je totiž rozdíl, zda je tatáž posloupnost jednotlivých vjemů uchopena (i) jako projíždějící vlak nebo (ii) vlak, kolem kterého jsem přešel či (iii) výsledek jeho postupného přehlédnutí ze vzdáleného místa.

Poslední skupina principů, postuláty empirického myšlení, artikuluje obecné podmínky smysluplnosti soudů, tj. (a) toho, kdy je vůbec možný (smysluplný), (b) kdy je reálný a (c) kdy nutný. První podmínku již známe, neboť v Kantově systému, stejně jako později ve Wittgensteinově *Tractatu*, je smysluplnost ztotožněna s empirickou vykazatelností (shodou s formálními podmínkami zkušenosti). Např. to, že nějaký empirický předmět je zelený, je možné, protože to je ve shodě s anticipacemi vnímání, je to skutečné, protože to je výsledkem pozorování (je to ve shodě s materiálními podmínkami zkušenosti). To, že má vůbec nějakou barvu, je nutné, protože to je důsledkem apriorního soudu (souvislost dané věty se skutečností je určena podle obecných podmínek zkušenosti). Srovnej k tomu Wittgensteinův příklad popisu skvrny z předchozího oddílu.

Aby obhájil možnost *apriorních* soudů v rámci přírodní vědy, obrátil se Kant k matematice, s tvrzením, že její věty jsou rovněž příklady syntetických vět, které pro nezpochybnitelný apodiktický, rozumový charakter této vědy musí být také *a priori*. Toto tvrzení se pak stalo jedním z nejdiskutovanějších a nejkontroverznějších témat filosofie matematiky a filosofie vůbec, ačkoli, jak výklad naznačuje, Kantovi na matematice samé záleželo pramálo. V tom se, a to je významné, shoduje s Wittgensteinem, pro nějž má matematika rovněž didaktický význam, nikoli význam věcný. Důvod, který Kant uvádí pro její syntetičnost, máme pochopit na příkladu věty

$$7 + 5 = 12,$$

u níž, jak tvrdí, není nijak v pojmu součtu čísel 7 a 5 obsaženo číslo 12.[24] To se nemusí zdát příliš přesvědčivé a bývá to konfrontováno se stanoviskem Leibnizovým,[25] podle něhož se jedná pouze o důsledek definic (jazykových konvencí)

[24] Kant [1781/1787, B 15].

[25] Leibniz [1705, kniha IV, kap. VIII, § 10].

$$1 + 1 = 2,\ 2 + 1 = 3,\ 3 + 1 = 4,\ \ldots$$

a principu nahraditelnosti stejného stejným, tj. substituovatelnosti *salva veritate*. Frege, který později uvádí Leibnizovo stanovisko na podporu vlastního tvrzení, že věty aritmetiky jsou analytické, ale upozorňuje[26] – podobně jako před ním Bolzano –,[27] že Leibniz ve svém odvození věty $2 + 2 = 4$ jako

$$2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4$$

zapomněl uvést ještě jeden obecný zákon, totiž asociativitu

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1.$$

Otázka samozřejmě je, co dělá zákon asociativity analytickým principem. Podle Frega je to jeho odvození z jistých logických zákonů, které – např. ve vztahu ke konjunkci – asociativitu připouštějí. Podle Kanta je takovéto axiomatické zdůvodnění aritmetiky nemožné již proto, že by s ohledem na nekonečné množství vět typu $7 + 5 = 12$ musela mít nekonečně mnoho axiomů, což považuje za rozpor. Z dnešního hlediska to samozřejmě rozpor není, na druhé straně právě nekonečnost báze je jedním z důvodů, proč nelze aritmetiku axiomatizovat jistým standardním způsobem. V tomto smyslu, učiníme-li ze sporu kritérium analytičnosti, lze Kantovi přiznat jisté body.[28]

Zároveň je nepochybné, že je jeho původní kritérium obsaženosti subjektu v predikátu neúnosné. Jako slibnější se zdá být okolnost, že k nahlédnutí (ne)platnosti aritmetických vět, jako např.

$$(2 + 3) \times 7 = (27 - 3^2) + 6,$$

je třeba počítat, operovat s jistými artefakty v čase, zatímco ke zdůvodnění geometrických vět, jako třeba té, že je součet úhlů v trojúhelníku roven 180°, je zapotřebí provést jisté konstrukce v prostoru. To, že lze dodatečně tyto operace převést na operace syntaktické, v rámci dodatečně vybudovaného axiomatického systému, je jiný problém, i když, jak upozorňuje Hilbert,[29] i zde vlastně odkazujeme na nějakou formu názoru, která nám umožňuje přecházet od konečné konfigurace symbolů ke konečné konfiguraci symbolů a zajišťuje, že tyto symboly něco znamenají. Analytické a syntetické nám tudíž opět začínají splývat.

---

[26] Frege [1884, § 6].

[27] Bolzano [1810, doplněk, § 6], Bolzano [1837, § 305].

[28] Problémem axiomatizace, byť primárně ve vztahu k samotné logice, se budeme zabývat v kap. 9.

[29] Hilbert [1931, s. 486].

Klíčem, který nám dovolí toto rozlišení uchovat, však není nové přeznačení starých rozdílů, analytického a syntetického, apriorního a aposteriorního, formálního a materiálního, ale vědomí jejich relativity, jak nás na ni upozornil Frege. Kantův koperníkovský obrat, jeho vymezení vůči Humovi, totiž spočíval v postřehu, že aby něco mohlo být kontingentní (výskyt nějakých jevů), něco musí být nutné (jejich reprezentace jako sousledných či kauzálně závislých). V terminologii *Tractatu*: aby něco mohlo být tvrdým faktem (že se něco má tak a tak), musí být něco konvenčně určeno (že to lze určitým způsobem reprezentovat), a v terminologii Wittgensteinovy pozdní filosofie: aby něco mohlo být pochybné (že prší), musí být něco jiného jisté (že slovo „prší“ užíváme jistým stabilním způsobem). To, že jsou věty logiky analytické, je dáno tím, že se primárně týkají jazyka, toho, jak reprezentujeme, nikoli toho, co je reprezentováno. Situace matematiky je složitější, neboť kromě využití při kvantifikaci empirického světa, v roli měřícího *apriori* fyziky, se, jak se zdá, zabývá světem *per se*, totiž světem čísel či geometrických objektů. Větu

5 je prvočíslo

tak můžeme po vzoru Wittgensteinova *Tractatu* chápat jako nic neříkající, analytickou, protože související s formou, nikoli obsahem světa, ale také jako tvrzení syntetické, artikulující nějaký obsah, totiž že má objekt 5 určitou netriviální vlastnost. To samozřejmě neodpovídá pojetí Kantovu, podle něhož je účast matematiky na kvantifikaci, a tudíž i na konstituci empirického světa jen dokladem toho, že je to disciplína apriorní, podmiňující empirickou zkušenost, nikoli z empirické zkušenosti plynoucí. To ale představuje nezdůvodněné protežování jednoho (empirického) světa na úkor ostatních (světa matematiky), a vede tak k nutnému dogmatismu, v němž jsou nějaké formy, např. ta eukleidovské geometrie, ale i aristotelská sylogistika, uchopeny jako vrozené. Celou teorii je pak možné považovat za vyvrácenu poté, co byly objeveny geometrie nebo logiky alternativní. Těmto výtkám se zdá Wittgensteinova verze apriorismu unikat jen tím, že blíže nespecifikuje, jaká že to logika či geometrie konkrétně tvoří formy našeho světa.

Imunní vůči takovýmto námitkám se zdá být právě jednoduchá relativizace Kantova stanoviska. Otázka, kterou geometrii použít, závisí na dalších okolnostech, které se mění např. s tím, jak velký kus našeho světa potřebujeme popsat. Při sledování dráhy světelných paprsků nemusí třeba již dávat smysl Eukleidův postulát, podle něhož se dvě přímky vyslané vůči úsečce a pod úhlem devadesáti stupňů neprotnou, ačkoli tento postulát v nějakém ohledu neplatí ani v našich poměrech, kdy empiricky protahované rovnoběžky se po jisté době mohou setkat, případně nebudou protínat přímku rovnoběžnou s a pod úhly dávajícími dohromady 360°. Ale v těchto situacích nemáme (praktický) důvod chovat se k Eukleidovu postulátu jinak než jako k apriornímu zákonu, a případné střety proto odvysvětlíme nepřesností užitých prostředků (plochy, na níž přímku kreslíme, prostředky, jimiž to děláme apod.).

Zcela obdobně jako lze po Kantově vzoru chápat eukleidovskou geometrii coby (relativní) *apriori* newtonovské fyziky, lze po Fregově vzoru uchopit jeho logiku jako (relativní) *apriori* weierstrassovské analýzy. Výrokový fragment Fregovy logiky, který momentálně studujeme, má ovšem podstatně širší uplatnění, jak uvidíme už třeba v oddílu 8.2 věnovaném normálním formám.

7

Logická platnost

Nyní se budeme věnovat pojmu, jímž obvykle filosoficky či netechnicky orientované knihy o logice začínají, totiž pojmu vyplývání, resp. (logické) platnosti. Důvod je jednoduše ten, že vyplývání náleží argumentům, nikoli jen větám nebo jejich částem, a odpovídá tedy vymezení logiky jako vědy, která nemá specifický obor pravd, ale popisuje to, co je společné všem vědám, totiž správnou argumentaci. My se s tímto vymezením v principu ztotožňujeme, což znamená, že v tradičním členění logiky na

(1) nauku o pojmu,

(2) nauku o soudu,

(3) nauku o úsudku

chápeme tu poslední jako v nějakém smyslu základní, předcházející všem zmíněným. Z didaktického hlediska však pokládáme za jednodušší přijmout obvyklý postup, jenž se tím, že v `KVL` nepracujeme s větnými částmi, omezuje na body (2) a (3) seznamu. Případné problémy, které z tohoto přijetí plynou, řešíme průběžně doplňujícími poznámkami a komentáři.

To nejdůležitější z těchto upřesnění přitom říká, že logiku lze sice považovat za vědu zabývající se speciálním typem pravd, totiž pravd logických – tautologií, tyto pravdy ale *de facto* pouze explikují jisté typy úsudků, totiž ty, které se nazývají formálně, analyticky nebo logicky platné. Z technického hlediska KVL to znamená, že nepřidáváme žádné nové typy objektů, které by naše logika popisovala, ale jen dále rozvíjíme naši hru s pravdivostními tabulkami, které nyní začneme porovnávat mezi sebou. Promýšlíme tím dále Wittgensteinovu myšlenku, že „logické konstanty nezastupují“. Před podrobnějším rozvojem oné hry se ale budeme zabývat ještě obecnou motivací, která za jejím zavedením stojí.

7.1 Platný argument

Široká shoda panuje v tom, že určujícím tématem logiky je tradičně analýza správné argumentace, správného zdůvodňování. Uvážíme-li dosavadní příklady výroků, nikdy nám nešlo o to, zda leží Paříž na Seině nebo zda je Václav trémista, ale jen o to, že jsou tyto věty v principu pravdivé či nepravdivé. Jejich skutečnou pravdivost nezkoumáme ani neobhajujeme. Tvrdí-li ale někdo výrok A, můžeme po něm chtít, aby jej obhájil nikoli v absolutním smyslu, spočívajícím např. v dodání nějaké mimojazykové evidence (např. v odhalení mateřského znaménka na choulostivém místě na podporu věty „jsem tvůj otec“), ale v převedení pravdivosti dané věty na pravdivost jiných vět. Tato pravdivost nás ale opět nezajímá sama o sobě, ale jen ve vztahu k pravdivosti vět vyvozených, což formulujeme tak, že nás zajímá platnost onoho přechodu, tj. to, zda díky němu z případné pravdivosti jedněch vět plyne vždy pravdivost vět druhých. Převod pravdivosti dané věty na pravdivost jiných vět může mít přitom v argumentační praxi velice rozmanité podoby. Uveďme nejprve několik příkladů. Představme si, že na naši otázku

proč tvrdíš, že leží Paříž na Seině?

získáme zdůvodnění

protože to řekl dědeček.

Je toto zdůvodnění platné? Přestože je závěr pravdivý, argument se nezdá být přesvědčivý, jednoduše proto, že dědeček řekl také spoustu věcí, které pravdivé být nemusely, tj. není důvod příslušnému odvození – bez další evidence na podporu odvozené věty – věřit. To ale znamená, že se při posuzování platnosti konkrétního zdůvodnění nedíváme ani tak na argument sám (ve smyslu množiny konkrétních vět, které ho tvoří), ale na příslušné argumentační schéma (vět, které by ho mohly tvořit), v našem případě:

$$\frac{\text{dědeček řekl, že } A}{A.}$$

Vzhledem k němu pak řekneme, že v daném úsudku nevyplývá závěr (Paříž leží na Seině) ze svých předpokladů (dědeček řekl, že Paříž leží na Seině), nikoli proto, že by byl tento závěr nutně nepravdivý, ale proto, že příslušné schéma sdílí také úsudky, v nichž jsou premisy pravdivé, ale závěr pravdivý není.

Snad stojí za zmínku, že v případě uvedeného argumentu se tato výtka týká až pokročilejšího rozvoje jazyka, neboť v raných fázích jeho výuky, či obecněji v začátcích výuky čehokoli, musí být některé teze přijímány jako zdůvodněné přímo z autority učitele, tj. nedává např. smysl reagovat na větu „$2 + 2 = 4$“ nebo matčino zvolání „hele, kočka!“ odpovědí „nesouhlasím“, ale nanejvýš „nerozumím“ apod. Lze to vyjádřit také tak, že argumentační schéma

$$\frac{\text{učitel řekl, že } A}{A}$$

je platným schématem elementární výuky. Na druhou stranu, vzhledem k tomu, že hra na vyučování jazyka (stejně jako vysvětlování pravidel šachu) není sama o sobě jazykovou hrou, ale spíše jakousi přípravou na ni, je samozřejmě otázka, zda lze v tomto kontextu vůbec hovořit o argumentech a pravidlech. To už je ale jiný problém, přejděme proto k dalšímu příkladu. Odpovíme-li na otázku

proč je Praha na východ od Pardubic?

takto

protože jsou Pardubice na západ od Prahy,

dostáváme na rozdíl od předchozího případu s dědečkem v závěru nepravdu. Příslušný argument bychom ale tentokráte chtěli považovat za platný, totiž ve vztahu ke schématu:

$$\frac{A \text{ je na západ od } B}{B \text{ je na východ od } A.}$$

To totiž negarantuje pravdivost závěru pro každé dosazení za A či B, ale jen pro ta dosazení, pro něž je pravdivá premisa, k čemuž v uvedeném příkladě s Prahou a Pardubicemi nedošlo. Lze ale tvrdit, že v jakémkoli konkrétním případě, v němž premisa pravdivá je, dochází také k pravdivosti závěru. Jako poslední příklad vezměme otázku

proč je pan Novák nemrava?

spolu s možným zdůvodněním

> protože je pan Novák členem *Svazu pokrokové mládeže* a všichni členové *Svazu pokrokové mládeže* jsou nemravové.

Zde má příslušné argumentační schéma podobu:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{(každé) } A \text{ je } B,\\ \text{každé } B \text{ je } C\end{array}}{\text{(každé) } A \text{ je } C.}$$

Nyní máme několik možností, jak se s jeho závěrem vyrovnat, a je tedy použitelný za jakéhokoli režimu a situace. Jednak můžeme tvrdit, že naše zdůvodnění platí, neříká ale nic o pravdivosti závěru, protože je jedna premisa nepravdivá. Jednak nám může úsudek posloužit jako příklad toho, že lze i z nepravdivých premis platně odvodit pravdivou větu. Nyní již přejděme k neformálním definicím.

7.1.1 Vysvětlení (Platný a dobrý argument): *Daný argument nazýváme platný, když není možné, aby předpoklady byly pravdivé a závěr nepravdivý, tj. když v něm vždy dochází k přenosu pravdivosti. Dále řekneme, že argument je dobrý, když je platný a navíc jsou pravdivé jeho předpoklady.*

Na pozadí této poloformální definice rekapitulujme ještě jednou vše letmo zmíněné:

(1) V logice nás zajímá pouze platnost argumentů.

(2) To, zda jsou navíc jejich předpoklady pravdivé, nemůže být v logice tematizováno.

(3) Důvodem je, že logika ve významném smyslu předchází faktům a je na nich nezávislá.

(4) Zjistíme-li, že věci se mají jinak, než jsme mysleli, nemělo by to ještě zasáhnout naši logiku.

(5) Nezajímá nás, jsou-li předpoklady skutečně pravdivé. Důležité je pouze, co by nastalo, kdyby předpoklady byly pravdivé.

(6) Pravdivost je důležitá pouze z hypotetického hlediska.

S tím souvisí dva zvláštní typy případů, na které jsme již narazili. Jednak argument může být platný, i když je jeho závěr nepravdivý. Ilustrujeme to na následujícím příkladě:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{všechna nebeská tělesa obíhají kolem Země,}\\ \text{Slunce je nebeské těleso}\end{array}}{\text{Slunce obíhá kolem Země.}}$$

Tato situace může nastat jen tehdy, když je některý z předpokladů argumentu nepravdivý. Dále platí, že argument může být neplatný, i když jsou jeho závěr i jeho předpoklady pravdivé. To je vidět na argumentu s dědečkem nebo třeba na argumentu:

$$\frac{\begin{array}{l}1+1=2,\\ \text{Paříž má více obyvatel než Praha}\end{array}}{\text{první člověk na Měsíci byl Američan.}}$$

Zde je zřejmé, že závěr z předpokladů nijak nevyplývá. Důvod spočívá v tom, že je možné, aby předpoklady byly pravdivé a závěr nepravdivý.

V uvedeném vysvětlení a v příkladech tiše předpokládáme, že je argument dán, resp. spjat s nějakým schématem, jehož jisté části zůstávají konstantní (jejich význam se nemění) a jisté variují (jsou proměnnými), a příslušné věty se tedy mohou v závislosti na jejich výměně stávat pravdivými a nepravdivými. Žádný z výše uvedených argumentů ale nemůže být částí logiky výroků, protože mezi našimi konstantami není ani „dědeček říká, že …“, ani „být na východ od“ apod., ale jen výrokové spojky „a“, „nebo“ atd. Proto je pro nás relevantní až argument, v němž na otázku

proč sis dal kávu?

odpovíme

protože mají na lístku jen kávu a čaj, ale čaj dnes není.

Tomu odpovídá schéma:

$$\frac{A \vee B,\ \neg B}{A.}$$

Na jeho základě můžeme podat následující vysvětlení:

`7.1.2 Vysvětlení (Logicky platný argument):` *Daný argument nazýváme logicky platný, jestliže je platný a jeho konstanty jsou konstanty logické.*

V této souvislosti zvláště vynikají poznámky o relativitě logického slovníku ze závěrečných oddílů minulé kapitoly. Jak ověřovat logickou platnost argumentu vyplyne z následujícího oddílu, v němž k poloformálnímu pojmu (logicky) platného argumentu coby přechodu od vět k větě doplníme jeho plně formální variantu přechodu od formulí k formuli.

7.2 Vyplývání

Při přesném vymezení pojmu vyplývání jsme vedeni představou vyjádřenou v předchozí neformální definici platného argumentu. Zpřesnění je dáno tím, že zde máme jednoznačně určeno, jakých možností může nabývat příslušné argumentační schéma, tj. co ho případně může učinit neplatným, totiž možné ohodnocení proměnných jazyka.

`7.2.1 Definice (Vyplývání):` *Formule ϑ vyplývá z množiny formulí T (značíme $T \vDash \vartheta$), když každý model množiny T je také modelem formule ϑ, jinými slovy:*

> *když neexistuje interpretace I taková, že pro každou χ z T platí $I \vDash \chi$, a přitom $I \nvDash \vartheta$.*

Ať už je tvrzení „$T \vDash \vartheta$“ pravdivé či nikoli, řekneme, že prvky množiny T jsou premisy (či předpoklady) tohoto tvrzení a formule ϑ jeho závěr.

Povšimněme si, že nám zde dochází k nepříjemnému zdvojení významu výrazu „$\vDash$“. V každém konkrétním kontextu bude však tohoto výrazu užito jednoznačně. Pokud se na jedné straně výrazu objeví označení pro interpretaci a na druhé označení pro formuli

$$I \vDash \vartheta,$$

jde o vyjádření pravdivosti formule v interpretaci. Pokud se na jedné straně objeví označení pro množinu formulí a na druhé pro formuli

$$T \vDash \vartheta,$$

vyjadřujeme tím, že daná formule z množiny formulí vyplývá. Zdůrazněme ještě, že uvedená tvrzení jsou metajazyková, což znamená, že nejsou součástí (tj. nejsou formulemi) objektového jazyka, který v metajazyce chceme zkoumat, ale jsou větami, pomocí nichž v metajazyce skutečně něco o objektovém jazyce tvrdíme. Než uvedeme několik příkladů k ilustraci toho, jak v rámci `KVL` funguje pojem vyplývání, zavedeme si následující značení, které podstatně zjednoduší zápisy, jež popisují vztahy vyplývání.

`7.2.2 Konvence (Kumulace formulí):` *Řekněme, že množina formulí T sestává z formulí χ_1 a χ_2, tj. $T = \{\chi_1, \chi_2\}$. Řekněme, že k této množině chceme přidat nějakou další formuli, označme si ji jako χ_3. Výslednou množinu $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ budeme značit jako T, χ_3. Podobnou konvenci zavádíme pro libovolnou množinu formulí T. Tedy obecně: přidání* *formule χ do množiny T zachycujeme jako T, χ.*[1] *Dále platí, že místo „$\{\chi_1, \ldots, \chi_n\} \vDash \vartheta$“ budeme psát prostě „$\chi_1, \ldots, \chi_n \vDash \vartheta$“.*

Ověřme nejdříve například, zda platí:

$$\mathtt{p} \to \mathtt{q}, \mathtt{p} \vee \mathtt{q} \vDash \mathtt{q}.$$

Úlohu budeme řešit tak, že zkonstruujeme tabulku pro všechny proměnné, které se vyskytují v premisách a v závěru. V jednotlivých sloupcích tabulky vyhodnotíme premisy a v dalším sloupci vyhodnotíme závěr. Zaměříme se na ty řádky, ve kterých jsou pravdivé všechny premisy (každý takový řádek představuje model množiny premis), a podíváme se, zda je zde pravdivý také závěr. Pokud ve všech těchto řádcích je závěr pravdivý, vyplývá z premis. Pokud nalezneme řádek, ve kterém jsou premisy pravdivé a závěr nepravdivý, pak závěr z premis nevyplývá.

	p	q	p → q	p ∨ q	q
I_1	1	1	1	1	1
	1	0	0	1	0
I_3	0	1	1	1	1
	0	0	1	0	0

Vidíme, že ve všech řádcích, kde jsou pravdivé premisy (jedná se o vyznačené interpretace I_1 a I_3), je pravdivý i závěr. Závěr tedy z premis vyplývá. Nyní ověřme, zda platí:

$$\mathtt{p} \to \mathtt{q}, \mathtt{q} \to \mathtt{r} \vDash \mathtt{r} \to (\mathtt{q} \vee \mathtt{p}).$$

Tabulka vypadá takto:

	p	q	r	p → q	q → r	r → (q ∨ p)
	1	1	1	1	1	1
	1	1	0	1	0	1
	1	0	1	0	1	1
	1	0	0	0	1	1
	0	1	1	1	1	1
	0	1	0	1	0	1
I_7	0	0	1	1	1	0
	0	0	0	1	1	1

[1] Tato konvence je významná i proto, že standardní zápis pro přidání formule χ do množiny T vypadá takto: $T \cup \{\chi\}$. K tomu ovšem potřebujeme zavést množinové operátory, což učiníme až v oddílu 10.7.

Existuje řádek (I_7), kde jsou premisy pravdivé a závěr je nepravdivý (takových řádků by pochopitelně mohlo být více). Závěr tedy z premis nevyplývá. Někdy se může stát, že neexistuje žádný řádek, ve kterém by byly všechny premisy pravdivé. Např. testujeme, zda platí:

$$\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}, \mathtt{p} \wedge \neg \mathtt{q} \models \mathtt{p} \wedge \neg \mathtt{p}.$$

Z tabulky

p	q	p ∧ q	p ∧ ¬q	p ∧ ¬p
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	0	0
0	0	0	0	0

vidíme, že množina premis nemá model. Pak je automaticky splněna podmínka, že závěr je pravdivý v každém řádku, ve kterém jsou pravdivé premisy. Tato podmínka totiž odpovídá podmínce, že neexistuje řádek, kde by byly premisy pravdivé a závěr nepravdivý. A takový řádek v tomto případě skutečně neexistuje. Závěr tedy vyplývá z premis, a to i přesto, že se jedná o kontradikci. K tomu řekneme více záhy.

Podobně jako u rozpoznávání tautologií je i u vyplývání možno v některých obtížnějších případech použít metodu hledání protipříkladu. Protipříkladem k tvrzení, že závěr vyplývá z premis, zde bude interpretace, při které jsou premisy pravdivé a závěr nepravdivý. Ptáme se např., zda platí:

$$\mathtt{p} \vee \mathtt{q}, \neg \mathtt{p} \rightarrow (\mathtt{r} \vee \mathtt{s}) \models \mathtt{q} \vee \mathtt{r}.$$

Systematicky hledáme protipříklad a komentujeme podle řádků:

	p ∨ q	¬p → (r ∨ s)	⊨	q ∨ r
1	1	1		0
2				0 0
3	1 1 0	0 1 1 0 ? ?		0 0 0

(1) Předpokládáme, že závěr nevyplývá z premis, tj. že existuje interpretace, při které jsou premisy pravdivé a závěr nepravdivý.

(2) Protože je nepravdivý závěr, který je disjunkcí, jsou nepravdivé oba členy disjunkce.

(3) Můžeme doplnit hodnoty pod $\mathtt{q}$ a pod $\mathtt{r}$. Navíc, protože $\mathtt{p} \vee \mathtt{q}$ je pravdivá a $\mathtt{q}$ je nepravdivá, musí být $\mathtt{p}$ pravdivá. Protože je pak $\neg\mathtt{p}$ nepravdivá, je druhá premisa automaticky pravdivá nezávisle na pravdivostní hodnotě formule $\mathtt{r} \vee \mathtt{s}$.

Našli jsme tedy dvě ohodnocení, která jsou protipříkladem:

$$\begin{array}{llll} I_1(\mathtt{p}) = \mathtt{1} & I_1(\mathtt{q}) = \mathtt{0} & I_1(\mathtt{r}) = \mathtt{0} & I_1(\mathtt{s}) = \mathtt{1}, \\ I_2(\mathtt{p}) = \mathtt{1} & I_2(\mathtt{q}) = \mathtt{0} & I_2(\mathtt{r}) = \mathtt{0} & I_2(\mathtt{s}) = \mathtt{0}. \end{array}$$

Závěr z premis nevyplývá. Uveďme další příklad. Ptáme se, zda platí:

$$\mathtt{p} \rightarrow (\mathtt{q} \vee \mathtt{r}), \mathtt{s} \rightarrow \neg\mathtt{q}, \neg\mathtt{r} \wedge \mathtt{s} \models \neg\mathtt{p}.$$

Systematicky hledáme protipříklad a komentujeme podle řádků:

	$\mathtt{p} \rightarrow (\mathtt{q} \vee \mathtt{r})$	$\mathtt{s} \rightarrow \neg\mathtt{q}$	$\neg\mathtt{r} \wedge \mathtt{s}$	$\models$	$\neg\mathtt{p}$
1	1	1	1		0
2	1		1 0 1		1
3		1 1 0			
4	0 0 0				

(1) Předpokládáme, že premisy jsou pravdivé a závěr nepravdivý.

(2) Formule $\neg\mathtt{p}$ je nepravdivá, takže $\mathtt{p}$ je pravdivá – můžeme také doplnit hodnotu $\mathtt{p}$ v první premise. Formule $\neg\mathtt{r} \wedge \mathtt{s}$ je pravdivá, takže $\mathtt{r}$ je nepravdivá a $\mathtt{s}$ je pravdivá.

(3) Formule $\mathtt{s}$ je pravdivá, $\mathtt{s} \rightarrow \neg\mathtt{q}$ je pravdivá, tedy $\mathtt{q}$ je nepravdivá.

(4) Formule $\mathtt{p}$ je tedy pravdivá, $\mathtt{q} \vee \mathtt{r}$ je nepravdivá a $\mathtt{p} \rightarrow (\mathtt{q} \vee \mathtt{r})$ je pravdivá, z čehož plyne spor.

Protipříklad neexistuje, a závěr tedy vyplývá z premis. Tím jsme snad dostatečně vyjasnili technický pojem vyplývání v rámci `KVL` a způsoby jeho ověřování. Nyní projděme některá důležitá upřesnění, zvláště ve vztahu vyplývání a logické pravdivosti.

7.3 Vyplývání a pravdivost

V našem formálním jazyce jsme zavedli centrální pojmy *tautologie* (jakožto vlastnosti formulí) a *vyplývání* (jakožto vztahu mezi množinami formulí na jedné straně a formulemi na straně druhé). Nyní ukážeme, že tyto pojmy spolu úzce souvisí a jeden je převoditelný na druhý. Začněme charakterizací pojmu tautologie pomocí pojmu vyplývání.

`7.3.1 Věta:` *Daná formule je tautologií právě tehdy, když vyplývá z každé množiny formulí.*

`Důkaz:` Nechť T je libovolná množina formulí a ϑ je tautologie. Jistě neexistuje model množiny T, ve kterém by ϑ byla nepravdivá, neboť ϑ je pravdivá v každé interpretaci. Tedy $T \models \vartheta$ a jednu implikaci ($\Rightarrow$) máme dokázanou. Nyní naopak ($\Leftarrow$) předpokládejme, že ϑ je formule, která vyplývá z každé množiny formulí. Dokazujeme, že ϑ musí být tautologií. Uvažujme sporem, že to tautologie není. Pak existuje interpretace I taková, že $I \not\models \vartheta$ čili $I \models \neg\vartheta$. Podle definice vyplývání pak ale neplatí $\neg\vartheta \models \vartheta$ (protože existuje interpretace, která dá premise `1` a závěru `0`), tudíž ϑ nevyplývá z libovolné formule (např. právě z $\neg\vartheta$), což je spor s předpokladem. `QED`

Kontradikce můžeme charakterizovat inverzním způsobem, což vyjadřuje následující věta.

`7.3.2 Věta:` *Daná formule je kontradikcí právě tehdy, když z ní vyplývá každá formule.*

`Důkaz:` Předpokládejme, že ϑ je kontradikce a χ je libovolná formule. Musíme dokázat, že $\vartheta \models \chi$. Jistě však neexistuje interpretace, kde by předpoklad tohoto tvrzení byl pravdivý a závěr nepravdivý (protože předpoklad není pravdivý nikdy). Tím je jedna implikace ($\Rightarrow$) věty dokázána. Předpokládejme nyní, že daná ϑ má tu vlastnost, že z ní vyplývá každá formule, tj. že pro každou formuli χ platí $\vartheta \models \chi$. Dokazujeme, že ϑ je kontradikce. Protože z ϑ vyplývá každá formule, platí také $\vartheta \models \neg\vartheta$. Postupujme sporem a předpokládejme, že ϑ není kontradikce. Tedy platí, že existuje I takové, že $I(\vartheta) = 1$. Protože $\vartheta \models \neg\vartheta$, platí zároveň $I(\neg\vartheta) = 1$, což je spor. Tím je dokázána druhá implikace ($\Leftarrow$), a tedy celá věta. `QED`

Tato charakterizace kontradiktorických formulí souvisí s klasickým úsudkovým principem *ex falso quodlibet*, podle něhož právě z nepravdivého vyplývá cokoli. Zde musíme samozřejmě nepravdivé chápat jako sporné čili logicky nepravdivé (kontradiktorické), neboť z nepravdivé věty samo o sobě z logického hlediska všechno vyplývat nemusí. Tvrzení lze ale chápat tak, že k nepravdivé větě, kterou (třeba omylem) přijmeme jako předpoklad, existuje i její negace, která je pravdivá a jejíž pravdivost nás opravňuje přijmout ji mezi premisy, ve finále tedy vzniká opět logický spor.

Za zmínku každopádně stojí, že platnost uvažovaného principu je důsledkem našich sémantických rozlišení a definic, tj. nejedná se o nic, co by platilo univerzálně, a i v rámci tradičních konceptů logiky, např. sylogistiky, lze uvažovat případy, v nichž jednoduše neplatí. Na druhé straně lze *ex falso quodlibet* chápat normativně jako vyjádření toho, že spor nezůstává nikdy lokální, např. v tom smyslu, že odvodíme-li nějakou úvahou, že $2 + 3 = 4$, postihne to i pravdivost jiných tvrzení, např.

$3+4=5$. Věty 7.3.1, 7.3.2 by mohly být každopádně nejen podkladem alternativní definice tautologičnosti a kontradiktoričnosti, ale umožňují i zdůvodnit další ze standardních konvencí, v níž se tautologičnost, resp. kontradiktoričnost formule zachycují symbolicky jako:

$$\models \vartheta \qquad\qquad \vartheta \models.$$

Tato konvence navíc spojuje i obě možná užití symbolu $\models$:

$$I \models \vartheta \qquad\qquad T \models \vartheta.$$

V prvním z nich, jež odkazuje k pravdivosti formule ϑ v interpretaci I, máme v případě tautologické ϑ důvod I vynechat, protože na konkrétním I nezáleží. V případě, kdy $\models$ zachycuje vztah vyplývání formule ϑ z množiny formulí T, můžeme při tautologické ϑ učinit totéž s T, protože konkrétní povaha T nenaruší platnost tvrzení. Někdy se zápis $\models \vartheta$ čte také jako vyjádření toho, že ϑ vyplývá z prázdné množiny premis, což ale podstatu věci více zastírá, než vysvětluje. Argumentace, která stojí za příslušnou větou, nám říká spíše něco o užití obratu „prázdná množina“ nežli o vyplývání.[2] S tímto na mysli příslušné tvrzení formulujme a dokažme. Máme v něm totiž navíc obsaženo alternativní zachycení pojmu tautologičnosti pomocí pojmu vyplývání.

`7.3.3 Věta:` *Formule je tautologií právě tehdy, když vyplývá z prázdné množiny premis.*

`Důkaz:` ($\Leftarrow$) Předpokládejme nejprve, že ϑ vyplývá z prázdné množiny předpokladů. Nechť I je libovolná interpretace. Protože množina premis je prázdná, je automaticky platné tvrzení, že I je modelem množiny premis: jednoduše neexistuje premisa, která by byla v I nepravdivá. Tedy I je také modelem formule ϑ. Protože I byla libovolná, je každá interpretace modelem formule ϑ, a ta je tedy tautologií. ($\Rightarrow$) Nyní předpokládejme, že ϑ je tautologie. Protože každá interpretace je modelem ϑ, musí také platit, že každý model prázdné množiny premis (ať už je jím cokoli) je modelem ϑ. Tedy ϑ vyplývá z prázdné množiny premis. `QED`

Následující tvrzení, kterému se říká sémantická verze věty o dedukci, ukazuje souvislost mezi pojmem vyplývání a implikací jakožto spojkou výrokové logiky. Už jsme upozornili, že je důležité přesně rozlišovat mezi znakem „$\rightarrow$“, který je součástí našeho zkonstruovaného objektového jazyka, a znakem „$\models$“, který je součástí metajazyka. V jistém smyslu se však v implikaci objektového jazyka metajazykový pojem vyplývání odráží.

[2] Pojem prázdné množiny bude zaveden v oddílu 10.1.

`7.3.4 Věta (Sémantická věta o dedukci):` *Nechť T je množina formulí a χ, ϑ jsou libovolné formule. Pak platí: $T, \chi \vDash \vartheta$ právě tehdy, když $T \vDash \chi \to \vartheta$.*

`Důkaz:` ($\Rightarrow$) Předpokládejme nejdříve, že $T, \chi \vDash \vartheta$. Vezměme si libovolný model I množiny T. Chceme dokázat, že $I \vDash \chi \to \vartheta$. Pokud $I \vDash \chi$, pak I je modelem množiny T, χ a z našeho předpokladu plyne, že $I \vDash \vartheta$. Za této situace skutečně platí $I \vDash \chi \to \vartheta$. Druhá možnost je, že $I \nvDash \chi$. Pak ale také platí $I \vDash \chi \to \vartheta$. ($\Leftarrow$) Předpokládejme naopak, že $T \vDash \chi \to \vartheta$. Vezměme si libovolný model I množiny T, χ. Chceme dokázat, že $I \vDash \vartheta$. Protože I je modelem množiny T, χ, musí být také modelem množiny T. Z našeho předpokladu tedy vyplývá, že $I \vDash \chi \to \vartheta$. Přitom také platí, že $I \vDash \chi$. Tedy dostáváme, že skutečně $I \vDash \vartheta$. `QED`

V konkrétním případě, když množina T je prázdná, nám předchozí tvrzení říká, že $\chi \vDash \vartheta$ platí právě tehdy, když formule $\chi \to \vartheta$ je tautologie. Ve větách 7.3.1 a 7.3.3 jsme přitom ukázali, jak lze pojem tautologie uchopit pomocí pojmu vyplývání. Nyní naopak zformulujeme tvrzení, které ukazuje, že omezíme-li se na konečné množiny předpokladů, můžeme vztah vyplývání uchopit pomocí pojmu tautologie. S tím souvisí výše popsaná aplikovatelnost metody hledání protipříkladu.

`7.3.5 Věta:` *Pro libovolné formule $\chi_1, \ldots, \chi_n, \vartheta$ platí: $\chi_1, \ldots, \chi_n \vDash \vartheta$ právě tehdy, když $\chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_n \to \vartheta$ je tautologie.*

`Důkaz:` V libovolné interpretaci jsou pravdivé předpoklady právě tehdy, když je tam pravdivá jejich konjunkce. Z toho plyne, že $\chi_1, \ldots, \chi_n \vDash \vartheta$ právě tehdy, když $\chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_n \vDash \vartheta$. Nyní stačí aplikovat věty 7.3.3 a 7.3.4. `QED`

Předpoklad konečnosti je v případě naší věty podstatný právě proto, že formuli uvažujeme pouze jako konečný objekt. Přirozeně nic nebrání tomu, aby byla tato konvence porušena, a skutečně existují logické systémy, které studují nekonečné „formule“ a jejich metateoretické vlastnosti. Zároveň je jasné, že z hlediska uvedených problémů vztahu vyplývání a tautologičnosti se jedná o čistě fiktivní úpravu: nekonečná konjunkce formulí je jen jiný název pro jejich nekonečnou množinu.

7.4 Logicky platný argument

Jelikož jsme se k formálnímu pojmu vyplývání dostali přes neformální pojem platného argumentu, aplikujme nyní zpětně vše dosažené na argumentaci v přirozeném jazyce, o niž nám jde v nějakém smyslu především. Nejprve volně definujme:

7.4.1 Vysvětlení (KVL-platný argument): *Argument je* KVL*-platný (výrokovělogicky platný), když po formalizaci jeho formalizovaný závěr vyplývá v* KVL *z jeho formalizovaných předpokladů.*

Příklad 7.4.2: Uveďme několik příkladů. Argument může mít např. tuto podobu:

> Viníkem je Petr nebo Pavel a je-li viníkem Petr, pak Pavel nebyl v 11 hodin na místě zločinu. Je-li viníkem Pavel, pak je jasný motiv zločinu. Tudíž byl-li Pavel v 11 hodin na místě zločinu, pak je jasný motiv zločinu.

Formalizujeme elementární výroky, které se v úvaze vyskytují:

$\mathtt{p}$ = viníkem je Petr,

$\mathtt{q}$ = viníkem je Pavel,

$\mathtt{r}$ = Pavel byl v 11 hodin na místě zločinu,

$\mathtt{s}$ = je jasný motiv zločinu.

Celá formalizovaná úvaha vypadá takto:

$$(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{p} \rightarrow \neg \mathtt{r}), \mathtt{q} \rightarrow \mathtt{s} \models \mathtt{r} \rightarrow \mathtt{s}.$$

Metodou hledání protipříkladu můžeme lehce ověřit, že toto tvrzení je v KVL pravdivé, a argument je tedy KVL-platný. Zkusme se podívat ještě na jeden argument:

> Jestliže mám dobrý sluch, pak poznám, že tato hudba je špatná. Nepoznám-li, že tato hudba je špatná, pak nejsem členem *Hudebního spolku.* Já ale jsem členem *Hudebního spolku.* Tudíž mám dobrý sluch.

Postupujeme stejně jako v předchozím případě, tj. nejprve formalizujeme všechny přítomné elementární výroky:

$\mathtt{p}$ = mám dobrý sluch,

$\mathtt{q}$ = poznám, že tato hudba je špatná,

$\mathtt{r}$ = jsem členem *Hudebního spolku.*

Po formalizaci získáváme tvrzení:

$$\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}, \neg \mathtt{q} \rightarrow \neg \mathtt{r}, \mathtt{r} \models \mathtt{p}.$$

Metodou hledání protipříkladu tentokrát zjistíme, že toto tvrzení je nepravdivé, protipříklad existuje a argument není KVL-platný.

Obdobně definujme pojem logické pravdivosti, tj. zaveďme konvenci, podle níž se logická pravdivost vztahuje k větám přirozeného jazyka, zatímco tautologičnost k formulím jazyka formálního. Avšak nebude-li hrozit nedorozumění, budeme příslušné termíny používat záměnně.

`7.4.3 Vysvětlení (KVL-pravdivá věta):` *Věta je* `KVL`*-pravdivá (výrokovělogicky pravdivá), jestliže po její formalizaci získáme tautologii* `KVL`*.*

Tato definice nám umožňuje artikulovat některé podstatné rozdíly, které vyplývají z následujících pojmových dvojic:

(1) formule — tautologie,

(2) (pravdivá) věta — logicky pravdivá věta,

(3) (platný) úsudek — logicky platný úsudek.

(1) Zatímco *formule* je pravdivá pouze vzhledem k nějaké interpretaci, je *tautologie* (tautologická formule) pravdivá ve všech interpretacích. To nás může vést k závěru, že je absolutně pravdivá, tj. pravdivá nezávisle na libovolné interpretaci. Pak ale zastíráme, že se primárně jedná jen o výraz neinterpretovaného jazyka, jemuž z jistých důvodů odpovídá pravdivostní funkce uniformně přiřazující všem ohodnocením proměnných hodnotu `1`. Uvedeme-li znovu případ formule $\mathtt{p} \vee \neg \mathtt{p}$, je matoucí nazývat ji zákonem vyloučeného třetího právě proto, že se jedná jen o jednu z mnoha formulí `KVL`. Použijeme-li tento obrat s patřičnou rozvahou, můžeme jím chtít říci tolik, že je příslušná formule tautologií *pouze* díky platnosti zákona vyloučeného třetího. Tento zákon je sémantický princip, jenž artikuluje naše rozhodnutí (nikoli předem daný fakt) pracovat s výroky, které mají právě jednu pravdivostní hodnotu (`1` nebo `0`), a konvenci, podle níž má výrok A vždy opačnou hodnotu k výroku $\neg A$.

(2) Vedle dvojice *formule/tautologie* vezměme nyní dvojici *věta/logicky pravdivá věta*. Ta první, např.

prší (na místě s v čase t),

je pravdivá, resp. nepravdivá v závislosti na tom, jak se věci mají či nemají, v případě empirických vět tedy na stavu světa. Tento druh pravdivosti můžeme nazývat *materiálním*. Ta druhá, např.

prší nebo neprší,

je pravdivá pouze s ohledem na význam logických konstant, tj. svět na to nemá pražádný vliv. Tento druh pravdivosti lze nazývat také *formálním*, což znamená, že ho zdůvodňujeme odvoláním se na tautologičnost formule jisté logiky, v tomto případě formule $\mathtt{p} \vee \neg \mathtt{p}$ klasické logiky výroků.

Omezíme-li se na adekvátní skupinu spojek $\{\neg, \rightarrow\}$, můžeme poslední formuli uchopit jako zkratku za

$$\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{p},$$

která – jak víme z pravdivostních podmínek kondicionálu – platí tehdy, když je pravdivý její konsekvent nebo nepravdivý antecedent. V tomto přepisu ale lépe vynikne pravá podstata logické pravdy, totiž její explikace logicky platných úsudků, jak byla na formální úrovni zachycena větou 7.3.5.

(3) Povaze této explikace spolu s posledním rozdílem, totiž dvojicí prostých a formálně platných úsudků, se budeme věnovat v dalším oddílu.

7.5 Formální a materiální inference

Analogicky k rozlišením formule/tautologie a věta/logicky pravdivá věta rozlišujeme nyní dvojice materiálně/formálně platných úsudků, kdy *formálně* platný úsudek (vzhledem k dané logice) jsme vymezili v definici 7.4.1 předchozího oddílu. Za příklady materiálních úsudků lze přirozeně považovat ty, které jsme uváděli v oddílu 7.1 této kapitoly, např.:

$$\frac{\text{Praha je na východ od Pardubic}}{\text{Pardubice jsou na západ od Prahy.}}$$

Ty jsou zdůvodnitelné také odkazem na jisté schéma, toto schéma ale není schématem logickým. Zmínili jsme samozřejmě v oddílu 6.4, že tento rozdíl je relativní. Chápeme-li logiku jako záležitost toho, co v jistém slovníku uchopíme jako pevné, oproti tomu, co necháme proměnným, může být i posledně zmíněný přechod logickým, totiž ve vztahu k logice popisu našeho světa. V něm nemá smysl o takovýchto přechodech pochybovat, jak to ukazuje např. známá scénka z Cimrmanova *Dobytí severního pólu*, v níž je empiricky ověřováno, že se ze severního pólu dá jít pouze na jih. To je komické právě proto, že příslušný poznatek chápeme jakožto *apriorní*, interní způsobu naší geografické reprezentace, který nelze pohybem po mapě či terénu vyvrátit, a tudíž ani potvrdit.

Problematičnost této nivelizace (absolutního) rozdílu mezi formálním a materiálním (či chcete-li: analytickým a syntetickým) ale vyvstane názorně u úsudků, které se nezdají mít oporu v žádném druhu pojmového obsahu (např. v pojmu „ležet na východ od“), ale jsou čistě výskytového, kontingentního charakteru jako třeba:

$$(\dagger)\quad \frac{\text{prší}}{\text{je mokro.}}$$

To je samozřejmě naprosto korektní úsudek, který provádíme běžněji než jakýkoli z výše zmíněných, již proto, že má hmatatelné praktické důsledky, např. navlhlé ponožky a rýmu, a vede proto k praktickým úsudkům typu:

$$\frac{\text{prší}}{\text{vezmu si deštník.}}$$

Podle rozšířeného přesvědčení je ovšem úsudek (†) – má-li být tedy vůbec úsudkem nazýván – *entymémem*, tj. sylogismem s vypuštěnou premisou. Touto premisou je zde poznatek „jestliže prší, je mokro“, po jehož doplnění získáme úsudek:

(‡) $$\frac{\text{prší; pokud prší, je mokro}}{\text{je mokro.}}$$

Ten je logicky platný s ohledem na (interní) platnost příslušného schématu `KVL`. V tomto pojetí, zdá se, logická platnost předchází a zakládá platnost materiální, resp. převádí všechny přechody typu

(1) $$\frac{A}{B,}$$

nezávisle na tom, v které oblasti lidského poznání k nim dochází, do uniformního tvaru

(2) $$\frac{A;\text{ pokud } A,\text{ pak } B}{B,}$$

který činí onu kontextuální závislost zbytnou, tj. platí bez ohledu na obsah vyjadřovaný větami A, B.

Jednou z klasických námitek proti tomuto postupu je ta, kterou formuloval Lewis Carroll,[3] totiž že zdůvodnění materiálních úsudků logickými, v tomto případě tedy *modem ponens*, posouvá jen tentýž problém o krok dál, totiž k otázce, čím jsou zdůvodněny přechody logické. Tento problém je zásadní, a jak jsme zmínili úvodem v oddílech 1.2 a 1.3, byl jako takový uchopen již kritiky eleatského a sofistického užívání plauzibilních schémat, stejně jako Descartovou kritikou scholastické logiky. V Carrollově variaci vede uvedené zdůvodnění (1) skrze (2) k potřebě zdůvodnění (2) skrze *metamodus ponens*

(3) $$\frac{A;\text{ pokud } A,\text{ pak } B;\text{ pokud } A\text{ a pokud } A,\text{ pak } B,\text{ pak } B}{B,}$$

[3] Carroll [1895].

a toho zase skrze *metametamodus ponens*, a ústí tedy do nekonečného regresu. Ve Wittgensteinově pozdní filosofii se tento typ námitky zhmotňuje v kritice předpokladu, že by šlo každé pravidlo zdůvodnit, případně formulovat explicitně,[4] což je jen variací na téma, zda lze (explicitně) mluvit o tom, co se v jistých větách či jazykových praxích jen (implicitně) ukazuje, totiž o jejich formě, o tom, co je *apriorní* jejich *aposteriornímu* obsahu.

Na rozdíl od rané verze své filosofie, jak ji prezentoval v *Tractatu*, netrvá ve *Filosofických zkoumáních* Wittgenstein dogmaticky na tom, že to, co se ukazuje, nelze říci, tj. připouští, že jazyk a jeho formy mohou být opět předmětem smysluplné řeči – jako jimi ostatně systematicky jsou v této knize![5] Zdůrazňuje ale, že tato řeč má zase nové *apriori*, které ji činí možnou a od těch předchozích odlišnou. To znamená, že něco zůstává stále nevyřčeno, totiž jak příslušným větám činně rozumět, co s nimi dělat. Lze si např. představit, že všechny své znalosti o světě, možná i všechny znalosti, které kdy lidstvo mělo, vtělíme do jedné jediné knihy, z níž by pak osvícený Marťan mohl zjistit, kdo jsme a kam kráčíme. Co se však Marťan z knihy nedozví a dozvědět nemůže, je, *že* a *jak* ji má vůbec přečíst. Kniha, která by shrnula všechno možné poznání tak, že by se již nebylo třeba ničemu dalšímu učit, je tedy nesmysl, a to z čistě pojmových důvodů.

Je to přitom právě tento základní předpoklad aktivního a z vnějšku motivovaného výcviku, který dělá výuku dětí a vlastně výuku čehokoli netriviální. Skutečnost, že se z knih mnohé naučit lze, vede pak ke snadné iluzi, že poznání má výhradně teoretickou povahu. Té potom propadají již děti, když na dotaz, kdy se naučily jazyk, odpovídají, že ho vždy uměly. Práce, která se za našimi znalostmi a zkušenostmi skrývá, není totiž, na rozdíl od jejích plodů, snadno vidět, což mj. vysvětluje i časté podceňování humanitních věd. Technicky zaměřený rozum je právě ten, který opomíjí rámcové předpoklady poznání, jeho zasazení do celku našich reálných schopností a cílů a jejich reflexi v jazyce. Aplikujeme-li nyní řečené na náš případ, dostáváme postřeh, že sice můžeme materiálně platné úsudkové pravidlo

$$(\dagger)\quad \frac{\text{prší}}{\text{je mokro}}$$

explikovat ve větě

[4] Wittgenstein [1953, § 201].

[5] Důvody tohoto zákazu lze hledat mj. ve výskytu logických paradoxů, jak se k nim také v kontextu Wittgensteinova *Tractatu* vyjádříme v oddílu 10.2.

(*) jestliže prší, je mokro,

je ale naivní domnívat se, že by nám tato věta skrze *modus ponens* umožnila porozumět platnosti původního úsudku, neboť ten již v nějakém smyslu musel platit předtím, než jsme větu (*) formulovali, a zdůvodňování pravidla (†) metapravidlem (‡) tak nedává vůbec smysl.

To samozřejmě neznamená, že nedává smysl provádět přechody od (†) k (*), tj. činit to, co *děláme* (úsudky), explicitním skrze to, co *říkáme* (věty). Brandom tento pohyb označuje dokonce za úkol logiky jako vědy, která se tím právě stává podstatně neontologickou, expresivní. Tato její role je dále zakotvena v tom, že je formální úsudek označen za derivativ úsudku materiálního, čemuž můžeme rozumět v bolzanovském smyslu nalezení jistých pravidelností v bazální, materiálně-inferenční praxi, nad níž se pak jisté přechody ukážou jako logické, totiž imunní ve své (materiální) platnosti vůči záměně jistých částí za jiné.[6] Ve srovnání s Bolzanem ale Brandomův projekt míří podstatně výš, totiž k ustanovení logického kánonu, jenž by byl univerzální, tj. platný vůči libovolnému oboru materiálních inferencí. V tom se shoduje s Fregem, jenž právě proto bere za základní logické výrazy implikaci a negaci jako něco, co má explikovat implicitní rysy jakékoli jazykové praxe. Zda má tento projekt šanci na úspěch, je dosti sporné, již proto, že není jasné, proč by měl být příslušným kondicionálem, jenž explikuje jakýkoli platný úsudek bez rozlišení oboru, právě kondicionál materiální.[7]

Expresivní pojetí logiky představuje také přirozené rozvinutí wittgensteinovského obrazu logiky jako nedenotující, nikoli popisující doktríny, zakotvené v něčem, co děláme (usuzujeme), nikoli ve vytváření nových pravd a faktů. U Brandoma je tento aspekt jeho nauky dále rozveden pokusem o nereprezentační, dynamické uchopení logických spojek, což spočívá v jejich holistickém popisu skrze systém jistých úsudkových pravidel, oproti jejich standardnímu vylíčení jako výrazů označujících jisté objekty, totiž pravdivostní funkce. Konjunkce takto není zavedena příslušnou tabulkou, ale pravidly

$$\frac{A,\ B}{A \text{ a } B},$$

$$\frac{A \text{ a } B}{A},$$

$$\frac{A \text{ a } B}{B},$$

[6] Viz Brandom [1994, s. 104].

[7] Srov. diskusi in: Kolman [2011, kap. 9].

stanovujícími operativně, nikoli staticky, za jakých podmínek jsme k tvrzení A a B oprávněni na straně jedné a k čemu nás takové tvrzení zavazuje na straně druhé. K této možnosti vymezení logických spojek se ještě vrátíme v souvislosti s axiomatizací logiky v rámci tzv. kalkulů přirozené dedukce v kapitole 17.

Formulace takovýchto pravidel, mají-li nám být samozřejmě k něčemu platná, vyžaduje reflexi na předchozí materiální praxi, v níž popsané přechody jednoduše děláme, aniž bychom o nich hovořili, a je tedy až produktem pokročilého sebe-uvědomění neboli metajazykovým fenoménem. Otázkou, která nás může napadnout, je, zda tento vzestup, možnost hovořit o jazyce v jazyce, a tedy samotný objev logiky již k jazyku (či obecněji: k racionalitě) patří, zda není až záležitostí dalších stupňů jeho rozvoje. Brandom, možná překvapivě, tvrdí, že tomu tak není, tedy že jazyková praxe může existovat bez možnosti explikovat svá vlastní pravidla, i když, jak poznamenává, je to pak praxe značně chudá, nedisponující např. nevětnými výrazy.[8]

Tento způsob uvažování jde každopádně proti tendenci protežovat formální úsudky na úkor materiálních, případně chápat ty druhé jako případy těch prvních, v nichž došlo k zamlčení jistých premis. Jádrem problému jsou zde představy o nutnosti, kterou si tendenčně spojujeme s logickými úsudky, nikoli s úsudky běžnými, jež pak v humovském duchu považujeme za kontingentní. Podobně jako Kant při odhalení sféry nutných, leč obsažných (syntetických) soudů upozorňuje i Brandom na pomýlenost tohoto předpokladu.[9] Nutný, preskriptivní aspekt materiálních inferencí, např. u úsudku typu

$$\frac{\text{prší}}{\text{je mokro,}}$$

spočívá v tom, že ho nebudeme považovat za vyvrácený případem, kdy za deště nezmokneme, protože jsme byli např. v krytém voze, stejně jako nenecháme vyvrátit zákon gravitace případem objektu, který, např. jako pták po vyhození z okna, vyletí vzhůru. To, že závěr úsudku pojednává o místech, která nejsou krytá, není přitom v dané větě zamlčeno, ale implicitně se to v ní předpokládá jako podmínka úspěchu inference. Okolnost, že se po doplnění premis v úsudku

$$\frac{\text{prší; jsem v autě}}{\text{je mokro}}$$

[8] Toto tvrzení souvisí s dedukcí existence nevětných částí vět z existence složených vět, jak jsme ji letmo zmínili v oddílu 2.3.

[9] Brandom [2000, kap. 1 a 2].

změní jeho (materiální) platnost, neovlivňuje jeho původní správnost, ale jen potvrzuje již zmíněnou relativitu uvedeného *apriorního* předpokladu. Normativní aspekt materiálních soudů mohl být snadno přehlédnut právě proto, že z hlediska standardních formálních úsudků, např. právě logicky platných úsudků v rámci KVL, přidání premisy neohrozí platnost inference. Tomuto jevu se říká *monotónnost* dané logiky. Podle Brandoma je ale uvedená změna platnosti úsudku pouhým symptomem toho, že jsou materiální úsudky nemonotónní. Pokus zvrátit tento rys materiálních inferencí naprostou explikací všech předpokladů selhává stejně jako pokus o explicitní vyjádření každého pravidla, neboť si lze vždy představit podmínku, která platnost či neplatnost příslušného úsudku změní, třeba když uvedený úsudek doplním na

$$\frac{\text{prší; jsem v autě; ve střeše auta je díra}}{\text{je mokro,}}$$

a ten zase na

$$\frac{\text{prší; jsem v autě; ve střeše auta je díra; ta díra je zacpaná hadrem}}{\text{je mokro}}$$

atd.[10] Materiální úsudky tedy nejsou zkratkou za něco, co bychom mohli říci, kdybychom nebyli líní, protože oblast možných presupozic, stejně jako možností, jakými lze výhledově užívat větu, je předem nevymezená, indefinitní, stejně jako potenciální užití každého pravidla. Uvedené příklady nemonotónnosti úsudků jsou také jedním z dalších významných dokladů inherentní omezenosti každého formálního systému, v našem případě tedy KVL.

7.6 Splnitelnost

Vraťme se zcela v závěru této kapitoly ještě zpátky k formálním náležitostem sémantiky KVL, a to konkrétně k rozšíření naší „hry“ na porovnávání tabulek o pojem splnitelnosti. Ten úzce souvisí s pojmem vyplývání a stejně jako on se vztahuje na formule i jejich množiny. Definujeme ho následovně:

[10] Viz Brandom [2000, s. 88], kde je uváděn specifičtější sled příkladů, totiž: škrtnu-li touto suchou, dobře vyrobenou zápalkou (p), začne hořet; jestliže p a tato zápalka je ve velmi silném elektromagnetickém poli (q), nezačne hořet; jestliže p a q a zápalka je ve Faradayově kleci (r), pak se rozhoří; jestliže p, q, r a v místnosti není kyslík, pak se nerozhoří atd.

`7.6.1 Definice (Splnitelnost):` *Množina formulí je splnitelná, když má model. Podobně řekneme, že formule je splnitelná, když má model.*

Splnitelnost množiny formulí tedy znamená, že existuje interpretace I taková, že každá formule z této množiny je v I pravdivá. Tím je zároveň naznačena metoda, jak ověřit, zda daná konečná množina formulí skutečně splnitelná je. Prostě opět vytvoříme tabulku pro všechny formule, které se v množině vyskytují. Pokud existuje řádek, ve kterém jsou všechny pravdivé, jedná se o splnitelnou množinu. Jednotlivá formule je splnitelná právě tehdy, když to není kontradikce. Následující tvrzení ukazuje, v jakém vztahu je splnitelnost s vyplýváním.

`7.6.2 Věta:` *Pro každou množinu formulí T a pro každou formuli ϑ platí: $T \vDash \vartheta$ právě tehdy, když $T, \neg\vartheta$ není splnitelná.*

`Důkaz:` ($\Rightarrow$) Předpokládejme nejdříve, že $T \vDash \vartheta$. Dokazujeme, že pak $T, \neg\vartheta$ není splnitelná. Nyní postupujme sporem, tedy předpokládejme, že $T, \neg\vartheta$ má model, tj. že existuje interpretace I taková, že každá formule z $T, \neg\vartheta$ je v I pravdivá. Pak I je také modelem množiny T a protože $T \vDash \vartheta$, musí platit, že $I \vDash \vartheta$. To ale znamená, že $I \nvDash \neg\vartheta$, což je spor s tím, že $\neg\vartheta$ je v I pravdivá. ($\Leftarrow$) Na druhé straně předpokládejme, že $T, \neg\vartheta$ není splnitelná. Dokazujeme, že $T \vDash \vartheta$. Vezměme si libovolnou interpretaci I. Jestliže I je modelem množiny T, pak protože $T, \neg\vartheta$ nemá model, musí platit $I \nvDash \neg\vartheta$, a tedy $I \vDash \vartheta$. Tedy skutečně $T \vDash \vartheta$. `QED`

`Příklad 7.6.3:` Nyní ověřme, zda platí následující tvrzení. V případě, že je tvrzení pravdivé, pro to předložíme nějaký argument. Pokud pravdivé není, ukážeme konkrétní protipříklad, který tvrzení v jeho obecnosti vyvrací.

(a) Je-li množina formulí splnitelná, pak obsahuje alespoň jednu tautologii.

(b) Vyplývá-li z množiny formulí nějaká kontradikce, pak tato množina není splnitelná.

(c) Pokud máme splnitelnou množinu formulí a přidáme k ní tautologii, pak získáme opět splnitelnou množinu formulí.

(d) Sjednotíme-li dvě splnitelné množiny, tedy vytvoříme-li množinu, která bude obsahovat právě všechny formule z těchto dvou splnitelných množin, pak výsledná množina bude opět splnitelná.

V případě (a) tvrzení pravdivé není. Jednoduchým protipříkladem je množina $\{\mathtt{p}\}$, která je splnitelná a tautologii neobsahuje. Tvrzení (b) pravdivé je. To, že z dané množiny vyplývá nějaká kontradikce, znamená, že tato kontradikce je pravdivá v každém modelu dané množiny. Kdyby tedy skutečně existoval nějaký model dané množiny, musela by v něm být pravdivá nějaká kontradikce, což není možné, protože kontradikce není pravdivá v žádné interpretaci. Daná množina tedy model nemá, a proto není splnitelná. Tvrzení (c) je také pravdivé. Řekněme, že T je daná splnitelná množina a ϑ je tautologie. Nechť I je libovolný model množiny T. Protože ϑ je tautologie, platí, že $I \vDash \vartheta$. I je tedy modelem množiny T, ϑ a tato množina je splnitelná. Avšak tvrzení (d) pravdivé není. Jako protipříklad vezměme množiny $\{\mathtt{p}\}, \{\neg\mathtt{p}\}$. Obě jsou splnitelné, a přitom množina $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\}$ splnitelná není.

Poslední příklad uvedl z pojmotvorného hlediska významný rozdíl mezi následujícími případy:

(1) splnitelná množina formulí,

(2) množina splnitelných formulí.

Je zjevné, že v druhém pojmu je pojem splnitelnosti distribuován mezi formule dané množiny, tj. netýká se jí jako celku, který musí být splněn jednou jedinou interpretací. Stačí, když je každá formule splněna nějakou – ne nutně stejnou – interpretací. Z hlediska příslušné formální hry zde máme následující algoritmus. Chceš-li zjistit, zda je množina formulí splnitelná, hledej v příslušné tabulce řádek se samými jedničkami. Např. pro sadu formulí $\{\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}, \mathtt{p} \vee \mathtt{q}, \mathtt{q}\}$ takový řádek zjevně existuje, totiž řádek třetí:

p	q	p → q	p ∨ q	q
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

Pokud bychom zaměnili $\mathtt{q}$ za $\neg\mathtt{q}$, získáme naopak množinu, která není splnitelná, i když sestává ze splnitelných formulí. To v naší formální hře znamená, že se v každém sloupci vyskytuje nějaká jednička, ale tyto jedničky nikde netvoří souvislý řádek:

p	q	p → q	p ∨ q	¬q
1	1	1	1	0
1	0	0	1	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

Z širšího logického pohledu se nám koncept splnitelnosti může hodit k vyjádření wittgensteinovského kritéria smysluplnosti věty jako té, jejíž forma je splnitelná, aniž by byla tautologická, tj. je splnitelná ona i její negace. V modálním žargonu zde můžeme hovořit o možnosti a kontingenci, tj. věta je splnitelná, existuje-li možný svět, v němž je pravdivá, a je kontingentní, existuje-li navíc možný svět, v němž pravdivá není. Tyto dvě koncepce pojmu možného (smysluplného) formuloval již Aristotelés, jenž také kolísal mezi tou, která nutnost nevylučuje (tj. co je nutné, je i možné), a tou, která ji vylučuje (co je nutné, není kontingentní). V přirozeném jazyce se většinou užívá možnost ve smyslu kontingence. Více k tomu řekneme v kapitole 20 věnované modálním logikám.

8

Logická ekvivalence

Řekli jsme, že v námi studované logice předpokládáme platnost principu kompozicionality, což znamená, že je význam celků funkcionálně složen z významů částí. Jelikož jsme význam věty ztotožnili s její pravdivostní hodnotou, znamená to konkrétně, že nahradíme-li v nějakém tvrzení výraz A výrazem B, pro nějž platí

$$A = B,$$

nezmění to výslednou pravdivostní hodnotu. Co se změní, je smysl věty. Jelikož se pohybujeme na úrovni výroků, tj. všechny (mimologické) větné části jsou opět výroky, je pro nás totožnost významu dána ekvivalencí:

$$A \leftrightarrow B.$$

Ta je v daném možném světě (dané interpretaci) pravdivá tehdy, když mají vztažené věty stejné pravdivostní hodnoty. Hovoříme-li o tom, že nějaké dvě věty znamenají totéž, myslíme tím ovšem obvykle něco podstatně silnějšího než náhodnou shodu jejich hodnot, totiž synonymii, ve Fregově terminologii: shodu smyslu. Tu lze v nějakém ohledu uchopit jako totožnost významu nejen ve vztahu k jednomu, ale ke všem možným světům, tj. interpretacím, čemuž odpovídá pojem *logické ekvivalence*. Z technického hlediska se ovšem jedná jen o rozšíření pojmu vyplývání oběma směry, tj. od premisy k závěru a zpět. Naše hra s tabulkami tak dostane další významnou položku.

8.1 Základní definice

V rámci klasické výrokové logiky můžeme zformulovat větu, která říká, že při daném ohodnocení se nemění hodnota věty, nahradíme-li v ní nějakou podformuli formulí, která je jí ekvivalentní. Ukážeme nejprve příklad, který by měl objasnit jak znění věty, tak ideu důkazu. V mnohém se jedná o podobnou úvahu té, kterou jsme se zabývali při otázkách substituovatelnosti v rámci oddílu 6.3. Řekněme, že I je interpretace, pro kterou platí:

$$I(\mathtt{p}) = \mathtt{1} \qquad I(\mathtt{q}) = \mathtt{1} \qquad I(\mathtt{r}) = \mathtt{0}.$$

Formule $\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}$ má v I stejnou pravdivostní hodnotu jako formule $\neg\mathtt{r}$. Podle následující věty můžeme $\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}$ ve formuli

$$(\neg\mathtt{q} \vee (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})) \rightarrow \mathtt{r}$$

zaměnit za formuli $\neg\mathtt{r}$, aniž by se v I změnila pravdivostní hodnota celé formule. Původní formule měla v I hodnotu $\mathtt{0}$. Lehce ověříme, že stejnou hodnotu má v I i formule, kterou obdržíme po záměně, tj. formule:

$$(\neg\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{r}) \rightarrow \mathtt{r}.$$

Důvod je ten, že na výsledek výpočtu pravdivostní hodnoty formule $(\neg\mathtt{q} \vee \cdots) \rightarrow \mathtt{r}$ nemá vliv tvar formule, která je na místě tří teček, ale pouze její pravdivostní hodnota v dané interpretaci. Známe-li tuto hodnotu, můžeme výpočet provést i bez přesné znalosti formule, která se zde nachází. Nyní již uveďme slíbenou větu.

8.1.1 Věta (O nahrazení 1): *Nechť I je interpretace, χ je nějaká podformule formule ϑ a $I \models \chi \leftrightarrow \xi$. Předpokládejme dále, že ϑ^* je formule, která vznikla nahrazením kteréhokoli z výskytů podformule χ ve formuli ϑ formulí ξ. (Tj. může být nahrazen jeden výskyt, ale i všechny.) Pak platí, že $I \models \vartheta \leftrightarrow \vartheta^*$.*

Důkaz: Budeme postupovat indukcí podle složitosti formule ϑ. (i) Nechť se jedná o atom $\mathtt{p}$. Pak $\mathtt{p}$ je jedinou svou vlastní podformulí. Nechť ξ je libovolná formule taková, že $I \models \mathtt{p} \leftrightarrow \xi$. Pak $\mathtt{p}^*$ bude sama formule ξ. Tedy $I \models \mathtt{p} \leftrightarrow \mathtt{p}^*$. (ii) Nyní předpokládejme, že je tvrzení dokázáno pro formule ϕ a ψ. (ii.i) Nechť $I \models \chi \leftrightarrow \xi$ a χ je nějaká podformule formule $\neg\phi$. Pak χ je buď sama formule $\neg\phi$, nebo je χ podformulí formule ϕ. Jestliže χ je formule $\neg\phi$, pak $I \models \neg\phi \leftrightarrow \xi$ a navíc $(\neg\phi)^*$ je sama formule ξ. Tedy $I \models \neg\phi \leftrightarrow (\neg\phi)^*$. Jestliže χ je podformule formule ϕ, pak $(\neg\phi)^*$ je formule $\neg\phi^*$, kde ϕ^* vznikla nahrazením některého výskytu formule χ ve formuli ϕ formulí ξ. Podle induktivního předpokladu tedy platí $I \models \phi \leftrightarrow \phi^*$. Pak platí:

$$I(\neg\phi) = f_\neg(I(\phi)) = f_\neg(I(\phi^*)) = I(\neg\phi^*) = I((\neg\phi)^*).$$

Tedy $I \vDash \neg\phi \leftrightarrow (\neg\phi)^*$. Tím máme dokázaný induktivní krok pro negaci. (ii.ii) Induktivní krok pro binární spojky je podobný. Nechť $I \vDash \chi \leftrightarrow \xi$ a χ je nějaká podformule formule $\phi \circ \psi$. Pak χ je sama formule $\phi \circ \psi$ nebo je χ podformulí formule ϕ nebo je χ podformulí formule ψ. Může být samozřejmě současně podformulí obou. Jestliže χ je formule $\phi \circ \psi$, pak jistě $I \vDash \phi \circ \psi \leftrightarrow (\phi \circ \psi)^*$. Jestliže χ je podformule jedné z formulí ϕ či ψ, případně obou, pak $(\phi \circ \psi)^*$ je formule $\phi^* \circ \psi^*$, kde ϕ^*, resp. ψ^* vznikly nahrazením některých výskytů formule χ ve formulích ϕ, ψ formulí ξ. Podle induktivního předpokladu tedy platí $I \vDash \phi \leftrightarrow \phi^*$ a $I \vDash \psi \leftrightarrow \psi^*$. Pak platí:

$$I(\phi \circ \psi) = f_\circ(I(\phi), I(\psi)) = f_\circ(I(\phi^*), I(\psi^*)) = I(\phi^* \circ \psi^*) = I((\phi \circ \psi)^*).$$

Tedy $I \vDash \phi \circ \psi \leftrightarrow (\phi \circ \psi)^*$. (iii) Tím je důkaz hotov. `QED`

Zaměnitelnost, kterou jsme právě studovali, je relativní vůči dané interpretaci. V metajazyce nyní zavedeme pojem, k němuž se bude vázat absolutní zaměnitelnost, tj. zaměnitelnost proveditelná ve všech interpretacích.

`8.1.2 Definice (Logická ekvivalence):` *Formule ϑ, χ jsou logicky ekvivalentní (značíme $\vartheta \dashv\vDash \chi$), když $\vartheta \vDash \chi$ a $\chi \vDash \vartheta$.*

Pojem si představíme na příkladě. Dokážeme, že:

$$(\neg \mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \rightarrow \mathtt{r} \dashv\vDash (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{p}) \vee \mathtt{r}.$$

Že to opravdu platí, vyčteme opět z tabulky:

p	q	r	$(\neg \mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \rightarrow \mathtt{r}$	$(\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{p}) \vee \mathtt{r}$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

Vidíme, že v každé interpretaci, ve které je pravdivá první formule, je pravdivá také druhá formule, tj.:

$$(\neg \mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \rightarrow \mathtt{r} \vDash (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{p}) \vee \mathtt{r}.$$

Naopak v každé interpretaci, ve které je pravdivá druhá formule, je pravdivá první formule. To znamená:

$$(\mathtt{q} \to \mathtt{p}) \vee \mathtt{r} \models (\neg \mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \to \mathtt{r}.$$

Tedy tyto formule jsou podle definice logicky ekvivalentní. Následující tvrzení je alternativní definicí pojmu logické ekvivalence. Tato definice by byla blíže naší motivaci, protože ukazuje souvislost s ekvivalencí objektového jazyka. Avšak protože jsme již náš pojem definovali jiným způsobem, musíme toto tvrzení formulovat jako větu a dokázat, že skutečně platí.

`8.1.3 Věta (O ekvivalenci):` *Pro libovolné ϑ, χ platí: $\vartheta \dashv\models \chi$ právě tehdy, když $\models \vartheta \leftrightarrow \chi$.*

`Důkaz:` ($\Leftarrow$) Předpokládejme nejdříve: $\models \vartheta \leftrightarrow \chi$, tj. že $\vartheta \leftrightarrow \chi$ je tautologie. Chceme dokázat: $\vartheta \dashv\models \chi$. Nechť I je libovolná interpretace taková, že $I \models \vartheta$. Pak také musí platit $I \models \chi$, protože jinak by $I \not\models \vartheta \leftrightarrow \chi$. Tedy $\vartheta \models \chi$. Zcela analogickou úvahou dostaneme, že také $\chi \models \vartheta$. ($\Rightarrow$) Nyní předpokládejme, že naopak $\not\models \vartheta \leftrightarrow \chi$, tj., že existuje interpretace I, při které mají formule ϑ, χ různou pravdivostní hodnotu. Jestliže $I \models \vartheta$ a $I \not\models \chi$, pak $\vartheta \not\models \chi$. Jestliže naopak $I \models \chi$ a $I \not\models \vartheta$, pak $\chi \not\models \vartheta$. Tedy každopádně neplatí $\vartheta \dashv\models \chi$, což jsme právě chtěli dokázat. `QED`

Uvedeme nyní seznam některých významných logických ekvivalencí, a to ve schematické podobě. Každé takové schéma představuje nekonečné množství logických ekvivalencí. Oprávněnost tohoto schematického podání je dána předchozí větou a faktem, že množina tautologií je uzavřena na substituci.

(1) $\neg(\vartheta \leftrightarrow \chi) \dashv\models \neg\vartheta \leftrightarrow \chi$,

(2) $\neg\vartheta \leftrightarrow \chi \dashv\models \vartheta \leftrightarrow \neg\chi$,

(3) $\vartheta \wedge \chi \dashv\models \chi \wedge \vartheta$ (komutativita konjunkce),

(4) $\vartheta \vee \chi \dashv\models \chi \vee \vartheta$ (komutativita disjunkce),

(5) $\vartheta \leftrightarrow \chi \dashv\models \chi \leftrightarrow \vartheta$ (komutativita ekvivalence),

(6) $\vartheta \wedge (\chi \wedge \xi) \dashv\models (\vartheta \wedge \chi) \wedge \xi$ (asociativita konjunkce),

(7) $\vartheta \vee (\chi \vee \xi) \dashv\models (\vartheta \vee \chi) \vee \xi$ (asociativita disjunkce),

(8) $\vartheta \leftrightarrow (\chi \leftrightarrow \xi) \dashv\models (\vartheta \leftrightarrow \chi) \leftrightarrow \xi$ (asociativita ekvivalence),

(9) $\vartheta \dashv\models \neg\neg\vartheta$ (zákon dvojí negace),

(10) $\vartheta \to \chi \dashv\models \neg\vartheta \vee \chi$,

(11) $\vartheta \to \chi \mathrel{=\!|\!\models} \neg\chi \to \neg\vartheta$ (zákon kontrapozice),

(12) $\vartheta \to (\chi \to \xi) \mathrel{=\!|\!\models} (\vartheta \wedge \chi) \to \xi$ (slučování premis),

(13) $\vartheta \to (\chi \to \xi) \mathrel{=\!|\!\models} \chi \to (\vartheta \to \xi)$ (záměna premis),

(14) $\vartheta \to \chi \mathrel{=\!|\!\models} \neg(\vartheta \wedge \neg\chi)$,

(15) $\vartheta \vee \chi \mathrel{=\!|\!\models} \neg\vartheta \to \chi$,

(16) $\vartheta \wedge \chi \mathrel{=\!|\!\models} \neg(\vartheta \to \neg\chi)$,

(17) $\vartheta \leftrightarrow \chi \mathrel{=\!|\!\models} (\vartheta \to \chi) \wedge (\chi \to \vartheta)$,

(18) $\vartheta \leftrightarrow \chi \mathrel{=\!|\!\models} (\vartheta \wedge \chi) \vee (\neg\vartheta \wedge \neg\chi)$,

(19) $\vartheta \wedge \vartheta \mathrel{=\!|\!\models} \vartheta$ (idempotence konjunkce),

(20) $\vartheta \vee \vartheta \mathrel{=\!|\!\models} \vartheta$ (idempotence disjunkce),

(21) $\neg(\vartheta \wedge \chi) \mathrel{=\!|\!\models} \neg\vartheta \vee \neg\chi$ (1. De Morganův zákon),

(22) $\neg(\vartheta \vee \chi) \mathrel{=\!|\!\models} \neg\vartheta \wedge \neg\chi$ (2. De Morganův zákon),

(23) $\vartheta \wedge (\vartheta \vee \chi) \mathrel{=\!|\!\models} \vartheta$ (1. zákon absorbce),

(24) $\vartheta \vee (\vartheta \wedge \chi) \mathrel{=\!|\!\models} \vartheta$ (2. zákon absorbce),

(25) $\vartheta \wedge (\chi \vee \xi) \mathrel{=\!|\!\models} (\vartheta \wedge \chi) \vee (\vartheta \wedge \xi)$ (1. distributivní zákon),

(26) $\vartheta \vee (\chi \wedge \xi) \mathrel{=\!|\!\models} (\vartheta \vee \chi) \wedge (\vartheta \vee \xi)$ (2. distributivní zákon).

Nyní ukážeme charakteristické vlastnosti logické ekvivalence. Tyto vlastnosti má logická ekvivalence společné s rovností. Spřízněnost rovnosti a ekvivalence vytěžíme zvláště v kapitole 18.

`8.1.4 Věta:` *Pro libovolné formule ϑ, χ, ξ platí:*

(1) $\vartheta \mathrel{=\!|\!\models} \vartheta$ *(reflexivita),*

(2) jestliže $\vartheta \mathrel{=\!|\!\models} \chi$*, pak* $\chi \mathrel{=\!|\!\models} \vartheta$ *(symetrie),*

(3) jestliže $\vartheta \mathrel{=\!|\!\models} \chi$ *a* $\chi \mathrel{=\!|\!\models} \xi$*, pak* $\vartheta \mathrel{=\!|\!\models} \xi$ *(tranzitivita).*

`Důkaz:` (1) Stačí si uvědomit, že $\vartheta \leftrightarrow \vartheta$ je tautologie. (2) Jestliže $\vartheta \mathrel{=\!|\!\models} \chi$, pak $\chi \models \vartheta$ a $\vartheta \models \chi$, tj. $\chi \mathrel{=\!|\!\models} \vartheta$. (3) Předpokládejme, že $\vartheta \mathrel{=\!|\!\models} \chi$ a $\chi \mathrel{=\!|\!\models} \xi$. Z toho, že platí $\vartheta \models \chi$ a $\chi \models \xi$, plyne, že platí také $\vartheta \models \xi$. Vezměme si libovolný model formule ϑ. Podle prvního předpokladu musí být tato interpretace modelem formule χ, druhý předpoklad pak zaručuje, že se jedná též o model formule ξ. Tedy každý model formule ϑ je modelem formule ξ. Analogicky, protože platí $\xi \models \chi$ a $\chi \models \vartheta$, platí také $\xi \models \vartheta$. Tedy $\vartheta \mathrel{=\!|\!\models} \xi$. `QED`

Na základě této charakterizace logické ekvivalence můžeme nahlédnout, že množinu všech formulí výrokové logiky lze rozdělit do takových skupin, v nichž jsou všechny formule vzájemně logicky ekvivalentní, ale jakékoli dvě formule z různých skupin logicky ekvivalentní nejsou. Podrobněji o této možnosti pojednáme později v oddílu 12.2 v souvislosti s pojmem tzv. *třídy ekvivalence*. Jednu z tříd ekvivalence tvoří množina všech tautologií, druhou pak množina kontradikcí. Celkem je však těchto skupin nekonečně mnoho, protože např. každá atomická formule spadá do jiné skupiny, neboť žádné dva atomy nejsou vzájemně logicky ekvivalentní. Avšak kdybychom měli pouze konečný počet n atomických výroků, počet tříd ekvivalence by byl také konečný a odpovídal by počtu n-argumentových pravdivostních funkcí, tj. bylo by jich 2^{2^n}. Třídy ekvivalence nám odkrývají možnost založit hlubší vrstvu významu, než je pouhá pravdivostní hodnota, totiž to, co Carnap nazývá intenzí a Wittgenstein smyslem. Zmínili jsme v oddílu 5.5, že tato distinkce je ještě příliš hrubá na to, aby odpovídala Fregově kategorii smyslu, neboť ten je blízko struktuře výrazu a skrze něj vyjádřené danosti významu, v tomto případě tedy pravdivostní hodnoty.

Nyní zformulujeme větu, která vyjadřuje výše avizovanou univerzální zaměnitelnost. Díky zákonu kontrapozice například víme, že formule $\mathtt{p} \to \mathtt{q}$ je logicky ekvivalentní formuli $\neg\mathtt{q} \to \neg\mathtt{p}$. Následující věta nám pak říká, že také formule $\neg((\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \wedge \mathtt{r})$ musí být logicky ekvivalentní formuli $\neg((\neg\mathtt{q} \to \neg\mathtt{p}) \wedge \mathtt{r})$, kterou jsme získali tak, že jsme pouze nahradili podformuli $\mathtt{p} \to \mathtt{q}$ formulí $\neg\mathtt{q} \to \neg\mathtt{p}$.

`8.1.5 Věta (O nahrazení 2):` *Ať χ je libovolná podformule formule ϑ a $\chi \dashv\vDash \xi$. Předpokládejme dále, že ϑ^* je formule, která vznikla nahrazením nějakého výskytu podformule χ ve formuli ϑ formulí ξ. Pak platí, že $\vartheta \dashv\vDash \vartheta^*$.*

`Důkaz:` Nechť I je libovolná interpretace. Předpokládáme $\chi \dashv\vDash \xi$. Podle věty 8.1.3 platí $\vDash \chi \leftrightarrow \xi$ a z toho plyne, že také $I \vDash \chi \leftrightarrow \xi$. Podle věty 8.1.1 pak platí, že $I \vDash \vartheta \leftrightarrow \vartheta^*$. Protože I byla libovolná, platí poslední tvrzení pro každou interpretaci, což znamená, že $\vDash \vartheta \leftrightarrow \vartheta^*$. Opět podle věty 8.1.3 dostáváme, že $\vartheta \dashv\vDash \vartheta^*$. `QED`

Každou logickou ekvivalenci dvou formulí můžeme tedy od nynějška chápat jako pravidlo, na jehož základě lze provádět čistě syntaktické transformace zachovávající určité sémantické vlastnosti. Můžeme pak dokazovat sémantická tvrzení a přitom se vyhnout sémantickým úvahám a držet se pouze pravidel, která jsou dána logickými ekvivalencemi. Následující příklady nám ukazují, jak můžeme ze známých logických ekvivalencí odvodit nové.

`Příklad 8.1.6:` Pouze za pomoci známých logických ekvivalencí uvedených výše dokážeme, že:

$$(\neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \rightarrow \mathtt{r} \dashv\models (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{p}) \vee \mathtt{r}.$$

Nejprve obecně popíšeme postup. (1) Dokazujeme tvrzení typu $\vartheta \dashv\models \chi$. (2) Na první řádek si napíšeme formuli ϑ. (3) Do každého dalšího řádku připisujeme ekvivalentní transformaci formule z předchozího řádku – to znamená, že v řádku $n+1$ je logicky ekvivalentní formule formuli v řádku n. (4) Pravidlo, podle kterého transformaci provádíme, je v podobě již známé logické ekvivalence uvedeno v pravém sloupci (tento sloupec je pouze pomocný). Využíváme přitom větu 8.1.5. (5) Transformace provádíme tak, aby se v posledním řádku objevila formule χ. Na základě věty 8.1.4 platí, že všechny formule v levém sloupci jsou vzájemně logicky ekvivalentní, a tedy platí $\vartheta \dashv\models \chi$. Nyní k našemu příkladu:

(1)	$(\neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \rightarrow \mathtt{r}$,	
(2)	$(\mathtt{q} \wedge \neg\mathtt{p}) \rightarrow \mathtt{r}$	$\vartheta \wedge \chi \dashv\models \chi \wedge \vartheta$,
(3)	$\neg(\mathtt{q} \wedge \neg\mathtt{p}) \vee \mathtt{r}$	$\vartheta \rightarrow \chi \dashv\models \neg\chi \vee \vartheta$,
(4)	$(\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{p}) \vee \mathtt{r}$	$\neg(\vartheta \wedge \neg\chi) \dashv\models \vartheta \rightarrow \chi$.

`Příklad 8.1.7:` Nyní máme bez sémantických úvah zdůvodnit, že:

$$\mathtt{q} \rightarrow (\mathtt{p} \rightarrow (\mathtt{r} \vee \neg\mathtt{s})) \dashv\models ((\mathtt{q} \wedge \mathtt{p}) \wedge \mathtt{s}) \rightarrow \mathtt{r}.$$

Postupujeme jak navrženo:

(1)	$\mathtt{q} \rightarrow (\mathtt{p} \rightarrow (\mathtt{r} \vee \neg\mathtt{s}))$,	
(2)	$(\mathtt{q} \wedge \mathtt{p}) \rightarrow (\mathtt{r} \vee \neg\mathtt{s})$	$\vartheta \rightarrow (\chi \rightarrow \xi) \dashv\models (\vartheta \wedge \chi) \rightarrow \xi$,
(3)	$(\mathtt{q} \wedge \mathtt{p}) \rightarrow (\neg\mathtt{s} \vee \mathtt{r})$	$\vartheta \vee \chi \dashv\models \chi \vee \vartheta$,
(4)	$(\mathtt{q} \wedge \mathtt{p}) \rightarrow (\mathtt{s} \rightarrow \mathtt{r})$	$\neg\vartheta \vee \chi \dashv\models \chi \rightarrow \vartheta$,
(5)	$((\mathtt{q} \wedge \mathtt{p}) \wedge \mathtt{s}) \rightarrow \mathtt{r}$	$\vartheta \rightarrow (\chi \rightarrow \xi) \dashv\models (\vartheta \wedge \chi) \rightarrow \xi$.

Podobným způsobem můžeme postupovat, chceme-li se omezit na nějakou konkrétní množinu spojek. Máme např. vyjádřit pomocí negace a konjunkce (resp. negace a disjunkce), co vyjadřuje formule

$$((\neg\mathtt{p} \rightarrow \neg\mathtt{q}) \rightarrow \mathtt{r}) \rightarrow \mathtt{p}$$

pomocí negace a implikace. To úzce souvisí s problematikou adekvátnosti spojek, kterou jsme se zabývali v oddílu 5.4. Jednou probrané je nyní systematizováno pomocí nového pojmu. Schémata vyjadřující logické ekvivalence nám naznačují, jak máme postupovat při transformacích. Postupně nahrazujeme formule obsahující spojky, které chceme eliminovat, logicky ekvivalentními formulemi, které obsahují pouze spojky povolené. V případě negace a disjunkce nám bude stačit trojnásobná aplikace logické ekvivalence $\phi \to \psi \dashv\vDash \neg\phi \vee \psi$:

(1) $((\neg\mathtt{p} \to \neg\mathtt{q}) \to \mathtt{r}) \to \mathtt{p}$,

(2) $\neg((\neg\mathtt{p} \to \neg\mathtt{q}) \to \mathtt{r}) \vee \mathtt{p}$,

(3) $\neg(\neg(\neg\mathtt{p} \to \neg\mathtt{q}) \vee \mathtt{r}) \vee \mathtt{p}$,

(4) $\neg(\neg(\neg\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}) \vee \mathtt{r}) \vee \mathtt{p}$.

Tím jsme získali formuli, která již obsahuje pouze negaci a disjunkci. V případě negace a konjunkce využijeme logickou ekvivalenci $\phi \to \psi \dashv\vDash \neg(\phi \wedge \neg\psi)$:

(1) $((\neg\mathtt{p} \to \neg\mathtt{q}) \to \mathtt{r}) \to \mathtt{p}$,

(2) $\neg(((\neg\mathtt{p} \to \neg\mathtt{q}) \to \mathtt{r}) \wedge \neg\mathtt{p})$,

(3) $\neg(\neg((\neg\mathtt{p} \to \neg\mathtt{q}) \wedge \neg\mathtt{r}) \wedge \neg\mathtt{p})$,

(4) $\neg(\neg(\neg(\neg\mathtt{p} \wedge \neg\neg\mathtt{q}) \wedge \neg\mathtt{r}) \wedge \neg\mathtt{p})$.

Je vhodné povšimnout si opět silné analogie mezi syntaktickými transformacemi, kterými jsme se dosud zabývali, a úpravami aritmetických výrazů. Provedeme-li např. úpravu

(1) $\sqrt{4x^2 + 8xy + 4y^2}$,

(2) $\sqrt{4(x^2 + 2xy + y^2)}$,

(3) $\sqrt{4(x + y)^2}$,

(4) $2(x + y)$,

napsali jsme řadu výrazů, mezi nimiž platí v oboru (kladných) reálných čísel rovnosti, neboť postupujeme podle určitých pravidel, která zaručují zachování identity. Jedním z takových pravidel je třeba vzorec:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Pravidlo je tedy vyjádřeno samo v podobě rovnosti a říká nám, že obsahuje-li nějaký výraz něco, co odpovídá jedné straně, můžeme to nahradit tím, co se nachází na druhé straně, a hodnota výsledku se nemění. Přesně tento postup byl aplikován v přechodu od výrazu (2) k výrazu (3). V `KVL` pracujeme s formulemi místo aritmetických výrazů a roli obecné matematické rovnosti hraje logická ekvivalence.

8.2 Normální formy

Uvedené syntaktické transformace formulí na formule logicky ekvivalentní nás staví před otázku neobyčejné rozmanitosti formulí, které jsou logicky ekvivalentní, a v tomto smyslu tedy vyjadřují totéž, a s ní související otázku vztahu sémantické části logiky (toho, co naše formule znamenají) k části syntaktické (jak to vyjadřují). V jejich světle se nabízí zavést nějaký *standardizovaný* tvar formule tak, aby na něj šlo mechanicky převést každou formuli a výsledek zůstal logicky ekvivalentní. Odměnou by nám byla větší kontrola nad rozmanitostí forem, která by zahrnovala přímou manifestaci sémantických vlastností formulí. Tato manifestace je žádoucí již s ohledem na tradiční vymezení logických vět a vztahů jakožto samo-evidentních. Vezměme např. formule:

$$\phi = ((\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \vee (\neg\mathtt{q} \wedge \mathtt{r})) \to (\neg\mathtt{r} \leftrightarrow (\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q})),$$

$$\psi = ((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \to \neg\mathtt{r}) \to (\mathtt{p} \wedge \neg(\mathtt{q} \vee \mathtt{r})).$$

Jejich vzájemná (ne)závislost je všechno jen ne zjevná, a pokud bychom např. chtěli ukázat, že platí $\psi \models \phi$, museli bychom sestrojit tabulky obou formulí a porovnat je. Inspirací v dalším postupu nám budou zejména úvahy, které jsme provedli v souvislosti s důkazem adekvátnosti množiny spojek $\{\wedge, \vee, \neg\}$ v oddílu 5.4. Nejprve zaveďme následující způsob vyjadřování.

`8.2.1 Konvence (Konjunkce a disjunkce formulí):` *Pod konjunkcí formulí $\phi_1, \ldots, \phi_n$ (kde $n \geq 1$) budeme rozumět formuli tvaru:*

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n.$$

Disjunkcí těchto formulí zase formuli:

$$\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n.$$

Uzávorkování těchto formulí je dáno naší dřívější notační konvencí – fakticky není ale vůbec podstatné s ohledem na platnost asociativních zákonů pro konjunkci a disjunkci. Dále si všimněme, že naše konvence připouští, že $n = 1$, tj. samu formuli ϕ_1 chápeme jako jednočlennou konjunkci (resp. disjunkci).

`8.2.2 Definice (Literál, klauzule, normální forma):` *Literál je každá proměnná nebo negace proměnné. Konjunktivní klauzule (*`KK`*) je každá konjunkce literálů. Disjunktivní klauzule (*`DK`*) je každá disjunkce literálů. Formule je v konjunktivní normální formě (v* `KNF`*), když je to konjunkce disjunktivních klauzulí. Formule je v disjunktivní normální formě (v* `DNF`*), když je to disjunkce konjunktivních klauzulí.*

Tak například formule

$$(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\mathtt{p} \wedge \neg \mathtt{r} \wedge \neg \mathtt{s}) \vee \neg \mathtt{r}$$

je v DNF, protože je to tříčlenná disjunkce, jejíž každý člen je KK. První člen je dvoučlenná konjunkce literálů $\mathtt{p}$ a $\mathtt{q}$, druhý člen je tříčlenná konjunkce literálů $\mathtt{p}$, $\neg\mathtt{r}$, $\neg\mathtt{s}$ a třetí člen je jednočlenná konjunkce – její jediný člen je literál $\neg\mathtt{r}$. Formule

$$(\mathtt{p} \vee \mathtt{r} \vee \mathtt{s}) \wedge (\neg \mathtt{q} \vee \neg \mathtt{r}) \wedge \neg \mathtt{s} \wedge (\neg \mathtt{p} \vee \neg \mathtt{r} \vee \neg \mathtt{s} \vee \neg \mathtt{q})$$

je v KNF. Je to čtyřčlenná konjunkce, jejíž členy jsou DK. Formule

$$\mathtt{p} \wedge \neg \mathtt{q} \wedge \neg \mathtt{r} \wedge \mathtt{s}$$

je KK, protože je to čtyřčlenná konjunkce literálů. Tudíž je tato formule v DNF, protože je jednočlennou disjunkcí, jejíž jediný člen je KK. Zároveň je však tato formule v KNF, protože každý literál je jednočlenná DK, a celá formule je tedy čtyřčlennou konjunkcí, jejíž členy jsou DK. Je zřejmé, že každá proměnná je jednočlenná KK i DK. Zároveň je tato formule v DNF i v KNF, protože je jednočlennou disjunkcí (jejíž člen je KK) a zároveň je jednočlennou konjunkcí (jejíž člen je DK).

Nyní se budeme zabývat tím, že (a jak) můžeme libovolnou formuli převést na logicky ekvivalentní formuli v DNF, resp. v KNF. Začneme s algoritmem pro převod na DNF. Pokud se kdykoli během aplikace tohoto postupu objeví dva výskyty negace vedle sebe, oba je vypustíme. Využíváme tak vztah:

$$\neg\neg\phi \mathrel{\text{⫤}}\models \phi.$$

Nejprve odstraníme všechny výskyty spojek $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ pomocí vztahů:

$$\phi \rightarrow \psi \mathrel{\text{⫤}}\models \neg\phi \vee \psi \mathrel{\text{⫤}}\models \neg(\phi \wedge \neg\psi),$$

$$\phi \leftrightarrow \psi \mathrel{\text{⫤}}\models (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi).$$

Dále odstraníme negace komplexních formulí tím, že je postupně posouváme do vnitřku formule až k atomům či jejich negacím. Využíváme přitom zobecněné De Morganovy zákony:

$$\neg(\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n) \mathrel{\text{⫤}}\models \neg\psi_1 \wedge \cdots \wedge \neg\psi_n,$$

$$\neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \mathrel{\text{⫤}}\models \neg\psi_1 \vee \cdots \vee \neg\psi_n.$$

Poté odstraníme postupně konjunkce vícečlenných disjunkcí. Využíváme přitom zobecněné distributivní zákony:

$$\phi \wedge (\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n) \mathrel{\text{⫤}}\models (\phi \wedge \psi_1) \vee \cdots \vee (\phi \wedge \psi_n).$$

`Příklad 8.2.3:` Postup si vyzkoušíme při transformaci formule

$$\mathtt{p} \rightarrow \neg(\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{r})$$

na logicky ekvivalentní formuli v DNF.

(1) $\neg\mathtt{p} \vee \neg(\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{r})$,

(2) $\neg\mathtt{p} \vee (\neg\mathtt{q} \wedge \neg\neg\mathtt{r})$,

(3) $\neg\mathtt{p} \vee (\neg\mathtt{q} \wedge \mathtt{r})$.

V prvním kroku jsme odstranili implikaci, v druhém kroku negaci komplexní formule a ve třetím kroku dvojitou negaci. Výsledná formule je již v DNF.

`Příklad 8.2.4:` Mějme formuli:

$$(\mathtt{p} \rightarrow \neg\mathtt{q}) \leftrightarrow \mathtt{r}.$$

Pak vypadá postup takto:

(1) $((\mathtt{p} \rightarrow \neg\mathtt{q}) \rightarrow \mathtt{r}) \wedge (\mathtt{r} \rightarrow (\mathtt{p} \rightarrow \neg\mathtt{q}))$,

(2) $(\neg(\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}) \vee \mathtt{r}) \wedge (\neg\mathtt{r} \vee (\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}))$,

(3) $((\neg\neg\mathtt{p} \wedge \neg\neg\mathtt{q}) \vee \mathtt{r}) \wedge (\neg\mathtt{r} \vee \neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q})$,

(4) $((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee \mathtt{r}) \wedge (\neg\mathtt{r} \vee \neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q})$,

(5) $(((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee \mathtt{r}) \wedge \neg\mathtt{r}) \vee (((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee \mathtt{r}) \wedge \neg\mathtt{p}) \vee$
$(((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee \mathtt{r}) \wedge \neg\mathtt{q})$,

(6) $(\neg\mathtt{r} \wedge \mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\neg\mathtt{r} \wedge \mathtt{r}) \vee (\neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee$
$(\neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{r}) \vee (\neg\mathtt{q} \wedge \mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\neg\mathtt{q} \wedge \mathtt{r})$.

Je zjevné, že uvedený algoritmus lze aplikovat na libovolnou formuli a že vždy vyústí v nalezení formule v DNF.

Můžeme tedy učinit závěr, že ke každé formuli existuje logicky ekvivalentní formule v DNF a že víme, jak ji nalézt. Z formule v DNF lze přitom lehce vyčíst některé její sémantické vlastnosti, primárně, zda je tato formule kontradikcí či ne. Pokud totiž formule v DNF obsahuje v každé své KK nějakou proměnnou spolu se svou negací, je každá z těchto KK kontradikcí a disjunkce kontradikcí je opět kontradikce. Pokud však má formule takovou KK, která neobsahuje žádnou proměnnou spolu se svou negací, můžeme nalézt ohodnocení, které je modelem této KK, a tedy celé formule. Je-li jedna KK formule $\neg\mathtt{r} \wedge \mathtt{p} \wedge \mathtt{q}$, je tím určeno ohodnocení I takové, že $I(\mathtt{p}) = \mathtt{1}, I(\mathtt{q}) = \mathtt{1}, I(\mathtt{r}) = \mathtt{0}$. Proměnným, před nimiž není negace, je přiřazena pravda a proměnným, které jsou negované, nepravda. V tomto ohodnocení je zadaná KK – a tedy i celá formule v DNF – pravdivá. Formule $\neg r \wedge p \wedge q$ je první KK ve formuli, kterou jsme obdrželi po předchozí transformaci formule $(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow r$. Interpretace I je tedy modelem této formule.

Postup, kterým jsme se nyní zabývali, tj. převod na DNF, je tedy čistě syntaktickou rozhodovací procedurou, která dá odpověď na otázku, zda je formule kontradikcí. Pokud je odpověď záporná, vyčteme z výsledné formule také nějaký model původní formule. Oba uvedené příklady transformace se vztahovaly na formule, které nejsou kontradikcemi. Uvažme proto následující příklad.

Příklad 8.2.5: Na základě čistě syntaktických úprav máme rozhodnout o tom, zda je kontradikcí formule:

$$((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (s \wedge \neg(t \rightarrow s)).$$

Transformujeme ji tedy na formuli v DNF pomocí dvou kroků:

(1) $\neg(\neg p \vee q \vee \neg q \vee r) \vee (s \wedge \neg\neg(t \wedge \neg s))$,

(2) $(p \wedge \neg q \wedge q \wedge \neg r) \vee (s \wedge t \wedge \neg s)$.

První KK obsahuje proměnnou q spolu se svou negací. Druhá KK obsahuje proměnnou s spolu se svou negací. Neexistuje tedy takové ohodnocení, které by bylo modelem nějaké KK. Neexistuje tedy ani model celé výchozí formule, a ta je tudíž kontradikcí.

Přistupme nyní k obecné formulaci transformace formulí na KNF. Stačí, když v postupu, který se týká DNF, uděláme drobnou změnu. Místo odstranění konjunkcí vícečlenných disjunkcí odstraňujeme postupně disjunkce vícečlenných konjunkcí. Využíváme přitom analogické distributivní zákony:

$$\phi \vee (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \dashv\models (\phi \vee \psi_1) \wedge \cdots \wedge (\phi \vee \psi_n).$$

Příklad 8.2.6: Upravujeme formuli $(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow r$ z příkladu 8.2.4, ale tentokrát na logicky ekvivalentní formuli v KNF. První kroky (1–4) transformace budou stejné jako při výše provedeném převodu. Dostaneme se tak k formuli:

(4) $((p \wedge q) \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q)$.

V příkladě, kdy jsme hledali formuli v DNF, jsme v tomto případě museli odstraňovat konjunkce vícečlenných disjunkcí. Ty nám nyní nevadí, ale vyskytuje se zde disjunkce, jejíž jeden člen je vícečlenná konjunkce. Musíme tedy použít vhodný distributivní zákon na její odstranění. Dostáváme tak formuli v KNF:

(5) $(\mathtt{r} \vee \mathtt{p}) \wedge (\mathtt{r} \vee \mathtt{q}) \wedge (\neg\mathtt{r} \vee \neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q})$.

Tím je transformace hotova.

Podobně jako nám dává DNF přímou informaci o tom, zda je formule kontradikcí, dává nám KNF informaci o tom, zda je formule tautologií. Pokud formule v KNF obsahuje v každé své DK nějaký atom spolu se svou negací, je každá z těchto DK tautologií a konjunkce tautologií je opět tautologie. Pokud však má formule takovou DK, která neobsahuje žádný atom spolu se svou negací, můžeme nalézt ohodnocení, při kterém není pravdivá tato DK, a tedy ani celá formule. Např. pokud jedna DK vypadá takto $\mathtt{p} \vee \mathtt{q} \vee \neg\mathtt{r}$, pak je tím určeno ohodnocení I takové, že $I(\mathtt{p}) = \mathtt{0}, I(\mathtt{q}) = \mathtt{0}, I(\mathtt{r}) = \mathtt{1}$. Proměnným, před nimiž není negace, je přiřazena nepravda a proměnným, které jsou negované, přiřadíme pravdu. Přesně opačně než tomu bylo u DNF. V tomto ohodnocení je zadaná DK nepravdivá. Postup, kterým jsme se nyní zabývali, tj. převod na KNF, tedy znamená čistě syntaktickou rozhodovací proceduru, která dá odpověď na otázku, zda je formule tautologií. V případě záporné odpovědi vyčteme z formule v KNF nějaký protipříklad.

`Příklad 8.2.7:` Na základě čistě syntaktických úprav rozhodneme, zda je tautologií formule $\mathtt{q} \vee (\neg\mathtt{p} \rightarrow (\neg\mathtt{q} \wedge \neg\mathtt{p}))$. Postup je následující:

(1) $\mathtt{q} \vee \neg\neg\mathtt{p} \vee (\neg\mathtt{q} \wedge \neg\mathtt{p})$,

(2) $(\mathtt{q} \vee \mathtt{p}) \vee (\neg\mathtt{q} \wedge \neg\mathtt{p})$,

(3) $(\mathtt{q} \vee \mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}) \wedge (\mathtt{q} \vee \mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p})$.

Výsledná formule je skutečně v KNF. Má dvě DK a obě obsahují nějaký atom spolu s jeho negací. Tato formule – a tak i formule původní – je tedy tautologie. Nyní vezměme formuli $(\mathtt{q} \rightarrow (\neg\mathtt{p} \rightarrow (\neg\mathtt{q} \wedge \neg\mathtt{p}))$. Postupujme takto:

(1) $\neg\mathtt{q} \vee \neg\neg\mathtt{p} \vee (\neg\mathtt{q} \wedge \neg\mathtt{p})$,

(2) $(\neg\mathtt{q} \vee \mathtt{p}) \vee (\neg\mathtt{q} \wedge \neg\mathtt{p})$,

(3) $(\neg\mathtt{q} \vee \mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}) \wedge (\neg\mathtt{q} \vee \mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p})$.

Poslední formule je v KNF. První z jejích dvou DK neobsahuje žádný atom spolu s jeho negací. Původní formule tedy není tautologií – můžeme sestrojit jako protipříklad interpretaci I, pro kterou platí $I(\mathtt{q}) = \mathtt{1}$ a $I(\mathtt{p}) = \mathtt{0}$.

Nadále budeme pracovat pouze s disjunktivními normálními formami. DNF libovolné formule ϕ lehce upravíme tak, že nám tvar výsledné formule (kterou získáme čistě syntaktickými úpravami) poskytne ještě více informací o sémantických vlastnostech formule ϕ.

`8.2.8 Definice (Úplná normální forma):` *Nechť je dána formule ϕ. Úplná disjunktivní normální forma (úplná* DNF*) formule ϕ je formule ϕ^* splňující následující vlastnosti:*

(1) je logicky ekvivalentní formuli ϕ,

(2) je v DNF*,*

(3) každá KK *této formule obsahuje právě jeden výskyt každého z atomů vyskytujících se ve ϕ,*

(4) žádné dvě KK *této formule neobsahují přesně tytéž literály.*

Úplná DNF formule $\mathtt{p} \to \mathtt{q}$ je formule:

$$(\mathtt{p} \land \mathtt{q}) \lor (\neg\mathtt{p} \land \mathtt{q}) \lor (\neg\mathtt{p} \land \neg\mathtt{q}).$$

Lze lehce ověřit, že tato formule splňuje všechny čtyři požadované vlastnosti. Jak můžeme obecně k dané formuli nalézt její úplnou DNF? S jedním způsobem jsme se již setkali při důkazu adekvátnosti množiny spojek $\{\neg, \lor, \land\}$ v oddílu 5.4. Tam jsme fakticky popsali algoritmus, jak k dané funkci nalézt formuli, která tuto funkci vyjadřuje, přičemž nalezená formule splňovala body (2–4) z předchozí definice. Pochopitelně zde předpokládáme, že ϕ má tolik proměnných, kolik má funkce argumentů, a že při konstrukci formule využíváme právě tyto proměnné, a to ve stejném pořadí. Máme-li tedy zadanou libovolnou formuli ϕ, můžeme k ní nalézt funkci, kterou vyjadřuje (tj. vytvoříme tabulku formule ϕ), a k této funkci sestrojit zmíněným postupem formuli ϕ^*. Obě formule ϕ a ϕ^* mají stejnou tabulku, a jsou tedy logicky ekvivalentní, čímž se splní také bod (1) předchozí definice. Výsledkem je, že ϕ^* je úplná DNF formule ϕ.

Úplná DNF formule ϕ odráží syntakticky její sémantické vlastnosti. V právě popsaném postupu jsou tyto vlastnosti zjištěny pomocí tabulky a pak využity ke konstrukci ϕ^*. Nyní chceme ale postupovat obráceně, tj. chceme za pomoci čistě syntaktických transformací – bez odkazu k sémantickým pojmům, jako je pravdivost – dospět k úplné DNF formule ϕ – tj. k formuli ϕ^* –, a teprve z jejího tvaru vyčíst sémantické vlastnosti formule ϕ. Algoritmus převodu lze formulovat takto:

(1) Nejprve převedeme formuli na DNF podle výše popsaného postupu.

(2) Pokud se v některé $\mathtt{KK}$ vyskytuje nějaký atom spolu se svou negací a pokud to není jediná $\mathtt{KK}$ celé formule, pak celou tuto $\mathtt{KK}$ vyškrtneme.

(3) Pokud se vyskytuje více $\mathtt{KK}$, které obsahují shodné literály, ponecháme pouze první z nich a ostatní vyškrtneme.

(4) Pokud se v nějaké $\mathtt{KK}$ vyskytuje nějaký literál vícekrát, ponecháme pouze první výskyt a ostatní vyškrtneme.

(5) Pokud χ je $\mathtt{KK}$, která neobsahuje proměnnou $\mathtt{p}$ vyskytující se ve výchozí formuli, pak χ nahradíme logicky ekvivalentní formulí $(\chi \wedge \mathtt{p}) \vee (\chi \wedge \neg\mathtt{p})$.

(6) Každou z právě uvedených instrukcí aplikujeme tolikrát, kolikrát je to možné, přičemž nezáleží na pořadí aplikace.

(7) Nemůžeme-li již aplikovat žádnou z nich, získali jsme buď úplnou $\mathtt{DNF}$ výchozí formule, nebo jedinou $\mathtt{KK}$ obsahující nějaký atom spolu s jeho negací.

`Příklad 8.2.9:` Nalezneme úplnou $\mathtt{DNF}$ k formuli $\mathtt{p} \to \neg(\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{r})$. Po převodu na $\mathtt{DNF}$ jsme v příkladě 8.2.3 získali formuli:

$$\neg\mathtt{p} \vee (\neg\mathtt{q} \wedge \mathtt{r}).$$

První $\mathtt{KK}$ je samotný literál $\neg\mathtt{p}$. Zde chybí výskyty proměnných $\mathtt{q}$ a $\mathtt{r}$. Nejdříve rozšíříme tuto $\mathtt{KK}$ např. o výskyty atomu $\mathtt{q}$ a získáme formuli:

$$(\neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}) \vee (\neg\mathtt{q} \wedge \mathtt{r}).$$

V prvních dvou $\mathtt{KK}$ chybí výskyt atomu $\mathtt{r}$, ve třetí $\mathtt{KK}$ chybí výskyt atomu $\mathtt{p}$. Každou z těchto $\mathtt{KK}$ rozšíříme a získáváme:

$$(\neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{q} \wedge \mathtt{r}) \vee (\neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{q} \wedge \neg\mathtt{r}) \vee (\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q} \wedge \mathtt{r}) \vee \\ (\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q} \wedge \neg\mathtt{r}) \vee (\neg\mathtt{q} \wedge \mathtt{r} \wedge \mathtt{p}) \vee (\neg\mathtt{q} \wedge \mathtt{r} \wedge \neg\mathtt{p}).$$

Nyní je třeba si povšimnout, že třetí a šestá $\mathtt{KK}$ obsahuje přesně tytéž literály, takže např. šestou $\mathtt{KK}$ vyškrtneme a získáme formuli:

$$(\neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{q} \wedge \mathtt{r}) \vee (\neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{q} \wedge \neg\mathtt{r}) \vee (\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q} \wedge \mathtt{r}) \vee \\ (\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q} \wedge \neg\mathtt{r}) \vee (\neg\mathtt{q} \wedge \mathtt{r} \wedge \mathtt{p}).$$

Na tuto formuli již nemůžeme aplikovat žádnou instrukci. Jedná se tedy o úplnou $\mathtt{DNF}$ dané formule.

Jaký je význam konečného tvaru, ke kterému jsme došli? Řekli jsme, že se v něm odráží sémantické vlastnosti výchozí formule. Pro sémantiku dané formule ϕ je určující, jakou pravdivostní funkci vyjadřuje. Pravdivostní funkce je určena výčtem interpretací, ve kterých je formule pravdivá. A informaci o tom, v jakých interpretacích je formule pravdivá, můžeme získat právě z její úplné DNF. V každé KK se totiž nachází právě jeden výskyt každé proměnné formule ϕ. Ke každé KK tedy můžeme nalézt interpretaci, při které je tato KK pravdivá. V této interpretaci musí být pravdivá také původní formule ϕ, protože je v ní pravdivá ona KK, která tvoří jeden člen úplné DNF formule ϕ (a ta je formuli ϕ logicky ekvivalentní). Tedy každá KK popisuje nějaký z modelů výchozí formule ϕ. Naopak také platí, že je-li nějaká interpretace modelem formule ϕ, musí jí odpovídat některý člen úplné DNF, protože ta je pravdivá jen v interpretacích, které odpovídají jednotlivým KK.

Příklad 8.2.10: Na základě syntaktických operací určíme všechny modely formule:

$$(\neg(\neg \mathtt{p} \vee \neg \mathtt{q}) \vee \mathtt{r}) \wedge (\neg \mathtt{r} \vee \neg \mathtt{p} \vee \neg \mathtt{q}).$$

Převodem na úplnou DNF dostáváme formuli:

$$(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q} \wedge \neg \mathtt{r}) \vee (\mathtt{p} \wedge \neg \mathtt{q} \wedge \mathtt{r}) \vee (\neg \mathtt{p} \wedge \mathtt{q} \wedge \mathtt{r}) \vee (\neg \mathtt{p} \wedge \neg \mathtt{q} \wedge \mathtt{r}).$$

Formule má tedy právě čtyři modely:

$$\begin{array}{lll} I_1(\mathtt{p}) = \mathtt{1} & I_1(\mathtt{q}) = \mathtt{1} & I_1(\mathtt{r}) = \mathtt{0}, \\ I_2(\mathtt{p}) = \mathtt{1} & I_2(\mathtt{q}) = \mathtt{0} & I_2(\mathtt{r}) = \mathtt{1}, \\ I_3(\mathtt{p}) = \mathtt{0} & I_3(\mathtt{q}) = \mathtt{1} & I_3(\mathtt{r}) = \mathtt{1}, \\ I_4(\mathtt{p}) = \mathtt{0} & I_4(\mathtt{q}) = \mathtt{0} & I_4(\mathtt{r}) = \mathtt{1}. \end{array}$$

Pokud je formule kontradikcí, nemá žádnou úplnou DNF a pokus dospět k ní podle výše popsaného postupu by vyústil v jednu KK obsahující nějakou proměnnou spolu se svou negací.

8.3 Logické obvody

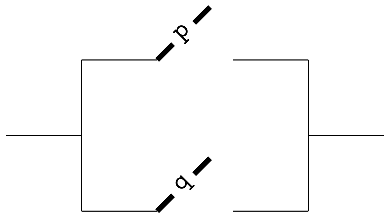
Jako jednoduchá mimologická aplikace KVL bývají často uváděny tzv. logické obvody. Alespoň krátce se o nich také zmíníme. Týkají se totiž podstatně dříve probraného, jednak v souvislosti praktické, která vysvětluje pozdější příspěvky logiky k informatice, jednak v souvislosti historické. Možnost znázorňovat význam formulí logiky skrze grafy elektrických sítí – a grafy obecně – nacházíme u Charlese Sanderse Peirce,[1] a to jak

[1] Peirce [1982–, sv. 5, s. 421–423].

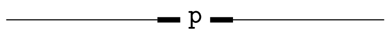
ve vztahu k úplné DNF, tak ve vztahu k speciálním spojkám, Peircově šipce a Shefferovu pruhu. Ty jsme zavedli v oddílu 5.4, kde jsme již poznamenali, že výrokové funkce, které jim odpovídají, jsou v elektronice dobře známy jako *logická hradla* pod názvy NOR a NAND. Popišme si, proč tomu tak je.

Představme si, že konstruujeme síť, kterou má protékat proud. Výrokové proměnné budou hrát nyní roli spínačů, které můžeme řadit buď sériově, nebo paralelně. *Sériové řazení* lze znázornit takto:

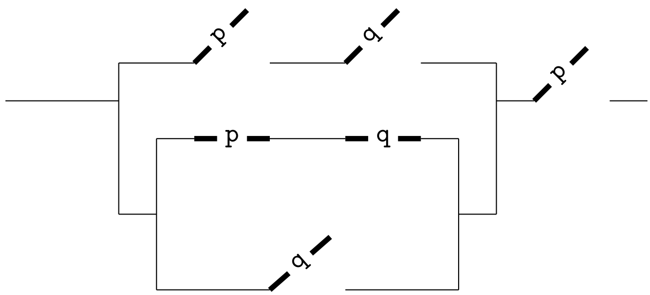
Podle schématu proud protéká právě tehdy, když tiskneme spínače p a q, což odpovídá konjunkci $p \wedge q$. *Paralelní řazení* spínačů budeme znázorňovat takto:



Tomuto schématu rozumíme tak, že jím protéká proud právě tehdy, když je zapnutý alespoň jeden ze spínačů p, q. To odpovídá disjunkci $p \vee q$. Dále máme možnost obrátit funkci spínače, což zaznamenáme pomocí negace:



Čtení je následující: schématem protéká proud právě tehdy, když není stisknutý spínač p. Při konstrukci obvodů můžeme vždy místo jednotlivých uzlů (tj. míst, kde se vyskytují proměnné či jejich negace) dosadit celé nové schéma. Následující obrázek znázorňuje tedy dobře zkonstruovaný logický obvod:



Chtěli bychom si nyní položit otázku, zda neexistuje nějaký jiný obvod, který funguje stejně jako právě uvedený – tj. průchod proudu v něm závisí stejným způsobem na stavech spínačů –, ale který je přitom „jednodušší“. Tento problém je vlastně problémem zjednodušování formulí. Je totiž zřejmé, že konstrukce obvodů odpovídá konstrukci určitých formulí na množině spojek $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Právě uvedený obvod odpovídá formuli:

$$((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee ((\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}) \vee \mathtt{q})) \wedge \mathtt{p}.$$

Naším úkolem je nyní najít co „nejjednodušší“ formuli, která je uvedené formuli logicky ekvivalentní, a zapsat ji jako schéma obvodu. Přitom postupujeme tak, že převádíme formuli na libovolnou z normálních forem, a kdykoli je to možné, aplikujeme některý zjednodušující zákon. Zjednodušujícím zákonem míníme např. možnost škrtat zdvojené negace. Ty se však v souvislosti s právě charakterizovanými obvody vůbec nemohou vyskytnout, protože negace se objevuje pouze před proměnnými. Připomeneme další důležité zákony, které již v současném kontextu bude možné uplatnit. V následující tabulce je každá formule nahraditelná formulí ϕ, protože je jí logicky ekvivalentní:

$$\begin{array}{ll}
\phi \wedge \phi & \phi \vee \phi, \\
\phi \wedge (\phi \vee \psi) & \phi \vee (\phi \wedge \psi), \\
(\phi \vee \neg\psi) \wedge (\phi \vee \psi) & (\phi \wedge \neg\psi) \vee (\phi \wedge \psi).
\end{array}$$

Předpokládáme-li dále, že τ je libovolná tautologie a κ kontradikce, platí:

$$\begin{array}{ll}
\phi \wedge \tau \dashv\models \phi & \phi \vee \kappa \dashv\models \phi, \\
\phi \wedge \kappa \dashv\models \kappa & \phi \vee \tau \dashv\models \tau.
\end{array}$$

Kombinací těchto zákonů s distributivními získáme dále dvě ekvivalence:

$$\phi \wedge (\neg\phi \vee \psi) \dashv\models \phi \wedge \psi \qquad \phi \vee (\neg\phi \wedge \psi) \dashv\models \phi \vee \psi.$$

Zjednodušme nyní pomocí těchto zákonů formuli, která charakterizuje výše uvedený obvod:

(1) $((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee ((\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}) \vee \mathtt{q})) \wedge \mathtt{p}$,

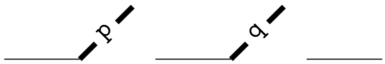
(2) $((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{p})) \wedge \mathtt{p}$,

(3) $(\mathtt{p} \wedge \mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\mathtt{p} \wedge (\neg\mathtt{p} \vee \mathtt{q}))$,

(4) $(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$,

(5) $\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}$.

Daný obvod tedy můžeme nahradit obvodem:



Je zjevné, že vhodnými úpravami sledujícími zákony logické ekvivalence lze dospět k podstatným úsporám v rozvodech a v rozvrhu spínačů. Jelikož obvody jsou koncipovány tak, že $\mathtt{p}$ zastupuje spínač ve stavu vypnutí, lze spojky chápat jako popis toho, kdy proud teče a kdy ne. V sériovém zapojení to znamená, že proud teče, když jsou oba spínače zapnuté, tj. platí $\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}$, v paralelním zapojení proud teče, když je zapnutý alespoň jeden spínač, tj. $\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}$. V prvním takto můžeme vidět negaci disjunkce, v druhém pak negaci konjunkce, symbolicky `NOR` a `NAND`, a tedy i souvislost s Peircovými adekvátními operátory, jimiž lze celý systém dále zjednodušit.

8.4 Dualita

Pozorný čtenář si nemohl nepovšimnout, že u mnoha logických zákonů dochází k určité komplementaritě disjunkce a konjunkce. V zákonech, jako je idempotence, komutativita, asociativita, distributivita, De Morganovy zákony atd., vznikají prohozením disjunkcí s konjunkcemi z logicky ekvivalentních formulí opět ekvivalentní formule. Srovnejme třeba distributivní zákony a jejich podobnosti:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\phi & \wedge & (\psi & \vee & \chi) & \dashv\vDash & (\phi & \wedge & \psi) & \vee & (\phi & \wedge & \chi) \\
 & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\phi & \vee & (\psi & \wedge & \chi) & \dashv\vDash & (\phi & \vee & \psi) & \wedge & (\phi & \vee & \chi)
\end{array}$$

Tento jev je důsledkem obecné vlastnosti `KVL`, které se říká *dualita.* V tomto oddílu ji systematicky popíšeme.

`8.4.1 Definice (Inverze, duál):` *Inverzní interpretace k interpretaci I je interpretace I^*, pro kterou platí $I(\mathtt{p}) \neq I^*(\mathtt{p})$ pro každou proměnnou $\mathtt{p}$. Formule ϕ, ψ jsou duální, platí-li pro každou interpretaci I, že $I(\phi) \neq I^*(\psi)$.*

Tedy inverzní interpretace přiřazují proměnným právě opačné hodnoty a dvě formule jsou duální, mají-li vždy v inverzních interpretacích inverzní čili opačné hodnoty. Inverzní interpretace mohou vypadat třeba takto:

	p	q	r	s	t	u	...
I	1	1	0	1	0	1	...
I^*	0	0	1	0	1	0	...

Platí, že každá interpretace I je sama inverzní k nějaké jiné interpretaci, konkrétně k I^*, protože platí:

$$I = (I^*)^*.$$

Tento vztah mezi interpretacemi je tedy symetrický. Také vztah duality je symetrický v tom smyslu, že každá formule je duálem svého duálu. To plyne přímo z uvedených definic. Dále si všimněme, že zatímco k dané interpretaci existuje právě jedna inverzní interpretace, je zřejmé, že k dané formuli může existovat více formulí duálních. Z definice ihned plyne, že každá formule, která je logicky ekvivalentní duální formuli, je také duální. Naopak také platí, že libovolné dvě formule, které jsou obě duální k dané formuli, jsou vzájemně logicky ekvivalentní. Toto tvrzení bude předmětem věty 8.4.7.

`Příklad 8.4.2:` Zkusme najít nějakou duální formuli k formuli $\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}$. K tabulce této formule stačí sestrojit tabulku duální – v níž nuly jsou na místě jedniček a jedničky na místě nul – a k ní najít vhodnou formuli. Při tom využíváme toho, že v úvaze se lze omezit pouze na proměnné `p` a `q`, které se ve formuli vyskytují:

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	?
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Výsledná tabulka je přímo tabulkou disjunkce $\mathtt{p} \vee \mathtt{q}$. Tedy formule $\mathtt{p} \vee \mathtt{q}$ a $\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}$ jsou duální.

Podobným způsobem lze ověřit, že každý literál je duální sám se sebou neboli samoduální. Nyní dokážeme o duálech několik obecných tvrzení.

`8.4.3 Věta (O dualitě 1):` *Nechť formule ϑ^* vznikla z formule ϑ tak, že jsme v ní nahradili všechny proměnné jejich negacemi. Pak platí, že formule ϑ a $\neg\vartheta^*$ jsou duální.*

`Důkaz:` Indukcí podle složitosti formule ϑ lze lehce dokázat, že vždy $I^*(\vartheta) = I(\vartheta^*)$. Spokojíme se zde s pouhým náhledem, že dosazení negace před proměnnou má stejný efekt jako opačné ohodnocení proměnné. Pro libovolné ohodnocení I tedy platí, že $I^*(\vartheta) \neq I(\neg\vartheta^*)$. To podle definice znamená, že formule ϑ a $\neg\vartheta^*$ jsou duální. `QED`

Nalézt k dané formuli nějaký její duál je tedy velice snadné a čistě mechanické. Podívejme se na jiné způsoby, jak toho dosáhnout, v omezení na formule neobsahující jiné spojky než negaci, konjunkci a disjunkci.

8.4.4 Věta (O dualitě 2): *Nechť formule ϑ neobsahuje implikaci a ekvivalenci a formule ϑ^+ vznikla z ϑ nahrazením každé konjunkce disjunkcí a každé disjunkce konjunkcí. Pak formule ϑ a ϑ^+ jsou duální.*

Důkaz: Postupujeme indukcí podle složitosti formule ϑ. (i) Jedná-li se o libovolnou proměnnou $\mathtt{p}$, pak je tvrzení pravdivé, protože $\mathtt{p}^+ = \mathtt{p}$ a každá proměnná je duální sama se sebou. (ii) Náš induktivní předpoklad zní, že formule ϕ, ϕ^+ jsou duální a formule ψ, ψ^+ jsou také duální. (ii.i) Nejprve dokazujeme tvrzení pro $\neg\phi$. Nechť I je libovolná interpretace. Induktivní předpoklad zaručuje, že $I^*(\phi) \neq I(\phi^+)$, tedy i $I^*(\neg\phi) \neq I(\neg\phi^+)$. Nyní stačí zvážit, že $\neg\phi^+ = (\neg\phi)^+$. (ii.ii) Dokazujeme tvrzení pro formuli $\phi \wedge \psi$. Uvědomme si nejprve, že $(\phi \wedge \psi)^+ = \phi^+ \vee \psi^+$. Nechť I je libovolná interpretace. Pokud $I^* \models \phi \wedge \psi$, pak $I^* \models \phi$ a $I^* \models \psi$. V tomto případě nám induktivní předpoklad říká, že $I \not\models \phi^+$ a $I \not\models \psi^+$, tj. $I \not\models \phi^+ \vee \psi^+$, tj. $I \not\models (\phi \wedge \psi)^+$. Pokud $I^* \not\models \phi \wedge \psi$, znamená to, že alespoň jedna z formulí ϕ, ψ je v I^* nepravdivá. Na základě induktivního předpokladu je tedy alespoň jedna z formulí ϕ^+, ψ^+ v I pravdivá. Tedy $I \models \phi^+ \vee \psi^+$, tj. $I \models (\phi \wedge \psi)^+$. V obou případech $I^*(\phi \wedge \psi) \neq I((\phi \wedge \psi)^+)$. (ii.iii) Induktivní krok pro disjunkci je analogický kroku pro konjunkci. (iii) Tím je důkaz hotov. **QED**

Následující věta říká, že duál tautologie je kontradikce a duál kontradikce je tautologie. V těchto krajních případech se tedy dualita přibližuje negaci. Jednoduchým příkladem jsou duální formule $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p}$ a $\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{p}$.

8.4.5 Věta (O dualitě 3): *Nechť formule ϑ, ϑ^D jsou duální. Pak ϑ je tautologií právě tehdy, když ϑ^D je kontradikcí.*

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že ϑ je tautologie. Pro spor předpokládejme, že ϑ^D není kontradikce, tj. existuje interpretace I taková, že $I \models \vartheta^D$. Protože ϑ je k ϑ^D duální, platí, že $I^* \not\models \vartheta$, což je spor s tím, že ϑ je tautologie. Analogicky dospějeme ke sporu, předpokládáme-li, že ϑ^D je kontradikce a ϑ není tautologie. **QED**

Další tvrzení vyjadřuje, že formule jsou logicky ekvivalentní přesně v těch případech, kdy jsou jejich duály logicky ekvivalentní. To nám umožní odvozovat z již dokázaných ekvivalencí ekvivalence nové.

8.4.6 Věta (O dualitě 4): *Nechť formule ϑ, ϑ^D jsou duální a také formule χ, χ^D jsou duální. Pak $\vartheta \dashv\models \chi$ právě tehdy, když $\vartheta^D \dashv\models \chi^D$.*

Důkaz: Nechť $\vartheta \dashv\models \chi$ a nechť I je libovolná interpretace. Pak $I(\vartheta^D) \neq I^*(\vartheta) = I^*(\chi) \neq I(\chi^D)$, a tedy $I(\vartheta^D) = I(\chi^D)$. Z toho plyne, že $\vartheta^D \dashv\models \chi^D$. Protože dualita je symetrická, dokázali jsme najednou obě implikace dokazovaného tvrzení. **QED**

Máme-li tedy např. jeden z distributivních zákonů, řekněme

$$\phi \wedge (\psi \vee \chi) \dashv\models (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi),$$

můžeme z něj odvodit zákon druhý. První zákon specifikujeme nejprve na konkrétní formuli:

$$\mathtt{p} \wedge (\mathtt{q} \vee \mathtt{r}) \dashv\models (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\mathtt{p} \wedge \mathtt{r}).$$

Duální tvrzení

$$\mathtt{p} \vee (\mathtt{q} \wedge \mathtt{r}) \dashv\models (\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{p} \vee \mathtt{r})$$

lze nyní odvodit z vět 8.4.4 a 8.4.6. Vzhledem k tomu, že v souladu s větou 8.1.5 můžeme za proměnné substituovat libovolné formule, získáváme schéma:

$$\phi \vee (\psi \wedge \chi) \dashv\models (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi).$$

Další tvrzení, jehož platnost jsme již zmínili, je bezprostředním důsledkem předchozí věty. Vyjadřuje, že všechny duály dané formule jsou vzájemně logicky ekvivalentní.

`8.4.7 Věta (O dualitě 5):` *Nechť formule χ_1, χ_2 jsou duální s formulí ϑ. Pak $\chi_1 \dashv\models \chi_2$.*

`Důkaz:` Protože ϑ, χ_1 jsou duální a ϑ, χ_2 jsou duální, a protože navíc $\vartheta \dashv\models \vartheta$, plyne z předchozí věty, že $\chi_1 \dashv\models \chi_2$. `QED`

Souhrn uvedených vět nám dovoluje odvozovat logické ekvivalence takřka z ničeho, jak ukazuje následující příklad.

`Příklad 8.4.8:` Odvoďme jeden z De Morganových zákonů na základě formule $\neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$. Vezmeme duál:

$$(\neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}))^* = \neg\neg(\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}).$$

Předpokládejme, že víme, že dvojité negace můžeme škrtat. Duálem je tedy i formule $(\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q})$. Dalším duálem je formule:

$$(\neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}))^+ = \neg(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}).$$

Podle poslední z uvedených vět jsou všechny duály logicky ekvivalentní, tedy:

$$\neg(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \dashv\models (\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}).$$

Za proměnné můžeme nyní substituovat libovolné formule.

Tím máme vyloženy základní technické detaily. V dalším oddílu se stručně zaměříme na obecnější souvislosti, které jsou s pojmem duality a se základními pojmy KVL vůbec spjaty. V historickém kontextu to byla totiž právě dualita, co dalo jednak podnět k vzniku moderní logiky z aritmetických analogií, jednak ale vedlo i k dalšímu odlišení příslušných kalkulů, neboť aritmetické zákony v obecnosti duální nejsou. Platí-li např. komutativita sčítání a odčítání

$$x + y = y + x \qquad\qquad x \times y = y \times x,$$

neplatí podobná podvojnost již v případě distributivity. Distributivní zákon je formulován pro součin vzhledem k součtu:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

Duální rovnice

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$$

již ale obecnou platnost nemá. Další detaily a příklady budou následovat.

8.5 Algebra logiky

Ekvivalence jistých formulí, zvláště ve vztahu k normálním formám a zákonům duality, souvisí s dalším obdobím logiky, které podstatně ovlivnilo vznik logiky moderní a její souvislost s matematikou, nejprve tedy se symbolickými metodami algebry. V symbolickém charakteru usuzování coby *transformace* jedné věty (výrazu) na větu jinou lze spatřit podobnost logiky s aritmetikou, jak to mimořádně vlivně učinil Leibniz v projektu univerzálního jazyka (*characteristica universalis*). V jeho rámci měla být nejprve vhodně zachycena sémantická struktura věty, aby se takto, tj. na základě jistého pevně zvoleného syntaktického rámce, mohl vybudovat kalkul (*calculus ratiocinator*), jenž by na čistě mechanickém základě umožnil dospívat od jedněch pravd k jiným. Veškeré usuzování, objevování a dokazování by se tak redukovalo na počítání.

Po Aristotelově objevu formální logiky založil takto Leibniz logiku symbolickou. Logická aplikace aritmetických operací přitom u Leibnize zachycuje obě výše naznačená čtení kopuly ve smyslu obsaženosti pojmu B v pojmu A, a to skrze zápis:

$$B + Y = A.$$

V prvním, *intenzionálním* čtení ale znak + vyjadřuje konjunkci atributů tvořících obsah pojmu A, a odpovídá tedy aritmetické operaci násobení, skrze niž je např. v čísle 12 obsaženo číslo 3. V druhém, *extenzionálním* čtení je + chápáno jako sjednocení určitých množin, rozsahů pojmů B a Y, tedy jako shrnutí jejich prvků v jeden celek, v pojem A, v němž jsou pak mereologicky obsaženy.[2] Leibniz zjistil, že obě pojetí obsaženosti lze úsporněji vyjádřit alternativním

$$A + B = A,$$

opustíme-li ovšem přirozenou aritmetickou interpretaci, což mj. znamená, že nesmíme logické sčítání chápat výlučně (buď ..., anebo ...).[3]

Leibnizův následovník Boole, jenž byl také fascinován podobností zákonů myšlení a zákonů čísel, se nejprve snažil tento nearitmetický směr zvrátit.[4] Omezil se přitom pouze na *logiku rozsahu*, se sčítáním odpovídajícím shrnutí prvků dvou disjunktních množin do jedné a násobením symbolizujícím sukcesivní výběr prvků z výchozího univerza, značeného symbolem 1. To odpovídá množinovým operacím sjednocení a průniku.[5] Ke každé množině A byl přitom definován doplněk jako množina všech těch prvků, které v ní nejsou, neboli

$$1 - A,$$

přičemž součinem množiny a jejího doplňku získáváme prázdnou množinu, značenou jako 0. Té odpovídá cosi jako prázdný výběr, vzniklý např. postupnou aplikací dvou disjunktních množin. Na základě sémantiky postupných výběrů a kolekcí mohl Boole snadno jako zákony myšlení zdůvodnit následující vztahy coby srozumitelné nápodoby aritmetických zákonů:

$$A \times B = B \times A \qquad A + B = B + A,$$
$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \qquad A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Podobnost s aritmetikou ovšem končí u vztahů idempotence:

$$A \times A = A \qquad A + A = A.$$

Boole první z nich s ohledem na sémantiku opakovaného výběru přijímá. Z aritmetického hlediska to lze ospravedlnit omezením užitých proměnných na hodnoty 1 a 0. U druhého ovšem nepomůže ani to, a Boole ho tak jednoduše odmítá. Oficiálním důvodem je porušení předpokladu disjunktnosti sčítaných množin. Tomuto aritmetizujícímu trendu udělal

[2] Leibniz [1960, s. 307].
[3] Leibniz [1960, s. 403].
[4] Srov. zejména Boole [1854].
[5] Výklad těchto a dalších operací viz oddíl 10.7.

definitivní konec až Jevons,[6] jenž disjunktní podmínku pro sčítání zrušil, a učinil tak, Quinovými slovy, z Boolovy algebry *algebru boolovskou.*[7]

Tou se rozumí každá abstraktní struktura splňující specifický systém rovnic, jež mají výše naznačený duální charakter. Duality přitom s algebrou logiky definitivně spojil až Ernst Schröder, jenž začal ve svých *Přednáškách z algebry logiky* příslušné logické zákony systematicky zapisovat v tabulkách.[8] Standardně je vyžadováno následujících 6 vztahů pro dvě binární operace $\wedge$ a $\vee$, jednu unární $\neg$ a dvě konstanty $\mathtt{1}$ a $\mathtt{0}$:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad x \wedge y = y \wedge x && x \vee y = y \vee x,\\
&(2)\quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z && x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,\\
&(3)\quad x \wedge x = x && x \vee x = x,\\
&(4)\quad x \wedge (y \vee x) = x && x \vee (y \wedge x) = x,\\
&(5)\quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) && x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),\\
&(6)\quad x \wedge \neg x = \mathtt{0} && x \vee \neg x = \mathtt{1}.
\end{aligned}$$

Po řadě se jedná o požadavky:

(1) komutativity,

(2) asociativity,

(3) idempotence,

(4) absorbce,

(5) distributivnosti,

(6) komplementarity.

Rovnice (1–4) přitom vyjadřují vlastnosti tzv. *svazu*, i když vlastnost idempotence je uváděna jen pro názornost, neboť vyplývá již z absorbce. Boolovskou algebru lze takto úhrnem popsat jako komplementární distributivní svaz, tj. svaz, v němž mají příslušné operace distributivní charakter a ke každému prvku A existuje jeho komplement $\neg A$. Souvislost těchto rovnic s výše uváděnými zákony logiky a duality je markantní. Stačí chápat rovnost jako logickou ekvivalenci a hodnoty $\mathtt{1}$, $\mathtt{0}$ jako vyjádření tautologičnosti či kontradiktoričnosti, tj. při příslušném přepisu si vystačíme s našimi symboly $\dashv\vDash$ a $\vDash$. Pointa algebraického přístupu

[6] Jevons [1864, kap. VI].

[7] Quine [1995, s. 253].

[8] Schröder [1890–1895].

spočívá v tom, že příslušné operace a symboly lze chápat různě, běžná je např. interpretace množinová, která kopíruje původní Boolovu sémantiku různých operací na množinách, resp. rozsazích pojmů.

Co se týče fenoménu duality, ten se kromě uvedených oblastí vyskytuje prototypicky např. v rámci projektivní geometrie, zabývající se studiem vlastností geometrických figur, které se zachovávají při projekci, tzv. vlastností *deskriptivních*, oproti vlastnostem *metrickým*. Příkladem metrické vlastnosti je pravoúhlost trojúhelníka. Příkladem deskriptivní vlastnosti je např. kolinearita daných bodů. Dva body jsou kolineární, když leží na jedné přímce. V projektivní geometrii se vyskytují jisté dvojice duálních pojmů, např.:

bod	přímka,
ležet na	procházet,
kolineární	konkurentní,
spojnice	průsečík.

Konkurentní jsou dvě přímky, když se protínají v jednom bodě. Dualita projektivní geometrie se projevuje tím, že nahradíme-li v určité větě všechny termíny termíny duálními, získáme větu, která má stejnou pravdivostní hodnotu jako ta původní. Ke každému geometrickému principu tak existuje princip duální. Příkladem je tzv. *Pascalův teorém* a jeho dualizace, *teorém Brianchonův*:

> šestiúhelník je vepsaný v kuželosečce tehdy a jen tehdy, jestliže jsou průsečíky tří dvojic jeho prodloužených protilehlých stran kolineární;
>
> šestiúhelník je opsaný kuželosečce tehdy a jen tehdy, jestliže jsou spojnice tří dvojic jeho protilehlých vrcholů konkurentní.

Na tomto pozadí se nám dualita nemusí jevit jako čistě kontingentní, náhodně vyvstavší vlastnost jistých oblastí poznání, ale spíše jako nutný důsledek systematické snahy o jejich jednoduchost. Právě v tomto preskriptivním, normativním duchu uvádí Hilbert projektivní geometrii jako významný případ metody ideálních elementů, v níž do našeho univerza zavádíme objekty, které se z dosavadního hlediska mohou zdát jako fiktivní, a dospíváme tak k zjednodušení příslušného jazyka a skrze něj i k dalšímu vývoji příslušné disciplíny.[9] V případě projektivní geometrie dosáhneme např. duality principů

[9] Viz Frege [1976, s. 67]. K samotné metodě ideálních prvků viz Hilbert [1923, s. 187].

dva různé body vždy určují přímku,

dvě různé přímky vždy určují bod

tím, že přijmeme ke stávajícím, tzv. vlastním bodům projektivní roviny body v nekonečnu, v nichž se – jak řekneme – protínají rovnoběžky. Tyto tzv. *nevlastní body* projektivní roviny lze dále ztotožnit se směry přímek v rovině původní, díky čemuž se automaticky dvě přímky téhož směru (rovnoběžky) protínají v tomtéž bodě.[10] Zcela analogicky vede např. zavedení prvku $\sqrt{-1} = i$ k reformulaci základní věty algebry v následujícím smyslu:

ke každému komplexnímu polynomu n-tého stupně existuje právě (tj. nikoli jen nejvýše) n komplexních kořenů (včetně případného opakování).

Obecně lze říci, že k rozšiřování pojmu čísla docházelo právě tímto „zjednodušujícím“, holistickým způsobem. U přechodu od přirozených čísel k celým číslům vyžadujeme např. univerzální proveditelnost odčítání coby inverze k univerzálně definovanému sčítání, u přechodu k číslům racionálním zase obecnou proveditelnost operace dělení. Přechod k reálným číslům je nicméně speciální, neboť si – přes veškerou snahu o algebraizaci – v sobě nese geometrický původ vycházející z praxe názorného měření, oproti symbolickému počítání. Motivace vycházející z algebraické symetrie nastává tedy opět až u čísel komplexních, v nichž dojde k naplnění požadavků univerzální odmocnitelnosti.[11]

S dualitou jasně souvisí možnost prezentovat formule `KVL` v normovaném disjunktivním a konjunktivním tvaru, kterou artikuloval už Boole v podobě tzv. *zákona rozvoje* (*law of development*). Podle něho lze funkci f libovolného počtu proměnných (uvažujme pro jednoduchost dvě) rozvinout do tvaru

$$f(x, y) = axy + bx(1-y) + c(1-x)y + d(1-x)(1-y),$$

kde koeficienty a, b, c, d odpovídají po řadě hodnotám

$$f(1,1) \qquad f(1,0) \qquad f(0,1) \qquad f(0,0).$$

[10] Dva vlastní body a jeden vlastní a nevlastní bod určují vždy vlastní přímku. Dva nevlastní body oproti tomu určují přímku nevlastní, složenou ze všech nevlastních bodů. Vlastní a nevlastní přímka se takto protínají v bodě odpovídajícím směru přímky vlastní.

[11] Pro další detaily viz Kolman [2008].

To je dosti přímočará formulace věty o disjunktivní normální formě. U Boola se ovšem opět objevuje její „odvození" aritmetické, tentokráte – dosti volně – odkazující na mocninný rozvoj Taylorův:[12]

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

To samo nás ale nezajímá. Co nás zajímá, je idea vyjádření sémantické vlastnosti nějaké formule syntakticky transparentní formou. Tato idea je totiž v souladu s tradiční představou logických pravd a vztahů jako něčeho samozřejmého, co pro tuto zřejmost již nepotřebuje, ba ani nesnese dalšího zdůvodnění. U Wittgensteina tomu odpovídá teze o nesmyslné povaze logiky, jejíž tvrzení se mají – právě pro svůj původ ve formě, nikoli obsahu – ukazovat, nikoli explicitně zdůvodňovat. Může se zdát, že je to v rozporu se smyslem této knihy, neboť jsme v ní vlastně dosud nedělali nic jiného, než vysvětlovali, proč je nějaká formule, třeba

(1) $\mathtt{p} \to (\mathtt{q} \to \mathtt{p})$,

tautologií, či proč formule

(2) $\neg\mathtt{p} \to (\neg\mathtt{q} \wedge \mathtt{p})$

vyplývá z formule

(3) $\neg(\mathtt{p} \to \mathtt{q})$.

To totiž nemusí být a v obecném případě ani není na první pohled vidět a my se o tom musíme přesvědčit nějakou sémantickou úvahou, což je právě to, co podle Wittgensteinova kritéria smysluplnosti – totiž vztaženosti k empirickému světu – nedává smysl. Máme-li ale k dispozici možnost převodu formulí do normovaného tvaru `DNF`, a to způsobem, jenž je natolik mechanický, že se v něm nemůže schovávat nějaká teorie, máme i prostředek, jak tautologičnost, vyplývání a jiné logické vztahy zdůvodnit jinak než explicitně, totiž něčím, co implicitně děláme a co se tak pouze ukazuje v příslušné praxi. Převedeme-li tedy uvedené věty do úplné `DNF`

(1) $(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}) \vee (\neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q})$,

(2) $(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q})$,

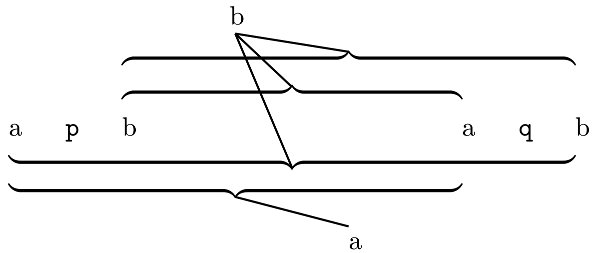
(3) $\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}$,

[12] Boole [1847, s. 60].

„vidíme“ takřka okamžitě, že je formule (1) splněna všemi intepretacemi, a je tedy tautologií, zatímco tvar formulí (2) a (3) ukazuje, že každá interpretace splňující (3) splní i (2), nikoli však *vice versa*. To potvrzuje Wittgensteinovo tvrzení:

> „To, že pravdivost jedné věty plyne z pravdivosti vět jiných, vidíme z jejich struktury.“[13]

Wittgenstein v tomto prohlášení ovšem neodkazuje na teorii normálních forem, ale – jak se zdá z pozdějšího záznamu[14] – na Shefferův operátor. Z hlediska transparentnosti nejsou ale pro tuto volbu základní logické konstanty žádné podstatné důvody, stejně jako lze jenom obtížně hledat důvody pro bizarní styl Wittgensteinovy *ab*-notace, kterou později pro tento účel zavádí, viz obr. 8.1. Písmena *a* a *b* zde symbolizují pravdi-



Obrázek 8.1: *ab*-notace

vostní póly formulí p a q, přičemž je zprvu jedno, který z nich znamená pravdu a který nepravdu. Stanovíme-li, že *a* je pravda a *b* nepravda, jak to udělá Wittgenstein ve svém *Tractatu*, pak uvedený obrázek zachycuje konjunkci $\mathtt{p} \land \mathtt{q}$. Hlavním pozitivem těchto nepříliš pohodlných pomůcek se tak zdá být především explicitní odkaz na principiální dvouhodnotovost, bipolaritu smysluplné věty, která ji odlišuje jednak od nevětných výrazů, označujících své významy (předměty) rigidně, jednak od tautologií a kontradikcí, jejichž významem je rovněž rigidně 1, nebo 0. Co se týče vyplývání, Wittgenstein říká toto:

> „Plyne-li *p* z *q*, mohu z *q* na *p* usoudit; odvodit *p* z *q*. Způsob úsudku je třeba vzít z vět samotných. Jen ony ho mohou ospravedlnit. „Úsudkové principy“, které mají – jako u Frega

[13] Wittgenstein [1922, § 5.13].
[14] Viz Wittgenstein [1922, § 5.1311].

> a Russella – sloužit k ospravedlnění úsudků, jsou nesmyslné, a byly by zbytečné.“[15]

Tím se vracíme k již zmíněnému Carrollovu příkladu, v němž s sebou přenesení tíhy platnosti nějakého úsudku, přechodu od A k B, na metaúroveň, v níž je tento přechod explicitně formulován, nese nekonečný regres. Wittgensteinovo řešení z *Tractatu* spočívá v tom, že tento vzestup – možnost smysluplné řeči o řeči – jednoduše zakáže. My takto radikální být nemůžeme a ve světle dříve řečeného ani nechceme. V další kapitole budeme proto dále studovat, jak lze sémantické vztahy mezi formulemi našeho jazyka explikovat a zdůvodňovat. Toto zdůvodnění ale bude jiného charakteru než to, o němž mluví Wittgenstein, neboť odvození věty B z věty A jistým schematickým způsobem nebudeme považovat za věcné nebo třeba kauzální zdůvodnění závislosti obou vět, ale za pouhé zdůvodnění heuristické. Bude nám představovat kanonický a garantovaný způsob, jak se o příslušném sémantickém vztahu obou vět, který již byl definován a v tomto smyslu i existoval předem, přesvědčit. Skutečným, absolutním důvodem existence vztahu vyplývání není a nemůže být nic jiného než námi předem navržená sémantika. Na rozdílnosti obou typů zdůvodnění, sémantického a epistemického, přitom spočívá myšlenka axiomatického založení nějaké vědy, jíž se budeme věnovat ve zbytku první části knihy.

[15] Wittgenstein [1922, § 5.132].

9

Axiomatizace

Již na základě běžné zkušenosti lze nahlédnout rozdíl mezi tvrzením, že je něco pravda, a mezi schopností to dokázat, tj. rozdíl

pravdy a důkazu.

Jestliže jsme nalezli někoho zavražděného, víme, že existuje jeho vrah, a můžeme mít podezření, že je tím vrahem pan X, jenž se v tu dobu kolem motal se zakrvaveným nožem. Naše schopnost toto podezření dokázat, a dospět pak u soudu k pozitivnímu rozsudku, je ale omezená, a i v případě, že soud vynese verdikt vinen, nestane se tím odsouzený vrahem. Tím je jen tehdy, když příslušný čin skutečně spáchal, o čemž budeme mít vždy jenom kusá a v jistém smyslu nepřímá svědectví. To, zda se věci nějak mají, a nějaká věta je tedy na základě toho, jak se mají, pravdivá, je nezávislé na možnostech našeho ověřování a na našich kognitivních schopnostech, což vysvětluje fenomén omylu, a tím i skutečného poznání. Bez omylu by o poznání totiž nebylo možné mluvit.

Podezřelá se však zdá být rovněž představa absolutní nezávislosti pravdivosti či světa na možnostech jejich kontroly, což vede k již zmíněným problémům ontologického platonismu s nepřeklenutelnou propastí mezi pravdivým světem poznání a pomíjivým světem smyslů. Viz již oddíl 1.1. K prostředkům, jak tuto propast překlenout, patří také zmíněná diferenciace pojmů, konkrétně zavedení rozdílu mezi smyslem a významem. Můžeme souhlasit s tím, že věty jako

(1) každé sudé číslo větší než dvě je součtem dvou prvočísel,

(2) ten a ten strom měl v tu a tu dobu tolik a tolik listí

mají jednoznačně určenou pravdivostní hodnotu, tj. význam, i když ji v případě věty (1) – tedy Goldbachovy domněnky – ještě nevíme a v případě věty (2) dost pravděpodobně nikdy vědět nebudeme. Na druhé straně to, že jsme ochotni uvedeným větám připsat pravdivost, souvisí s okolností, že jim rozumíme, známe jejich smysl neboli pravdivostní podmínky. V důsledku toho jsme s to posoudit, kdy lze nějaké svědectví či důkaz považovat za relevantní a kdy ne. Tím se příslušné věty liší třeba od tvrzení jako

(3) na špičku jehly se vejde 1000 andělů,

která právě proto, že neumožňují jakékoli – byť jen principiální – ověření (co ověřením nazýváme, ponechme ovšem dosti otevřené), nelze nazvat vůbec smysluplná. Smysl a význam stejně jako důkaz a pravdivost tak jdou v nějakém ohledu ruku v ruce, a to tak, že smysl udává prostor možností, v nichž lze význam vůbec hledat. V tomto ohledu nám např. definice tautologičnosti vymezila prostor, v jehož rámci lze tautologičnost ověřovat, např. tabulkovou metodou nebo metodou protipříkladu. Ty jsou na ní nezávislé právě proto, že můžeme použít jednu, a nikoli druhou, je ale nemístné tvrdit, že zde pojem logicky pravdivé formule existoval dávno předtím, než jsme příslušnou definici podali. Stejně tak je pravdivost či nepravdivost Goldbachovy domněnky nezávislá na tom, zda jsme podali její důkaz, či nikoli a také na jakémkoli konkrétním důkazu, který bude podán, není však nezávislá na pojmu prvočíselnosti, konstrukci číselné řady $1, 2, 3, \ldots$, prvotním ohodnocení elementárních vět typu $2 + 2 = 4$ či $3 \times 7 = 2$ a Tarského sémantice komplexních vět, z nichž jednoznačně vyplývá, že:

> buď pro každé sudé číslo větší než dvě platí, že je součtem dvou prvočísel, nebo existuje takové sudé číslo větší než dvě, které součtem dvou prvočísel není, *tertium non datur.*

Je-li nám toto jasné, nestojí nic v cestě tomu, abychom rozlišovali mezi

definicí pravdy a kritériem pravdy,

tedy tím, které věty jsou pravdivé, a tím, jak to ověřujeme. Definice tautologičnosti je takto jedna věc, tabulková metoda jejího ověření věc druhá. Tento rozdíl bude zvláště výrazně podtržen v případě logiky predikátů, u níž s ohledem na nekonečné množství interpretací nebude dávat metoda jejich postupného výčtu praktický smysl, a kanonickým nástrojem se tak stane metoda protipříkladu. Ani ta ale nebude v obecnosti s to rozhodnout, zda daná formule tautologií je, či není.

9.1 Axiomaticko-deduktivní metoda

Dokazujeme-li nějakou větu, dokazujeme vlastně, že je tato věta pravdivá. V čem může takový důkaz spočívat? V prvním, přímějším smyslu bude její pravdivost plynout z toho, že se svět má tak, jak věta tvrdí. Při soudním řízení např. svědek doloží svá slova tím, že ukáže mateřské znaménko. Další možnost je nepřímá, totiž že svá tvrzení opře o jiná, která soud uznává nebo uznal již za nepochybná. Tento způsob zdůvodnění je pro svou flexibilitu – nezávislost na přímých demonstracích – podstatně častější, a můžeme tedy spolu s Brandomem tvrdit, že je vlastně znakem lidské racionality: zvířata neumí zdůvodňovat, jejich svět není inferenčně artikulován, pojmy – lze-li o nich vůbec hovořit – nejsou provázány. V Hegelově filosofii je, jak známo, tentýž postřeh zachycen tezí o bytostně prostředkované povaze poznání, kdy tímto prostředníkem je typicky jazyk sám, specificky pak jisté inference, jazykové přechody dále mediované jistými úsudkovými schématy.

Tradičně je na obou typech zdůvodnění – demonstrativním a diskurzivním – založena tzv. *axiomaticko-deduktivní koncepce* vědy. Podle ní spočívá každé poznání hodné toho jména na:

(1) elementárních, dále nerozložitelných pojmech,

(2) axiomech, která vyjadřují evidentní vztahy těchto pojmů,

(3) odvozovacích pravidlech, z nichž se od axiomů dospívá k teorémům.

Teorém je přitom typ věty, jejíž pravdivost byla zdůvodněna převedením na věty jiné. *Axiom* je typ pravdivé věty, u níž je taková převeditelnost nemožná a není jí ani zapotřebí, neboť pravdivost axiomu je v nějakém smyslu sebeevidentní. Aristotelés, jenž je autorem této koncepce, označuje metodu zdůvodnění prvních premis jako *epagogickou*, induktivní, zatímco u teorémů hovoří o *apagógé*, deduktivním zdůvodnění.[1] Otázka, zda musí existovat jakési první premisy, z nichž lze odvodit všechno vědění, nemluvě o třídě odvozovacích pravidel, která k tomu slouží a která musí být také sebeevidentní, aby měl celý podnik smysl, je samozřejmě kritická. Eukleidovská geometrie, která se zdála být prototypem metody aristotelského tvaru, např. postrádala právě přehlednou sadu usuzovacích pravidel, což platilo ještě pro její renovaci z přelomu devatenáctého a dvacátého století. Hilbert, jenž byl jejím autorem, udělal alespoň pořádek v původních axiomech a vědomě škrtl odkaz k evidenci.[2] Jedním

[1] Srov. k tomu diskusi in: von Fritz [1971].

[2] Hilbert [1899, § 1].

z důvodů pro tyto kroky byl objev koherence neeukleidovských geometrií a jejich uplatnění ve fyzice, díky nimž se volání po přímém a zcela nepochybném zdůvodnění platnosti těch či oněch geometrií ukázalo jako chimérické.

Od Hilbertovy doby byl také psychologický odkaz k *evidenci* pro svoji nespolehlivost postupně nahrazen odkazem k *mechanickému* zvládnutí příslušných axiomů a pravidel. Tato mechaničnost byla dále konkretizována jako zpracovatelnost *Turingovým strojem* coby jednoduchým počítačem, resp. jeho teoretickým schématem. Axiomy jsou čistě konvenčně zvolené věty, jejichž vztah k zobrazované zkušenosti je v oficiální rovině ponechán nevysvětlen. Od Aristotela pochází každopádně užitý pojem deduktivního nebo přímého důkazu.

`9.1.1 Vysvětlení (Deduktivní důkaz):` *Přímým neboli deduktivním důkazem věty F z třídy S pravdivých vět je posloupnost $F_1, F_2, \ldots, F_n$ vět taková, že:*

(1) každý člen je buďto větou z S, nebo na něj bylo usouzeno z vět předchozích pomocí některého z úsudkových pravidel nějaké kanonické třídy,

(2) poslední člen $F_n = F$.

Podobnost s dřívější definicí konstrukce (3.5.4) není čistě náhodná. I zde se jedná o linearizaci určitého vztahu, tentokráte mezi pravdivými větami a větou, která z nich v nějakém širším smyslu vyplývá. Mimořádná tíha celého deduktivního procesu leží zjevně na uvedených pravidlech, a tudíž i na syntaxi příslušných vět, neboť pravidla, mají-li být k čemu, musí mít schematický tvar, tj. věty v nich musí být zastoupeny co do formy, nikoli samy o sobě. To ukazuje, proč je axiomatická metoda podmíněna objevem formální logiky a proč muselo její podstatné rozšíření do jiných disciplín čekat až na logiku Fregovu. Logika Aristotelova totiž pro relativní jednoduchost většině z těchto disciplín, zvláště pak matematice, nevyhovovala. Kromě excentrických pokusů, jakým byla např. Spinozova etika,[3] a s problematickou výjimkou Eukleida,[4] neslavila axiomatická metoda až do druhé poloviny devatenáctého století výrazné úspěchy.

Úspěchem v axiomatické oblasti lze přitom na teoretické rovině nazvat takové zvládnutí nějaké disciplíny, které ze skupiny jejích pravdivých vět, axiomů, dovolí pomocí daných pravidel odvodit neboli dokázat všechny ostatní pravdivé věty a jenom je. Tomuto zvládnutí říkáme *axiomatizace*. Pojem pravdivosti je v něm samozřejmě předpokládán jako

[3] Spinoza [1677*a*].
[4] Eukleidés [1883–1916].

předem daný. S ohledem na netrivialitu celého podniku se dále požaduje následující:

(1) skupina axiomů je v nějakém smyslu přehledná, např. mechanicky testovatelná,

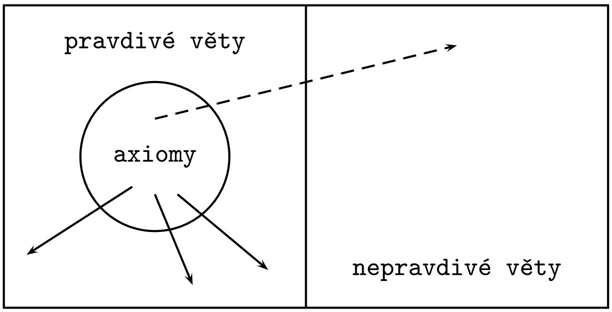
(2) totéž platí pro užitá pravidla.

Pokud by neplatil předpoklad (1), mohli bychom za axiomy vzít jednoduše všechny pravdivé věty oboru a celý projekt by tím ztratil smysl. Pokud by neplatil předpoklad (2), nebyli bychom obecně schopni kontrolovat, zda něco je nebo není důkazem, čímž by se opět narušil původní cíl. Od úspěšné axiomatizace se přitom očekává celkové pokrytí axiomatizovaného oboru, což lze rozdělit do dvou podmínek:

(1) axiomatický systém pokrývá pouze pravdivé věty, tj. nedovoluje odvodit z axiomů věty nepravdivé,

(2) axiomatický systém pokrývá všechny pravdivé věty, tj. ke každé z nich se lze z axiomů dostat postupnou aplikací pravidel.

Obě situace jsou zachyceny na obrázku 9.1. První podmínka, které se říká *korektnost* axiomatizace, je v podstatě *conditio sine qua non*, neboť bez ní se stává příslušný deduktivní systém nespolehlivý. Druhá podmínka, jíž



Obrázek 9.1: Axiomatizace

se říká *úplnost* axiomatizace, je žádoucí, ale relativně vzácná, jak ukázal vývoj logiky a formálních metod v první polovině dvacátého století. – Zpočátku se přitom zdálo, že nová, na matematice modelovaná metoda postupuje velmi slibně. Hilbert provedl axiomatizaci geometrie v rámci spisu:

(1899) *Grundlagen der Geometrie.*[5]

Řádnou axiomatizaci geometrie následovala Zermelova axiomatizace teorie množin, podaná v článku:

(1908) „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I“.[6]

Dále už se však začaly vyskytovat pochybnosti, zda se jedná o úspěchy ve výše uvedeném smyslu. Presburger sice nejprve dokázal roku 1929 úplnost axiomatizace aritmetiky omezené na věty týkající se sčítání,[7] o rok později ale Gödel ohlásil výsledek, jenž znamenal přelom jak ve vývoji matematické logiky, tak filosofie matematiky obecně. Dokázal, že každá korektní axiomatizace aritmetiky, která má jistou rozumnou výrazovou sílu (kromě sčítání obsahuje mj. i násobení) a splňuje výše uvedené podmínky na efektivní popsatelnost axiomů a úsudkových pravidel, je nutně neúplná. Tento výsledek publikoval v rámci statě:

(1931) „Über formal unentscheidbare Sätze der ‚Principia Mathematica‘ und verwandter Systeme I“.[8]

Právě díky Gödelovu důkazu vznikla jasná potřeba rozlišení syntaxe, resp. axiomatického systému, a sémantiky coby jeho interpretace. Teprve vzhledem k tomuto rozdílu lze totiž formulovat příslušný výsledek:

> ke každému (přehlednému) axiomatickému systému aritmetiky existuje pravdivá věta aritmetiky, která v tomto systému není dokazatelná.

Jádro tvrzení spočívá v konstrukci aritmetické věty, která v nějakém smyslu říká:

> já jsem nedokazatelná.

Pokud je totiž axiomatizace korektní, tj. umožňuje jen dedukci pravdivých vět, nemůže být příslušná věta pod hrozbou sporu dokazatelná, a tím se stává pravdivou, což jsme potřebovali. Z hlediska tradiční filosofie matematiky bývá tento výsledek interpretován často jako selhání Fregova logicistického a Hilbertova axiomatického projektu, se závěrem, že oprávněný byl původní přístup Kantův: aritmetika není redukovatelná na čistě symbolické metody logiky, neboť ke zdůvodnění jejích pravd (např.

[5] Hilbert [1899].
[6] Zermelo [1908].
[7] Presburger [1929].
[8] Gödel [1931].

právě oné nedokazatelné, byť pravdivé věty) je zapotřebí jiných zdrojů poznání, a tudíž je *syntetická a priori.*

Tento závěr je samozřejmě diskutabilní, je ovšem třeba říci, že reálných úspěchů v axiomatizaci dosáhla moderní logika především a právě ve vztahu k sobě samé, což by nemuselo být překvapivé, neboť si své zákony sama udává. I zde ale nejsou tyto úspěchy zcela jednoznačné, jak uvidíme později, již v souvislosti s logikou predikátů a otázkou rozhodnutelnosti.[9] Axiomatizací logiky přitom chápeme axiomatizaci pojmu logické pravdy, tj. vytvoření systému, v němž jsou mechanicky odvoditelné všechny tautologie a jenom ony. Ten předvedl vlastně už Frege ve svém *Pojmovém písmu*, a to jak ve vztahu k logice výroků, tak k logice predikátů. Jeho systém ovšem obsahuje také predikátovou logiku vyšších řádů, která – v důsledku Gödelových vět – rovněž úplně axiomatizovatelná není. Důkaz toho, že je úplná axiomatizace logiky výroků, předvedl přitom Post v článku:

(1921) „Introduction to a general theory of elementary propositions“.[10]

Úplnost predikátové logiky prvního řádu dokázal Gödel rok před svým již zmíněným fatálním objevem neúplnosti aritmetiky ve stati:

(1930) „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls“.[11]

My se teď budeme podrobně věnovat axiomatizaci výrokové logiky a následným důkazům její korektnosti a úplnosti. Ty nám umožní alternativní charakterizaci logické pravdivosti. Místo původního, sémantického a ne nutně efektivního (mechanického) vymezení logicky pravdivých formulí jako formulí pravdivých ve všech interpretacích dostaneme jejich schematičtější, čistě syntaktické vymezení jako těch a pouze těch formulí, které lze odvodit z daných axiomů. Jelikož se na příslušný axiomatický systém lze dívat jako na jistý generátor symbolů, říká se mu v duchu Leibnizovy symbolické ideje také *kalkul* nebo *počet.*

9.2 Důkaz a odvození

Když jsme definovali vyplývání v rámci `KVL`, snažili jsme se ukázat, že může sloužit jako normativ pro určitý výsek argumentační praxe v přirozeném jazyce. Předložili jsme nějaký argument a považovali jsme ho za

[9] Viz zvláště oddíl 15.4.
[10] Post [1921].
[11] Gödel [1930].

platný tehdy, když formalizace jeho závěru vyplývala z formalizace jeho předpokladů. Takovým platným argumentem je například tento:

viníkem je Petr nebo Pavel;
je-li viníkem Petr, pak Pavel nebyl v 11 hodin na místě zločinu;
je-li viníkem Pavel, pak je jasný motiv zločinu
―――――――――――――――――――――――――――
byl-li Pavel v 11 hodin na místě zločinu, pak je jasný motiv zločinu.

Ospravedlnění tohoto argumentu bylo založeno na jeho formalizaci a aplikování tabulkové metody či metody hledání protipříkladů. Jak bychom však postupovali, kdybychom metody výrokové logiky neznali? Lze jeho platnost jednoduše nahlédnout, nebo je třeba předložit jemnější argumentaci? Pokusme se nyní doplnit úsudkové kroky tak, aby zprostředkovaly cestu od předpokladů k závěru a jejich závislost se stala jasnější:

(1) Předpokládáme, že je-li viníkem Petr, pak Pavel nebyl v 11 hodin na místě zločinu.

(2) Tudíž byl-li Pavel v 11 hodin na místě zločinu, pak Petr viníkem není.

(3) Dále předpokládáme, že viníkem je Petr nebo Pavel.

(4) Tudíž není-li viníkem Petr, je jím Pavel.

(5) Zvážíme-li věty (2) a (4), vidíme, že pokud byl Pavel v 11 hodin na místě zločinu, pak je Pavel viníkem.

(6) Naším posledním předpokladem je, že pokud je Pavel viníkem, pak je jasný motiv zločinu.

(7) Tudíž z vět (5) a (6) získáme závěr, že pokud byl Pavel v 11 hodin na místě zločinu, pak je jasný motiv zločinu.

V tomto argumentu, který je rozvinutím předchozího, jsme použili některé jednoduché přechody, které nezávisí na obsahu, ale pouze na formě daných tvrzení. Nabízí se tedy formalizace tohoto postupu. Do pravého sloupce budeme zapisovat údaje, na jejichž základě šlo danou formuli přidat:

(1)	$\mathtt{p} \to \neg\mathtt{r}$	předpoklad,
(2)	$\mathtt{r} \to \neg\mathtt{p}$	(1),
(3)	$\mathtt{p} \lor \mathtt{q}$	předpoklad,
(4)	$\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}$	(3),

(5) $\mathtt{r} \to \mathtt{q}$ (2), (4),

(6) $\mathtt{q} \to \mathtt{s}$ předpoklad,

(7) $\mathtt{r} \to \mathtt{s}$ (5), (6).

Získali jsme jakousi posloupnost formulí, kde každý člen je buď předpokladem (tj. formulí, o které již předpokládáme, že je pravdivá), nebo se jedná o formuli, kterou jsem získali z formulí předchozích pomocí nějakého jednoduchého argumentačního pravidla. Převedli jsme tak platnost původního argumentačního schématu

$$\begin{array}{l} \vartheta \vee \chi, \\ \vartheta \to \neg\gamma, \\ \underline{\chi \to \lambda} \\ \gamma \to \lambda \end{array}$$

na platnost schémat

(a) $\dfrac{\vartheta \to \neg\chi}{\chi \to \neg\vartheta},$

(b) $\dfrac{\vartheta \vee \chi}{\neg\vartheta \to \chi},$

(c) $\begin{array}{l} \vartheta \to \chi, \\ \underline{\chi \to \gamma} \\ \vartheta \to \gamma, \end{array}$

která pokládáme za jednodušší. Zanedlouho budeme všechna argumentační schémata podobným způsobem redukovat na jediné základní.

Podíváme-li se znovu na náš příklad, mohli bychom také říci, že daný závěr jsme pomocí uvedených pravidel z původní množiny „dokázali“ či „odvodili“. Těmto výrazům však dáme velice brzy zcela přesný význam (každý z nich bude znamenat něco trochu jiného). Zatím se pouze snažíme motivovat následující technický výklad. Ten začneme přesným vymezením toho, co rozumíme argumentačním schématem.

`9.2.1 Definice (Úsudkové pravidlo):` *Úsudkové či odvozovací pravidlo* `KVL` *je výraz tvaru*

$$\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n / \chi,$$

kde $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \chi$ *jsou formule* `KVL` *a symbol „/“ značí přechod od levé strany k pravé. Uvedený zápis je fakticky úspornější verzí dosavadního vertikálního způsobu*

$$\frac{\begin{array}{l}\vartheta_1,\\ \vdots\\ \vartheta_n\end{array}}{\chi,}$$

který budeme i nadále využívat jako alternativu. Řekneme, že uvedené odvozovací pravidlo je logicky korektní, když platí $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n \vDash \chi$.

Úsudková pravidla bychom pochopitelně mohli zavést i v jiných jazycích, než je jazyk KVL. Obecně lze říci, že sada nějakých pevně daných vět, kterým říkáme axiomy, plus sada odvozovacích pravidel vytvářejí dohromady axiomatický systém neboli *logický kalkul*.

Pusťme se nyní do axiomatizace logické pravdy v rámci jazyka KVL. Axiomatizace logiky je specifická problematika, protože logika, jak jsme již řekli, není jednou z mnoha vedle sebe ležících disciplín, ale je to disciplína základní, která tvoří podklad nebo také součást všech ostatních. Její axiomatizace je tedy v jistém smyslu předpokládána v jakékoli axiomatizaci. Běžná praxe vypadá tak, že při axiomatizaci nějaké (většinou matematické) oblasti máme k dispozici logiku jako již axiomatizovaný celek, k němuž přidáme další axiomy, které jsou pro daný obor specifické. V důsledku toho někdy vzniká dojem, že axiomatický systém sestává pouze z axiomů a na úsudková pravidla se zapomíná, neboť logika, tj. její pravidla i axiomy, nejsou – pro svoji všudypřítomnost – často při axiomatizaci explicitně zmíněny, ale jsou v ní pouze implicitně používány. Postup bude tedy následující:

(1) Nejprve axiomatizujeme logickou pravdu, s čímž bude také souviset pojem důkazu.

(2) Dále obecně zformulujeme možnost přidávat k dané logice podle potřeby množiny dalších předpokladů, s čímž bude souviset pojem odvození.

(3) Nakonec ukážeme, že náš kalkul je v jistém smyslu vhodný též k axiomatizaci pojmu vyplývání.

Při formulování axiomatického systému můžeme preferovat jedno ze dvou různých kritérií úspornosti. Jednak se můžeme snažit o úspornost našeho základního slovníku, o úspornost množiny základních principů – axiomů a odvozovacích pravidel. Nebo se můžeme snažit o úspornost důkazů a odvození a o jednoduchost práce v daném systému. Tato kritéria úspornosti jdou do jisté míry proti sobě. Čím více axiomů a odvozovacích pravidel máme k dispozici, tím se nám odvozuje pohodlněji a důkazy jsou kratší. Vhodné je zřejmě hledat rovnováhu mezi oběma přístupy. Jelikož náš systém nebudujeme jako nástroj pro další odvozovací práci, spíše nás zajímá z teoretického hlediska axiomatizace jako taková, budeme klást větší důraz na kritérium první.

Protože se tedy snažíme minimalizovat množinu základních výrazů, budeme dále úmyslně pracovat pouze s implikací a negací jako s jedinými základními spojkami. Sémantická vyjadřovací síla jazyka se nám tím nesníží, protože tyto spojky tvoří adekvátní množinu. Před dalším postupem ovšem zavedeme konvenci, která nám dovolí příležitostně využívat i další spojky, s nimiž jsme dosud pracovali.

`9.2.2 Konvence (Spojkové zkratky):` *Konjunkci, disjunkci a ekvivalenci chápeme nadále jako zkratky, a to:*

$$\vartheta \wedge \chi \qquad \textit{za} \qquad \neg(\vartheta \to \neg\chi),$$

$$\vartheta \vee \chi \qquad \textit{za} \qquad \neg\vartheta \to \chi,$$

$$\vartheta \leftrightarrow \chi \qquad \textit{za} \qquad (\vartheta \to \chi) \wedge (\chi \to \vartheta).$$

Tato konvence je sémanticky ospravedlněna tím, že formule na levé straně je vždy logicky ekvivalentní formuli na pravé straně. Přistupme tedy k formulaci kalkulu pro KVL, který budeme označovat jako *hilbertovský*. Toto označení je trochu nešťastné, protože obvykle bývá jako hilbertovský nazýván nikoli jeden konkrétní kalkul, ale celý typ kalkulů. Existují ještě jiné typy, k nimž se vyjádříme později. Nicméně v kontextu této kapitoly se jiný hilbertovský kalkul nevyskytne, takže si tuto nepřesnost můžeme dovolit.

Zavedený kalkul se bude skládat ze tří axiomatických schémat a jednoho odvozovacího pravidla. Volba právě těchto základních principů bude ospravedlněna až základním výsledkem této kapitoly, tj. větou o úplnosti.

`9.2.3 Definice (Hilbertovský kalkul):` HK *pro* KVL, *případně* HK, *sestává ze tří axiomatických schémat:*

(H1) $\vartheta \to (\chi \to \vartheta)$,

(H2) $(\vartheta \to (\chi \to \gamma)) \to ((\vartheta \to \chi) \to (\vartheta \to \gamma))$,

(H3) $(\neg\chi \to \neg\vartheta) \to (\vartheta \to \chi)$.

Jediným odvozovacím pravidlem je modus ponens:

*(*MP*)* $\vartheta, \vartheta \to \chi / \chi$.

Skutečnost, že se zde nejedná o axiomy, ale o axiomatická schémata, tj. tvary formulí, nikoli formule konkrétní, znamená, že náš kalkul nemá fakticky tři, ale nekonečně mnoho axiomů. Axiomem $(H1)$ je např. formule

$$(\mathtt{p} \to \neg\mathtt{q}) \to (\neg\mathtt{r} \to (\mathtt{p} \to \neg\mathtt{q})),$$

která vznikne z uvedeného schématu tím, že za ϑ dosadíme formuli $\mathtt{p} \to \neg\mathtt{q}$ a za χ dosadíme formuli $\neg\mathtt{r}$. Není přitom nikde řečeno, že za ϑ a χ musíme dosazovat různé formule. Tedy $\mathtt{p} \to (\mathtt{p} \to \mathtt{p})$ je také axiomem ($H1$), či jak by bylo lépe říkat, instancí schématu ($H1$). Ačkoli má takto každé schéma nekonečně mnoho instancí, tyto instance jsou však schématem jednoduše uchopeny, a tvoří tedy přehlednou skupinu. Ekvivalentní možností by bylo vzít místo schémat jednotlivé formule – za ϑ, χ, γ bychom dosadili proměnné $\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}$ – a doplnit jedno odvozovací pravidlo, tzv. pravidlo substituce

(S) $\vartheta/\vartheta[\mathtt{p}|\chi]$,

kde $\mathtt{p}$ představuje libovolnou proměnnou, a formuli $\vartheta[\mathtt{p}|\chi]$ získáme tak, že dosadíme v rámci ϑ za všechny výskyty $\mathtt{p}$ formuli χ. Definujeme teď důkaz jako posloupnost formulí, mezi nimiž jsou pouze axiomy a formule z nich získané aplikací jistých pravidel. Zápis

$$\xi_1, \ldots, \xi_n = \vartheta,$$

který budeme často používat, znamená, že ϑ je posledním členem posloupnosti $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

`9.2.4 Definice (Důkaz):` *Důkazem formule ϑ v* HK *je posloupnost formulí $\xi_1, \ldots, \xi_n = \vartheta$, jejíž každý člen ξ_i ($1 \leq i \leq n$) je instance některého z axiomů ($H1$–$H3$), nebo vznikl z předchozích členů aplikací pravidla (*MP*), tj. existují indexy $k, l \leq i$ tak, že $\xi_k = \xi_l \to \xi_i$. O formuli ϑ řekneme, že je dokazatelná (značíme $\vdash \vartheta$), když existuje její důkaz.*

Dokazovat v kalkulu HK je obtížné, protože důkazy bývají velice dlouhé a nepřehledné. To se dá očekávat již z definice HK, protože jediným odvozovacím pravidlem je (MP). Jeho povahou je dáno, že chceme-li ho použít a odvodit nějakou formuli, musí před ní být jiná formule, která je delší. V důkazech se proto objevují velmi dlouhé formule. Ukážeme si příklad relativně krátkého důkazu.

`Příklad 9.2.5:` Předvedeme důkaz formule $\mathtt{p} \to \mathtt{p}$:

(1) $\mathtt{p} \to ((\mathtt{p} \to \mathtt{p}) \to \mathtt{p})$ ($H1$),

(2) $(\mathtt{p} \to ((\mathtt{p} \to \mathtt{p}) \to \mathtt{p})) \to ((\mathtt{p} \to (\mathtt{p} \to \mathtt{p})) \to (\mathtt{p} \to \mathtt{p}))$ ($H2$),

(3) $(\mathtt{p} \to (\mathtt{p} \to \mathtt{p})) \to (\mathtt{p} \to \mathtt{p})$ (1), (2), (MP),

(4) $\mathtt{p} \to (\mathtt{p} \to \mathtt{p})$ ($H1$),

(5) $\mathtt{p} \to \mathtt{p}$ (3), (4), (MP).

Uvedená posloupnost formulí je podle definice důkazem a zůstala by důkazem, i kdyby na místě proměnné `p` byla libovolná jiná formule. Tedy pro každou formuli ϑ platí, že $\vdash \vartheta \to \vartheta$.

První věta, kterou o `HK` dokážeme, tvrdí, že tento kalkul není vadný v tom smyslu, že by umožnil dokázat něco, co nechceme. To však ještě nebude znamenat, že v `HK` lze dokázat vše, co chceme, aby dokazatelné bylo. Na tento druhý výsledek si budeme muset ještě chvíli počkat.

`9.2.6 Věta (O korektnosti):` *Každá dokazatelná formule je tautologie.*

`Důkaz:` Důkaz má dva kroky. Přesněji bychom mohli říci, že postupujeme indukcí podle délky důkazu dané dokazatelné formule a zdůvodňujeme, že každý člen tohoto důkazu – tedy i ten poslední – je tautologií. (i) Nejprve je třeba zdůvodnit, že každý axiom je tautologie. (ii) Poté musíme dokázat, že (`MP`) přenáší tautologičnost v tom smyslu, že jsou-li formule ϑ a $\vartheta \to \chi$ tautologie, pak je tautologií též formule χ. Tautologičnost axiomů lze rychle ověřit metodou protipříkladu (v principu ovšem tabulkou, která pak symbolizuje jakýsi přímý – epagogický – postup). Druhou část již máme dokázanou ve větě 6.3.7. `QED`

Je nepříjemné, že definicí 9.2.4 se pro nás slovo „důkaz“ stalo dvojznačné. Jednou se vztahuje na přesně vymezený pojem související s `HK`, jindy je to slovo označující postup na úrovni metajazyka, postup, který zdůvodňuje platnost nějaké věty, např. předchozí věty o korektnosti. S touto korespondencí a zároveň odlišností různých úrovní se však potýkáme celou dobu.

Nyní zavedeme pojem odvození z dané množiny formulí. Tuto množinu si můžeme představovat jako sadu speciálních mimologických axiomů nějaké mimologické oblasti. Její povahu v logice přirozeně nijak nespecifikujeme, tj. necháváme zcela cíleně otevřenou možnost zvolit si libovolnou množinu formulí.

`9.2.7 Definice (Odvození):` *Odvozením formule ϑ z množiny formulí T je posloupnost formulí $\xi_1, \ldots, \xi_n = \vartheta$, jejíž každý člen ξ_i $(1 \leq i \leq n)$ je prvek množiny T nebo je to instance některého z axiomů ($H1$–$H3$) nebo vznikl z předchozích členů aplikací pravidla (`MP`), tj. existují indexy $k, l \leq i$ tak, že $\xi_k = \xi_l \to \xi_i$. O formuli ϑ řekneme, že je odvoditelná z množiny T (značíme $T \vdash \vartheta$), když existuje její odvození z této množiny.*

Vidíme, že se definice odvození prakticky doslovně kryje s definicí důkazu, s jediným rozdílem zapojení mimologické množiny T. Pojem sám ilustrujeme na příkladě.

`Příklad 9.2.8:` Dokážeme, že $\mathtt{p} \to \mathtt{q}, \mathtt{q} \to \mathtt{r} \vdash \mathtt{p} \to \mathtt{r}$:

(1) $\mathtt{q} \to \mathtt{r}$ předpoklad,

(2) $(\mathtt{q} \to \mathtt{r}) \to (\mathtt{p} \to (\mathtt{q} \to \mathtt{r}))$ $(H1)$

(3) $\mathtt{p} \to (\mathtt{q} \to \mathtt{r})$ (1), (2), (MP),

(4) $(\mathtt{p} \to (\mathtt{q} \to \mathtt{r})) \to ((\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \to (\mathtt{p} \to \mathtt{r}))$ $(H2)$,

(5) $(\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \to (\mathtt{p} \to \mathtt{r})$ (3), (4), (MP),

(6) $\mathtt{p} \to \mathtt{q}$ předpoklad,

(7) $\mathtt{p} \to \mathtt{r}$ (5), (6), (MP).

Opět by na místě proměnných mohly být libovolné formule. Platí tedy obecně $\vartheta \to \chi, \chi \to \gamma \vdash \vartheta \to \gamma$.

Triviálním důsledkem naší definice je následující věta, kterou fakticky není třeba ani dokazovat. Pro pořádek tak ale učiníme.

9.2.9 Věta (O rozšíření): *Jestliže $T \vdash \vartheta$, pak $T^* \vdash \vartheta$, kde T^* je libovolné rozšíření (nadmnožina) množiny T.*

Důkaz: Stačí velmi jednoduchá úvaha. To, že $T \vdash \vartheta$, znamená, že existuje posloupnost formulí $\xi_1, \ldots, \xi_n = \vartheta$, jejíž každý člen ξ_i je prvek množiny T nebo je to instance některého z axiomů ($H1$–$H3$) nebo vznikl z předchozích členů aplikací pravidla (MP). Jelikož T^* je rozšíření T, platí pro tutéž posloupnost $\xi_1, \ldots, \xi_n = \vartheta$, že je každý z jejích členů prvkem množiny T^* nebo je to instance některého z axiomů ($H1$–$H3$) nebo vznikl z předchozích členů aplikací pravidla (MP). Tudíž $T^* \vdash \vartheta$. QED

Před vlastním důkazem věty o úplnosti, jímž uzavřeme část knihy věnovanou klasické logice výroků, je třeba předvést ještě významný metalogický výsledek týkající se HK, totiž větu o dedukci. Té bude věnován další oddíl.

9.3 Věta o dedukci

Nyní musíme pečlivě odlišit dvě věci. Jednou z nich je podat důkaz nějaké formule v rámci HK. Druhou je dokázat, že tato formule je v HK dokazatelná. Samozřejmě je pravda, že podáme-li důkaz formule, zdůvodnili jsme tím zároveň, že tato formule je dokazatelná. Avšak, jak jsme již uvedli, důkazy v HK bývají velice dlouhé a nepřehledné. Chceme-li poznat nějaké vlastnosti kalkulu, mohlo by nás zajímat, jestli neexistuje úspornější způsob, jak zdůvodnit, že daný důkaz existuje, i když ho zrovna nemáme k dispozici. Takový úsporný způsob většinou existuje, ale abychom ho mohli aplikovat, budeme muset dokázat tzv. větu o dedukci. K tomu potřebujeme následující pomocné tvrzení.

`9.3.1 Věta:` *Pro libovolnou množinu formulí T a formule ϑ, χ, γ platí následující:*

(a) jestliže je χ axiom, pak $T \vdash \vartheta \to \chi$,

(b) jestliže je χ z T, pak $T \vdash \vartheta \to \chi$,

(c) jestliže platí $T \vdash \vartheta \to (\chi \to \gamma)$ a $T \vdash \vartheta \to \chi$, pak $T \vdash \vartheta \to \gamma$.

`Důkaz:` (a) Je-li χ axiom, pak posloupnost $\chi, \chi \to (\vartheta \to \chi), \vartheta \to \chi$ je důkaz formule $\vartheta \to \chi$, tedy i její odvození z T podle věty 9.2.9. (b) Je-li χ z T, pak tatáž posloupnost $\chi, \chi \to (\vartheta \to \chi), \vartheta \to \chi$ je odvozením dané formule z T. (c) Předpokládejme, že $T \vdash \vartheta \to (\chi \to \gamma)$ a $T \vdash \vartheta \to \chi$, tj. existují odvození $\xi_1, \ldots, \xi_m = \vartheta \to (\chi \to \gamma)$ a $\zeta_1, \ldots, \zeta_n = \vartheta \to \chi$ z množiny T. Konstruujeme nové odvození takto:

$$\xi_1, \ldots, \xi_m = \vartheta \to (\chi \to \gamma),$$

$$(\vartheta \to (\chi \to \gamma)) \to ((\vartheta \to \chi) \to (\vartheta \to \gamma)),$$

$$(\vartheta \to \chi) \to (\vartheta \to \gamma),$$

$$\zeta_1, \ldots, \zeta_n = \vartheta \to \chi,$$

$$\vartheta \to \gamma.$$

Za odvození $\xi_1, \ldots, \xi_m$ jsme připsali axiom ($H2$). Na něj a formuli ξ_m jsme aplikovali (`MP`). Na výsledek tohoto odvození a formuli ζ_n, kterou jsme získali připsáním odvození $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, jsme znovu aplikovali (`MP`). Celkově jsme získali odvození formule $\vartheta \to \gamma$ z množiny T. `QED`

`9.3.2 Věta (O dedukci):` *Pro libovolnou množinu formulí T a formule ϑ, χ platí následující tvrzení:*

$$T, \vartheta \vdash \chi \text{ právě tehdy, když } T \vdash \vartheta \to \chi.$$

`Důkaz:` Nejprve jednodušší směr ($\Leftarrow$). Předpokládejme, že $T \vdash \vartheta \to \chi$. To znamená, že existuje posloupnost $\xi_1, \ldots, \xi_n = \vartheta \to \chi$, která je odvozením z množiny T. Pak posloupnost $\xi_1, \ldots, \xi_n, \vartheta, \chi$ je odvozením formule χ z množiny T, ϑ. Nyní směr ($\Rightarrow$). Předpokládejme, že $T, \vartheta \vdash \chi$. Existuje odvození $\xi_1, \ldots, \xi_n = \chi$ formule χ z množiny T, ϑ. Dokážeme, že pro každé i takové, že $1 \leq i \leq n$, platí tvrzení:

$$T \vdash \vartheta \to \xi_i.$$

Protože $\xi_n = \chi$, bude tím pro $i = n$ dokázána celá věta. Postupujeme indukcí podle i. (i) V prvním kroku dokazujeme tvrzení pro $i = 1$, tj. dokazujeme, že $T \vdash \vartheta \rightarrow \xi_1$. Protože ξ_1 je prvním členem nějakého odvození z množiny T, ϑ, mohou nastat tři možnosti:

(α) formule ξ_1 je axiom,

(β) formule ξ_1 je prvek množiny T,

(γ) formule ξ_1 je totožná s formulí ϑ.

(α) Pokud je ξ_1 axiom, plyne dokazované tvrzení z bodu (a) věty 9.3.1. (β) Pokud je ξ_1 z T, můžeme aplikovat bod (b) téže věty. (γ) Pokud $\xi_1 = \vartheta$, dokazujeme, že $T \vdash \vartheta \rightarrow \vartheta$. To však platí, protože platí $\vdash \vartheta \rightarrow \vartheta$ (jak bylo ukázáno v příkladě 9.2.5) a množinu předpokladů můžeme libovolně rozšiřovat (věta 9.2.9). Tím je zdůvodněna báze indukce. (ii) Nyní předpokládejme, že $i > 1$ a že dokazované tvrzení platí pro všechny menší indexy. Tedy pro každé j takové, že $1 \leq j < i$, platí $T \vdash \vartheta \rightarrow \xi_j$. Nyní existují čtyři možnosti toho, co může být formule ξ_i. První tři se shodují s těmi, které jsme již zvážili v bázi indukce. Přibývá možnost, že byla formule ξ_i odvozena pomocí pravidla (`MP`) z předchozích členů posloupnosti. Pak musí nastat tato situace:

(δ) existují indexy $k, l < i$ takové, že $\xi_k = \xi_l \rightarrow \xi_i$.

Induktivní předpoklad nám říká, že $T \vdash \vartheta \rightarrow \xi_l$ a $T \vdash \vartheta \rightarrow (\xi_l \rightarrow \xi_i)$. Podle bodu (c) věty 9.3.1 pak platí, že $T \vdash \vartheta \rightarrow \xi_i$. (iii) Tím je důkaz hotov. `QED`

Věta o dedukci je neocenitelným nástrojem „dokazování o dokazování“. Např. výše jsme uváděli důkaz formule $\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{p}$. Se znalostí věty o dedukci by nyní zdůvodnění dokazatelnosti této formule vypadalo takto:

`Příklad 9.3.3:` Z definice odvoditelnosti platí, že $\mathtt{p} \vdash \mathtt{p}$, tedy na základě věty o dedukci platí také $\vdash \mathtt{p} \rightarrow \mathtt{p}$. Zdůvodnili jsme tak, že formule $\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{p}$ je dokazatelná, aniž bychom našli její důkaz.

Tento konkrétní argument je přirozeně iluzorní, protože jsme v důkazu věty o dedukci již využili znalosti, že každá formule tvaru $\vartheta \rightarrow \vartheta$ je dokazatelná. Na smyslu úvahy to ale nic nemění. Již víme, že platí tranzitivita implikace následujícího tvaru:

$$\vartheta \rightarrow \chi, \chi \rightarrow \gamma \vdash \vartheta \rightarrow \gamma.$$

Dvojnásobnou aplikací věty o dedukci dostáváme, že také platí:

$$\vdash (\vartheta \rightarrow \chi) \rightarrow ((\chi \rightarrow \gamma) \rightarrow (\vartheta \rightarrow \gamma)).$$

A opět není třeba hledat důkaz v kalkulu pro jednotlivé instance tohoto schématu. Věta o dedukci nám zaručuje, že takový důkaz existuje, a to nám stačí, chceme-li tvrdit, že daná instance je dokazatelná. Ve zbytku oddílu dokažme prostřednictvím věty o dedukci několik dalších pomocných tvrzení. Začněme několika týkajícími se vlastností `HK`.

`9.3.4 Věta:` *Pro libovolnou množinu formulí T a formule ϑ, χ, γ platí následující tvrzení:*

(a) jestliže $T \vdash \vartheta$ a $T \vdash \vartheta \to \chi$, pak $T \vdash \chi$,

(b) jestliže $T \vdash \vartheta \to \chi$ a $T \vdash \chi \to \gamma$, pak $T \vdash \vartheta \to \gamma$.

`Důkaz:` (a) Předpokládejme, že $T \vdash \vartheta$ a $T \vdash \vartheta \to \chi$, tj. existují odvození

$$\xi_1, \ldots, \xi_m = \vartheta \qquad \text{a} \qquad \zeta_1, \ldots, \zeta_n = \vartheta \to \chi$$

z množiny T. Pak ale posloupnost formulí

$$\xi_1, \ldots, \xi_m, \zeta_1, \ldots, \zeta_n, \chi$$

je také odvození z T. Jeho poslední člen χ jsme získali aplikací (`MP`) na členy ϑ a $\vartheta \to \chi$. (b) Můžeme postupovat v těchto krocích:

(1)	$T \vdash \vartheta \to \chi$	předpoklad,
(2)	$T, \vartheta \vdash \chi$	(1), věta o dedukci,
(3)	$T, \vartheta \vdash \chi \to \gamma$	předpoklad, věta 9.2.9,
(4)	$T, \vartheta \vdash \gamma$	(2), (3), (a),
(5)	$T \vdash \vartheta \to \gamma$	(4), věta o dedukci.

Tím je tvrzení dokázáno. `QED`

Nyní uveďme několik konkrétních tvrzení o odvoditelnosti v `HK`, jednak pro další použití, jednak jako ilustraci toho, jak nám dříve dokázané věty usnadní konkrétní odvozování.

`9.3.5 Věta:` *Pro libovolné formule ϑ, χ, γ platí následující tvrzení:*

(a) $\vdash \neg\vartheta \to (\vartheta \to \chi)$,

(b) $\vdash \neg\neg\vartheta \to \vartheta$,

(c) $\vdash \vartheta \to \neg\neg\vartheta$,

(d) $\vdash (\vartheta \to \chi) \to (\neg\chi \to \neg\vartheta)$,

(e) $\vdash \vartheta \to (\neg\chi \to \neg(\vartheta \to \chi))$.

`Důkaz:`

(a) Postupně dostáváme:

(1) $\vdash \neg\vartheta \to (\neg\chi \to \neg\vartheta)$ $(H1)$,

(2) $\vdash (\neg\chi \to \neg\vartheta) \to (\vartheta \to \chi)$ $(H3)$,

(3) $\vdash \neg\vartheta \to (\vartheta \to \chi)$ (1), (2), věta 9.3.4 (b).

(b) Postupně dostáváme:

(1) $\vdash \neg\neg\vartheta \to (\neg\vartheta \to \neg\neg\neg\vartheta)$ (a),

(2) $\neg\neg\vartheta \vdash \neg\vartheta \to \neg\neg\neg\vartheta$ (1), věta o dedukci,

(3) $\neg\neg\vartheta \vdash (\neg\vartheta \to \neg\neg\neg\vartheta) \to (\neg\neg\vartheta \to \vartheta)$ $(H3)$,

(4) $\neg\neg\vartheta \vdash \neg\neg\vartheta \to \vartheta$ (2), (3), věta 9.3.4 (a),

(5) $\neg\neg\vartheta \vdash \vartheta$ (4), věta o dedukci,

(6) $\vdash \neg\neg\vartheta \to \vartheta$ (5), věta o dedukci.

(c) Postupně dostáváme:

(1) $\vdash \neg\neg\neg\vartheta \to \neg\vartheta$ (b),

(2) $\vdash (\neg\neg\neg\vartheta \to \neg\vartheta) \to (\vartheta \to \neg\neg\vartheta)$ $(H3)$,

(3) $\vdash \vartheta \to \neg\neg\vartheta$ (1), (2), věta 9.3.4 (a).

(d) Postupně dostáváme:

(1) $\vartheta \to \chi \vdash \neg\neg\vartheta \to \vartheta$ (b),

(2) $\vartheta \to \chi, \neg\neg\vartheta \vdash \vartheta$ (1), věta o dedukci,

(3) $\vartheta \to \chi, \neg\neg\vartheta \vdash \vartheta \to \chi$ $\vartheta \vdash \vartheta$,

(4) $\vartheta \to \chi, \neg\neg\vartheta \vdash \chi$ (2), (3), věta 9.3.4 (a),

(5) $\vartheta \to \chi, \neg\neg\vartheta \vdash \chi \to \neg\neg\chi$ (c),

(6) $\vartheta \to \chi, \neg\neg\vartheta \vdash \neg\neg\chi$ (4), (5), věta 9.3.4 (a),

(7) $\vartheta \to \chi \vdash \neg\neg\vartheta \to \neg\neg\chi$ (6), věta o dedukci,

(8) $\vartheta \to \chi \vdash (\neg\neg\vartheta \to \neg\neg\chi) \to (\neg\chi \to \neg\vartheta)$ $(H3)$,

(9) $\vartheta \to \chi \vdash \neg\chi \to \neg\vartheta$ (7), (8), 9.3.4 (a),

(10) $\vdash (\vartheta \to \chi) \to (\neg\chi \to \neg\vartheta)$ (9), věta o dedukci.

(e) Postupně dostáváme:

(1) $\vartheta, \vartheta \to \chi \vdash \chi$ (MP),

(2) $\vartheta \vdash (\vartheta \to \chi) \to \chi$ (1), věta o dedukci,

(3) $\vartheta \vdash ((\vartheta \to \chi) \to \chi) \to (\neg\chi \to \neg(\vartheta \to \chi))$ (d),

(4) $\vartheta \vdash \neg\chi \to \neg(\vartheta \to \chi)$ (2), (3), věta 9.3.4 (a),

(5) $\vdash \vartheta \to (\neg\chi \to \neg(\vartheta \to \chi))$ (4), věta o dedukci.

Tím je naše věta dokázána. QED

9.4 Věta o úplnosti a kompaktnost

Nyní dokážeme větu o úplnosti, a to v tzv. silné formě. Ta se netýká axiomatizace logické pravdivosti, tj. korespondence pojmů tautologičnosti a důkazu, ale obecnějších případů vyplývání a odvození. My ji navíc předvedeme ve vztahu k libovolné, tj. i nekonečné množině premis. Výhodou této formy důkazu je jednak to, že i ve svém provedení sleduje těsně původní sémantické motivace, a je tedy relativně názorný, a dále že jeho doplnění a rozšíření povede později také k důkazu úplnosti kalkulu predikátové logiky. Obecně v něm aplikujeme velice efektivní strategii, kterou lze využít také v modálních a v mnoha jiných neklasických logikách a s jejíž pomocí se obvykle dokazuje úplnost vhodných kalkulů axiomatizujících tyto logiky. Budeme však muset postupovat oklikou a nejprve definovat několik pomocných pojmů a dokázat několik snadných vět. V nich bude fakticky zavedena syntaktická varianta pojmu (ne)splnitelnosti a ukázáno, že vztahy těchto syntaktických a sémantických pojmů korelují, jak to má výsledně demonstrovat právě příslušná věta o úplnosti.

9.4.1 Konvence (Spor): *Formuli $\neg(\mathtt{p} \to \mathtt{p})$ budeme nazývat spor a budeme ji označovat zkráceně symbolem $\perp$.*

Následující tvrzení vyjadřuje myšlenku, že ze sporu nejen vyplývá, ale je i odvoditelné cokoli.

9.4.2 Věta (Ex falso quodlibet): *Pro libovolnou ϑ platí $\perp \vdash \vartheta$.*

Důkaz: Lze postupovat v těchto krocích:

(1) $\vdash \perp \to ((\mathtt{p} \to \mathtt{p}) \to \vartheta)$ věta 9.3.5 (a), $\perp = \neg(\mathtt{p} \to \mathtt{p})$,

(2) $\perp \vdash (\mathtt{p} \to \mathtt{p}) \to \vartheta$ (1), věta o dedukci,

(3) $\vdash \mathtt{p} \to \mathtt{p}$ příklad 9.2.5,

(4) $\perp \vdash \vartheta$ (2), (3), věty 9.2.9, 9.3.4 (a).

Tím je tvrzení dokázáno. QED

`9.4.3 Definice (Konzistentní teorie):` *Teorií dále rozumíme libovolnou množinu formulí. Teorie T je konzistentní, jestliže z T nelze odvodit spor, tj. $T \nvdash \bot$. Není-li T konzistentní, říkáme, že je nekonzistentní.*

Výraz „teorie" vztažený na objektový jazyk budeme používat zejména v kontextu syntaktických úvah souvisejících s axiomatizací logiky. Zdůrazněme, že zde nikde neklademe požadavek na konečnost množin formulí. Pomocí věty 9.4.2 lze nekonzistentní teorie charakterizovat jako takové, z nichž je odvoditelné cokoli.

`9.4.4 Věta:` *Daná teorie je nekonzistentní právě tehdy, když je z ní odvoditelná každá formule.*

`Důkaz:` ($\Rightarrow$) Nechť T je nekonzistentní teorie, tj. platí $T \vdash \bot$. Nechť ϑ je libovolná formule. Aplikací věty o dedukci a věty 9.2.9 na větu 9.4.2 získáme $T \vdash \bot \to \vartheta$. Použijeme-li (MP), resp. větu 9.3.4 (a), dostáváme $T \vdash \vartheta$. Tedy z T je odvoditelná každá formule. ($\Leftarrow$) Pokud naopak předpokládáme, že z T je odvoditelná každá formule, platí také konkrétně, že $T \vdash \bot$. Tedy v tomto případě je T nekonzistentní teorií. QED

Jak uvidíme, věta o úplnosti v podstatě odpovídá tvrzení, že pojem konzistence koresponduje se sémantickým pojmem splnitelnosti. Ve větě 7.6.2 jsme ukázali, že $T \nvDash \vartheta$ právě tehdy, když množina formulí $T, \neg\vartheta$ je splnitelná. Pro potřeby důkazu úplnosti budeme muset ukázat, že analogická věta platí i pro odpovídající syntaktické pojmy.

`9.4.5 Věta:` *Pro libovolnou teorii T a pro libovolnou formuli ϑ platí, že $T \nvdash \vartheta$ právě tehdy, když $T, \neg\vartheta$ je konzistentní.*

`Důkaz:` ($\Rightarrow$) Předpokládáme-li, že $T, \neg\vartheta$ není konzistentní, platí $T, \neg\vartheta \vdash \bot$, a tedy také díky větě o dedukci $T \vdash \neg\vartheta \to \neg(\mathtt{p} \to \mathtt{p})$. S použitím $(H3)$ získáme $T \vdash (\mathtt{p} \to \mathtt{p}) \to \vartheta$. Formule $\mathtt{p} \to \mathtt{p}$ je dokazatelná, tedy $T \vdash \vartheta$. ($\Leftarrow$) Předpokládejme naopak, že $T \vdash \vartheta$. Pak $T, \neg\vartheta$ není konzistentní, neboť podle 9.3.5 (a) platí $\vdash \neg\vartheta \to (\vartheta \to \bot)$. QED

Mezi konzistentními teoriemi nás budou zajímat především takové, které jsou maximální, tj. které nelze rozšířit, aniž bychom ztratili konzistenci.

`9.4.6 Definice (`*`mk`*`-teorie):` *Nechť S je libovolná množina formulí. Řekneme, že S je maximální konzistentní teorie (zkráceně mk-teorie), když S je konzistentní teorie a navíc platí, že přidáme-li k S libovolnou formuli, která nenáleží do S, získáme nekonzistentní teorii. Zapsáno* *symbolicky: S je mk-teorie, jestliže platí, že* $S \nvdash \bot$ *a pro každé* ϑ *takové, že* ϑ *není z* S*, platí* $S, \vartheta \vdash \bot$.

Pojem *mk*-teorie je silně závislý na povaze axiomatického systému, vzhledem k němuž je definován. Charakter našeho `HK` vede k vlastnostem *mk*-teorií, které formulujeme v následujících dvou větách a které sehrají klíčovou roli v důkazu úplnosti. První věta říká, že *mk*-teorie obsahují vše, co je z nich odvoditelné.

`9.4.7 Věta (O deduktivní uzavřenosti):` *Předpokládejme, že* S *je mk-teorie a* $S \vdash \vartheta$. *Pak* ϑ *náleží* S.

`Důkaz:` Předpokládejme, že S je *mk*-teorie a $S \vdash \vartheta$. Kdyby ϑ nebylo obsaženo v S, přidání této formule k S by vedlo k nekonzistentní teorii, neboť S je *mk*-teorie. V tomto případě bychom měli $S, \vartheta \vdash \bot$, a tedy také z věty o dedukci $S \vdash \vartheta \to \bot$. To by ale znamenalo, že $S \vdash \bot$. Ale my předpokládáme, že S je konzistentní. ϑ tedy musí být prvkem S. `QED`

Další věta popisuje, jakým způsobem je propojen čistě syntaktický pojem *mk*-teorie s Tarského definicí pravdy.

`9.4.8 Věta (O mk-teorii 1):` *Pro každou mk-teorii* S *a libovolné formule* ϕ, ψ *platí:*

(a) $\neg\phi$ *náleží* S *právě tehdy, když* ϕ *nenáleží* S,

(b) $\phi \to \psi$ *náleží* S *právě tehdy, když* ϕ *není v* S *nebo* ψ *náleží* S.

`Důkaz:` (a) ($\Rightarrow$) Nechť $\neg\phi$ náleží S. Kdyby také ϕ náleželo S, pak by S byla nekonzistentní, neboť $\vdash \neg\phi \to (\phi \to \bot)$ podle věty 9.3.5 (a). Protože S je konzistentní, musí platit, že ϕ nenáleží S. ($\Leftarrow$) Nechť naopak $\neg\phi$ nenáleží S. Chceme dokázat, že ϕ náleží S. Z předpokladu plyne, že $S, \neg\phi \vdash \bot$, tj. $S \vdash \neg\phi \to \neg(\mathtt{p} \to \mathtt{p})$. Aplikací ($H3$) získáme $S \vdash (\mathtt{p} \to \mathtt{p}) \to \phi$. Protože $\mathtt{p} \to \mathtt{p}$ je dokazatelná formule, platí $S \vdash \phi$. Na základě věty 9.4.7 získáváme, co potřebujeme. (b) Při důkazu implikace vpravo ($\Rightarrow$) předpokládejme, že ϕ náleží a ψ nenáleží S. Ukážeme, že pak $\phi \to \psi$ nenáleží S. Z předpokladu a bodu (a) této věty plyne, že $\neg\psi$ náleží S. Protože podle věty 9.3.5 (e) platí $\vdash \phi \to (\neg\psi \to \neg(\phi \to \psi))$, získáváme $S \vdash \neg(\phi \to \psi)$. Tedy podle 9.4.7 $\neg(\phi \to \psi)$ náleží S a podle bodu (a) této věty $\phi \to \psi$ nenáleží S. Druhou implikaci ($\Leftarrow$) zdůvodníme tak, že odvodíme, že $\phi \to \psi$ náleží S, a to jak z předpokladu, že ϕ nenáleží S, tak z předpokladu, že ψ náleží S. Nechť tedy nejprve ϕ nenáleží S, tj. $\neg\phi$ náleží S. Podle 9.3.5 (a) platí $\vdash \neg\phi \to (\phi \to \psi)$. Tedy $S \vdash \phi \to \psi$. Podle 9.4.7 pak $\phi \to \psi$ náleží S. Nyní předpokládejme, že ψ náleží S. Formule $\psi \to (\phi \to \psi)$ je instancí ($H1$). Pak musí platit $S \vdash \phi \to \psi$, a tedy také, že $\phi \to \psi$ náleží S. `QED`

Nyní můžeme lehce dokázat, že každá *mk*-teorie představuje – nad danou množinou možných vět (resp. formulí) a jimi artikulovaných možných faktů (stavů věcí) – cosi jako popis možného světa ve Wittgensteinově smyslu, totiž ve smyslu určení všech vět, které v daném světě platí a které nikoli. Aby splnil daný účel, musí být tento popis zjevně korektní, tj. nesmí být toutéž pravdivostní hodnotou ohodnocena věta a její negace, a úplný, tj. každá věta nějakou pravdivostní hodnotu dostane. Náš důkaz bude spočívat ve zjištění, že existuje korespondence mezi *mk*-teoriemi a interpretacemi, a to v tom smyslu, že příslušná *mk*-teorie S přímo určuje interpretaci, v níž jsou všechny formule `KVL` ohodnoceny pravdivostní hodnotou, a to tak, že prvkům z S náleží hodnota `1` a všem ostatním formulím `0`. Větě předešleme konvenci:

`9.4.9 Konvence (Interpretace k formulím):` *Nechť S je mk-teorie. Interpretace přiřazená množině S je ohodnocení I^S takové, že pro každý výrokový atom* $\mathtt{p}$ *platí:* $I^S(\mathtt{p}) = 1$ *právě tehdy, když* $\mathtt{p}$ *náleží S.*

`9.4.10 Věta (O mk-teorii 2):` *Tvrdíme, že pro každou mk-teorii S a pro každou formuli ϑ platí: $I^S \models \vartheta$ právě tehdy, když ϑ náleží S.*

`Důkaz:` Můžeme postupovat indukcí. Pro atomické formule je tvrzení pravdivé na základě definice interpretace I^S. Induktivní kroky představují přímočarou aplikaci věty 9.4.8. `QED`

Pro důkaz úplnosti budeme potřebovat pouze informaci obsaženou v poslední větě, podle níž je interpretace přiřazená *mk*-teorii modelem této teorie. Platí přitom, že různým *mk*-teoriím jsou přiřazeny různé interpretace, a obráceně, že každá interpretace je přiřazena nějaké *mk*-teorii, totiž té *mk*-teorii, která je množinou všech pravdivých vět dané interpretace. Množina všech *mk*-teorií tedy přesně kopíruje množinu všech interpretací.

Musíme nyní ukázat, že každou konzistentní teorii lze rozšířit na *mk*-teorii. Toto tvrzení se nazývá Lindenbaumovo lemma. V jeho důkazu budeme potřebovat seřadit všechny formule do nekonečné posloupnosti:

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$$

Chceme tedy každé formuli přiřadit jednoznačně nějaké přirozené (pořadové) číslo tak, aby žádné číslo nebylo vynecháno a aby každým dvěma různým formulím byla přiřazena vždy různá čísla. Připomeňme, že náš základní slovník může být konečný, protože naše nekonečná posloupnost proměnných může být bez problémů chápána jako posloupnost

$$\mathtt{p}', \mathtt{p}'', \mathtt{p}''', \ldots,$$

u níž si vystačíme s dvěma znaky „p“ a „$'$“. Přidáme-li k tomu závorky a implikaci s negací jako jediné spojky (ostatní spojky stále chápeme jako pouhé zkratky), máme celkem šest různých základních znaků, které budou uspořádány podobně, jako jsou uspořádána písmena v abecedě. Jejich pořadí stanovíme třeba takto:

$$\mathtt{p}, \; ', \; (, \;), \; \neg, \; \rightarrow.$$

Řekneme tedy např., že „)“ je v abecedě dříve než „$\rightarrow$“. Formule jsou speciální konečné posloupnosti těchto znaků. V rámci této úvahy budeme muset tomuto značení přizpůsobit pojem délky formule, jak byl zaveden dříve v definici 3.2.2. Délka formule je dána počtem znaků, což při současném značení znamená, že proměnné již nemají všechny stejnou délku jedna. Např. délka formule

$$(\mathtt{p}''' \rightarrow (\neg \mathtt{p}''))$$

je číslo třináct. Obecně je dobré vzít jako první kritérium pro uspořádání formulí jejich délku, protože formulí stejné délky bude vždy pouze konečně mnoho. Máme-li tedy formule různé délky, ta kratší bude mít menší index. Nyní stačí vzájemně srovnat formule stejné délky. To však můžeme lehce udělat způsobem, který je aplikován ve slovnících. Srovnáváme-li tedy dvě formule stejné délky, podíváme se nejprve na jejich první znak. Pokud se první znaky liší, bude mít menší index formule s abecedně dřívějším počátečním znakem. Pokud se počáteční znaky shodují, porovnáme druhé znaky atd. Toto uspořádávání formulí vede k jejich hledanému jednoznačnému seřazení do nekonečné posloupnosti. Pomocí tohoto uspořádání všech formulí dokážeme, že každou konzistentní teorii lze rozšířit na *mk*-teorii.

`9.4.11 Věta (Lindenbaumovo lemma):` *Ke každé konzistentní teorii T existuje mk-teorie S taková, že jsou všechny formule z T obsaženy v S.*

`Důkaz:` Nechť T je konzistentní teorie. Všechny formule jsou fixně uspořádány do nekonečné posloupnosti $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$ Zkonstruujeme nekonečnou posloupnost teorií

$$S_1, S_2, S_3, \ldots$$

induktivním způsobem. To znamená, že S_1 bude zadána přímo a pro každé i bude konstrukce teorie S_{i+1} definována pomocí teorie S_i:

(1) $S_1 = T$,

(2) $S_{i+1} = \begin{cases} S_i, \phi_i & \text{jestliže } S_i, \phi_i \text{ je konzistentní,} \\ S_i & \text{jestliže } S_i, \phi_i \text{ není konzistentní.} \end{cases}$

Všimněme si, že teorie $S_1, S_2, S_3, \ldots$ jsou do sebe vnořené, tj. vždy platí, že S_i je podmnožinou S_{i+1}, tj. všechny prvky S_i jsou rovněž prvky S_{i+1}.[12] Konstrukce zajišťuje, že každá teorie S_i je konzistentní. Množinu formulí S definujeme jako sjednocení všech množin formulí z posloupnosti $S_1, S_2, S_3, \ldots$, tj. daná formule je v S právě tehdy, když se nachází v některé množině S_i.

Je jasné, že T je podmnožinou S. Zbývá ukázat, že S je mk-teorie. Nejprve dokážeme, že S je konzistentní. Předpokládejme, že není, tj. že $S \vdash \bot$. V libovolném odvození (formule $\bot$) se vyskytuje jen konečně mnoho formulí, takže z nekonzistence S vyplývá nekonzistence nějaké její konečné podmnožiny S^*. Pokud ϕ_k je formule s největším indexem, který se vyskytuje v S^*, pak je jistě S^* částí S_{k+1}, a protože je teorie S^* nekonzistentní, musí být nekonzistentní i teorie S_{k+1}. To je však v rozporu s tím, že všechny teorie S_i jsou konzistentní. Nyní dokážeme, že S je maximální. Nechť ϑ není z S. Řekněme, že ϑ má index n, tj. $\vartheta = \phi_n$. Dokazujeme sporem, že S, ϕ_n je nekonzistentní. Předpokládejme tedy, že S, ϕ_n je konzistentní. Pak je jistě konzistentní i S_n, ϕ_n, a tedy $S_{n+1} = S_n, \phi_n$. Pak ale ϕ_n náleží S, což je v rozporu s předpokladem. Důkaz je tedy hotov. QED

Z Lindenbaumovy věty plyne přímočaře tvrzení, které bylo naším cílem a jež dává do přímé souvislosti konzistenci a splnitelnost teorie.

`9.4.12 Věta (O existenci modelu):` *Pokud je množina formulí konzistentní, pak má model.*

`Důkaz:` Nechť T je konzistentní teorie. Podle předchozí věty existuje mk-teorie S, která je rozšířením teorie T. Podle věty 9.4.10 je interpretace I^S modelem teorie S, a tedy i teorie T. QED

Následuje *silná věta o úplnosti*, tj. tvrzení:

$T \vdash \vartheta$ právě tehdy, když $T \models \vartheta$.

To pokrývá i případ, v němž se tvrdí ekvivalence tautologičnosti a dokazatelnosti, jenž je artikulován v tzv. *slabé větě o úplnosti*:

$\vdash \vartheta$ právě tehdy, když $\models \vartheta$.

Současně je tím pokryta situace, v níž se u množiny premis (mimologických axiomů) omezujeme pouze na množiny konečné a kterou lze pomocí věty o dedukci jednoduše převést na zmíněný slabý případ. Podobně jako

[12] Oficiální definici podmnožiny podáme až v oddílu 10.6.

se pojem kočky či dne používá jednak na stejné úrovni jako pojem kocoura či noci a jednak jako pojem těmto nadřazený, tj. ve smyslu *pars pro toto*, užívá se i termín „úplnost“ jako souhrnné označení pro korektnost a úplnost. Věta o úplnosti je pak vlastně větou o korektnosti a úplnosti. Důvodem této zkratky je, že korektnost kalkulu je relativně snadným výsledkem a tíha důkazu spočívá skutečně na úplnosti.

`9.4.13 Věta (O silné úplnosti):` *Předpokládejme, že T je libovolná množina formulí a ϑ libovolná formule. Pak platí $T \vdash \vartheta$ právě tehdy, když $T \vDash \vartheta$.*

`Důkaz:` ($\Rightarrow$) Korektnost lze pro odvoditelnost dokázat indukcí podle délky odvození podobně, jako jsme to provedli ve větě 9.2.6 pro dokazatelnost. Má-li formule ϑ vyplývat z T, nesmí být nepravdivá při žádném ohodnocení premis z T hodnotou `1`. Jediné, co by k takové situaci ve sledu formulí, jenž končí formulí ϑ, mohlo vést, je pravidlo (`MP`). To ovšem nepřenáší jen tautologičnost, ale i pravdivost, čímž je kritická situace vyloučena. Dokazujeme úplnost, tj. směr ($\Leftarrow$) příslušné metaekvivalence, a to kontrapozicí. Předpokládejme tedy $T \nvdash \vartheta$. Zdůvodňujeme, že $T \nvDash \vartheta$. Podle věty 9.4.5 z předpokladu plyne, že $T, \neg\vartheta$ je konzistentní. Z předchozí věty pak plyne, že teorie $T, \neg\vartheta$ má model. To však znamená, že $T \nvDash \vartheta$. `QED`

Z této verze silné věty o úplnosti vyplývá věta o kompaktnosti, kterou lze formulovat ve dvou různých, i když vzájemně úzce souvisejících verzích. Věta o kompaktnosti má v logice mnoho zajímavých důsledků a souvisí také s některými „mimologickými“ matematickými fenomény. Něco k tomu stručně řekneme v oddílu 15.4.[13] Nás kompaktnost momentálně zajímá čistě technicky, jako jedna z metalogických charakteristik axiomatizace `KVL`, v níž je problematika vyplývání a splnitelnosti týkající se množin formulí dána do vztahu k vyplývání a spojitosti na konečných podmnožinách těchto množin. Pojem kompaktnosti lze vnímat právě jako výraz soudržnosti obou, konečného a nekonečného případu.

`9.4.14 Věta (O kompaktnosti):` *(a) Platí, že formule vyplývá z dané množiny formulí právě tehdy, když vyplývá z nějaké její konečné podmnožiny. (b) Množina formulí je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná každá její konečná podmnožina.*

`Důkaz:` (a) Nechť T je množina formulí. Pokud formule ϑ vyplývá z nějaké konečné podmnožiny množiny T, pak jistě vyplývá i z množiny T

[13] Pro další detaily viz Kolman [2008, odd. 3.6 a 7.3].

samotné. Tím máme jednu implikaci ($\Leftarrow$). Předpokládejme nyní naopak ($\Rightarrow$), že formule ϑ vyplývá z T. Podle věty o silné úplnosti platí, že $T \vdash \vartheta$. Existuje tedy odvození formule ϑ z množiny T. V tomto odvození se vyskytuje jen konečně mnoho formulí z T. Označme jejich množinu jako T^*. Jistě platí $T^* \vdash \vartheta$. Podle silné věty o korektnosti platí také $T^* \models \vartheta$, a tedy ϑ vyplývá z nějaké konečné podmnožiny množiny T. (b) Jestliže je množina formulí T splnitelná, pak má model, který je modelem také každé z jejích podmnožin. Speciálně je tedy splnitelná každá její konečná podmnožina a první implikace ($\Rightarrow$) platí triviálně. Předpokládejme, že množina T není splnitelná. Pak z ní plyne cokoli, tedy speciálně $T \models \bot$. Podle již dokázaného bodu (a) této věty existuje konečná podmnožina T^* množiny T taková, že $T^* \models \bot$. T^* je tedy nesplnitelná konečná podmnožina množiny T. Tím je dokázána druhá implikace ($\Leftarrow$). QED

Poznamenejme, že věta o kompaktnosti je chybějícím článkem, který odlišuje slabou úplnost od obecné verze silné úplnosti. Mohli jsme totiž také postupovat obráceně, tj. nejprve dokázat slabou úplnost, tento důkaz doplnit o nezávislý důkaz kompaktnosti a z těchto dvou vět bychom již lehce odvodili silnou úplnost. Můžeme tedy říci, že silnou úplnost – resp. její obecnou verzi připouštějící nekonečné množiny předpokladů – lze chápat jako konjunkci úplnosti a kompaktnosti.

Část II

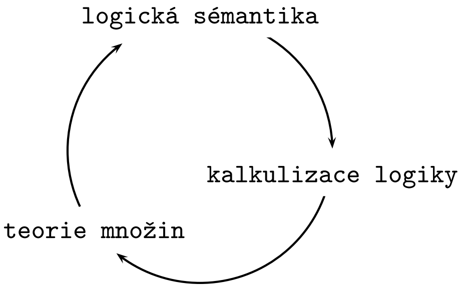
Množiny, pojmy, relace

10

Teorie množin

Zmínili jsme již úvodem, že se teorie množin začátkem dvacátého století postupně propracovala do role ontologické báze matematiky. Dodnes je takto přinejmenším implicitně přijímána a vyučována v rámci matematického curricula. Její souvislost s logikou byla přitom od počátku úzká, byť mezi zakladatelem logiky Gottlobem Fregem a zakladatelem teorie množin Georgem Cantorem panovalo jisté názorové pnutí. Z odstupu nemnoha let bylo ale jasné, že se jedná o spřízněné projekty, snažící se nalézt pro matematiku nějaké obecnější, ba dokonce *nejobecnější* možné zdůvodnění. Zvláště z pohledu kritické filosofie se to musí takřka automaticky jevit jako chimérický podnik budující babylonskou věž čistě rozumové a zcela univerzální vědy, která chce zakládat vědy ostatní a nevšimne si přitom děravosti vlastních základů, jak se projevuje v četných logických či logicko-sémantických paradoxech. Pozadí celého tohoto podniku nebylo ale takto obecné, ba souviselo se zcela konkrétními problémy matematické analýzy, a tedy celého proudu evropského matematického myšlení, což oběma – teorii množin i logice – přes přepjatá očekávání otců zakladatelů, nikoli nepodobná utopickému optimismu Leibnizovu, zajistilo nepochybný a stále hmatatelný úspěch.

U teorie množin může být tento „praktický“ původ snadno přehlédnut, zvláště když se z ní díky těm, kdo mají sklony z matematických teorií vyvozovat bezprostřední filosofické důsledky, stala jakási disciplína o obecných principech lidského myšlení, známá takto především ze základních škol a kryptických poznámek o nemožnosti sčítání jablek s hruškami. V této kapitole se jednak pokusíme tento dojem alespoň částečně poopravit, když ukážeme, jak se množinové myšlení vyvinulo z pokusu rozšířit pojem veličiny z konečných také na nekonečné případy: nekonečné totality totiž z tradičního hlediska žádnou velikost neměly, neboť velikost, veličina, byly vždy – jako cosi určitého – považovány nutně za konečné. Dále položíme pojmové základy sémantiky predikátové logiky, včetně jejího antického předchůdce, tj. logiky Aristotelovy, aniž bychom tvrdili, že logika a její sémantika na teorii množin v nějakém ohledu staví, předpokládá ji, či je do ní dokonce vnořena. Tato představa totiž není ne-



Obrázek 10.1: Založení kruhem

obvyklá a je často pěstována i při vědomí inherentního kruhu: sémantika logických kalkulů, axiomatik, je založena na teorii množin, která je opět pěstována axiomaticky, tj. předpokládá tutéž logiku, kterou zdůvodňuje. Schematicky je to znázorněno na obrázku 10.1.

10.1 Logika s abstrakcí

Množinami rozumíme soubory určitých předmětů, přičemž to, jaké soubory to jsou a co se tímto termínem vůbec míní, není zprvu vůbec zřejmé a vyplyne to až z dalších příkladů. Máme-li třeba předměty a, b, c, můžeme z nich vytvořit tyto skupiny:

$$\{a, b, c\},\ \{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\}.$$

Nyní se lze ptát, zda jsme nezapomněli třeba na soubory

$$\{a, a, b\},\ \{b, a\}$$

či na nějaké jiné. Odpověď bude „ne“, s tím, že nám na pořadí a opakování prvků nezáleží, čímž stanovujeme cosi jako rovnice:

$$\{a, b\} = \{a, a, b\} = \{b, a\}.$$

Rovnost mezi reprezentacemi je, jak ještě mnohokrát zmíníme, způsob, jak dát těmto reprezentacím význam, tj. jak zajistit přechod od nějakého symbolu k tomu, co tento symbol znamená. V našem případě je obecným principem rovnosti množin, a tím i principem konstituce „množinovosti“ tzv. *zákon extenzionality*:

dvě množiny jsou stejné, jestliže mají tytéž prvky.

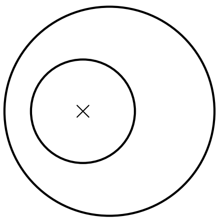
Prvkem množiny je přitom nejprve to, co se nachází ve výše uvedených složených závorkách. To, že je a prvkem množiny A, zapisujeme jako:

$$a \in A.$$

Platí např. $a \in \{a, b\}$. Prvky množiny mohou být opět množiny, tj. dostáváme také komplexnější uskupení jako $\{a, \{a, c\}, b\}$, pro nějž, označíme-li ho jako A, zjevně platí $\{a, c\} \in A$. Označíme-li nyní $\{a, c\}$ jako B, vidíme, že $a \in A$ i $a \in B$, ale i když $c \in B$, neplatí, že $c \in A$. Toto poslední konstatování zapisujeme jako:

$$c \notin A.$$

Vše rozepisujeme tak podrobně proto, že v tomto bodě dochází na běžné, nepoučené bázi k častým omylům, které byly v tradiční logice a sémantice zcela obvyklé, a vlastně i nevyhnutelné. Souvisí to i s běžnou prezentací množin jako kruhů, kdy prvky obkroužené jedním kruhem jsou obkroužené i kruhem větším, obkružujícím tento kruh, a v tomto smyslu náleží také jemu, viz obrázek 10.2. To, k čemu zde dochází, je z moderního hle-



Obrázek 10.2: Vztahy množin

diska nepřípustná záměna pojmu prvku a pojmu podmnožiny. Ta je pro starší logiku typická a odvíjí se z ní i jiné chápání elementární věty, jak se k němu záhy dostaneme. Pro naši potřebu stačí, když si představíme množiny třeba jako složky v počítači, jejichž prvky mohou být soubory, ale také další složky. Složky, které obsahují přesně tytéž soubory, automaticky splynou v jednu, jeden soubor může být ale snadno přítomen v několika různých složkách. Soubor, který je prvkem jedné složky, jež je prvkem druhé složky, nemusí být automaticky také prvkem této druhé složky.

Množiny, které jsme dosud uváděli, byly konečné, a proto je šlo popsat výčtem prvků. Tento způsob prezentace je obtížný již u větších totalit a prakticky nemožný u totalit nekonečných, byť jsou – jako třeba množina lidí – nekonečné jen potenciálně. Pokud bychom napsali jenom nějaký vzorek, např. u množiny čísel

$$\{1, 2, 3, \ldots\},$$

vznikl by problém, co znamenají ony tři tečky, případně standardně užívané „atd.". To není nic jiného než problém řízení se pravidlem, které určuje, jak „dále" máme postupovat. Smysl dává jak rozšíření

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\},$$

tak

$$\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\},$$

a ve skutečnosti jakékoli jiné, neboť ke každému konečnému sledu čísel si lze vymyslet předpis, jenž umožní generovat členy další. V tomto ohledu je lepší začít oním předpisem, tj. uvést vlastnost, jak příslušnou nekonečnou množinu zadat, což je v našem případě jako číslo 1 následované všemi prvočísly. Množinu prvočísel pak zadáme právě skrze vlastnost „být prvočíslem", normovanou jako „x je prvočíslo", případně rozepsanou na elementárnější pojmy jako „x je číslo, které je dělitelné právě dvěma různými čísly, číslem 1 a sebou samým". Obecně platí, že výraz

$$\{x \mid P(x)\}$$

čteme jako

množina (všech a pouze) těch x, která mají vlastnost $P(x)$.

Tento přístup pokrývá automaticky také množiny konečné, neboť třeba tu o dvou prvcích a a b lze kromě již zmíněného $\{a, b\}$ vyjádřit jako:

$$\{x \mid x = a \vee x = b\}.$$

Zajímavým a významným vedlejším produktem tohoto přístupu je „objev" prázdné a jednoprvkové množiny, které by jednoduchým shromažďováním předmětů nemohly vůbec vzniknout. Prázdnou množinu přitom dostaneme skrze nějakou nesplnitelnou vlastnost, dejme tomu takto:

`10.1.1 Definice (Prázdná množina):` $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.

To, že se nevyskytuje více různých prázdných množin, např. prázdná množina jednorožců a prázdná množina sudých prvočísel větších než dvě, je dáno opět zákonem extenzionality. Jelikož prázdná množina je právě ta, která nemá žádné prvky, jsou si z tohoto hlediska všechny prázdné množiny rovny, stejně jako si jsou rovny množiny lidí a neopeřených dvojnožců, přestože se v nějakém ohledu liší. Tímto ohledem je právě fregovský smysl či způsob danosti. Okolnost, že u množin (tradičních rozsahů) předpokládáme rovnost

člověk = neopeřený dvojnožec,

zatímco u slov či šíře pojatého obsahu nikoli, nevyplývá z podstaty těchto rozlišení, ale je naopak tím, co podstatu těchto pojmů určuje, speciálně i tím, co určuje pojem pojmu. V přechodu od slova či pojmu „neopeřený dvojnožec“, obecně $P(x)$, k množině neopeřených dvojnožců, obecně $\{x \mid P(x)\}$, je tedy implicitně skryto toto odhlédnutí od konkrétního způsobu, jímž nám byl význam slov dán. Tuto abstrakci od jistých rozdílů pak graficky značíme užitím abstraktoru $\{x \mid P(x)\}$, píšeme tedy:

$\{x \mid x$ je člověk$\} = \{x \mid x$ je neopeřený dvojnožec$\}$.

Tento pohyb ale není radno chápat ontologicky, jako přechod do jiné říše, ale pragmaticky, jako poukaz na změnu užití jistého výrazu, tedy analogicky zavedení uvozovek. Podobně bychom mohli psát třeba

pojem člověka $\neq$ pojem neopeřeného dvojnožce,

a zároveň

pojem člověka = pojem rozumné bytosti,

s aristotelským předpokladem, že rozumnost je esenciálním rysem lidství, jinak řečeno, že shoda příslušných pojmů v extenzích není náhoda, jako u pojmů člověka a neopeřené bytosti. Důležité je, že zavedení výrazů (abstraktorů), jako je „množina“, „pojem“, „intenze“, „extenze“, obecně tedy jakékoli grafické konvence, nemá samo o sobě schopnost změnit význam takto modifikovaných slov, ve stejném smyslu, v jakém je iluzí, známou např. z budování dokonalých jazyků, že lze případné víceznačnosti úzu (např. různé homonymie či synonymie) odstranit jednoduše přeznačením. Rozhodující roli má nakonec vždy jen užití, které teprve dělá z výrazu výraz něčeho, tj. z pouhého artefaktu něco, co nese nějaký význam, a to v souladu s kritérii identity tohoto použití, v němž se ukazuje být jistý výraz stejně dobrý jako jiný. Je to stejná situace jako v pokusu o explicitní vyjádření toho, kdy a že je pravdivá nějaká věta, které nedává smysl mimo stávající praxi (pravdivého a nepravdivého, správného a nesprávného) tvrzení, podobně jako není užití emotikonů (smajlíků) s to nahradit příslušný postoj, naopak, systematicky v něm klame. Vezměme např. situaci, v níž užitím úsměvu :) zlehčíme zprávu, která by za normálních okolností mohla vyznít urážlivě a skutečně urážlivě míněna je. Funkce emotikonu zde pak nespočívá v upřesnění významu, ale naopak ve znevěrohodnění oprávněné reakce adresáta.

Zákon extenzionality nyní říká, že jsou dvě množiny, např. $\{x \mid P(x)\}$ a $\{x \mid Q(x)\}$, stejné, když mají stejné prvky, tj. platí, že $a \in \{x \mid P(x)\}$ tehdy a jen tehdy, když $a \in \{x \mid Q(x)\}$. To se v této formě může zdát jako konfúzní vymezení, protože se definovaný výraz zjevně objevuje i ve výrazu, jenž ho definuje. Tato námitka ale zmizí, řekneme-li, že se v případě zápisu $a \in \{x \mid P(x)\}$ jedná o pouhou variantu zápisu $P(a)$, tj. platí konvence:

`10.1.2 Konvence (Náležení):` $a \in \{x \mid P(x)\} \leftrightarrow P(a)$.

V důsledku toho dostáváme zákon extenzionality v podobě

$$\{x \mid P(x)\} = \{x \mid Q(x)\} \leftrightarrow (\forall y)(P(y) \leftrightarrow Q(y)),$$

kde symboly pro kvantifikaci používáme v neformálním smyslu zmíněném již v oddílu 1.4. Přesné vymezení uvedeného zápisu bude následovat v další části knihy.

Konvence 10.1.2, podle níž se u tvrzení náležení nějakého prvku množině vymezené nějakou vlastností jedná vlastně jen o alternativní čtení subjekt-predikátové věty, se zdá být neškodná, založená na srozumitelném pokusu převést každou predikativní větu do uniformního tvaru vztahu dvou předmětů. Věta

Sókratés běží,

v níž je vlastnost „běžení“ implicitně, tj. predikativním tvarem věty, připisována Sókratovi, je uchopena jako výraz vztahu dvou předmětů

Sókratés $\in \{x \mid x$ je běžící$\}$,

jenž je explicitně zachycen symbolem „$\in$“. V tradiční logice se o tentýž úkol pokoušela kopula „je“. Z Fregova a Wittgensteinova hlediska se však v základní formě věty tento vztah nachází nevyřčený, tj. ukazuje se pouze na tvaru příslušných výrazů, tedy na tom, že „Sókratés“ je jméno a „běžet“ něco, co musí být predikováno. Platónova pozice ze *Sofisty*, podle níž se jednota věty zakládá na odlišném tvaru slov, která se v ní vyskytují, typicky jména a slovesa, je stejného původu, tj. sloučení výrazů probíhá na bázi jejich formy, nikoli další relace.[1] Za tím je představa o sémantickém primátu věty. Ta nevzniká spojováním atomických slov, ale naopak, jednotlivá slova – a tím i předměty našeho světa – se v ní osamostatňují na základě stability jistého použití. Řeč o tom, že

jednotlivina (Sókratés) má účast na ideji (běžení),

je přitom sémantickou reflexí na tento stav, tj. řečí metajazykovou, tedy druhořádovou, která se pokouší explicitně formulovat pravdivostní podmínky příslušných vět, tj. učinit explicitními implicitní pravidla jejich užití. K jakým potížím může dojít v okamžiku, kdy se obě řeči – reflektovaná a reflektující – propletou, stejně jako když se spojí řeč filosofická s řečí každodenní či řečí speciálních věd, ukazuje řada antických precedentů, v tomto případě platónský problém sebepredikace. Jeho moderní varianta, známá jako Russellův paradox, postihla Fregovu logiku obohacenou o zákon extenzionality, který dělá přechod (abstrakci) od pojmu (vlastnosti) k množině (předmětů, které pod tento pojem/vlastnost spadají) explicitním.

V rámci našich úvah se vlastně jedná o speciální logický princip, jenž fixuje užití množinového abstraktoru $\{x \mid P(x)\}$ holistickým způsobem, jakým lze užít axiomy logického kalkulu k fixování významu spojek $\rightarrow$ a $\neg$. Toto srovnání samozřejmě pokulhává, neboť význam spojek jsme zavedli čistě denotačně pomocí pravdivostních tabulek. V oddílu 7.5 jsme ale v souvislosti s tezí o nedenotujícím, performativním charakteru logiky naznačili, jak by vypadalo alternativní vymezení spojek skrze jistou sadu pravidel a vět, které je následně artikulují. K tomu se v detailech dostaneme v kapitole 17. Podstatné je, že se lze na zákon extenzionality dívat jako na logický princip vymezující význam množinového abstraktoru, takto známý jako *princip* (množinové) *abstrakce*. Logický systém, jenž vznikne jeho přidáním k zákonům predikátové logiky, je pak znám jako *logika s abstrakcí*. V dalším oddílu ukážeme, proč je „naivně“ vymezený systém takovéto logiky sporný.

10.2 Russellův paradox

Problém účasti věci či ideje na ideji je problémem vymezení významu nějakého slova A, resp. sémantické formy elementární věty „A je B“. U generických vět jako „kružnice je kulatá“ či „moucha létá“ např. víme, že se vymezované A netýká přímo empirických instancí (které nejsou nikdy „dokonale“ kulaté či nutně nelétají – třeba proto, že zrovna sedí,

[1] Platón [Soph., 261e–262a].

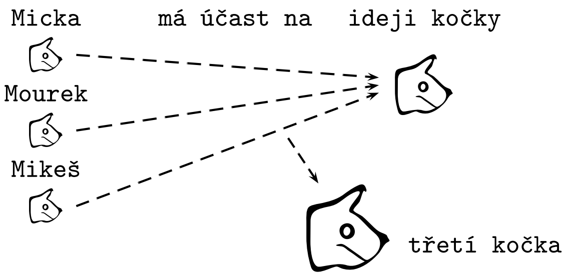
nebo jim někdo utrhl křídla), ve smyslu *de re*, ale nepřímo, ve smyslu *de dicto*, skrze ideální význam, vymezení. Platón takto říká, že konkrétní věci na svých idejích participují pouze nedokonale, částečně, a skutečná dokonalost náleží idejím samým, což pak často vyjadřuje obraty jako „krása je krásná“.[2] Tyto obraty ovšem současně evokují, že se v daných větách příslušný predikát vztahuje sám na sebe, tj. mají *sebepredikativní* tvar.[3] Analogická tvrzení jako „kočka (o sobě) je kočka“ nás pak vedou přímo k Aristotelovu problému *třetího muže*, resp. třetí kočky, jenž je jen jinou verzí Russellem objeveného paradoxu.[4] V antické verzi se přitom vychází z toho, že lze elementární predikaci

(1) A je B

explicitně přepsat či vysvětlit větou

(2) předmět A má účast na ideji B.

Jinými slovy: fakt, že mají nějaké (různé) věci, např. zvířata, nějakou (jednu) vlastnost, třeba být kočkou, je vysvětlena jejich participací na druhé věci, abstraktní ideji kočky. Otázka nyní je, co zjednává tento jejich vztah, tj. co spojuje *první*, konkrétní kočku, s *druhou*, ideální kočkou, resp. s ideou kočky. Zdá se, že by to měla být nějaká *třetí* kočka, tj. že celý proces explikace příslušného vztahu bylo třeba iterovat, což vyvolává nekonečný regres a kýžené *reductio ad absurdum* teorie idejí. Viz obrázek 10.3. Aristotelés se, jak známo, pokusil celý regres generování



Obrázek 10.3: Paradox třetí kočky

[2] Platón [Hipp., 289d].

[3] K výskytu sebepredikativních výrazů u Platóna a k nastolení samotného tématu srov. poznámky in: Graeser [1993, část III, oddíl 2f].

[4] Viz Aristotelés [Met., 990b17] a Platón [Par., 132a1–132b1].

nových předmětných říší zastavit tím, že ideu kočky (resp. muže) umístil přímo do příslušného individua, tj. odmítl jejich ontologické odtržení. Lze namítnout, že se takto vlastně jen dodatečně a *ad hoc* řeší problém, k němuž by při dostatečné analýze uvedeného rozdílu nemuselo dojít. Ilustrativní je zde srovnání s již vícekrát zmíněným Carrollovým zdůvodněním implicitního úsudku explicitním pravidlem (*modem ponens*), jak bylo diskutováno v oddílu 7.5 rovněž v souvislosti s Wittgensteinovým nekonečným regresem týkajícím se explikace implicitního pravidla. Cesta ze všech těchto regresů přitom spočívá v uvědomění si, že formulace (1) a (2) nemají stejnou povahu a že ta druhá nezakládá přímočaře tu první, v důsledku čehož celý proces není třeba iterovat, tj. není třeba vytvářet další objektové říše, které by zdůvodňovaly říše zavedené dříve, ve stejném duchu, v jakém má říše idejí zdůvodnit vztahy v říši smyslů. Přepis (2) má přitom tu zjevnou nevýhodu, že se v něm termíny A a B stávají objekty, a jsou si tedy sémanticky rovnocenné, stejně jako se zdá být rovnocenná množina s předměty, které pod ni spadají, tj. ona sama je sémanticky předmětem. Uznáme-li tuto sémantickou homogenitu A a B, pak totiž okamžitě vyvstává otázka, zda může nějaká idea participovat sama na sobě, tj. zda platí:

(3) A má, resp. nemá účast na A.

Připustíme-li ji jako smysluplnou, získáváme zároveň metaideu

(4) být ideou, která na sobě nemá účast

a můžeme se dále ptát, zda idea (4) na sobě účast má nebo nemá, přičemž vždy dostaneme opačnou odpověď, tj. má-li na sobě účast, pak je ideou, která na sobě účast nemá, a *vice versa*.

Russellův paradox, jenž na dlouhou dobu paralyzoval Fregův logický systém a vedl i k rozsáhlé revizi tehdejší doktríny základů, plyne ze stejného principu. Podstatné je, že ve větě tvaru

$$N \in \{x \mid F(x)\}$$

výrazy N a $\{x \mid F(x)\}$ patří k téže syntaktické kategorii. To je samozřejmě jisté rozhodnutí, které bylo u Frega zdůvodněno zcela konkrétními potřebami generování nekonečného množství objektů bez využití odkazu k empirickým postulátům či faktům. Pojmový důkaz toho, že existuje nekonečno, např. nekonečně mnoho forem či čísel, jsme diskutovali v oddílu 3.3, mj. v kontextu Platónových dialogů, kde se takový pokus rovněž uskutečnil. Platón[5] přitom Frega do značné míry anticipuje. Začne se

[5] Platón [Par., 143].

tím, že jsoucnost a jedno jsou odlišné věci. To znamená, že vedle nich existuje ještě odlišnost. Vezmu-li tedy

jsoucnost a jedno,

dostanu dvojici, stejně tak vezmu-li dvojice

jedno a odlišnost,

odlišnost a jsoucnost.

Přidám-li k dvojici další jedno (jímž může být také idea dvojice samotná), získávám tři. Zbytek probíhá násobením čísel 2 a 3 samými sebou, což vede k dvojité posloupnosti 2^n, 3^n, jak jsme ji zmiňovali dříve. Frege, popíšeme-li jeho postup stručně, začíná predikátem „být neroven sám sobě“, tj. Platónovou odlišností. Tento predikát je nezávislý na stavu univerza, tj. je čistě logické povahy. Princip abstrakce k němu dovoluje vytvořit příslušnou množinu

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\},$$

a tím i první prvek jakéhokoli univerza. Značení $\emptyset$ je v souladu s předchozí definicí. Díky tomuto prvku můžeme nyní uvažovat vlastnost „být roven $\emptyset$“, od níž opět přejdeme k množině

$$\overline{1} = \{x \mid x = \{x \mid x \neq x\}\}.$$

Je zřejmé, že na rozdíl od objektu $\emptyset$ má objekt $\overline{1}$ právě jeden prvek a podle principu abstrakce tedy platí

$$\emptyset \neq \overline{1},$$

protože množiny různých prvků jsou různé. Máme-li takto zavedeny dokazatelně různé objekty

$$\emptyset, \overline{1}, \ldots, \overline{n},$$

lze další získat jednoduše jako jejich množinu, tj. skrze konvenci

$$\overline{n+1} = \big\{x \mid x = \emptyset \vee x = \overline{1} \vee \cdots \vee x = \overline{n}\big\}.$$

Pouze pomocí principu abstrakce jsme s to zavést nekonečně mnoho odlišných předmětů. Skutečnost, že se jedná o předměty téhož typu, je podmínkou toho, abychom k nim mohli odkazovat pomocí téže proměnné, jak to děláme v uvedených definicích. V důsledku toho jsou věty jako

$$\{x \mid F(x)\} \in \{x \mid F(x)\}, \qquad \text{resp.} \qquad \{x \mid F(x)\} \notin \{x \mid F(x)\}$$

správně utvořené, stejně tak jako je $x \notin x$ legitimní predikát a $\{x \mid x \notin x\}$ správně utvořené jméno. Vezmeme-li formuli

$$\{x \mid x \notin x\} \in \{x \mid x \notin x\},$$

pak pomocí výše uvedené konvence 10.1.2 získáme okamžitě její negaci

$$\{x \mid x \notin x\} \notin \{x \mid x \notin x\}.$$

Totéž platí *vice versa*. Výsledkem je *Russellův paradox*. Řečeno volně: množina všech množin, které si nenáleží, si náleží tehdy a jen tehdy, když si nenáleží. Paralela s problémem sebepredikace a třetího muže je zřejmá. Pozoruhodné je, že Fregův systém je vůči mnoha verzím paradoxu imunní, včetně té verze, kterou mu Russell roku 1902 zaslal.[6] V ní uvažuje predikát „být predikátem, který nemůže být predikován o sobě samém“, symbolicky

$$F(X) \leftrightarrow \neg X(X),$$

a spor odvozuje skrze dosazení F za X jako

$$F(F) \leftrightarrow \neg F(F).$$

To je ekvivalentní zjištění, že „vlastnost být vlastností, která si nenáleží“, si náleží tehdy a jen tehdy, když si nenáleží. Hierarchicky budovaná Fregova syntax ovšem vytváření takovýchto predikátů neumožňuje, neboť podstatně rozlišuje mezi jménem (předmětem) a predikátem, dále pak predikátem (vlastností), jenž se vztahuje k předmětům, tzv. predikátem *prvního řádu*, a predikátem (vlastností), jenž se vztahuje k predikátům prvního řádu, tzv. predikátem *druhého řádu* atd. Predikát, který by byl sám sobě predikovatelný, tedy v tomto ohledu neexistuje. Tímto tahem Frege anticipoval Russellovu teorii typů.

K dalším detailům ohledně těchto záležitostí se dostaneme v rámci našeho výkladu klasické predikátové logiky a teorie typů, viz zejména oddíl 19.5. Fakticky se zde zabýváme opět Platónovým postřehem, že věta vzniká jen kombinací jistého typu slov, např. jména a slovesa, nikoli jména a jména či slovesa a slovesa. Ke sporu nás dovedla až sémantická reformulace, která z tohoto postřehu udělala objektové tvrzení a zmiňované rozdíly v nějakém smyslu setřela: všechny významy užitých slov se staly předměty příslušné řeči. Frege se tomuto fenoménu systematicky věnuje např. v poukazu na zavádějící charakter vět jako

pojem (vlastnost) koně není pojem (vlastnost),[7]

[6] Frege [1976, s. 211].
[7] Frege [1892*a*, s. 195].

kde se z pojmu (vlastnosti) stal předmět uvedené věty. Obecně srozumitelnější varianta Fregova příkladu říká, že

přísudek nemůže být podmět,

což je zarážející, neboť v příslušné větě přísudek podmětem právě je. Wittgenstein chce v *Tractatu* řešit takovéto paradoxy tím, že příslušnou sémantickou reformulaci, tj. metajazykový diskurz jako takový, jednoduše zakáže jako nesmyslný, stejně jako celou filosofii, v níž se takováto reflexe jazyka v jazyce děje. Russellův paradox (v původní verzi) pak Wittgenstein vyřizuje odkazem na to, že ve výrazech jako

$F(F)$

nás výskyt téhož znaku dovádí k předpokladu, že má tento znak také stejný význam, z čehož pak plyne spor. To, jaký má znak význam, co označuje, ale souvisí s tím, jak je používán, a náhodná grafická podobnost, či dokonce identita na to nemá větší vliv, jak ukazují případy homonymních termínů.[8] Případný spor typu

Černý není černý

je tak podle možnosti třeba uchopit pozitivně, jako regulativní princip, jenž nám určí, že výraz „černý“, přes grafickou stejnost, musí být užíván různě, např. v prvním případě pro označení pana Černého, o němž říkáme, že není černoch. Tato lingvisticko-pragmatická devíza, kterou lze do značné míry vyčíst již z Fregovy kontextuální teze,[9] a která tak souvisí jak s jeho obratem k jazyku, tak s obratem pragmatickým, je také principem řešení jak Russellova, tak dalších paradoxů.

10.3 Sémantické paradoxy

Jelikož se na přelomu století podobných paradoxů, jako byl ten Russellův, objevila celá řada, bývá zvykem je podle původu dělit zhruba na *paradoxy logické* (resp. matematické či množinové) a *paradoxy epistemologické* (resp. sémantické).[10] Russell si sliboval, že se mu podaří najít společný základ či rys obou skupin, a skrze něj pak bude moci navrhnout takové jejich řešení, které by nebylo *ad hoc* a zároveň by nějak uspokojilo logický *common sense*. Za tímto účelem paradoxy nejen sbíral, ale i sám vymýšlel. Za zmínku stojí zejména populární verze Russellova paradoxu, tzv. *paradox holiče*:

[8] Viz Wittgenstein [1922, § 3.323].
[9] Viz oddíl 4.2.
[10] Původem tohoto dělení je Ramsey [1925, s. 183 n.].

> Ve vesnici je člověk, jenž je holičem. Tento člověk holí všechny a pouze ty obyvatele vesnice, kteří se neholí sami. Otázka je, zda se holí sám.

Předpokládáme-li, že existují pouze dvě neslučitelné alternativy – holí se sám, nebo se neholí sám –, pak musíme z toho, že nás každá z nich dovede vždy k té druhé, a tedy ke sporu, usoudit, že ve vesnici neexistuje žádný takový holič. To je vše.

Tento způsob řešení odpovídá Platónově kritice schematických úsudků eleatů a postupu jeho aporetických dialogů, v nichž není odvození sporu z „A je B“, v našem případě z věty

> holič holí sám sebe,

postačujícím důvodem k odvození věty „A není B“, v našem případě věty

> holič neholí sám sebe,

neboť i z té může být, a také je, odvoditelný spor. Možným závěrem je pak postřeh, že účastníci rozhovoru či předkladatelé argumentu ještě docela dobře nevědí, o čem hovoří, tedy, že „A není“ neboli:

> holič neexistuje.

Něco podobného se samozřejmě nabízí i u paradoxu Russellova. Rozdíl oproti případu s holičem je ovšem ten, že lidé ve zmíněné vesnici existují nezávisle na tom, zda jednoho z nich nazýváme, či nenazýváme holičem. U množin je tato nezávislost na pojmenování pochybná, tj. nejprve musíme nějaká pojmenování mít, aby se jiná, jako např. $\{x \mid x \notin x\}$, ukázala být nemožná, selhávající ve své deskriptivní roli. Těžko tedy prohlašovat některé množiny za neexistující, když nemáme žádná jasná kritéria množinové existence! K podobnému nedourčení dochází i u dalšího, možná nejznámějšího sémantického paradoxu, totiž paradoxu lháře neboli *paradoxu Epiménidova*:

> Kréťan řekl: „Všichni Kréťané jsou lháři.“

Tento paradox lze ovšem zneškodnit celkem snadno, neboť jednak neplatí, že by lhář musel lhát pořád, a i kdyby ano, lze argumentovat takto: Pokud by byla věta „všichni Kréťané jsou lháři“ pravdivá, pak by byl lhářem i Kréťan Epidémidés, a věta by tedy byla nepravdivá, což je spor. Kdyby ale byla věta nepravdivá, k žádnému sporu nedospějeme, neboť neplatí-li, že jsou všichni Kréťané lháři, neznamená to, že všichni mluví pravdu, ale jen, že někteří z nich mluví pravdu. Problematičtější je proto až paradox připsaný Eubúlidovi

> Eubúlidés řekl: „Teď lžu.“

či jeho Tarského adaptace

(c) věta (c) je nepravdivá.[11]

Ve všech těchto větách, stejně jako v případě třetího muže, se jedná o případy tzv. *autoreference*, tedy odkazu k sobě samému, což zavdalo Russellovi podnět k tomu, aby jako příčinu, a tedy i jako klíč k řešení paradoxů, viděl příměr *bludného kruhu*. Russell jej formuloval takto:

> Cokoli obsahuje vázanou proměnnou, nesmí být mezi možnými hodnotami této proměnné.[12]

Holič, stejně jako Russellova množina, je zjevně definován odkazem na celek, v němž již musí být obsažen, což, použijeme-li Tichého příměr,[13] připomíná situaci, v níž má někdo smontovat automobil, a pro součástky, které k tomu potřebuje, si jezdí tímto automobilem samotným. Jakkoli jsou tyto analýzy a příměry výmluvné, je ale užití bludného kruhu jako obecného řešení uvedených paradoxů spíše matoucí, zvláště když mnohé případy, na něž je lze formálně aplikovat, jsou zcela neškodné, jako např. definice průměrně vysokého člověka (který je ve skupině lidí, odkazem na něž je definován), nebo ho naopak plodně využívají, jako výše uvedené zavedení nekonečné posloupnosti objektů.

Nám zde stačí zobecnit již několikrát řečené: Stejně jako není výraz *sám o sobě* jménem, není ani větou ve smyslu artikulace nějakého rozdílu, tahu v jazykové hře, něčím, co bychom chtěli kvalifikovat jako dobré či špatné, specificky tedy pravdivé či nepravdivé. Připustíme-li nyní, že je výraz (c) gramaticky správně utvořenou větou, neznamená to ještě, že by měl artikulovat soud, tj. být pravdivý či nepravdivý. Říkáme-li, že se jedná o soud, pak musíme vysvětlit, jaký rozdíl v něm má být vyjádřen, tedy podle jakých pravidel, případně za jakým účelem má být věta (c) klasifikována jako pravdivá či nepravdivá. Jestliže se nám to povede, což není nijak dopředu vyloučeno (vzpomeňme třeba na výraz „Černý není černý“), bude výraz (c) soudem. Pokud ne, odkazujeme s jeho pomocí do prázdna, totiž tam, kde žádný soud není. Příslušná věta pak nemá jednoduše smysl a žádná autoreference či bludný kruh s tím obecně nemají opět co do činění, a pokud ano, tak způsobem, jenž může být v jiných případech zcela neškodný. Tato analýza pokrývá i případ dalšího z prominentních sémantických paradoxů, tzv. *paradoxu Grellingova*, jenž zní takto:

---

[11] Srov. oddíl 5.
[12] Russell [1908].
[13] Tichý [1988, s. 47].

> Některé predikáty lze predikovat sobě, např. „slovo“ je slovo, „český“ je česky. Ty se nazývají *autologické*. Pro jiné to zase neplatí, např. „dřevěný“ není dřevěný, „německý“ není německy. Ty se nazývají *heterologické*. Otázka je, ke které z těchto dvou skupin patří predikát „heterologický“. Snadným rozborem případů zjistíme, že je heterologický, pokud není heterologický a *vice versa*.

Podobně jako není nutné předpokládat, že má každá gramaticky správně utvořená věta nějakou pravdivostní hodnotu, není ani důvod předpokládat, že by každý predikát o sobě musel být čemukoli smysluplně, resp. pravdivě či nepravdivě predikovatelný. Tak třeba již u predikátu „dřevěný“, jenž se primárně vztahuje k empirickým předmětům, není jeho aplikace na výrazy přímočará, zvláště když se k nim potřebujeme vztahovat jako k abstraktním *typům*, nikoli *token* napsaným na papíře. Dojde-li k takovému použití, jedná se tedy o tvrzení druhu „čísla nejsou zelená“, jimž – coby kategoriálně pomýleným – není důvod přiřazovat pravdivostní hodnotu. Podstatné ale je, že uvažované výrazy jako „dřevěný“ či „zelený“ mají alespoň nějaký smysl, tj. že je lze smysluplně predikovat v nějaké oblasti. Teprve tehdy se nazývají predikáty. Zda je to případ výrazu „heterologický“, je třeba posoudit podle okolností, v nichž by měl být využíván, přičemž uvedený paradox lze chápat jako náznak, že to nebude snadné.

Po příkladech paradoxů sémantických přejděme nyní k paradoxům matematickým, resp. k základům teorie množin, v jejímž rámci vznikly. To nám umožní stručně předvést také důvody, která k vzniku obou, teorie množin i množinových paradoxů, vedly, což jsou problémy spojené s počítáním a poměřováním nekonečna a s rozšířením matematického pojmu veličiny nekonečným směrem. Paradoxy, které zmíníme, jsou také typicky známy jako paradoxy nekonečna.

10.4 Paradoxy nekonečna

Počítání či poměřování, obecně tedy kvantifikace čehokoli, spočívá v nalezení kritéria, podle něhož budou dva poměřované objekty, a odvozeně pak veličiny, které jim připisujeme, považovány za stejné. O dvou tyčích např. řekneme, že jsou *stejně dlouhé*, jestliže je lze k sobě přiložit tak, že ani u jedné nepřečnívá kus přes tu druhou. O dvou nádobách řekneme, že jsou stejně objemné, jestliže po přelití tekutiny, která jednu z nich vyplňuje, do druhé, dosáhneme stavu, v němž nic nepřetéká a zároveň už není možné nic dolít. O tyčích pak můžeme říci, že mají stejnou *délku*, o nádobách, že mají stejný *objem*. V případě diskrétních veličin čili *množin* je takovým kritériem porovnání tzv. *jedno-jednoznačná* neboli *bijektivní* zobrazitelnost jedné množiny na druhou, tj. existence vztahu, v němž každému prvku jedné množiny odpovídá právě jeden prvek druhé množiny a *vice versa*. Viz obrázek 10.4. Formální charakteristika bijekce vypadá takto:

`10.4.1 Definice (Jedno-jednoznačné zobrazení):` *Množinu A lze jedno-jednoznačně zobrazit na množinu B, jestliže existuje funkce, která každému prvku z A přiřadí právě jeden prvek z B, přičemž každý prvek z B je něčemu přiřazen (tj. A je zobrazena na celou množinu B, a nikoli jen na nějakou její část), a dále platí, že žádný prvek množiny B není přiřazen dvěma různým prvkům množiny A.*

Povšimněme si, že *jednoznačné* neboli *funkcionální* zobrazení A na B je to, které splňuje první část uvedeného vztahu, tj. každému prvku A je přiřazen právě jeden prvek B, ale obecně není vyžadováno, aby dvěma různým prvkům A odpovídaly různé prvky B, tj. aby bylo funkcionální i směrem od B k A. Vyžadujeme-li i tuto obrácenou funkcionalitu, zís-

pondělí	$\longleftrightarrow$	Šmudla
úterý	$\longleftrightarrow$	Prófa
středa	$\longleftrightarrow$	Kejchal
čtvrtek	$\longleftrightarrow$	Rejpal
pátek	$\longleftrightarrow$	Stydlín
sobota	$\longleftrightarrow$	Štístko
neděle	$\longleftrightarrow$	Dřímal

Obrázek 10.4: Porovnání trpaslíků a dnů

káváme právě jedno-jednoznačné zobrazení, které hodláme využít jako kritérium při srovnávání mohutnosti množin.

`10.4.2 Definice (Rovnost kardinalit):` *Množiny A a B jsou stejně velké (alternativně říkáme, že mají stejný počet prvků, stejnou mohutnost či kardinalitu), symbolicky $|A| = |B|$, jestliže lze A jedno-jednoznačně zobrazit na B.*

Význam tohoto ustanovení je následovný. Chceme-li např. ověřit, že na stole je stejný počet vidliček jako nožů, provedeme jejich vzájemné spárování, tj. každému noži přiřadíme jednu vidličku a každé vidličce jeden nůž. Stejně tak ověříme, že je stejný počet Dvořákových jako Beethovenových symfonií či že Sněhurčini trpaslíci co do počtu odpovídají dnům v týdnu. V aplikaci na nekonečné totality vede ale právě uvedená definice k jevu, který byl tradičně znám jako jeden z nejjednodušších a zároveň nejvážnějších paradoxů nekonečna, totiž že:

> nekonečnou množinu lze jedno-jednoznačně zobrazit na vlastní část.

Vezmeme-li např. přirozená čísla N a vyjmeme z nich 1, lze obě množiny spárovat jednoduše tak, že číslu 1 přiřadíme číslo 2, číslu 2 číslo 3 atd., jak to ukazují první dva řádky obrázku 10.5. Hilbert tuto vlastnost neko-

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \cdots
\end{array}$$

Obrázek 10.5: Zobrazení množiny na vlastní část

nečna popularizoval příměrem nekonečného hotelu, jejž lze popsat takto: Hoteliér, kterému přijel solventní host a který má zároveň všechny pokoje obsazeny špatně platícími klienty, se jistě ocitl v nepříjemné situaci. Ne tak majitel nekonečného hotelu. Přes plně vyčerpanou kapacitu stačí, když z pokoje č. 1 přesune hosta do pokoje č. 2, obecně pak hosta z pokoje č. n do pokoje č. $n+1$. Všichni staří hosté evidentně bydlí a pro nového hosta je připraven pokoj č. 1.

Z aritmetického hlediska může být přitom oním novým hostem např. číslo 0, které bylo (ovšem stejně jako 1) do číselného oboru přijato až později. Uvedený argument takto ukazuje, v jakém smyslu na tom nezáleží. V dalším budeme proto označením N referovat podle okolností k přirozeným číslům bez 0 (jako většinou dosud) i s 0. Vidíme také, že v nekonečném hotelu lze uvedeným způsobem ubytovat nejen jednoho hosta, ale prakticky jakýkoliv počet hostů, včetně počtu nekonečného, jak to ukazují zbylé řádky nákresu. V nich jsou přirozená čísla jedno-jednoznačně zobrazena na čísla sudá, resp. lichá, a je jich tedy v tomto smyslu stejně. Paradoxnost tohoto pozorování je zajištěna jeho nesouladem s jiným, řeklo by se rovněž „intuitivním“ principem, jak ho artikuluje jeden z obecných pojmů Eukleidových *Základů*: „celek je větší než část“.[14] Srovnání obou principů vedlo Galilea i Bolzana k odmítnutí porovnatelnosti nekonečných množin jako nesmyslné, resp. k tvrzení, že z jedno-jednoznačné zobrazitelnosti jedné množiny na druhou neplyne, že jsou obě stejně velké.[15] Takovýto závěr je ovšem závislý na definici „velikosti“, která nedává smysl bez nějakého upřesnění. Rozsah problému se ukáže být zvláště patrný, když se pokusíme popsat, kdy je jedna množina menší, resp. větší než druhá, tj. vztah:

$$|A| < |B|.$$

Nabízí se stanovit, že to – stejně jako v případě konečných totalit – bude jedno-jednoznačná zobrazitelnost množiny A na (vlastní) část množiny B. Řečeno konkrétně: nožů je méně než vidliček, jestliže jsme je všechny spárovali a nějaké vidličky nám ještě zbyly. Co to znamená v nekonečném případě? Víme, že v tomto smyslu je sudých čísel méně než přirozených, neboť nám zbude ne jedno či pár čísel, ale nekonečno mnoho lichých čísel. Zároveň jsme ale zjistili, že sudých a přirozených čísel je stejně, neboť je lze jedno-jednoznačně spárovat. Pro nekonečná A by tedy mělo platit cosi jako

$$|A| < |A|,$$

což je přirozeně těžko udržitelné. Cantorův trik, jak umožnit plauzibilní srovnávání nekonečných totalit a zároveň eliminovat závěry, jako byl ten předchozí, se zdá být – poté, co byl formulován a přijat – až geniálně jednoduchý. I z toho je vidět, jak fakticky postupuje logika objevu, tedy jak lze to, co se zprvu považuje za nemyslitelné a sporné, zcela překonávat a přetvářet v samozřejmosti, jak to coby zkušenostní princip popsal a proslavil Hegel. Stačí totiž, když v definici uspořádání velikostí množin nevyjdeme z termínu „menší“, nýbrž z termínu „menší nebo rovna než“, tj. stanovíme následující:

`10.4.3 Definice (Uspořádání kardinalit):` *Kardinalita množiny A je menší nebo rovna kardinalitě množiny B, symbolicky $|A| \leq |B|$, jestliže lze A jedno-jednoznačně zobrazit na množinu B nebo na některou její část.*

Závěr, k němuž jsme nyní u nekonečných totalit oprávněni, je tedy nanejvýš

$$|A| \leq |A|,$$

[14] Eukleidés [El., I, obecný pojem 5].
[15] Viz třeba Bolzano [1851, § 21].

na němž nic paradoxního není. Ostré uspořádání, tj. vztah „menší“, definujeme spojením vztahů, které máme:

`10.4.4 Definice (Ostré uspořádání kardinalit):` *Velikost množiny A je ostře menší než velikost množiny B, symbolicky $|A| < |B|$, jestliže lze A jedno-jednoznačně zobrazit na část B a nelze ji jedno-jednoznačně zobrazit na celé B, tedy:* $|A| < |B| \leftrightarrow (|A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|)$.

Skrze tyto „drobné“ úpravy lze od původního sporu dospět k nečekané revizi a rozšíření původních pojmů velikosti a veličiny. Ve vztahu k nekonečné množině dostáváme následující vymezení:

`10.4.5 Definice (Nekonečná množina):` *Množina je nekonečná, když ji lze jedno-jednoznačně zobrazit na některou její vlastní část.*

Zda a jakým způsobem lze přitom uvedené revize v rámci poměřování nekonečných množin plodně využít, ze samotného odstranění rozporu nijak neplyne, a bylo opět Cantorovou zásluhou, že zde ukázal směr další cesty. Zprvu se totiž zdálo, že se splní Bolzanův dohad, že z hlediska jedno-jednoznačné zobrazitelnosti jsou všechny nekonečné množiny stejně velké. To by potvrzovaly i následující průběžné výsledky, jejichž důkazy stručně naznačíme:

(1) racionálních čísel je stejně jako přirozených,

(2) ve čtverci je stejně bodů jako na jeho straně,

(3) v kontinuu je stejně bodů jako v jakémkoli z jeho intervalů.

Než přistoupíme k jejich diskusi, zavedeme ještě standardní pojem týkající se zobrazitelnosti na množinu přirozených čísel:

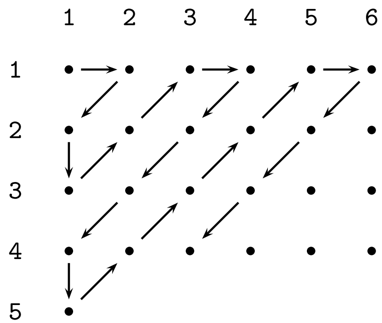
`10.4.6 Definice (Spočetná množina):` *Množina A se nazývá spočetná, jestliže je její velikost menší nebo rovna velikosti množiny přirozených čísel, tj.* $|A| \leq |N|$.

Uvážíme-li, že prvky množiny N jsou „přirozeně“ uspořádány standardním způsobem $1, 2, 3, \ldots$, pak příslušné zobrazení A na (část) N určuje také nějaké uspořádání prvků z A, a lze tedy říci, že spočetností dané množiny myslíme možnost očíslování jejích prvků přirozenými čísly, neboli sestavení vyčerpávajícího (případně nekonečného) seznamu, který všechny tyto prvky obsahuje. Takovýmto způsobem jsme v oddílu 9.4 při důkazu věty o úplnosti očíslovali všechny formule `KVL`.

Prvním úkolem je provést takovéto vyčíslení pro množinu racionálních čísel (Q). To se zdá být zprvu neproveditelné, neboť co do struktury vykazují racionální čísla zcela odlišné rysy než čísla přirozená. Jsou např. *hustá*, tj. mezi každými dvěma z nich je nějaké číslo další, což může snadno vyvolat dojem, že jakkoli navržený seznam racionálních čísel některá z nich nutně vynechá. Kdybychom začali třeba takto

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots,$$

vynechali bychom mj. všechna čísla mezi sousedícími členy, nemluvě o číslech větších než 1 a menších než 0, pokud bychom již zavedli i (racionální) čísla záporná. Že lze vytvořit i vyčerpávající seznam, ukazuje obrázek 10.6, v němž políčko tabulky se souřadnicemi a, b určuje číslo $\frac{a}{b}$. Šipkami je pak zachycen průchod, který žádné z těchto čísel nevynechá. To, že



Obrázek 10.6: Spočetnost racionálních čísel

jsme se ve vyčíslení omezili jen na racionální čísla kladná, přitom nevadí, neboť není problém tabulku zrcadlovým překlopením kolem vertikální osy zdvojit a vymyslet průchod, který pokryje i tuto extenzi. Skutečnost, že se v průchodu některá čísla opakují (např. diagonála určuje vždy číslo 1), nevadí. Podstatné je, že platí

$$|Q| \leq |N|,$$

tj. množina Q je spočetná. Opačná nerovnost $|N| \leq |Q|$ je jednoduchá. Usoudit z obou, tj. z $|Q| \leq |N|$ a $|N| \leq |Q|$, na rovnost

$$(1) \quad |N| = |Q|$$

bychom ale mohli až na základě tzv. *Cantorovy-Bernsteinovy věty*, která tvrdí, že z toho, že $|A| \leq |B|$ a $|B| \leq |A|$, již plyne, že $|A| = |B|$. Tato věta sice platí, její důkaz je však všechno jiné, jen ne triviální.[16] Alternativně bychom mohli také popsat přímo jedno-jednoznačné zobrazení Q

[16] Kromě standardních příruček ho lze najít třeba in: Kolman [2008, s. 131].

na N. Námi popsanému průchodu tabulkou přitom odpovídá tzv. Cantorova párovací funkce $\pi(x,y) = x + \frac{1}{2}(x+y-1)(x+y-2)$, která dvojici přirozených čísel přiřazuje právě jedno přirozené číslo a *vice versa.* Na jejím základě tedy přímo platí, že $|N \times N| = |N|$, kde $N \times N$ označuje množinu všech uspořádaných dvojic přirozených čísel.[17] Uvedenou rovnost lze vyjádřit také tak, že v tabulce o N sloupcích a N řádcích je právě N políček. K podobnému výsledku dospěl Cantor i v situaci, kdy byla stranami příslušné tabulky čísla reálná. V omezení na interval $[0,1]$ bychom dostali tvrzení:

(2) $|[0,1] \times [0,1]| = |[0,1]|.$

Schematicky je v něm zachyceno, že je ve čtverci stejně bodů jako na jeho straně, a tudíž i jako v krychli a dalších, vícedimenzionálních „tělesech“, neboť redukce dvou dimenzí na jednu umožňuje zjevně redukovat i tři na dvě, obecně tedy $n+1$ na n pro libovolné n přirozené. Něco takového bylo ovšem nejen obecně, nýbrž i samotným Cantorem do poslední chvíle považováno za zhola nemožné a šokující. Základem důkazu je přitom desetinný, obecně tedy p-adický rozvoj reálného čísla spolu s myšlenkou přiřadit dvěma číslům

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots \qquad\qquad b = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$$

z intervalu $[0,1]$ číslo

$$c = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots$$

z téhož intervalu. Tato konstrukce ovšem nezajišťuje jedno-jednoznačné zobrazení čtverce $[0,1] \times [0,1]$ na úsečku $[0,1]$, a to s ohledem na dvojznačnost dekadického rozvoje reálných čísel, v němž zápisy typu $0,35000\ldots$ a $0,34999\ldots$ zastupují tatáž čísla. Vzhledem k tomu, že se jedná o jediný typ dvojznačnosti dekadických reprezentací, stačí při úvahách o mohutnosti reálných čísel vyškrtnout zápisy končící samými nulami jako nepřípadné. Výsledkem je prosté přiřazení bodů čtverce bodům jeho strany, tedy důkaz $|[0,1] \times [0,1]| \leq |[0,1]|$. Že dané zobrazení nezajišťuje také opačnou nerovnost, plyne z toho, že v důsledku našeho rozhodnutí neodpovídá číslu

$$0, c_1 d_1 \ldots c_k d_k c_{k+1} 0 c_{k+2} 0 \ldots$$

žádná dvojice z $[0,1] \times [0,1]$, tj. některým bodům strany čtverce neodpovídá žádný jeho bod. Tento defekt Cantor záhy opravil prostřednictvím dosti komplikované konstrukce, kterou nebudeme reprodukovat.

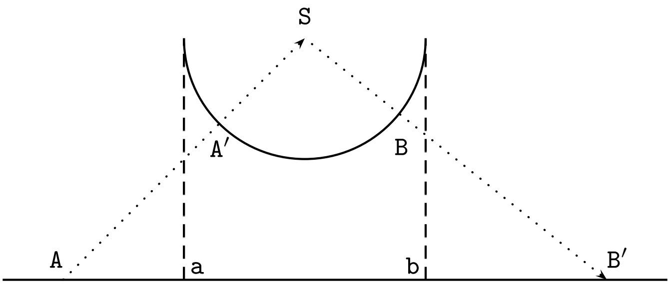
[17] Oficiálně toto značení zavedeme později, v oddílu 12.2.

Podstatné je, že máme funkci jedno-jednoznačně vnořující čtverec do jeho strany. Jelikož strana je do čtverce jedno-jednoznačně vnořitelná z definice, lze kýžený závěr odvodit také díky Cantorově-Bernsteinově větě.

Platnost analogického vztahu pro všechna reálná čísla (R), tj. vztahu $|R \times R| = |R|$ se nyní snadno odvodí z možnosti jedno-jednoznačného zobrazení kontinua R na $(0, 1)$, resp. libovolný reálný interval (a, b), což odpovídá rovnosti:

(3) $|R| = |(a, b)|$.

Její platnost lze nejrychleji nahlédnout na obrázku 10.7. Přímky kolmé na reálnou osu v něm konstruují jedno-jednoznačné zobrazení mezi body půlkružnice a intervalem (a, b), zatímco přímky procházející středem S půlkruhu přiřazují každému bodu A reálné osy právě jeden bod A' půlkružnice a každému bodu B půlkružnice právě jeden bod B' osy, a to různým bodům vždy body různé. Podobné názorné úvahy jsou přitom velmi staré. Úhrnem jsme tedy dokázali, či alespoň naznačili platnost ur-



Obrázek 10.7: Zobrazení kontinua na vlastní část

čitých vztahů, v jejichž důsledku se velikost jistých nekonečných totalit jeví jako redukovatelná na velikost totalit menších dimenzí. Všechny tyto vztahy, ač překvapivé, jen potvrzují původní domněnku o neužitečnosti, byť ne vnitřní spornosti porovnávání velikosti nekonečných totalit nástroji jedno-jednoznačného zobrazování. Skutečným objevem, který dal teprve vzniknout teorii množin jako samostatné disciplíně, byla proto až nemožnost bijektivní redukce kontinua na přirozená, resp. racionální čísla, tj. tvrzení, že:

(4) reálných čísel je více než přirozených, tedy nespočetně mnoho.

Původní důkaz z roku 1873 přitom vycházel ze specifik Cantorovy konstrukce reálných čísel. Slavnější důkaz byl podán roku 1891 v přednášce uveřejněné v článku „K elementární otázce teorie množin“,[18] a to přímo v jeho obecnější verzi, z níž se usuzuje, že posloupnost velikostí nekonečen nemůže mít horní mez, a není tedy v žádném případě vyčerpána nekonečnými mohutnostmi podmnožin kontinua, neboť:

(5) ke každé množině existuje množina větší kardinality.

Tím se teorie množin transformovala z abstraktního výzkumu kontinua ve vědu o stratifikovaném nekonečnu. Principem zmíněného důkazu je tzv. *diagonální metoda*, která má ve filosofii matematiky prominentní postavení nejen proto, že je s ní a s důsledky, které s sebou nese, spjata řada ideových kontroverzí, např. právě v otázce existence vyšších mohutností a jejich interpretace, ale i díky úzké vazbě na některé z logických paradoxů, což souvisí s již zmíněnými fenomény autoreference a bludného kruhu. Byla to přitom právě udivující jednoduchost Cantorova argumentu, která zajistila a stále zajišťuje teorii množin obecné přijetí u většiny matematiků a mnoha filosofů. Z didaktických důvodů začněme jeho speciální verzí, z níž plyne pouze nespočetnost kontinua.

10.5 Nespočetnost kontinua

Množina reálných čísel je zjevně větší nebo rovna množině čísel přirozených, tj. chceme dokázat, že je ostře větší, tedy že neexistuje jedno-jednoznačné zobrazení N na R. Úvaha postupuje sporem, tj. předpokládáme, že je kontinuum R spočetné. Pro jednoduchost se přitom omezíme na interval $(0,1)$, což stačí, neboť není-li spočetný on, pak ani celé R. Tvrdíme nyní, že existuje vyčíslení, v němž se na nějakém místě objeví každé z čísel z $(0,1)$. To znamená, že máme nějakou posloupnost f čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ z $(0,1)$, kde libovolné číslo a_m má formu

$$a_m = 0{,}a_{m,1}\, a_{m,2}\, a_{m,3}\, \ldots,$$

kde $a_{m,n}$ je n-tý člen desetinného rozvoje m-tého čísla v daném vyčíslení f. Znázorněme si f takto:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}\, a_{1,2}\, a_{1,3}\, \ldots \\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}\, a_{2,2}\, a_{2,3}\, \ldots \\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}\, a_{3,2}\, a_{3,3}\, \ldots \\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}\, a_{4,2}\, a_{4,3}\, \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

[18] Cantor [1892].

Jádro důkazu spočívá nyní v uvážení diagonály $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \ldots$ neboli čísla:

$$d = 0, a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\ \ldots$$

To se mezi prvky vyčíslení klidně může vyskytovat, tj. předpoklad, že pro nějaké n platí $a_n = d$, nevede ke sporu. To už ale neplatí o čísle, které vznikne, jestliže diagonální číslo d v každém členu rozvoje nějak deformujeme, tj. přejdeme-li od něho např. k číslu $e = 0, e_1 e_2 e_3 \ldots$ takovému, že pro jeho m-tý člen rozvoje platí:

$$e_m = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } a_{m,m} = 2, \\ 2 & \text{jestliže } a_{m,m} \neq 2. \end{cases}$$

Kdyby se toto číslo vyskytovalo ve vyčíslení f, muselo by se rovnat nějakému a_m, což ale není možné, neboť e se od každého členu vyčíslení liší právě v diagonálním členu $a_{m,m}$ rozvoje, tj. $e_m \neq a_{m,m}$, a tudíž $e \neq a_m$ pro libovolné m. Jelikož je e dobře definovaný prvek intervalu $(0, 1)$, znamená to, že vyčíslení f nevyčerpává celý interval. My jsme však předpokládali opak. Tudíž jsme se ocitli ve sporu, což vede k závěru, že předpokládané vyčíslení – jedno-jednoznačné zobrazení N na $(0, 1)$, a tudíž na R – nemůže existovat, tedy:

$$|N| < |R|.$$

K argumentu samému poznamenejme nejprve to, že je závislý na správné deformaci diagonály, tj. přechod od d k e nelze volit úplně libovolně. Kdybychom stanovili např. toto

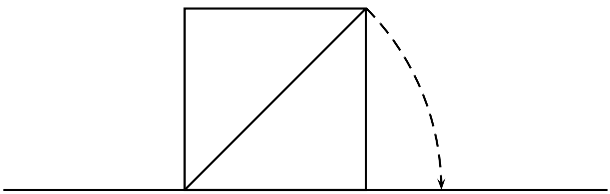
$$e_m = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } a_{m,m} = 1, \\ 1 & \text{jestliže } a_{m,m} \neq 1, \end{cases}$$

dalo by nám vyčíslení

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,09999\ldots \\ a_2 &= 0,01111\ldots \\ a_3 &= 0,00111\ldots \\ a_4 &= 0,00011\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

diagonálu $d = 0,01111\ldots$, jejíž deformací získáme číslo $e = 0,10000\ldots$, které je identické s prvním členem posloupnosti a_1. To je opět důsledek dvojznačnosti reprezentací. V tomto okamžiku může ovšem kritický čtenář přemýšlet, kde se ona dvojznačnost vzala a jaký je vůbec vztah určité reprezentace, v tomto případě nekonečné posloupnosti číslovek, k označovanému číslu, tedy k objektu, který je na ní v nějakém smyslu nezávislý. Tyto otázky nechávají matematici obvykle nezodpovězeny, resp. chovají se k nim jako k banalitám či je předpokládají jako neproblematické, přesně v duchu Platónových poznámek z *Ústavy*.[19] V rámci podobenství o úsečce tam Platón nechává matematiku jako předstupeň dialektiky od dialektiky samé odlišit právě určitou bezmyšlenkovitostí ve vztahu k jejím předpokladům.

Z tohoto pohledu spočívá chyba, které se dopustil Cantor, v tom, že se dívá na reálná čísla právě jako na cosi přirozeně daného. Tváří v tvář netriviálnímu vývoji tohoto pojmu je ale pravdou všechno jiné, což lze rychle nahlédnout právě s ohledem na problém dvojznačnosti dekadických reprezentací. To, co nejprve máme, je vágní představa o bodech nějaké přímky a způsobu jejich lokalizace. Snadnou možnost této lokalizace přitom nabízí jejich pojmenování skrze racionální poměry úseček, resp. poměry zvolené úsečky jednotkové a jejích násobků. To odpovídá praxi dělení dané úsečky na stejný počet dílů a jejich opakovaného nastavování. Objev iracionality, např. u vztahu úhlopříčky a strany jednotkového čtverce, ukazuje omezenost tohoto způsobu strukturování přímky, neboť bodu vzniklému nanesením kružítkem jako na obrázku 10.8 žádné racionální pojmenování neodpovídá. Analytická geometrie Descartova před-



Obrázek 10.8: Konstrukce iracionálního čísla

stavuje způsob, jak tento bod pojmenovat analyticky, totiž jako (kladný) kořen rovnice $x^2 - 2 = 0$. Přitom je zřejmé, že tato rovnice sice nemá racionální kořeny, ale racionálními čísly lze kýžený bod libovolně aproximovat, přiblížit se mu. Uvědomíme-li si, že nám příslušný bod není dán jinak nežli takovýmito aproximacemi, nabízí se ho skrze ně i identifikovat či s nimi přímo ztotožnit, což není právě nic jiného nežli Cantorova definice reálného čísla – bodu reálné přímky – jako jisté „zhušťující" se posloupnosti racionálních čísel, bodů. Nám známé dekadické zápisy kó-

[19] Platón [Res., 510c].

dují právě tyto posloupnosti, kdy např. hledaný kořen rovnice $x^2 - 2 = 0$ popíšeme jako $1{,}414213\ldots$ ve významu sledu racionálních čísel:

$$1, \tfrac{14}{10}, \tfrac{141}{100}, \tfrac{1414}{1000}, \tfrac{14142}{10000}, \tfrac{141421}{100000}, \tfrac{1414213}{1000000} \text{ atd.}$$

Podstatné je, že zde před sebou nemáme *objev* (jak vypadají body přímky), ale *rozhodnutí* tyto body jistým způsobem identifikovat, specifikovat. Nyní lze snadno vysvětlit i výše uvedenou dvojznačnost. Rozhodli jsme se body přímky lokalizovat posloupnostmi racionálních dělení nějaké výchozí jednotkové úsečky a jejich nastavováním. Je přitom lhostejné, na kolik základních částí tuto úsečku rozčleníme, podle zvoleného p pak dostaneme příslušný p-adický zápis. Standardní je dělení na deset částí, běžně se využívá i dělení binomické, tj. na části dvě. Jednotlivá reálná čísla – body přímky – jsou nyní určována postupnou volbou hranic některého ze zvolených dílků a jeho opakovaným dělením na tentýž počet částí *ad infinitum.* Pojmenujeme-li si dílky, resp. jejich levé hranice číslovkami $0, 1, \ldots, p-1$, pak ve výše uvedeném případě $\sqrt{2}$ volíme v rámci dílku 1 přímky dílek 4, v něm pak dílek 1, v něm pak dílek 4 atd. Je zřejmé, že tento způsob identifikace vede k jediné dvojznačnosti v případech bodů, které odpovídají zvoleným hranicím dělení, tj. např. hranici 5 lze v jakékoli fázi rozvoje aproximovat zleva, když po hranici 4 volíme vždy hranici 9, nebo zprava, když po hranici 5 volíme vždy hranici 0. Všechna ostatní určení jsou jednoznačná, tj. popisují z definice odlišné body přímky.

Nepříjemné důsledky toho, když zapomeneme na podobné podmínky a předpoklady zavádění (abstraktních) objektů, jako jsou v našem případě reálná čísla, lze v souvislosti s argumentem pro nespočetnost kontinua rozpoznat na tzv. *paradoxu Richardovu.* Ten lze rekonstruovat takto:

> Uvažujme celek všech reálných čísel z intervalu $(0, 1)$ popsatelných (definovatelných) konečně mnoha slovy. Takových popisů je jen spočetně mnoho, čísla jimi označovaná lze tedy seřadit v posloupnost. S odkazem k ní můžeme diagonální metodou sestrojit jméno čísla, které v této posloupnosti není. Toto jméno je ale konečné, příslušné číslo by tam tedy zároveň být mělo.

Analýza tohoto paradoxu nám umožní kriticky posoudit povahu Cantorova diagonálního argumentu, a tím i status některých tvrzení teorie množin, stejně jako obecný význam výše uvedených paradoxů sémantických, s nimiž je argument úzce spřízněn. Ve všech uvedených paradoxech jsou přitom za samozřejmé brány předpoklady filosoficky problematičtější nežli metafora bludného kruhu, která nemá primárně žádnou filosofickou ani logickou relevanci. Abychom to viděli, rozložme Richardův paradox do několika jednoduchých kroků:

(1) Máme jazyk nad fixní sadou elementárních znaků, např. symbolů psacího stroje nebo klávesnice počítače.

(2) Zvolíme nějaké „abecední“ uspořádání těchto znaků a vytvoříme posloupnost všech jejich možných konečných kombinací.

(3) Projdeme tento seznam a vyškrtáme všechny výrazy, které nedefinují reálné číslo z intervalu $(0,1)$.

(4) Tak získáme vyčíslení f všech požadovaných jmen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dostupných v daném jazyce, a tudíž i vyčíslení $\mathbf{f}$ všech čísel $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \ldots$, která jsou v tomto jazyce pojmenovatelná, kdy tučně pro tento okamžik označujeme význam daného výrazu.

(5) Odkazem na zcela konkrétní diagonální proceduru tvoříme výraz „diagonální číslo posloupnosti f“, zkráceně *diag*, označující číslo **diag**, které nemůže být s ohledem na způsob konstrukce identické s žádným $\mathbf{a_n}$.

(6) To znamená, že ani výraz *diag* nemůže být roven nějakému a_n, což je ovšem v rozporu s jeho konečností.

Začněme bodem (1). Ten je zcela neproblematický v případě jednoduchých nebo umělých jazyků. Paradox ale svoji sílu čerpá z aplikace na jazyk přirozený, což dělá předpoklad (1) nesamozřejmým z následujících důvodů. Zaprvé, neexistuje jeden, nýbrž mnoho přirozených jazyků, s různými abecedami, a nemáme žádný důvod, proč považovat jeden z nich za nějak přirozenější či základnější než druhý. A zadruhé, přirozený jazyk, jazyk, který zcela univerzálně používáme, není právě na rozdíl od jazyků umělých fixní ani co do užívaných slov, ani co do sady základních znaků, tj. stále si ponecháváme možnost jeho rozšíření o nová slova a nové základní symboly (např. @). To vše může blokovat fázi (2) argumentu, zvláště když bychom ono vyčíslení všech kombinací znaků chtěli přenechat stroji. Pro tento okamžik předpokládejme, že nic z řečeného podstatně nevadí, tj. psací stroj nám je dost dobrý, a postupme k bodu (3) a zbylým.

Procházíme-li systematicky posloupnost všech výrazů dané abecedy, je zřejmé, že jednou musíme narazit na výraz *diag*. Paradox vzniká proto, že tento výraz vypadá jako jméno čísla definovaného odkazem k posloupnosti f. A tak tomu skutečně je, jakmile byla tato posloupnost vytvořena, tj. jakmile byly všechny nevhodné výrazy vyškrtány. Stejně jako výraz „tato kočka“ je takto i výraz f jménem *něčeho* výhradně v závislosti na kontextu použití, což se zde redukuje na předpoklad, že se v příslušném (logickém) prostoru vyskytuje nějaká posloupnost nebo kočka. A jelikož v procesu vytváření posloupnosti f tato posloupnost z definice ještě neexistuje, jméno *diag* musí být vyškrtnuto, což řeší paradox. Za jeho odvozením se tedy skrývá náš starý problém. Být jménem něčeho není pouze syntaktický, ale také sémantický pojem, kritéria onoho vyškrtání výrazů, které nejsou jmény čísel, musí být tedy dána předem, tj. nelze je primárně poznat na jménech samotných. Výraz *diag*, stejně jako žádný jiný výraz či artefakt, není jménem automaticky, tj. pouze na základě svého tvaru, stejně jako není jménem každá deskripce či výraz, který jméno připomíná.

Nyní přejděme ještě stručně ke Cantorovu argumentu pro nespočetnost kontinua. Mějme k dispozici nějaký systém D kritérií, popisujících, jak by mělo vypadat pojmenování reálného čísla, a to kritérií, která jsou natolik schematická, že nám umožňují uspořádání těchto jmen v posloupnost f. Zkonstruujme výraz *diag* a formulujme paradox. Nabízíme nyní dva možné závěry, z nichž první je tento:

(A) výraz *diag* není jménem reálného čísla.

Na tento úsudek máme obecně právo, neboť pojem čísla, a zvláště čísla reálného, není nijak přirozený a odvíjí se právě od výchozích kritérií toho, co za číslo, resp. jeho pojmenování hodláme považovat. Druhý možný závěr je tento:

(B) výraz *diag* je jménem reálného čísla, které transcenduje výrazové možnosti D.

Zde chápeme paradox jako symptom toho, že je systém D příliš omezený, totiž v konfrontaci s dalšími racionálními kritérii pro to, co lze nebo co je vhodné ještě za reálné číslo považovat. Jde zde o jistá rozhodnutí, v tomto případě opět rozhodnutí definovat pojem reálného čísla jinak, totiž dostatečně liberálně na to, aby transcendoval každou schematizaci, která by jeho instance umožnila uspořádat v řadu. Důkaz nespočetnosti kontinua totiž neimplikuje nutně, že je reálných čísel *více* než přirozených, a že tedy musí existovat reálná čísla nepojmenovatelná v jazyce. K takovému závěru lze dojít jen tehdy:

(1) předpokládáme-li, že je jejich celek dán nezávisle na zvolených reprezentacích,

(2) dáváme-li Cantorovu idiosynkratickému pojmu (porovnávání) velikosti množiny skrze (ne)možnost jedno-jednoznačného přiřazení nějaký přirozený význam.

To první jde zcela proti duchu obratu k jazyku, který je vodítkem našeho zkoumání a jehož nevyhnutelnost jsme zdůvodnili dříve. To druhé je pošetilé již proto, že navržené porovnávání množin mělo zprvu jasné „kontraintuitivní“ důsledky, např. zobrazení množiny do sebe sama, které je v rozporu s požadavkem, aby byl celek větší než část, tedy něčím, co by většina těch, kdo neznají Cantorovu nauku, označila právě za „přirozené“. V Cantorově definici rovnosti mohutností máme proto jen další exemplář do naší kolekce rozhodnutí, která bylo možné, nikoli nutné, v oblasti základů matematiky učinit.

10.6 Matematické paradoxy

Nyní předveďme zobecnění Cantorova diagonálního argumentu, které na jedné straně završilo emancipaci teorie množin od matematické analýzy, na straně druhé otevřelo dveře dalším paradoxům. Jelikož obecné řešení těchto paradoxů považujeme za rámcově identické s řešením paradoxů předchozích, nebudeme se podrobně věnovat rozličným oficiálním strategiím, jež na ně byly aplikovány, ale zůstaneme na co nejobecnější rovině. Za tímto účelem přesněji popíšeme několik elementárních pojmů, počínaje pojmem podmnožiny.

10.6.1 Definice (Podmnožina): *Řekneme, že množina A je podmnožinou množiny B (symbolicky $A \subseteq B$) tehdy a jen tehdy, jestliže každý prvek A je i prvkem B, tedy pro každé x platí: jestliže $x \in A$, pak $x \in B$. Množinu A nazveme vlastní podmnožinou množiny B (symbolicky $A \subset B$), jestliže platí $A \subseteq B$ a $A \neq B$, tj. nějaký prvek z B nepatří do A.*

Ač se nemusí jevit jako příliš zajímavý, je pojem *podmnožiny*, především ve vztahu k pojmu *prvku*, zcela zásadním konceptem moderní sémantiky. Umožňuje nám totiž artikulovat rozdíl mezi větami typu

(1) Sókratés je smrtelný/běží,

(2) lidé jsou smrtelní/běží

jako logicky relevantní, odvislý od zavedení odlišné kategorizace výrazu „Sókratés“ coby vlastního jména a výrazu „smrtelný“ coby predikátu, výrazu vlastnosti, případně „běží“ coby slovesa, a jim odpovídajícím sémantickým kategoriím předmětu (individua) a pojmu (vlastnosti, množiny předmětů). Na základě této normace jsou pak uvedené věty čteny jako:

(1) předmět Sókratés spadá do množiny smrtelných předmětů,

(2) množina lidí je podmnožinou smrtelných předmětů.

Symbolicky píšeme:

(1) Sókratés $\in \{x \mid x$ je smrtelný$\}$,

(2) $\{x \mid x \text{ je člověk}\} \subseteq \{x \mid x \text{ je smrtelný}\}$.

Příslušné rozlišení není přitom nějak přirozené či samo o sobě nevyhnutelné, jak ukazují dva tisíce let vývoje logiky, která ho znala jen na rovině gramatické, nikoli logické. K tomu se vyjádříme záhy v nárysu formálního fragmentu Aristotelovy sylogistiky v kapitole 11.

Jako podstatný se daný rozdíl ukazuje až tehdy, když si ho vynutí nějaké inferenční odlišnosti a případné paradoxy, které vyvstanou z jejich zanedbání či míšení. K jednomu takovému došlo v rámci tzv. *Schröderova paradoxu* na pozadí úvah matematických, jak je bylo zvykem pěstovat v rámci algebry logiky. V té, jak jsme viděli, se s pojmovými písmeny zacházelo jako s algebraickými proměnnými za množiny a čísla zároveň. Jedním ze snadno odvozených zákonů byl pak vztah

$$A \times \emptyset = \emptyset,$$

jenž lze interpretovat tak, že je prázdná množina podmnožinou každé množiny, neboť vybereme-li z univerza množinu A, nad níž pak provedeme prázdný výběr, bude výsledkem opět prázdný výběr. Podle naší definice podmnožiny dostáváme analogický vztah

(α) $\emptyset \subseteq A$

jednoduše z toho, že je v ní využit materiální kondicionál: z předpokladu $x \in \emptyset$, jenž je triviálně nepravdivý, neboť $\emptyset$ žádné prvky nemá, dostáváme pravdivost implikace

$$x \in \emptyset \rightarrow x \in A$$

pro libovolné x. Schröder, jenž nerozlišoval mezi prvkem a podmnožinou, zaměnil nyní vztah (α) za vztah

(β) $\emptyset \in A$

a pro nějaké a, např. Měsíc, uvažoval množinu všech předmětů s ním identických, tj. objekt

$$A = \{x \mid x = \text{Měsíc}\}.$$[20]

Je zřejmé, že z definice by prvkem A měl být pouze Měsíc, podle věty (β) by tam měla být ale také prázdná množina. To ovšem znamená, že:

$$\emptyset = \text{Měsíc}.$$

[20] Viz Schröder [1890–1895, díl I, s. 245].

Schröder se tento kuriózní závěr pokoušel nepříliš přesvědčivě obhájit odkazem na frázi, že v A kromě Měsíce už není nic (v němčině přirozeně odpadne dvojitý zápor).[21] Na technické úrovni pak aplikoval jakousi protovariantu teorie typů, jíž se nebudeme zabývat. Odnést si z celé kauzy můžeme pouze postřeh, jak komplikovaná a nesamozřejmá byla ještě nedávno rozlišení, která považujeme či máme sklony považovat za banální.

Máme-li nyní nějakou konečnou množinu A, sestávající třeba z prvků a, b, c, můžeme se snažit zjistit, kolik má podmnožin. Z definice přitom patří mezi podmnožiny A toto A samo, tj. $\{a, b, c\}$, dále tři množiny dvouprvkové $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, tři množiny jednoprvkové $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ a množina $\emptyset$ prázdná. Stejně jako prázdná množina je i koncept množiny jednoprvkové primárně důsledkem vydělujícího pojetí množiny, kdy např. z popisu

$$\{x \mid x \text{ je satelit Země}\}$$

vyjde náhodně skupina

$$\{\text{Měsíc}\},$$

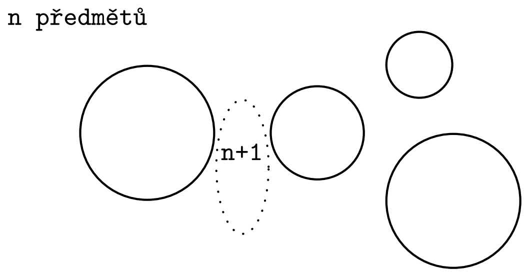
k níž bychom se pouhým shromažďováním nedostali. Tento kumulativní, atomický postoj byl ovšem pro předfregovskou sémantiku typický. O to nám ale už nyní nejde. Podstatné je pozorování, že množina o třech prvcích vydala na osm podmnožin, tedy exponenciálně vyšší počet, což platí obecně, tj. pro množinu o n prvcích dostáváme 2^n podmnožin. Shrneme-li je do další množiny, lze říci, že ke každé konečné množině existuje množina vyšší mohutnosti, a to tzv. množina potenční.

`10.6.2 Definice (Potenční množina):` *Potenční množinou (či také potencí) množiny A rozumíme množinu $\{B \mid B \subseteq A\}$ všech jejích podmnožin, kterou značíme jako $\mathcal{P}(A)$.*

Již tento postřeh, že lze k libovolné skupině předmětů vytvořit předměty další a že je tento počet neomezený, stojí v základech Zénónova *paradoxu plurality*. Předpokládáme-li, že ve světě existuje pluralita předmětů, pak musí mít nějaký počet. Aby tyto předměty byly odlišné, musí být nějak oddělené, což znamená, že mezi nimi musí existovat další předměty (volné prostory), jejichž úhrn je větší, než bylo předpokládáno. Viz obrázek 10.9. Zénón tak hájil Parmenidovo učení, podle něhož existuje jen jedna dále nedělitelná pravda. Předpokladem bylo samozřejmě, že počet

[21] Schröder [1890–1895, díl I, s. 212].

znamená počet *konečný*, neboť nekonečno nebylo až do Cantora uznáváno jako výsledek měření, ale naopak jako jeho neproveditelnost, tedy nedostatek určitosti. K podobnému sporu lze ale dojít i pro nekonečné



Obrázek 10.9: Paradox plurality

totality, jak uvidíme záhy. Podstatou jeho odvození stejně jako podstatou Cantorova úspěchu v ospravedlnění řeči o nekonečných totalitách bylo přitom přenesení vztahu

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|$$

z konečných i na nekonečné soubory. Takto dokázanému tvrzení se pak říká *Cantorova věta*. Základem jejího důkazu, resp. didaktickým mezikrokem k finálnímu zobecnění, může být důkaz věty:

$$|N| < |\mathcal{P}(N)|.$$

K tomu dospějeme snadnou úpravou argumentu pro nespočetnost R, uvědomíme-li si totiž, že stejně jako reálná čísla také podmnožiny N lze reprezentovat jako nekonečné posloupnosti přirozených čísel, a to v omezení na čísla 0 a 1. Máme-li nějakou množinu $A \subseteq N$, můžeme ji kódovat takovou posloupností nul a jedniček, v níž pozici n odpovídá 1 tehdy, když $n \in A$, a 0 tehdy, když $n \notin A$.[22] Lichá čísla jsou tedy např. reprezentována takto

$$1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ldots,$$

množina $\{2, 3\}$ takto

$$0\ 1\ 1\ 0\ 0\ \ldots$$

[22] Tento způsob odpovídá zavedení tzv. charakteristické funkce, které předvedeme v rámci definice 14.3.1.

atd. Je jasné, že každé podmnožině odpovídá právě jedna takováto posloupnost a každé posloupnosti právě jedna podmnožina. Další postup je již zcela analogický předchozímu. Předpokládáme, že existuje vyčíslení $A_1, A_2, A_3, \ldots$ všech množin z $\mathcal{P}(A)$ a že začíná např. takto:

$$\begin{array}{l} A_1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ \ldots \\ A_2\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ \ldots \\ A_3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\ A_4\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\ \vdots \end{array}$$

Z diagonály D přejdeme k její deformaci E prostým přehozením hodnot, obecně tedy konvencí:

$$x \in E \leftrightarrow x \notin A_x.$$

Pokud by E ve vyčíslení byla, muselo by pro nějaké n platit $E = A_n$, což nelze, neboť platí, že $n \in E$ tehdy a jen tehdy, když $n \notin A_n$, tj. obě množiny se liší právě v otázce náležení čísla n. Uvedenou úvahu lze nyní zobecnit v následujícím smyslu. V argumentu jsme předpokládali, že je každému prvku z N přiřazen nějaký prvek potence $\mathcal{P}(N)$, a na základě toho ukázali, jak sestrojit prvek $\mathcal{P}(N)$, jenž zůstal nepřiřazen. Totéž uděláme pro libovolnou množinu A, tj. vezmeme si libovolnou funkci f z A do $\mathcal{P}(A)$ a ukážeme, že se nemůže jednat o jedno-jednoznačné zobrazení A na $\mathcal{P}(A)$. Úvaha je následující. Funkce f přiřazuje prvkům množiny A podmnožiny množiny A. Je tedy smysluplné definovat k funkci f množinu E všech prvků x z A, které nenáleží do $f(x)$, tedy:

$$E = \{x \mid x \notin f(x)\}.$$

Tato množina je dobře definována, a tvoří tedy prvek množiny $\mathcal{P}(A)$. Pokud by příslušné f bylo bijekcí množin A a $\mathcal{P}(A)$, měl by množině E v A odpovídat nějaký prvek e takový, že $f(e) = E$. Pak by ale platila následující sada ekvivalencí:

$$e \in E \leftrightarrow e \in \{x \mid x \notin f(x)\} \leftrightarrow e \notin f(e) \leftrightarrow e \notin E.$$

A to je spor. Ke každé funkci z nějaké množiny do její potence tedy existuje v této potenci prvek, jenž zůstane nepřiřazen, tedy potence množiny je vždy ostře větší než tato množina samotná. Tím je Cantorova věta dokázána a my máme – při přijetí příslušných způsobů pojmotvorby – jistotu neomezené posloupnosti nekonečen, z nichž každé je vždy ostře menší než to následující:

$$N, \mathcal{P}(N), \mathcal{P}(\mathcal{P}(N)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(N))), \ldots$$

S tímto ustanovujícím objevem přišly i objevy destruktivní povahy, totiž první paradoxy. Ten nejzákladnější, úzce související s antickými paradoxy plurality, je tzv. *paradox Cantorův.* Jeho odvození je prosté:

> Podle Cantorovy věty víme, že potence množiny je větší než tato množina samotná. Množina všech množin V by na druhé straně měla mít největší možnou mohutnost, což je spor, neboť v důsledku toho platí $|\mathcal{P}(V)| \leq |V| < |\mathcal{P}(V)|$.

Podobných paradoxů objevil Cantor a jeho spolupracovníci několik, takže v době, kdy jim Russell zaslal paradox svůj, nebyly již pro ně žádným překvapením. Pozoruhodné je, že k objevu svého paradoxu dospěl Russell rovněž analýzou důkazu Cantorovy věty.

Jak jsme viděli, v důkazu je uvažováno libovolné přiřazení f prvků $\mathcal{P}(A)$ prvkům A, konstruující množinu $E = \{x \mid x \notin f(x)\}$, která není v jeho oboru hodnot. Namísto A bere Russell množinu V všech množin a uvažuje funkci f z V do $\mathcal{P}(V)$, která množině přiřazuje jí samotnou, tj. funguje jako tzv. funkce identická.[23] Diagonální konstrukce nyní dává množinu

$$E = \{x \mid x \notin f(x)\} = \{x \mid x \notin x\},$$

která se, opět pod hrozbou sporu, nenachází v oboru hodnot funkce f, tj. není ničemu přiřazována. S ohledem na konstrukci funkce f z toho však plyne, že se E nenachází ani ve V, což znamená, že množina všech množin, které si nenáležejí, vůbec neexistuje, přestože byla utvořena podle všech dosud užívaných pravidel! Podíváme-li se na celou věc čistě technicky, podařilo se Russellovi v konstrukci množiny E, převzaté z Cantorova důkazu, eliminovat z vydělující podmínky inkriminovanou funkci f. Té již nemůže být odvozený spor dáván za vinu, a zpochybněno je tak samotné vytvoření dané množiny. Tento závěr přirozeně ohrožuje teorii množin v samotném jejím základu.

Cantorovy pokusy o to, jak se takovýmto paradoxům vyhnout, přitom nebyly nijak technické, ale vycházely z obecných a často teologicky orientovaných úvah o nekonečnu.[24] Cantor přitom nerozvíjí pouze tradiční rozdíl potenciálního (synkategorematického) a aktuálního (vlastního) nekonečna, ale zavádí také rozdíl mezi nekonečnem *absolutním* a nekonečnem *transfinitním.* Oba typy jsou případy nekonečna aktuálního,

[23] Russellův argument je složitější, neboť počítá s tím, že existují objekty, které nejsou množinami. Ty je pak třeba ošetřit zvlášť.

[24] Srov. k tomu zejména spisy Cantor [1883], Cantor [1886], Cantor [1887/1888] a dále oddíl 6.4 knihy Kolman [2008]. Relevantní pasáže Cantorových textů jsou přeloženy a otištěny in: Kolman & Roreitner [2013].

ten druhý ale, na rozdíl od prvního, jenž je tradičním a Cantorem přejímaným výrazem pro Boha a jako takový nemůže být dále bezesporně specifikován, podléhá jistým modifikacím, např. zvětšování coby procesu získávání dalších a dalších transfinitních nekonečen. Síla Cantorovy teologické expozice spočívá především v tom, že byla formulována dávno před objevem paradoxů, a představovala tak jejich přirozené řešení. Paradoxy vznikají, jestliže aplikujeme principy modifikace konečna či transfinitního nekonečna na nekonečno absolutní. *Nekonzistentní* totality, tj. celky, které např. jako uskupení všech předmětů či množin, které nenáležejí samy sobě, vedou ke sporu, jsou právě příklady absolutního nekonečna.[25]

Otázkou zůstává, kdy je nějaká množina nekonzistentní a kdy ne, neboť tento přívlastek jí zjevně nenáleží o sobě, ale v závislosti na koherenci jistých principů, které o ní platí. Jako jedno z pomocných kritérií se postupně ustanovila rovnopočetnost s totalitou všech množin V, tedy zjištění, že je dané uskupení „příliš velké". Russell tento pokus eliminace paradoxů nazval *teorií omezení velikosti*.[26] Pokusíme-li se uplatnit tento model na nám známé množinové paradoxy, pak v případě paradoxu Russellova stačí uvést, že „většina" známých množin si jednoduše nenáleží: např. množina králíků není králík, množina lidí není člověk atd. Jsou-li dále všechny množiny chápány jako vystavěné z nějakého základního univerza atomů (tzv. individuí), případně z množiny prázdné, nenáleží si dokonce žádná z nich, tj. příslušná totalita je stejně velká jako V. Za touto představou lze vidět již pozdější implementaci rozličných „konstruktivních" elementů do jinak ontologicky zaměřené množinové pojmotvorby, jak jsou známy obecně z Russellovy teorie typů a jak se k nim dostaneme v kapitole 19.

Ve vztahu k teorii množin ještě poznamenejme, že více než podobné paradoxy, které ohrozily její celkovou vnější podobu, ji ohrožovaly problémy vnitřní, zejména dlouhodobé neúspěchy v dokazování základních tezí a principů. Ten nejzávažnější z nich je znám jako tzv. *hypotéza kontinua*, kterou lze formulovat tak, že má množina reálných čísel první větší mohutnost po množině čísel přirozených, či opatrněji, že:

pro každou $A \subseteq R$ takovou, že $|N| < |A|$, platí $|A| = |R|$.

Skutečnost, že se nepodařilo toto tvrzení dokázat ani vyvrátit, ba že se později vyjevilo, že ho na bázi kanonicky zvolené skupiny axiomů dokázat ani vyvrátit nelze, je často diskutována v souvislosti s otázkami povahy matematické pravdy. Znamená to snad, že je zde nějaký zásvětní

[25] Cantor [1932, s. 443].

[26] Russell [1906].

prostor pravdivosti, do něhož mohou svým duševním zrakem nahlížet pouze geniální matematici, kteří pak – s ohledem na nemožnost pozemsky srozumitelného důkazu – zvěstují ostatním smrtelníkům, jak se to s tím či oním tvrzením má? To by znamenalo naprosté zbytnění korespondenčního paradigmatu pravdivosti a současně rezignaci na její koherenční či pragmatický rozměr. Celá věc se ukáže okamžitě v jiném světle, zeptáme-li se, na jakém základě byla vybrána zmíněná referenční sada množinových axiomů, co zakládá její pravdivost a proč třeba nevybrat jinou, relativně „rozumnou", z níž by již hypotéza plynula. Výsledkem je pak zjištění, že z epistemologického hlediska se příslušné tvrzení podobá spíše než dosud nerozhodnutým větám historickým („Mozart byl otráven") či větám matematickým (Goldbachova domněnka) tvrzením jako „Othello měl na hlavě 126778 vlasů", která jsou nerozhodnutá či nerozhodnutelná ani tak ne proto, že je příslušné romány pojmově nedourčují, jako spíš proto, že ač by je stejně jako tyto romány konvenčně rozhodnout šlo (doplněním příslušného údaje), v nějakém dosti podstatném (praktickém) smyslu na tomto rozhodnutí nesejde.

10.7 Operace na množinách

Jak jsme zmínili dříve, zejména v oddílu 8.5, byly úvahy nad množinami, resp. rozsahy pojmů a operacemi s nimi, jedním z podnětů vzniku moderní logiky. Souvislost množinových operací s operacemi logiky výroků a perspektivně i logiky predikátů byla tematizována od počátku v rámci logicko-algebraické tradice samé. Začneme-li ze široka, odpovídají základním boolovským operacím – chápeme-li je jako operace na množinách – operace sjednocení, průniku a rozdílu.

10.7.1 Definice (Sjednocení, průnik, rozdíl): *Pro množiny A, B je jejich sjednocením množina $A \cup B$ prvků, které jsou v A nebo v B, průnik je množina $A \cap B$ prvků, které jsou zároveň v A i B a rozdíl množiny A a B je množina $A - B$ prvků A, které nejsou v B.*

Máme-li k dispozici výrokové spojky a operátor množinové abstrakce, můžeme vše přesněji zapsat jako:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Pokud by byly množiny A a B zadány pomocí nějakých vlastností, řekněme P a Q, tj. platilo by $A = \{x \mid P(x)\}$ a $B = \{x \mid Q(x)\}$, ospravedlňovala by daná konvence zápis

$$A \cup B = \{x \mid P(x) \vee Q(x)\},$$

$$A \cap B = \{x \mid P(x) \wedge Q(x)\},$$

$$A - B = \{x \mid P(x) \wedge \neg Q(x)\},$$

ačkoli jsme zatím dovolovali spojovat výrokovými spojkami pouze celé výroky, nikoli výrazy jako $P(x)$ a $Q(x)$. Lepší představu o významu uvedených operací dostaneme z několika příkladů.

`Příklad 10.7.2:` Předpokládejme, že $A = \{2, 4, 5, 6\}$ a $B = \{4, 6, 7\}$. Pak platí:

(1) $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$,

(2) $A \cap B = \{4, 6\}$,

(3) $A - B = \{2, 5\}$.

Dále platí:

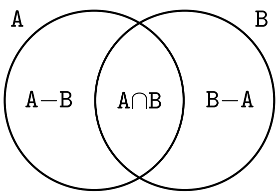
(4) $\{x \mid x \text{ je strakatý}\} \cap \{x \mid x \text{ je kůň}\} = \{x \mid x \text{ je grošák}\}$,

(5) $\{x \mid x \text{ je prvočíslo}\} \cap \{x \mid x \text{ je sudé}\} = \{2\}$,

(6) $\{x \mid x \text{ je sudé}\} \cup \{x \mid x \text{ je liché}\} = N$,

(7) $\{x \mid x \text{ je člověk}\} \cap \{x \mid x \text{ je samec}\} = \{x \mid x \text{ je muž}\}$.

Klasické vztahy jednotlivých operací, např. komutativita a asociativita průniku a sjednocení, jsou dány sémantikou odpovídajících logických operátorů. Tu lze simulovat také graficky pomocí *Vennových diagramů*, v nichž jsou jako na obrázku 10.10 množiny A, B reprezentovány částečně



`Obrázek 10.10: Vennovy diagramy`

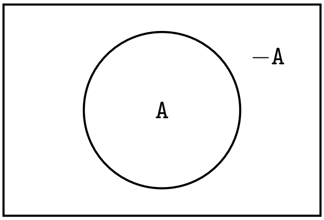
se překrývajícími kruhy, přičemž průniku odpovídá jejich překrývající se část, sjednocení všechny části a rozdílu $A - B$, resp. $B - A$ část A mimo B, resp. B mimo A. Speciální případ tvoří unární operace doplňku.

`10.7.3 Definice (Doplněk):` *Doplňkem množiny A se nazývá množina $-A$ všech prvků, které jí nenáleží, neboli $-A = \{x \mid x \notin A\}$.*

Na rozdíl od předchozích je tato operace, co se použití týče, značně nebezpečná, není-li totiž vyjasněno, vůči čemu se v „negaci“ A vyhrazujeme. Říkáme-li např., že něco není prvočíslem, tj. že to nenáleží do jejich množiny, nemíníme tím obvykle, že to náleží množině všech objektů, které nejsou prvočísly, ale všech čísel, která nejsou prvočísly. Operaci $-A$ tedy čteme jako zkratku za

$$U - A$$

pro nezmíněný, leč předpokládaný diskurz U, na nějž naši úvahu implicitně omezujeme. Graficky odpovídá doplňku A všechna plocha U mimo A, jak je to znázorněno na obrázku 10.11. Nerestringovaně chápanému



`Obrázek 10.11: Doplněk`

doplňku odpovídá Kantova kategorie nekonečných soudů, je-li chápána metajazykově, tj. nikoli jako vymezení konkrétní množiny, jak jsme o tom hovořili v oddílu 4.2.

Nebezpečí takovýchto rychlých definic bylo ilustrováno i na výše uvedených paradoxech, v nichž se např. z nemožnosti vyčíslit danými prostředky nějakou množinu usoudí na její absolutní ne-spočetnost, a tudíž „větší“ velikost, stejně jako se z toho, že nějaká věta není podle daných kritérií pravdivá, usoudí na to, že je v absolutním smyslu ne-pravdivá, či z toho, že nějaký problém, např. kvadratura kruhu, není řešitelný pravítkem a kružítkem, na to, že je absolutně ne-řešitelný. Právě v souvislosti takovýchto příkladů hovořil Hegel o *špatném ne-konečnu.*[27] Přirozených čísel není totiž konečně mnoho nejprve v tom smyslu, že jde ke každému, které by proponent opačné teze zvolil jako největší, najít další, stejně jako není konečně mnoho bodů na přímce proto, že si z praktických důvodů vyhrazujeme možnost popsat mezi každými dvěma body bod další,

[27] K celé problematice srov. úvod ke knize Kolman & Roreitner [2013].

od nich odlišný, totiž v uvážení potenciálně přesnějších měřidel, či jde-li nám o body ideální, v uvážení dostatečně zřetelného zvětšení daného obrazce. Tvrdit hned ale, že je těchto bodů nekonečně mnoho, může mít nemilé konsekvence, např. v představě, že lze na jejich soubor přímočaře přenést úsudkové principy konečných totalit, jako jsou zákon sporu či vyloučený třetí. Cantor, jenž tento postup považoval za oprávněný, tak ne bezdůvodně připomíná eleatské myslitele, a kritika paradoxů, k nimž tento přístup vede, připomíná Aristotelovu kritiku Zénóna a Kantovu teorii antinomií.

Vraťme se ale zpět k našim operacím. Za předpokladu, že disponujeme pojmem prázdné množiny, můžeme s jejich pomocí zavést obvyklé vztahy inkluze, tj. podmnožiny a vlastní podmnožiny stejně jako v algebře logiky:

$$A \subseteq B \leftrightarrow A - B = \emptyset,$$

$$A \subset B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

O podobnostech množinových a logických operací jsme přitom již hovořili dříve, v oddílu 8.5, a nyní máme i nástroje, jak tento vztah lépe popsat. Korespondence mezi průnikem a konjunkcí, sjednocením a disjunkcí, doplňkem a negací vyvstane nejlépe, zvážíme-li, jak se vztahuje množina modelů komplexní formule k množinám modelů jejích částí. Zavedeme-li výraz $m(\vartheta)$ označující množinu modelů libovolné formule ϑ jazyka klasické výrokové logiky, pak pro každou dvojici formulí ϕ, ψ můžeme formulovat následující rovnosti:

$$m(\phi \wedge \psi) = m(\phi) \cap m(\psi),$$

$$m(\phi \vee \psi) = m(\phi) \cup m(\psi),$$

$$m(\neg\phi) = -m(\phi).$$

Existuje též úzké propojení mezi materiální implikací a vztahem inkluze, jakož i mezi ekvivalencí a množinovou rovností. Tyto souvislosti však mají jiný charakter než právě popsané rovnosti a nejsou tak přímočaré. Důvodem je, že zatímco průnik, sjednocení a doplněk jsou množinové operace, inkluze a rovnost k sobě vztahují určité množiny, ale negenerují tím množinu novou. Zatímco např. výraz $A \cap B$ označuje množinu, výraz $A \subseteq B$ je tvrzením a množinu neoznačuje. Proto analogie výše uvedených vztahů, zkusmo pro implikaci $m(\phi \rightarrow \psi) = m(\phi) \subseteq m(\psi)$, nepředstavuje vůbec smysluplně utvořený výraz. Zmíněné propojení však lze formulovat v následující podobě:

$\phi \rightarrow \psi$ je tautologie právě tehdy, když $m(\phi) \subseteq m(\psi)$,

$\phi \leftrightarrow \psi$ je tautologie právě tehdy, když $m(\phi) = m(\psi)$.

Důsledkem uvedených souvislostí je naprostá korespondence množinových a výrokovělogických zákonů, kterou můžeme ilustrovat třeba na zákonech De Morganových. V rámci výrokové logiky jsme De Morganovy zákony formulovali jako logické ekvivalence:

$$\neg(\phi \land \psi) \dashv\models \neg\phi \lor \neg\psi,$$

$$\neg(\phi \lor \psi) \dashv\models \neg\phi \land \neg\psi.$$

Analogicky k těmto principům platí množinové zákony:

$$-(A \cap B) = -A \cup -B,$$

$$-(A \cup B) = -A \cap -B.$$

Ověřit to lze prostřednictvím Vennových diagramů. Příslušná korespondence přitom není náhodná, nýbrž zcela systematická. Omezíme-li se pro jednoduchost na formule obsahující pouze negaci, konjunkci a disjunkci, pak každé logické ekvivalenci výrokové logiky odpovídá univerzálně platný zákon množinový, a naopak každé množinové rovnosti jistá logická ekvivalence. Tím je též ilustrován podstatný charakter logiky, která systematicky převádí složité a na první pohled nepřehledné vztahy mezi větami jazyka na přehledné množinové vztahy, které máme pod kontrolou prostřednictvím stabilního matematického aparátu. Tato funkce logiky bude zejména patrná při formulaci Aristotelovy sylogistiky, jelikož množinové operace figurují zásadním způsobem přímo ve vymezení její formální sémantiky. Téma množinových operací tak představuje vhodný spojovací článek mezi výrokovou logikou a sylogistikou, přestože je zde patrná také jistá schizofrenie, jež je dána tím, že ve výrokové logice – jak jsme viděli – množinové operace fungují na množinách modelů, zatímco v rámci sylogistiky budou ve hře množiny individuí jakožto extenze predikátů. Odlišnost mezi výrokovou logikou a sylogistikou bude odstraněna až ve Fregově logice predikátů, která oba systémy obsahuje jakožto svoje fragmenty a syntetizuje je tím v jeden celek.

11

Sylogistika

Vezmeme-li za své Łukasiewiczovo kritérium, podle něhož se typ logiky pozná nejlépe podle toho, pro co užívá proměnné – a doplňkově tedy podle toho, jaké užívá konstanty –,[1] je zřejmé, že v antice existovala k logice stoiků, která je předchůdcem současné výrokové logiky, alternativa, v níž se proměnné neužívaly pro celé výroky, ale pro jejich části, pojmy. Úsudek typu

$$\frac{\begin{array}{l}\text{všichni teriéři jsou psi,}\\ \text{všichni psi jsou savci}\end{array}}{\text{všichni teriéři jsou savci}}$$

lze v `KVL` formalizovat pouze takto

$$\frac{\begin{array}{l}\mathtt{p},\\ \mathtt{q}\end{array}}{\mathtt{r}.}$$

Z hlediska logiky výroků tedy tento výrok platný není, což je v rozporu s jeho obvyklým použitím. Jdeme-li ale hlouběji do uvedených vět a nahradíme-li pojmová slova jako „teriér“, „pes“ a „savec“ písmeny A, B, C, získáme argument formy:

[1] Viz oddíl 4.7.

$$\frac{\begin{array}{l}\text{všechna } A \text{ jsou } B,\\ \text{všechna } B \text{ jsou } C\end{array}}{\text{všechna } A \text{ jsou } C.}$$

Ten se již zdá být platný v tom smyslu, že by libovolná substituce slov za příslušné proměnné neměla při pravdivosti premis pokazit pravdivost závěru. Nyní formulujme analogicky k našemu výkladu *logiky výroků* formální syntax a sémantiku systému, jenž odpovídá formálnímu fragmentu Aristotelovy logiky, tzv. *sylogistice*, přičemž historické poznámky a upřesnění nechme na později. Příslušný formální výklad nám poskytne především významný srovnávací prvek, díky němuž budeme moci docenit význam a dosah předchozích rozlišení. To nám značně usnadní zavedení analogických distinkcí v rámci logiky predikátů, kde se vše z pojmového hlediska podstatně zkomplikuje.

11.1 Syntax a sémantika

Formální syntax sylogistiky (SL) je podstatně jednodušší nežli syntax KVL, především proto, že nerozeznává žádné komplexní výroky, ale jen výroky elementární. Tyto výroky ale na rozdíl od KVL, kde jsou vždy formalizovány proměnnou p, mají čtyři základní formy vyjadřující různá spojení pojmů reprezentovaných pojmovými písmeny. Z toho plyne následující definice.

11.1.1 Definice (Jazyk): *Jazyk sylogistiky sestává ze dvou skupin symbolů. Jsou to:*

(a) pojmová písmena $\mathtt{P}_1, \mathtt{P}_2, \mathtt{P}_3, \dots$ *coby mimologické symboly,*

(b) písmena $\mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{o}$ *coby logické symboly neboli konstanty.*

Abychom se vyhnuli číselným indexům, budeme pojmová písmena značit pomocí písmen $\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \dots$, s obvyklým předpokladem, že je jich principiálně nekonečně mnoho. Prakticky si ale vystačíme vždy jen s několika z nich. Základní větné formy určuje následující čtveřice poloformalizovaných vět značených tradičně jako (a), (e), (i), (o):

(a) každé A je B (e) žádné A není B,

(i) některé A je B (o) některé A není B.

Toto značení je mnemotechnické. Věty (a) a (i) jsou kladné, něco v nich potvrzuji: A*ff*I*rmo*. Věty (e) a (o) jsou záporné, něco v nich popírám: *n*E*g*O. Soudům (a), (e) se dále říká obecné a soudům (i), (o) částečné. V těchto rozlišeních ale již předjímáme sémantiku uvažovaných výroků.

Z čistě syntaktického hlediska můžeme uvedené typy vět zachytit v tradičním tvaru $\mathtt{A}x\mathtt{B}$, kde x zastupuje některé z písmen $\mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{o}$.

`11.1.2 Definice (Formule):` *Sylogistickou formulí je každý výraz tvaru* $\mathtt{AaB}, \mathtt{AeB}, \mathtt{AiB}, \mathtt{AoB}$*, kde* $\mathtt{A}, \mathtt{B}$ *jsou libovolná pojmová písmena.*

Sémantiku sylogistiky založíme opět na pojmu interpretace. Tak jako klasická výroková a predikátová logika je i sylogistika zaměřena extenzionálně, tzn. pojmovým písmenům budou v interpretacích odpovídat množiny objektů. Můžeme si to představovat tak, že např. slovo „pes“ je interpretované, protože mu je přiřazena množina určitých objektů, v tomto případě množina skutečných psů.

Aristotelés předpokládal, že pojmy jsou neprázdné, tj. že jsou nějak realizované ve světě.[2] Tomuto postoji se někdy říká princip instanciace, neboť říká, že každý (obecný) pojem (či vlastnost) je (konkrétně) instanciován nějakou věcí. Jak uvidíme, právě v tomto bodě se sylogistika odlišuje od moderní predikátové logiky. V současné logice se připouští, že mohou být pojmy prázdné. Motivace je zřejmá: u některých pojmů prostě nevíme, zda jsou prázdné či nikoli, a zjištění jejich neprázdnosti by bylo až zajímavým (v mnoha případech empirickým) vědeckým objevem. Jako příklad zde můžeme uvést pojem „být od Země nejvíce vzdáleným nebeským tělesem“. K samotnému problému (ne)prázdnosti pojmů se ještě vícekrát vrátíme. V rámci formálního výkladu sylogistiky budeme každopádně a zcela konvenčně – v souladu s Aristotelem – neprázdnost pojmů předpokládat. Poprvé se tak stane hned v následující definici.

`11.1.3 Definice (Interpretace):` *Interpretace je funkce přiřazující každému pojmovému písmenu nějakou neprázdnou množinu objektů.*

Nyní propojíme pojem formule s pojmem interpretace pomocí definice pravdivosti, která je motivována výše uvedeným čtením sylogistických formulí. V následující definici jsou $\mathtt{A}$ a $\mathtt{B}$ libovolná pojmová písmena.

`11.1.4 Definice (Pravdivost v interpretaci):` *O formuli* ϑ *řekneme, že je pravdivá v interpretaci* I*, resp. interpretace* I *splňuje formuli* ϑ*, symbolicky* $I \vDash \vartheta$*, jestliže platí jedna z následujících podmínek:*

(1) $\vartheta = \mathtt{AaB}$ *a* $I(\mathtt{A}) - I(\mathtt{B}) = \emptyset$,

(2) $\vartheta = \mathtt{AeB}$ *a* $I(\mathtt{A}) \cap I(\mathtt{B}) = \emptyset$,

(3) $\vartheta = \mathtt{AiB}$ *a* $I(\mathtt{A}) \cap I(\mathtt{B}) \neq \emptyset$,

[2] Viz Aristotelés [Cat., 14a7–14].

(4) $\vartheta = \texttt{AoB}$ *a* $I(\texttt{A}) - I(\texttt{B}) \neq \emptyset$.

První bod definice vlastně říká, že věta `AaB` je v dané interpretaci pravdivá, když množina $I(\texttt{A})$ je podmnožinou množiny $I(\texttt{B})$, což odpovídá výše uvedenému čtení `AaB` jako „každé `A` je `B`". Podobné úvahy lze provést i u ostatních případů. Kdybychom chtěli nyní postupovat jako v části týkající se výrokové logiky, měla by následovat kapitola zabývající se pojmem tautologické formule. V `KVL` byly ovšem formule této sémantické charakteristiky vždy formule komplexní formy, není tedy asi překvapivé, že v rámci sylogistiky tento pojem přestává dávat dobrý smysl, resp. omezuje se nanejvýš na věty formy:

`AaA` `AiA`.

Ty se však u Aristotela – na rozdíl od obecného způsobu, jakým jsme zavedli pojem formule my – nevyskytují, neboť je požadována odlišnost spojovaných písmen. To obecně vysvětluje, proč byl koncept analytické věty založený na Aristotelově formálním fragmentu shledán později jako značně chudý. Logická platnost ale v sylogistice přirozeně uplatnění nachází – jinak by mohla být stěží nazývána logikou –, nicméně až v zaměření na celé úsudky. S jejich příklady jsme se již ostatně setkali v úvodu této kapitoly a i dříve v textu. Podíváme-li se na další změny, vidíme, že oproti `KVL` se nám v sylogistice změnil pojem formule, pojem interpretace a na nich závislý pojem pravdivosti formule v interpretaci. I na základě těchto pozměněných pojmů však můžeme definovat pojem modelu stejně jako v `KVL`.

`11.1.5 Definice (Model):` *Interpretace I je modelem formule ϑ, když $I \vDash \vartheta$. Interpretace I je modelem množiny formulí T, když je modelem každé formule, která se nachází v T.*

Neliší se pak ani definice klíčových sémantických pojmů splnitelnosti a vyplývání.

`11.1.6 Definice (Splnitelnost a vyplývání):` *Množina T je splnitelná, když existuje nějaký její model. Formule ϑ vyplývá z množiny formulí T, symbolicky $T \vDash \vartheta$, když každý model množiny T je modelem formule ϑ.*

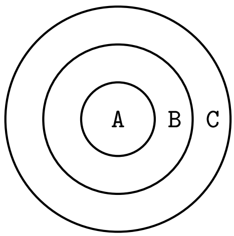
V následujícím textu si představíme metodu, pomocí které můžeme elegantně ověřovat platnost či neplatnost vztahů vyplývání v sylogistice.

11.2 Vennovy diagramy

Zápis sylogistických formulí, který jsme zavedli, se prosadil ve scholastice. Vychází ovšem z řecké formulace jednotlivých vět, indukující opačné pořadí termínů v zápisu, kdy např. modernímu „každé A je B“ odpovídá původní „B obsahuje celé A“, a tedy notace BaA. Další formy bychom pak četli jako (e) „B neobsahuje žádnou část A“, (i) „B obsahuje část A“ a (o) „B neobsahuje některou část A“. Toto čtení je z našeho hlediska dosti nepohodlné, proto se jím dále neřídíme a formule čteme výše uvedeným způsobem. Uvažme ale, že původní čtení odkazuje přímo k předpokládané mereologické interpretaci, v níž jsou příslušné pojmy reprezentovány kruhy Eulerova typu, se vztahy zachycenými *vzájemnou polohou* těchto kruhů, tj. jejich celkovým nebo částečným překrytím či nepřekrytím. Uvažme znovu úvodem zmíněný úsudek, jenž byl schematizován jako:

AaB,
<u>BaC</u>
AaC.

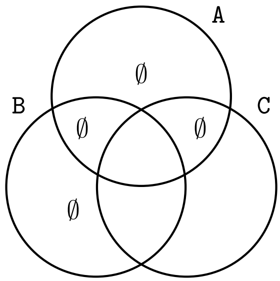
Jeho platnost může být např. sémanticky zdůvodněna obrázkem 11.1. Otázka samozřejmě je, v jakém smyslu je tato reprezentace adekvátní a zda nenechává některé sémantické vztahy nedourčené. V případě logiky



Obrázek 11.1: Eulerův diagram

výroků jsme vycházeli z toho, že zpracovávané věty musí být jednoznačně pravdivé či nepravdivé, tj. musí splňovat tzv. pravdivostní princip, v důsledku čehož nám na formální straně stačilo pracovat s pravdou a nepravdou coby umělými objekty formální sémantiky. Pravdivostní princip nyní považujeme rovněž za platný, což se projevuje nepřímo, v předpokladu, že se kruhy, reprezentující užité pojmy, vyskytují v ostrých, jednoznačně určených vztazích. Nepřichází třeba v úvahu, že by v rámci jedné interpretace nebylo určené, zda se jeden kruh s jiným překrývá, nebo nikoli, či zda je v něm zcela obsažen, nebo nikoli apod. To samo ale ještě nestačí.

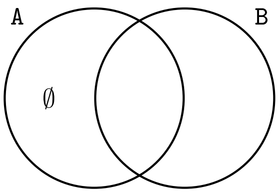
Máme-li např. větu tvaru AaB, je zřejmé, že by všechny části kruhu A, případně objekty, které pokrývá, měly být i částmi B, není ale zřejmé, zda má B obsahovat ještě nějaké části mimo A, jak to výše uvedený obrázek kreslí. Jednou cestou, jak tuto neurčitost odstranit, je uchopit uvažované kruhy definitivně jako reprezentanty množin a jejich vztahy popsat v rámci fixně nastaveného Vennova diagramu. Ten sám o sobě neříká, zda příslušné kruhy mají nebo nemají nějaké společné části, ale představuje rámec, do něhož mohou být tyto vztahy zakresleny, a to prostřednictvím symbolů prázdnosti $\emptyset$ a neprázdnosti $\times$. První z těchto symbolů vyjadřuje okolnost, že se v uvedeném bloku nenachází žádný objekt, druhý, že se v bloku alespoň jeden objekt nachází. Výše uvedenou situaci tak zachytíme obrázkem 11.2, v němž vidíme zapsány premisy uvedeného



Obrázek 11.2: Vennův diagram

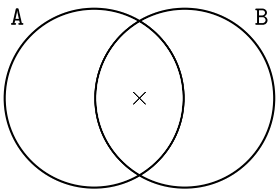
úsudku, tj. věty (resp. formule) AaB a BaC, z nichž první říká, že oblasti, které jsou obsaženy v A a zároveň nejsou obsaženy v B, musí být prázdné, a druhá analogicky poukazuje na prázdnost oblastí, které jsou obsaženy v B a zároveň nejsou obsaženy v C. Vidíme, že ve výsledném diagramu je již zakreslen závěr úsudku, tj. obsah formule AaC, která říká, že oblasti, které jsou obsaženy v A a nejsou obsaženy v C, jsou prázdné. Závěr tedy vyplývá z předpokladů, neboť každý model předpokladů musí být v souladu s diagramem, a musí v něm tedy platit závěr. Doplníme-li podobné instrukce ke každé formě aristotelského typu, dospějeme k metodě rozpoznávání platnosti sylogistických úsudků.

Nyní se ve vší stručnosti podívejme, jak mají být chápány modely jednotlivých aristotelských forem a jejich reprezentace Vennovým diagramem. Formě AaB, jak bylo řečeno, odpovídá na sémantické úrovni stav světa vyjádřený diagramem 11.3, s nímž musí být v souladu každý její model, neboť to přesně odpovídá podmínce $I(\mathtt{A}) - I(\mathtt{B}) = \emptyset$. S ohledem na podmínku neprázdnosti přitom není možné, aby oblast, již má A společnou s B, neobsahovala nějaký prvek, tj. v principu bychom do tohoto sektoru mohli vepsat $\times$. Tuto možnost si ale ponecháme až pro případy částečných tvrzení. Obsah formule `AiB` chápeme totiž na rozdíl



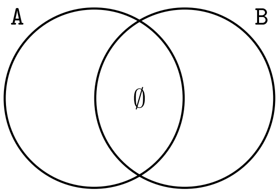
Obrázek 11.3: Model formy AaB

od tvrzení `AaB`, jež bylo vymezeno negativně (že něco neexistuje), jako pozitivní, existenční výrok, podle něhož existuje nějaké `A`, které je `B`, jak to popisuje diagram 11.4. Tento diagram odpovídá množinové podmínce pro formuli `AiB` z definice pravdivosti, tj. $I(\mathtt{A}) \cap I(\mathtt{B}) \neq \emptyset$. Z tohoto rozhodnutí plyne, proč je možné větu jako „někteří vodní živočichové jsou savci“ obrátit na „někteří savci jsou vodní živočichové“, což v případě vět



Obrázek 11.4: Model formy AiB

prvního typu (`AaB`) z pochopitelných důvodů možné nebylo. Možné to ale bude u vztahu `AeB`, jemuž odpovídá diagram 11.5. Tento diagram opět



Obrázek 11.5: Model formy AeB

koresponduje s množinovou podmínkou pravdivosti, podle níž je věta příslušné formy pravdivá tehdy, když je průnik obou množin prázdný, tj.

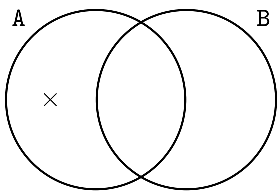
$I(\mathtt{A}) \cap I(\mathtt{B}) = \emptyset$. U této formy vzniká standardně problém s dvojí možností chápání její poloformální verze „každé A není B“. Může se jednat o:

(1) popření predikátu ve smyslu „každé A je ne-B“,

(2) popření věty ve smyslu „není pravda, že každé A je B“.

Pouze čtení (1) odpovídá naší interpretaci, v níž A a B nemají společné prvky, tj. žádné A není B. Čtení (1) a (2) bývají často zaměňována, jak jsme to viděli v oddílu 10.3 např. v souvislosti s paradoxem lháře, resp. větou, že všichni Řekové jsou lháři, pronesenou Řekem. Zde bylo tvrzení „žádné A není B“ chápáno jako negace věty „každé A je B“. Bez této záměny paradox nevzniká.

Z toho plyne především, že otázky, co je a co není něčeho negací, jsou nad přirozeným jazykem značně vágní. V případě vět AaB a AeB je tomu tak třeba proto, že můžeme subjekt A dané věty chápat jako nerozborný celek, ideu, jako např. ve větě „moucha létá“, v níž je označen celý druh, nikoli individuální mouchy, a popření dané vlastnosti nám pak vyjde jako vyjmutí křížku reprezentujícího mouchu z kruhu reprezentujícího létání a jeho umístění mimo něj. AaB a AeB tak skutečně budou negacemi. Jakmile umožňujeme pojmy na místě subjektu dále „dělit“, situace se ovšem mění, neboť popření toho, že by bylo A cele v B, neznamená, že je zcela mimo B. Tuto situaci zachycuje věta formy AoB, kterou chápeme jako tvrzení neprázdnosti části $I(\mathtt{A}) - I(\mathtt{B})$, jak to ukazuje příslušný obrázek 11.6 a jemu odpovídající množinový zápis. V něm se říká,



Obrázek 11.6: Model formy AoB

že existují některá A mimo B, tj. $I(\mathtt{A}) - I(\mathtt{B}) \neq \emptyset$. K otázce sémantických vztahů jednotlivých forem se ještě vrátíme v dalším oddílu, v němž budeme do jisté míry kopírovat obdobnou pasáž o formalizaci a interpretaci v KVL.

Nyní si všimněme, že vizuálně založenou metodu Vennových diagramů lze velice efektivně využívat při ověřování platnosti či neplatnosti sylogistických úsudků, ba že se na ní tato platnost jistým velmi transparentním způsobem zakládá. Zvažme například následující dva úsudky:

(1) žádný savec není ryba,
každá velryba je savec
žádná velryba není ryba

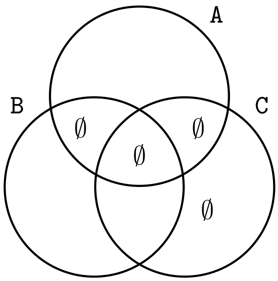
(2) žádný filosof není praktický,
každý filosof je moudrý
nikdo moudrý není praktický.

Po formalizaci dostáváme schémata:

(1) BeA,
CaB
CeA

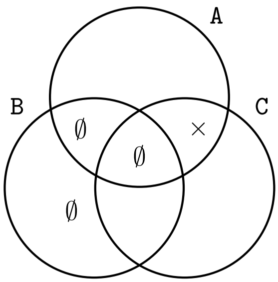
(2) BeA,
BaC
CeA.

Obrázek 11.7 ukazuje, že již ze zakreslení vztahů odpovídajících premisám úsudku (1) „vyplyne“ vztah odpovídající závěru, tj. nelze si představit, že by šlo v rámci nějaké interpretace modelovat příslušné premisy tak, aby závěr neplatil. Tím jsme zdůvodnili, že $\mathtt{BeA}, \mathtt{CaB} \models \mathtt{CeA}$. Co se



Obrázek 11.7: Platný úsudek

týče úsudku (2), z grafického znázornění 11.8 vidíme, že lze splnit premisy tak, aby neplatil závěr, tj. diagram pro premisy BeA a BaC, obsahující prázdné množiny v sekcích $I(\mathtt{B}) \cap I(\mathtt{A})$ a $I(\mathtt{B}) - I(\mathtt{C})$, lze doplnit o křížek

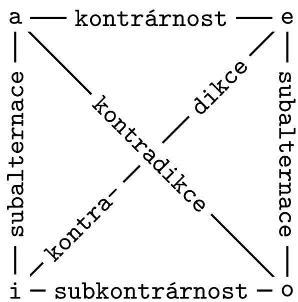


Obrázek 11.8: Neplatný úsudek

v sekci $(I(\mathtt{A}) \cap I(\mathtt{C})) - I(\mathtt{B})$ tak, aby neplatilo CeA. Tím, tj. konstrukcí vhodného protipříkladu, jsme zdůvodnili, že $\mathtt{BeA}, \mathtt{BaC} \not\models \mathtt{CeA}$.

11.3 Logický čtverec

Zvážíme-li výše navrženou sémantiku sylogistiky, vidíme, že tvrzení AoB se ukazuje jako přímý opak tvrzení AaB, tj. vidíme, že je-li pravdivé jedno, nemůže být pravdivé druhé a *vice versa*, přičemž – při předpokladu, že každá část kruhu je buďto prázdná, nebo nikoli, *tertium non datur*, jak to vyžaduje pravdivostní princip – jedna z možností musí nastat. Totéž platí pro formy AeB a AiB, jak to zachycuje tzv. *logický čtverec*, viz obrázek 11.9. V něm je tradičně kromě příčné kontradiktoričnosti zachycena ještě svislá subalternace částečných forem formám obecným, vodorovná kontrárnost obecných forem a subkontrárnost forem částečných. Jak jsme



Obrázek 11.9: Logický čtverec

již naznačili, platnost či neplatnost těchto vztahů nelze ovšem zdůvodnit čistě odkazem na přirozený jazyk, resp. vhodně vybrané příklady, ale až odkazem na adekvátně vybranou sémantiku, tj. normu, která umožní případné protipříklady, jež se v široké jazykové praxi vždy vyskytnou, vyloučit. To nám ukážou již následující definice.

11.3.1 Definice (Vztahy ve čtverci): *Dvě formule jsou vzájemně kontradiktorické, jestliže nemohou být zároveň pravdivé ani zároveň nepravdivé. Dvě formule jsou vzájemně kontrární, jestliže nemohou být zároveň pravdivé, nepravdivé však ano. Dvě formule jsou vzájemně subkontrární, jestliže mohou být zároveň pravdivé, ale ne nepravdivé. Jedna formule je subalternací jiné formule, jestliže lze z pravdivosti druhé usoudit na pravdivost první.*

Jak již jsme řekli, je zřejmé, že formule $\mathtt{AaB}$ a $\mathtt{AoB}$, resp. $\mathtt{AeB}$ a $\mathtt{AiB}$, jsou v kontradiktorickém vztahu, pročež může být jedna uchopena jako negace druhé, tj. můžeme definovat:

$$\neg\mathtt{AaB} \leftrightarrow \mathtt{AoB}, \qquad \text{resp.} \qquad \neg\mathtt{AoB} \leftrightarrow \mathtt{AaB},$$

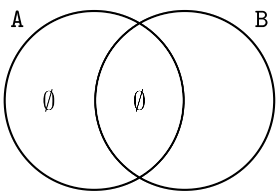
$$\neg\mathtt{AeB} \leftrightarrow \mathtt{AiB}, \qquad \text{resp.} \qquad \neg\mathtt{AiB} \leftrightarrow \mathtt{AeB}.$$

Zbylé vztahy v logickém čtverci jsou problematické a z hlediska moderní predikátové logiky, která fakticky využívá výše zavedené množinové interpretace, nelze tvrdit jejich obecnou platnost. Uvážíme-li třeba větu „každý jednorožec je rohatý“, která se zdá platit takřka z analytických, tj. čistě pojmových důvodů, nemůže žádný jednorožec rohatým nebýt, tj. je vyloučena současná platnost forem $\mathtt{AaB}$ a $\mathtt{AeB}$. Na druhou stranu lze tvrdit, že jednorožec není ani jedním z tvorů, kteří mají rohy, ani jedním z těch, kteří je nemají, tj. tvrzení $\mathtt{AaB}$ a $\mathtt{AeB}$ současně platí. V těchto argumentech se ukazuje právě mnohovrstevnatost přirozené řeči. Pro nás je ovšem nyní závazná následující interpretace příslušných forem:

(a) $I(\mathtt{A}) - I(\mathtt{B}) = \emptyset$ (e) $I(\mathtt{A}) \cap I(\mathtt{B}) = \emptyset$,

(i) $I(\mathtt{A}) \cap I(\mathtt{B}) \neq \emptyset$ (o) $I(\mathtt{A}) - I(\mathtt{B}) \neq \emptyset$.

Ta ukazuje, za jakých podmínek je možné, aby obě formy byly pravdivé, totiž když je $I(\mathtt{A})$ zcela prázdné, tj. nastává situace z obrázku 11.10. V naší definici interpretace jsme ovšem tuto možnost předem zakázali. Je otázka, zda si Aristotelés této možnosti vůbec nevšiml, nebo zda –



Obrázek 11.10: Nekontrárnost AaB a AeB

jak se obvykle tvrdí a jak jsme výše uvedli také my – v aplikaci tiše předpokládal neprázdnost užitých pojmů. Za tohoto předpokladu vede platnost $\mathtt{AaB}$ automaticky k tvrzení neprázdnosti části $I(\mathtt{A}) \cap I(\mathtt{B})$, a tudíž k neplatnosti $\mathtt{AeB}$, a naopak, platnost $\mathtt{AeB}$ vede k neprázdnosti části $I(\mathtt{A}) - I(\mathtt{B})$, a tudíž k neplatnosti $\mathtt{AaB}$. Primárně lze argumentovat také tím, že si zde počínáme ahistoricky, neboť otázky prázdnosti a neprázdnosti jsou vlastně otázky vztahů množin a jejich prvků, které antika, a *de facto* ani celá předfregovská tradice, neznala, jak jsme o tom podrobně hovořili v předchozí kapitole.

Aristotelés si ale v nějakém smyslu tyto problémy na sebe přivolává sám, neboť nechává relativně otevřené, zda je jeho logika spíše logikou obsahu, tj. logikou pojmových rozlišení, či logikou rozsahu, tj. objektů, které pod daná rozlišení spadají. Jeho empirické, protiplatónské založení přitom ukazuje k druhé z těchto možností, podle níž pojem nemůže existovat bez svých instancí a je na ně tedy v nějakém smyslu redukovatelný. Na druhou stranu je Aristotelés donucen uvažovat i (empiricky) prázdné pojmy, např. kozlojelena.[3] Z logicko-sémantického hlediska by však nic z toho nemělo znamenat problém. Jelikož podle Aristotelových vlastních slov existence netvoří rod,[4] tj. neexistuje žádné význačné univerzum, vůči němuž by bylo možné otázky (ne)prázdnosti vztahovat, je jejich empiricko-realistický výklad přinejmenším naivní. O jednorožcích můžeme hovořit nejen v diskurzu zvířat aktuálně žijících, ale i zvířat bájných či hypotetických. I běžná řeč o mrtvých lidech (starých Římanech) či vyhynulých zvířatech (dinosaurech) je stěží interpretovatelná přímočaře realisticky, ale vždy ve vztahu k příslušnému kontextu (literárněvědnému, historickému atd.). Problém (ne)prázdnosti pojmů není tedy tématem Aristotelovy logiky, ale až její aplikace. Při ní teprve máme zvážit, zda musí být námi užité pojmy něčím aktuálně splněny, či zda budeme mluvit jen hypoteticky, v jakém diskurzu se vůbec chceme pohybovat apod.

Předpoklad neprázdnosti užitých pojmů učiní platným i ostatní uvažované vztahy, konkrétně tedy subkontrárnost a subalternaci. Platí-li $\mathtt{AaB}$, tedy je-li $I(\mathtt{A}) - I(\mathtt{B})$ prázdné, platí neprázdnost $I(\mathtt{A}) \cap I(\mathtt{B})$, a tedy platnost $\mathtt{AiB}$ jen za předpokladu, že $I(\mathtt{A})$ není prázdné jako celek. Totéž platí pro odvození neprázdnosti $I(\mathtt{A}) - I(\mathtt{B})$, a tedy platnosti $\mathtt{AoB}$, z prázdnosti $I(\mathtt{A}) \cap I(\mathtt{B})$, a tedy platnosti $\mathtt{AeB}$. Všechny tyto úvahy každopádně ukazují, že na rozdíl od logiky výroků a Wittgensteinova *Tractatu*, podle něhož mají být elementární výroky vzájemně nezávislé, elementární výroky Aristotelovy sylogistiky nezávislé ani náhodou nejsou. V nějakém ohledu tento stav vyjadřuje holistický pohled na jazyk, v němž se nejenže nelze učit pojmy mimo kontext věty, ale ani větu mimo kontext jiných vět, tj. nelze mít např. pojem králíka bez toho, abychom měli další pojmy, např. pojem savce, případně pojem kočky. To nás, jak říkají Sellars a Brandom, odlišuje od pouhých konceptuálních zpravodajů, jako jsou papoušek nebo teploměr, kteří se také mohou „naučit“ dělat jisté rozdíly, např. reagovat uniformně na barevné či tepelné podněty, neumí je

[3] Aristotelés [An2., 92b].
[4] Aristotelés [Met., 998b22].

ale spojovat s podněty jinými, tj. z toho, že je něco červené, usoudit na to, že to nemůže být zelené a *vice versa*.[5]

Již proto není divu, že každá snaha najít nezávislou bázi elementárních vět, jak se o to v návaznosti na Wittgensteina pokoušeli logičtí empiristé, končí neúspěchem, když nás např. právě elementární počitkové věty jako

toto je zelené a toto je červené

upozorní na svou vzájemnou závislost, odpovídající výše uvedenému vztahu kontrárnosti, tj. vzájemné neslučitelnosti obou při slučitelnosti jejich opaků. Nic nemůže být současně červené a zelené, ale může to současně červené a zelené nebýt, např. když je to žluté. Z hlediska úvodem zmíněného exkurzu k osvojování si empirických i neempirických pojmů tak máme další argument na podporu tvrzení, že kromě vertikálního plnění, v němž se např. pojmu kočka učíme na konkrétních příkladech a protipříkladech kočky a jiných zvířat, potřebujeme také horizontální jištění, v němž je příslušné rozlišení vztaženo také k rozlišením jiným skrze pravidla typu:

když je něco kočka, je to také savec,

když je něco kočka, není to pes

apod.

To lze vnímat i jako potvrzení toho, že sebe-vědomý uživatel jazyka, tj. uživatel, jenž je s to reflektovat vlastní úsudkovou praxi, potřebuje mít v jazyce nějakou verzi kondicionálu (implikace), zachycující přechody od věty k větě, a negace, zachycující inkompatibility vět, resp. pojmů, obecně tedy stabilizující kontingentní praxi udávání příkladů a protipříkladů.

11.4 Kategorický sylogismus

Sylogismus je Aristotelem nejprve definován dosti obecně coby „řeč, v níž, je-li něco dáno, něco od tohoto odlišného z ní nutně plyne“,[6] tj. spíše jako případ vyplývání, resp. nějakého obecně platného argumentu na podporu určité věty. Aristotelés se ale ve vlastní expozici omezuje na specifickou formu tzv. *kategorického* sylogismu, později rozšířeného ještě

[5] Brandom [2000, s. 48].
[6] Aristotelés [An1., 24b].

o sylogismus *modální*. Nyní se budeme věnovat výhradně prvnímu z nich a druhý jen stručně zmíníme v kapitole 20.

`11.4.1 Definice (Kategorický sylogismus):` *Za (kategorický) sylogismus se považuje úsudek některé z následujících forem, kde proměnné* x, y, z *stojí za některé z písmen* $\mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{o}$*:*

(1) $\mathtt{B}x\mathtt{A}, \mathtt{C}y\mathtt{B}/\mathtt{C}z\mathtt{A}$,

(2) $\mathtt{B}x\mathtt{A}, \mathtt{B}y\mathtt{C}/\mathtt{C}z\mathtt{A}$,

(3) $\mathtt{A}x\mathtt{B}, \mathtt{C}y\mathtt{B}/\mathtt{C}z\mathtt{A}$,

(4) $\mathtt{A}x\mathtt{B}, \mathtt{B}y\mathtt{C}/\mathtt{C}z\mathtt{A}$.

Sylogismus tedy sestává vždy ze dvou premis a jednoho závěru. Tyto premisy a závěr úhrnem obsahují tři tzv. *termíny*, z nichž jeden, tzv. *střední* (*medius*), v závěru mizí. Druhé dva, tzv. extrémy, se rozlišují jako *nižší* (*minor*) a *vyšší* (*maior*), a to obvykle podle pozice v závěru, kdy nižší je jeho subjektem a vyšší predikátem. Podle toho, který z extrémů obsahuje, lze příslušným názvem označit i příslušnou premisu. Existují i další, převážně scholastické důvody, proč a jak ten který termín, resp. premisu nazývat, jimiž se ale už nebudeme zabývat. Rovněž rozlišení sylogismů do čtyř výše uvedených typů, tzv. *figur*, je scholastické. Aristotelés uznával pouze první tři, což naznačuje, že se k premisám choval jako k množině, tj. nezáleželo mu na jejich pořadí a podstatné bylo pouze postavení středního termínu vzhledem k oběma extrémům: pak totiž automaticky splývá čtvrtá figura s první.

Středověká klasifikace pracovala s mnemotechnickými pomůckami pro jednotlivé *mody*, tj. konkrétní případy daných figur po zaplnění proměnných konkrétními písmeny, a potřebovala proto fixovat pořadí premis, jak jsme to udělali i my. Jistá diskrepance s jinými zápisy, zračící se v nepřirozeném pořadí písmen, vychází především z toho, že zachováváme české, nikoli tradiční, řecké čtení forem. Přehled o všech sylogismech, jejich platných podskupinách a jejich mnemotechnických zkratkách lze tradičně získat z následujícího nákresu:

$$\begin{array}{c} \mathtt{B}x\mathtt{A} \\ \underline{\mathtt{C}y\mathtt{B}} \\ \mathtt{C}z\mathtt{A} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathtt{A}x\mathtt{B} \\ \underline{\mathtt{C}y\mathtt{B}} \\ \mathtt{C}z\mathtt{A} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathtt{B}x\mathtt{A} \\ \underline{\mathtt{B}y\mathtt{C}} \\ \mathtt{C}z\mathtt{A} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathtt{A}x\mathtt{B} \\ \underline{\mathtt{B}y\mathtt{C}} \\ \mathtt{C}z\mathtt{A} \end{array}$$

Je zřejmé, že v každé figuře je $4 \times 4 \times 4$ modů, tj. celkem máme $4^4 = 256$ sylogismů. Každý z nich je určen číslem figury a posloupností písmen xyz. Snaha získat přehled o tom, které sylogismy jsou platné, tvořila velkou část činnosti formálních logiků středověku a raného novověku.

K jejich úplnému seznamu lze ale samozřejmě dospět prostým průchodem všech možností, kontrolou platnosti a vyškrtáním těch, které platné nejsou. Výsledek lze pak zaznamenat v následující tabulce, kde se určení figury a kombinace písmen nacházejí uvnitř slov sloužících k jejich zapamatování:

barbara	cesare	*darapti*	*bramantip*
celarent	camestres	*felapton*	camenes
darii	festino	disamis	dimaris
ferio	baroco	datisi	*fesapo*
		bocardo	*fresison*
		ferison	
barbari	*cesaro*		*camenos*
celaront	*camestros*		

Kurzívou jsou označené sylogismy, které platí až po přijetí existenční premisy, tj. předpokladu neprázdnosti užitých pojmů. Úhrnem tak máme po šesti platných sylogismech v každé figuře, celkem tedy 24. V nejnižší skupině jsou sylogismy vzniklé tzv. *oslabením* závěru některého z předchozích platných sylogismů, což znamená, že v jeho závěru přejdeme k subalternativní formě. Mnemotechnicky tomu odpovídá použití téhož slova (*barbara*) se záměnou jednoho z písmen (*barbari*). Aristotelés přitom považoval za platné pouze neoslabené mody prvních tří figur, celkově tedy 14 modů.

Mezi platnými sylogismy si v Aristotelově pojetí výjimečný status držely neoslabené sylogismy první figury, jimž se říkalo také *dokonalé*, a to zejména proto, že lze jejich platnost velmi snadno nahlédnout, a mají v sobě tedy jistou epagogickou samozřejmost. Vyskytují se v nich navíc závěry všech čtyř typů, tj. a, e, i, o. Z hlediska Aristotelovy axiomaticko-deduktivní teorie dává nejprve smysl pokus o převedení platnosti ostatních sylogismů, byť je jich jen konečně mnoho, na ty dokonalé, a to pomocí deduktivního systému obsahujícího (1) dokonalé sylogismy první figury, (2) pravidla obratu a (3) nepřímý důkaz. Povaze nepřímého důkazu se budeme věnovat níže. Pravidla obratu jsou přitom specifikována takto:

(O1) BaA/AiB,

(O2) BiA/AiB,

(O3) BeA/AeB.

Tvrzení, že lze každý platný sylogismus odvodit pomocí uvedených principů, Aristotelés sám dokazuje,[7] přičemž scholastické názvy platných sylogismů naznačují, jak při této redukci postupovat. Tak kupř. první písmeno mnemoniky určuje název sylogismu první figury, na nějž bude daný sylogismus převeden. Vezmeme-li namátkou sylogismus *camestres*

$$\mathtt{AaB}, \mathtt{CeB}/\mathtt{CeA},$$

víme, že to bude *celarent*. Písmeno „m" říká, že je třeba aplikovat M*etathesis praemissarum*, tedy prohodit premisy

$$\mathtt{CeB}, \mathtt{AaB}/\mathtt{CeA}.$$

Písmeno „s" říká, že je třeba provést *conversio* S*implex*, tedy aplikovat jedno z pravidel obratu (O2), (O3). V našem případě aplikujeme (O3) na premisu i závěr, čímž dostáváme:

$$\mathtt{BeC}, \mathtt{AaB}/\mathtt{AeC}.$$

Tudíž jsme hotovi. Pokud bychom cvičně chtěli redukovat sylogismus *bocardo*

$$\mathtt{BoA}, \mathtt{BaC}/\mathtt{CoA},$$

víme, že ho chceme převést na sylogismus *barbara*. Písmeno „c" přitom odkazuje k užití nepřímého důkazu, neboli C*onversio syllogismi*. V našem případě to vede ke kontrapozici první premisy a závěru

$$\mathtt{CaA}, \mathtt{BaC}/\mathtt{BaA},$$

čímž se, při přeznačení písmen, ocitáme u ohlášeného cíle. Jak uvažované odvození chápat, ukazuje ale nejnázorněji redukce, v níž dojde k aplikaci *conversio* P*er accident*, reprezentovaného písmenem „p"a symbolizujícího tzv. obrat po případě neboli aplikaci pravidla (O1), které není symetrické, tj. záleží, v jakém směru se použije. Máme-li třeba sylogismus *felapton*, uvažujeme takto: při premisách

$$\mathtt{BeA}, \mathtt{BaC}$$

můžeme k závěru `CoA` dospět i tak, že obrátíme jednu z premis na `CiB` podle (O1) a aplikujeme modus *ferio*. Podobná úvaha je základem redukce i u ostatních případů.

[7] Aristotelés [An1., 29a30 nn.].

11.5 Kalkulizace sylogistiky

Naznačili jsme ideu kalkulizace sylogistiky. Nyní kalkulizaci provedeme důkladně a do všech podrobností a nebudeme se přitom omezovat pouze na kategorický sylogismus, ale dokážeme úplnost vůči sémantice, která připouští libovolné množiny předpokladů. Kalkul, který k tomuto účelu zavedeme, bude přitom velice úsporný. Již jsme zmínili, že jedinými kandidáty na tautologie by byly formule $\mathtt{AaA}$ a $\mathtt{AiA}$, které jsme při formulaci syntaxe uznali jako správně utvořené výrazy. Není proto překvapivé, že následující kalkul obsahuje jen jediné axiomatické schéma:

(A) $\mathtt{AaA}$.

Veškerá zbylá dokazovací tíha leží tedy na odvozovacích pravidlech, jimiž jsou dvě pravidla obratu a mody *barbara* a *darii*:

(O1) $\mathtt{BaA/AiB}$,

(O2) $\mathtt{BiA/AiB}$,

(B) $\mathtt{BaA, CaB/CaA}$,

(D) $\mathtt{BaA, CiB/CiA}$.

Pojem odvození se komplikuje oproti $\mathtt{KVL}$ tím, že připouštíme zmíněnou nepřímou odvozovací metodu, která formalizuje metodu důkazu sporem. Jedná se o metaodvozovací pravidlo, které nám říká toto:

(S) Pokud přidáme k nějaké množině předpokladů T formuli $\neg\vartheta$ a odvodíme spor (tj. nějakou formuli a její negaci), pak to znamená, že jsme odvodili formuli ϑ z množiny T.

Prakticky to vypadá tak, že odvození není nutně prostá posloupnost formulí, jak tomu bylo v $\mathtt{KVL}$ v rámci hilbertovského kalkulu, ale posloupnost strukturovaná. V každé fázi odvození můžeme přidat nějakou (libovolnou) formuli, která však nebude mít stejný status jako ostatní formule, neboť ji přijmeme pouze *hypoteticky* s tím, že se ptáme, co by bylo možné odvodit, kdyby se skutečně nacházela mezi předpoklady. Tuto možnost budeme systematicky zkoumat později, v kapitole 17, v rámci kalkulů tzv. *přirozené dedukce*. Tento oddíl můžeme chápat také jako jakousi přípravu na ni, tj. představení kalkulů jiného nežli hilbertovského typu.

Po formální stránce problém s hypotetickým předpokladem vyřešíme tak, že v každé fázi odvození můžeme pro úroveň odvození, ve které se nacházíme, založit podúroveň čili pododvození, které začíná nějakou hypoteticky přijatou formulí. Do tohoto pododvození můžeme přenést každou formuli z vyšších úrovní odvození. Pokud se nám v pododvození podaří odvodit nějakou formuli a její negaci (tuto situaci budeme značit tak, že do pododvození přidáme symbol $\perp$), můžeme do nadřazené úrovně přidat negaci formule, kterou jsme v pododvození přijali jako hypotetický předpoklad. Tuto techniku si představíme na následujícím jednoduchém odvození formule `BoC` z formulí `AiB` a `CeA`.

(1)	`AiB`		předpoklad,
(2)	`CeA`		předpoklad,
	(3)	H: `BaC`	hypotetický předpoklad,
	(4)	`AiB`	(1),
	(5)	`AiC`	(D), (3), (4),
	(6)	`CiA`	(O2), (5),
	(7)	`CeA`	(2),
	(8)	$\perp$	(6), (7),
(9)	`BoC`		(3–8).

U odvoditelnosti se držíme výše zavedeného značení, tj. existuje-li odvození formule ϑ z množiny T, píšeme $T \vdash \vartheta$. Právě jsme tedy ukázali, že:

$$\texttt{AiB}, \texttt{CeA} \vdash \texttt{BoC}.$$

Metoda sporu se pochopitelně v odvození může opakovat, jak si ilustrujeme na následujícím příkladě, v němž ukážeme, že:

$$\texttt{AaB}, \texttt{CoB}, \texttt{CaD} \vdash \texttt{DoA}.$$

Odvození formule `DoA` z formulí `AaB`, `CoB` a `CaD` může vypadat třeba takto:

(1)	`AaB`		předpoklad,
(2)	`CoB`		předpoklad,
	(3)	H: `CaA`	hypotetický předpoklad,
	(4)	`AaB`	(1),
	(5)	`CaB`	(B), (3), (4),
	(6)	`CoB`	(2),
	(7)	$\perp$	(5), (6),
(8)	`CoA`		(3–7),

(9) CaD předpoklad,

(10) H: DaA hypotetický předpoklad,

(11) CaD (9),

(12) CaA (B), (10), (11),

(13) CoA (8),

(14) $\perp$ (12), (13),

(15) DoA (10–14).

Naším cílem je ukázat, že odvoditelnost koresponduje s vyplýváním. Nejprve si povšimněme, že na základě faktu, podle něhož pro každou interpretaci I a každou formuli ϑ platí $I \models \vartheta$ nebo $I \models \neg\vartheta$, platí v sylogistice stejně jako v KVL následující vztah mezi vyplýváním a splnitelností.

11.5.1 Věta: *$T \models \vartheta$ právě tehdy, když množina $T, \neg\vartheta$ není splnitelná.*

Pojem splnitelnosti má svůj syntaktický korelát v pojmu konzistence.

11.5.2 Definice (Konzistentní množina): *Množina formulí je konzistentní, pokud z ní nelze odvodit žádnou formuli spolu s její negací.*

Tím, že jsme v definici kalkulu připustili nepřímou metodu odvozování, tj. metodu založenou na odvození (S) sporem, získáváme téměř bez námahy následující větu, která představuje syntaktickou obdobu věty 11.5.1.

11.5.3 Věta: *$T \vdash \vartheta$ právě tehdy, když množina $T, \neg\vartheta$ není konzistentní.*

Důkaz: Předpokládejme nejprve $T \vdash \vartheta$. Pak z množiny $T, \neg\vartheta$ můžeme odvodit jak formuli ϑ, tak formuli $\neg\vartheta$, a je to tedy nekonzistentní množina. Nyní předpokládejme, že $T, \neg\vartheta$ není konzistentní. To znamená, že lze k množině T přidat hypotetický předpoklad $\neg\vartheta$ a odvodit spor. Díky nepřímému důkazu platí, že můžeme z množiny T odvodit ϑ. QED

11.5.4 Definice (Deduktivní uzavřenost): *Množina formulí je deduktivně uzavřená, jestliže obsahuje každou formuli, která je z ní odvoditelná.*

Nyní chceme dokázat, že každá konzistentní množina formulí má model. Za tímto účelem formulujeme následující konstrukci. Každé deduktivně uzavřené množině formulí S přiřadíme interpretaci I^S. Interpretace I^S bude přiřazovat pojmovým písmenům množiny vytvořené z pojmových písmen a jejich dvojic. Pro každé pojmové písmeno A může obsahovat množina $I^S(\mathtt{A})$ dva typy objektů. Zaprvé se v ní nachází každé písmeno $\mathtt{B}$ takové, že formule $\mathtt{BaA}$ je v S. Zadruhé se v ní nachází každá dvojice $\{\mathtt{B},\mathtt{C}\}$ taková, že v S jsou obsaženy formule $\mathtt{BaA}$ a $\mathtt{BiC}$. Formálně tedy definujeme:

$$I^S(\mathtt{A}) = \{\mathtt{B} \mid \mathtt{BaA} \in S\} \cup \{\{\mathtt{B},\mathtt{C}\} \mid \mathtt{BaA} \in S \text{ a } \mathtt{BiC} \in S\}.$$

Vzhledem k tomu, že předpokládáme deduktivní uzavřenost množiny S, obsahuje tato díky axiomu (A) pro každé pojmové písmeno $\mathtt{A}$ formuli $\mathtt{AaA}$. To znamená, že písmeno $\mathtt{A}$ je obsaženo v $I^S(\mathtt{A})$, a $I^S(\mathtt{A})$ je tedy neprázdná množina. I^S je tedy skutečně interpretace.

`11.5.5 Věta:` *Nechť S je deduktivně uzavřená konzistentní množina formulí. Interpretace I^S je modelem množiny S.*

`Důkaz:` Předpokládejme, že S je deduktivně uzavřená množina formulí a formule ϑ je obsažena v S. Projdeme všechny čtyři možné tvary formulí a u každého z nich ukážeme, že pokud je formule ϑ tohoto tvaru, pak je pravdivá v I^S.

(1) Předpokládejme nejprve $\vartheta = \mathtt{AaB}$. Musíme dokázat, že množina $I^S(\mathtt{A})$ je podmnožinou množiny $I^S(\mathtt{B})$, tj. že libovolný objekt X, který je obsažen v $I^S(\mathtt{A})$, je obsažen v $I^S(\mathtt{B})$. Mohou nastat dvě možnosti: (i) X je nějaké písmeno $\mathtt{C}$ a $\mathtt{CaA} \in S$, nebo (ii) X je nějaká dvojice pojmových písmen $\{\mathtt{C},\mathtt{D}\}$ a formule $\mathtt{CiD}$ a $\mathtt{CaA}$ jsou obsaženy v S. (i) Protože S je deduktivně uzavřená a obsahuje také $\mathtt{AaB}$, platí (díky pravidlu *barbara*), že $\mathtt{CaB} \in S$. Pak ale $\mathtt{C} \in I^S(\mathtt{B})$. (ii) Protože $\mathtt{CaA}$ a $\mathtt{AaB}$ jsou v (deduktivně uzavřené množině) S, platí $\mathtt{CaB} \in S$, a protože také $\mathtt{CiD} \in S$, platí, že $\{\mathtt{C},\mathtt{D}\}$ je v $I^S(\mathtt{B})$.

(2) Nyní předpokládejme, že $\vartheta = \mathtt{AeB}$. Chceme dokázat, že žádný objekt, který je obsažen v $I^S(\mathtt{A})$, není obsažen v $I^S(\mathtt{B})$. Nechť je tedy dán objekt $X \in I^S(\mathtt{A})$. Opět musíme zvážit zvlášť dvě možnosti. (i) Předpokládejme, že X je $\mathtt{C}$ a $\mathtt{CaA} \in S$. Pro spor předpokládejme, že $\mathtt{C}$ je obsaženo v $I^S(\mathtt{B})$. To znamená, že $\mathtt{CaB} \in S$. Protože v S je obsažena formule $\mathtt{CaA}$, je v S – díky (O1) – také $\mathtt{AiC}$. Z formulí $\mathtt{CaB}$ a $\mathtt{AiC}$ můžeme odvodit pomocí pravidla (D) formuli $\mathtt{AiB}$. Dospíváme tedy k tomu, že S není konzistentní, což je spor s předpokladem. (ii) Předpokládejme, že X je dvojice pojmových písmen $\{\mathtt{C},\mathtt{D}\}$, tj. $\mathtt{CiD}$ a $\mathtt{CaA}$ jsou obsaženy v S. Pro spor předpokládejme, že $\{\mathtt{C},\mathtt{D}\}$ je také v $I^S(\mathtt{B})$. Pak musí platit, že $\mathtt{CaB} \in S$ nebo $\mathtt{DaB} \in S$. V obou případech můžeme z S odvodit formuli $\mathtt{AiB}$. V prvním případě odvození vypadá takto: $\mathtt{CaA}, \mathtt{AiC}, \mathtt{CaB}, \mathtt{AiB}$. V druhém případě takto: $\mathtt{CiD}, \mathtt{DaB}, \mathtt{CiB}, \mathtt{BiC}, \mathtt{CaA}, \mathtt{BiA}, \mathtt{AiB}$. S tedy není konzistentní, což je spor.

(3) Předpokládejme, že $\vartheta = \mathtt{AiB}$. Protože $\mathtt{AaA}$ i $\mathtt{BaB}$ jsou v S díky (A) a $\mathtt{BiA}$ díky (O2), platí, že $\{\mathtt{A},\mathtt{B}\}$ je v $I^S(\mathtt{A})$ i v $I^S(\mathtt{B})$. Tedy $I^S \models \mathtt{AiB}$.

(4) Poslední případ je $\vartheta = \texttt{AoB}$. Pro spor předpokládejme, že $I^S \not\models \texttt{AoB}$. Pak platí $I^S \models \texttt{AaB}$. To znamená, že množina $I^S(\texttt{A})$ je podmnožinou množiny $I^S(\texttt{B})$. Jelikož $\texttt{A} \in I^S(\texttt{A})$, platí také $\texttt{A} \in I^S(\texttt{B})$. Pak ale musí být formule AaB obsažena v S, a S tedy není konzistentní (neboť obsahuje AoB). Tím dostáváme spor. QED

Jako okamžitý důsledek dostáváme následující větu.

11.5.6 Věta (O existenci modelu): *Pokud je množina formulí konzistentní, pak má model.*

Důkaz: Nechť T je konzistentní množina formulí. Vezměme množinu všech formulí, které jsou odvoditelné z T, a označme ji S. S musí být také konzistentní. Z předchozí věty víme, že interpretace I^S je modelem S. Protože T je podmnožina množiny S, je I^S také modelem T. QED

11.5.7 Věta (O silné korektnosti a úplnosti): *Pro každou množinu formulí T a formuli ϑ platí: $T \models \vartheta$ právě tehdy, když $T \vdash \vartheta$.*

Důkaz: Předpokládejme nejprve $T \vdash \vartheta$. Tato implikace ($\Leftarrow$) plyne z toho, že každá instance axiomu (A) platí ve všech interpretacích a všechna pravidla přenášejí pravdivost v interpretacích. Též je třeba poznamenat, že metoda nepřímého odvozování je korektní, tj. platí, že pokud $T, \neg\vartheta \models \chi$ a $T, \neg\vartheta \models \neg\chi$, pak $T \models \vartheta$. ($\Rightarrow$) Nyní předpokládejme, že $T \nvdash \vartheta$. Na základě věty 11.5.3 můžeme usoudit, že množina $T, \neg\vartheta$ je konzistentní. Na základě věty 11.5.6 o existenci modelu můžeme usoudit, že $T, \neg\vartheta$ je splnitelná. Na základě věty 11.5.1 pak platí, že $T \not\models \vartheta$. QED

V důsledku získáváme pro sylogistiku větu o kompaktnosti.

11.5.8 Věta (O kompaktnosti): *(a) Platí, že formule vyplývá z dané množiny formulí právě tehdy, když vyplývá z nějaké její konečné podmnožiny. (b) Množina formulí je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná každá její konečná podmnožina.*

Důkaz: Můžeme postupovat zcela stejně jako v analogické větě výrokové logiky 9.4.14. QED

Poznamenejme, že věta je formulována stejně jako v případě KVL pro nekonečné množiny premis, což umožnil právě přechod od čistě obrázkové sémantiky, jak ji zachycují Vennovy diagramy, k abstraktní sémantice množinové. Vše přirozeně závisí na tom, do jaké míry je přípustné či nepřípustné něco jako nekonečný diagram (tj. diagram s nekonečně mnoha kruhy ve vzájemných vztazích) a do jaké míry pomáhá tuto potíž překonat řeč o množinách.

12

Relace

V předchozích kapitolách jsme viděli, že množiny lze zavést dvěma způsoby, totiž (1) výčtem jednotlivých prvků a (2) skrze definující vlastnost. Jelikož první případ lze redukovat na druhý, můžeme řeč o množinách chápat jako jiný způsob řeči o dané vlastnosti, řeči, která ignoruje způsob danosti předmětů, jimž ona vlastnost náleží, a soustředí se jen na jejich výslednou skupinu. Z hlediska Fregova rozlišení *smyslu* a *významu* takto pojem množiny stojí zřetelně na straně fregovského *významu* oproti rozlišením, jako jsou *vlastnost* či *pojem*, viz obrázek 12.1. Tyto úvahy jsou

význam	smysl
funkce	pojem
množina	vlastnost
předmět	obsah
(ne)pravdivost	myšlenka

Obrázek 12.1: Sémantické extrémy

podstatné z hlediska dalšího utváření formální sémantiky, pro niž bylo Fregovo rozlišení ustanovující. Obecně lze říci, že jsme konfrontováni se dvěma extrémy toho, co mohou slova znamenat. Jeden, odpovídající Fregovu smyslu, je blíže jazyku a jeho grafické struktuře, druhý, odpovídající Fregovu významu, je od výrazu vzdálený, je ve světě, k němuž jazyk odkazuje a k němuž má do jisté míry kontingentní vztah. Kontingence je dána tím, že k témuž významu může odkazovat také jiný výraz, jinak vyjádřeno: je lhostejné, zda nazýváme kočku „kočkou“ nebo „psem“, hlavně když se jedná o tentýž objekt či totéž rozlišení. Extrémní je tento koncept právě proto, že opomíjí nutnou, resp. interní stránku vztahu jazyka a světa, plynoucí z toho, že by rozdíly, které v jazyce artikulujeme, bez jazyka ve světě jednoduše neexistovaly. Již rozdělení světa na předměty a jejich vlastnosti má, lze argumentovat, původ v subjekt-predikátové struktuře věty. O zavedení relací, což bude tématem této kapitoly, speciálně ale příští části knihy věnované predikátové logice, platí tato jazyková závislost dvojnásob.

12.1 Uspořádaná dvojice

Jak jsme opakovaně zmiňovali, sémantika, kterou v knize systematicky popisujeme, se přinejmenším po vnější stránce drží druhého z obou extrémů, jenž je podle Carnapova „upřesnění“ Fregových rozlišení nazýván *extenzionálním*. Množina a předměty, které pod ni spadají, stejně jako pravdivostní hodnoty jsou prototypické příklady extenzí. V našem výkladu formální sémantiky se to projevovalo tím, že jsme vztah výrazu a toho, co znamená, chápali jako externí, zjednatelný jistým rozhodnutím, které jsme v `KVL` zavedli pod názvem interpretace. Skrze ni jsme přiřazovali formulím jazyka jisté pravdivostní hodnoty coby jejich formální významy. K tomuto přístupu, jakkoli je problematický, nás opravňuje mnohokráte zdůrazňovaný neutrální postoj: logika, kterou budujeme, není logika přirozeného jazyka, ale nástroj, který nám umožní reflektovat, vidět z jistého úhlu některé jeho aspekty. Nevyjadřujeme se tím k tomu, jakým způsobem si reálně osvojujeme význam slov, ani k tomu, že to v typickém případě není explicitním přiřazením části světa části jazyka, neboť takové přiřazení fakticky už předpokládá, že umíme mluvit.

V souvislosti se zavedením pojmu množiny je předtím, než přejdeme k logice predikátů, nutné rozebrat ještě jeden typ „predikace“, který se v ní ukáže jako podstatný a který předfregovská logika ignorovala. Můžeme-li totiž uchopit větu typu

(1) Sókratés je filosof

jako jiný výraz pro účast Sókrata na ideji filosofa, v množinovém slangu jako

(2) Sókratés $\in \{x \mid x \text{ je filosof}\}$,

je tento přepis u věty jako

(3) Sókratés je malý

problematický. Sókratés není totiž malý absolutně, ale ve vztahu k Faidónovi, zatímco ve vztahu k náčelníkovi kmene Pygmejů je zase vysoký.[1] Z hlediska nauky o idejích a její snaze vyhnout se relativismu sofistů zde máme tedy zvláštní případy slov, která mají relativitu v sobě, tj. k tomu, aby mohly mít „věčný“, objektivní význam, potřebují stanovení jistého měřítka. Vůči němu se pak chovají jako výrazy ostatní, třeba zmíněný „filosof“.

Poučení, které si z toho lze vzít, může jít několika směry. V souvislosti s postřehem, že konkrétní věci reprezentují ideje, na nichž mají účast, vždy jenom nedokonale, lze tvrdit, že i zde – v tvrzení účasti věci A na ideji B, např. empirického na ideálním kruhu – je zapotřebí nějaký srovnávací případ, vůči němuž se posoudí, zda je daný předmět dostatečně „dobrý“ na to, aby mohl být považován za instanci příslušné vlastnosti. Daná relativita tedy zasáhne vlastnosti jako celek.[2] Z jiného úhlu pohledu je zřejmé, že i u relačních termínů jako „malý“ či „otec“ lze dospět k nezávislosti na příslušném relátu, učiníme-li jej součástí věty samé, tj. nahradíme-li (3) větou

(4) Sókratés je menší než Faidón

chápanou jako výraz náležení Sókrata do množiny všeho, co je menší než Faidón, viz

(5) Sókratés $\in \{x \mid x$ je menší než Faidón$\}$.

Věta (4) takto ovšem připouští také druhý výklad, totiž že Faidón náleží do množiny všech věcí, které jsou větší než Sókratés:

(6) Faidón $\in \{x \mid x$ je větší než Sókratés$\}$.

Toto dvojí čtení může v nějakém ohledu vyhovovat aristotelské potřebě umisťovat významy obecných slov do věcí samých, či alespoň do jejich blízkosti, na druhou stranu pak není jasné, odkud se – je-li zde tedy jen malost na straně Sókratově a velikost na straně Faidónově – bere síla příslušného srovnání. Na důležitosti pak může získávat realistický názor, že kromě Sókrata a Faidóna je zde ještě něco *třetího*, totiž sama idea „malosti“, která se k nim ovšem vztahuje komplikovaněji než v případě

[1] Srov. Platón [Phaedo, 102].

[2] Srov. také Stekeler-Weithoferův komentář k citovanému místu z *Faidóna* in: Stekeler-Weithofer [2006, s. 184 nn.].

obvyklé účasti, tj. nějak je srovnává. Fakticky zde tedy volíme opačný postup nežli ten nastolený při řešení paradoxu třetího muže. Z hlediska příslušné logiky to neznamená nic jiného, než že slovům „je menší než“ přiřadíme samostatnou roli jak ze syntaktického, tak ze sémantického hlediska, stejně jako jsme to již implicitně udělali s výrazy „(je) filosof“ či „běží“, když jsme je uvažovali v odloučení od výrazů jako „Faidón“ či „Sókratés“, které s nimi teprve tvoří celou větu. V tomto ohledu se tedy nebude jednat o nijak radikální krok. Rozdíl oproti třetímu muži spočívá v tom, že se zde explicitními stávají výrazy *mimologické*, odvození paradoxu ve výše uvedeném smyslu tedy nehrozí. Způsob, jakým tento krok dále zdůvodnit, podáme v další kapitole, nyní se budeme zabývat technickými problémy, které jsou s ním spjaty, přijmeme-li jako základní sémantický nástroj výše popsané množinové paradigma.

Naším úkolem je analyzovat věty typu (4) „Sókratés je menší než Faidón“ termíny účasti věcí na idejích, resp. prostřednictvím množinového náležení. Tento úkol je všechno, jen ne triviální. V rámci teorie množin, kde se rovná problému redukce relací na množiny, trvalo dlouhou dobu, než byl přiveden k vyústění, které by šlo považovat za uspokojivé. V útrobách tohoto řešení stojí postřeh, že perspektivní extenzionální reformulace věty (4) jako

(7) Sókratés a Faidón náleží relaci „být menší než“

musí být s to tento tvar odlišit od tvaru

(8) Faidón a Sókratés náleží relaci „být menší než“,

nemluvě o tvaru

(9) Sókratés náleží relaci „být menší než“.

Zatímco případ (9) zjevně postrádá smysl, neboť v něm chybí příslušné relátum, a nemůže tedy nabýt pravdivostní hodnoty – pod hrozbou, že by se podle okolností měnila –, je případ (8) stejně akceptovatelný jako (7), říká však něco jiného, totiž že je Faidón menší než Sókratés. Dospějeme-li nyní k závěru, že je vhodné se na prvky relací, tj. to, co relacím náleží, dívat jako na množiny předmětů, které jsou těmito relacemi vztaženy, nemohou to být prosté množiny typu

$$\{\text{Sókratés, Faidón}\}$$

z toho důvodu, že je množina určena pouze svými prvky, a platí tedy

$$\{\text{Sókratés, Faidón}\} = \{\text{Faidón, Sókratés}\}.$$

Jako řešení se nabízí zavedení abstraktoru, který tuto nerozlišitelnost eliminuje, tj. objekty, na něž poukazuje, nejsou určeny pouze výčtem prvků, ale i jejich pořadím. V případě dvouprvkových totalit je takový operátor znám jako tzv. *uspořádaná dvojice.* Jako nový (nedefinovaný) základní pojem jej lze zavést prostřednictvím následujícího kritéria identity:

$$(\dagger) \quad \langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \leftrightarrow (a = c \wedge b = d).$$

Tímto se uspořádaná dvojice odlišuje od neuspořádané, pro niž platí:

$$(\ddagger) \quad \{a, b\} = \{c, d\} \leftrightarrow ((a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)).$$

Komplikovaný úkol, který stál před teorií množin, spočíval v tom, jak se vyhnout excesu takovýchto *ad hoc* zavedených nových pojmů ve prospěch jejich explicitní definice pomocí pojmu (neuspořádané) množiny. První, kdo takovou redukci provedl, byl Felix Hausdorff.[3] Učinil tak ovšem s využitím dalších nedefinovaných pojmů, totiž čísel 1 a 2:

$$\langle a, b\rangle = \{\{a, 1\}, \{b, 2\}\}.$$

Dnes se proto používá definice Norberta Wienera,[4] zjednodušená Kazimierzem Kuratowskim[5] do následující podoby:

`12.1.1 Definice (Uspořádaná dvojice):` *Uspořádanou dvojici prvků a, b definujeme jako množinu $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ a značíme ji jako $\langle a, b\rangle$. Platí tedy:*

$$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Podle Quina byl teprve tímto krokem naplněn program Fregova logicismu,[6] chápeme-li ho v širším smyslu, jenž zahrnuje co nejobecnější, množinové založení matematiky. Na rozdíl od Hausdorffovy definice není každopádně námi přijaté řešení příliš „intuitivní". Věcně však naprosto vyhovuje, protože na jeho základě je splněno naše očekávání vyjádřené v principu (†). Ten lze nyní uchopit jako dokazatelné tvrzení:

`12.1.2 Věta (O uspořádané dvojici):` *Pro libovolné a, b, c, d platí:*

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \text{ právě tehdy, když } a = c \text{ a } b = d.$$

---

[3] Hausdorff [1914, s. 32 n.].
[4] Wiener [1914].
[5] Kuratowski [1921].
[6] Quine [1995, s. 24].

Důkaz: ($\Leftarrow$) Jestliže $a = c$ a $b = d$, pak také $\{a\} = \{c\}$ a $\{a, b\} = \{c, d\}$. Tedy $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. ($\Rightarrow$) Naopak nechť $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Pak musí nastat alespoň jedna z následujících dvou možností: (i) $\{a\} = \{c\}$ a $\{a, b\} = \{c, d\}$ nebo (ii) $\{a\} = \{c, d\}$ a $\{a, b\} = \{c\}$. Nastane-li možnost (i), pak jistě $a = c$. Navíc kdyby $b \neq d$, pak by $b = c$ a $d = a$, a tudíž by – protože $a = c$ – platilo $b = d$, což by byl spor. Tedy dohromady $a = c$ a $b = d$. Nastane-li možnost (ii), pak $a = c$ a $a = d$ a navíc $a = c$ a $b = c$. Dohromady $a = b = c = d$ a konkrétně i $a = c$ a $b = d$. Tedy v obou možných případech dokazované tvrzení platí. QED

Tím máme ošetřenu pojmovou bázi, a můžeme tedy přistoupit k modelování větších celků formální sémantiky, která pokryje jak pojem relace, tak pojem funkce, jejž jsme dosud používali rovněž na obecné a do jisté míry předteoretické úrovni.

12.2 Kartézský součin

Po zavedení uspořádaných dvojic je zřejmé, jak bude vypadat formální modelování významu relačních výrazů. Podobně jako u výrazů pro vlastnosti se bude jednat o pojmenování jistých množin, v tomto případě ovšem množin uspořádaných dvojic. Přepis výrazu „Sókratés je menší než Faidón" tedy nabude tvaru

$$\langle \text{Sókratés, Faidón} \rangle \in \{\langle x, y \rangle \mid x \text{ je menší než } y\},$$

kde výrazy $\langle x, y \rangle$ jsou označeními komplexních množinových termů, tj. v celém zápisu se fakticky neobjevuje nic jiného než množinový operátor a znak náležení. Samotná formální definice relace, resp. významu relačního slova, vychází z pojmu známého jako kartézský součin, jenž umožňuje hovořit o všech možných relacích nad danou množinou, resp. množinami předmětů.

12.2.1 Definice (Kartézský součin): *Kartézský součin množin A a B (značíme $A \times B$) je množina všech uspořádaných dvojic, jejichž první člen je v A a druhý člen je v B. Tedy $A \times B$ je množinou všech prvků $\langle a, b \rangle$ takových, že $a \in A$ a zároveň $b \in B$.*

Relace, která je na základě tohoto pojmu přímočaře definovatelná, je tzv. relace binární, tj. existující mezi dvěma objekty. Tím předjímáme přirozený fakt, že vztaženo k sobě může být i více předmětů, což bude vyžadovat speciální přístup. Uvidíme však, že ten nepovede k zavádění nových pojmů, tj. vystačíme si jen s pojmem uspořádané dvojice, a tudíž jen s pojmem množiny.

`12.2.2 Definice (Binární relace):` *Binární relace na množině A je každá podmnožina kartézského součinu $A \times A$.*

Relace na množině modeluje vztahy mezi prvky dané množiny. Například „přátelství“ můžeme pojmout jako relaci na množině lidí, což podle definice znamená, že tento vztah budeme chápat jako množinu uspořádaných dvojic lidí. Fakt, že nějaký člověk a je přítelem nějakého člověka b, chápeme tak, že dvojice $\langle a, b \rangle$ je prvkem relace „být přítelem“. Na množině lidí máme mnoho dalších přirozených vztahů jako „být otcem“, „být sousedem“, „být stejně starý jako“, „být žákem“, „být lepším sportovcem než“ atd. Z hlediska predikátové logiky nebudou tyto vztahy ničím více než množinami dvojic. Např. vztah „být učitelem“ je následující množina

$$\{\langle x, y \rangle \mid x \text{ je učitelem } y\} = \{\langle \text{Sókratés, Platón} \rangle, \langle \text{Platón, Aristotelés} \rangle, \dots\},$$

kde tři tečky „…“ reprezentují všechny další instance učitelů a žáků

$$\langle \text{Aristotelés, Theofrastos} \rangle,$$

$$\langle \text{Frege, Wittgenstein} \rangle,$$

$$\langle \text{Husserl, Heidegger} \rangle,$$

$$\vdots$$

Může se stát, že vztah spojuje prvky různých množin. Tak třeba jeden člen vztahu „být hlavním městem“ je vždy město a druhý vždy stát, jako dvojice:

$$\langle \text{Vilnius, Litva} \rangle.$$

Z tohoto hlediska se může zdát vhodné definovat relace jako podmnožiny libovolného kartézského součinu, a skutečně by nebyl problém toto opatření přijmout, na druhou stranu je zbytečné. V uvedeném příkladě stačí prohlásit, že „být hlavním městem“ je relace na množině $A \cup B$ – kde A je množina měst a B je množina států –, neboť se též jedná o podmnožinu součinu:

$$(A \cup B) \times (A \cup B).$$

To zakládá i příslušné zobecnění. Naše definice binární relace je tedy dostatečně obecná a nepředstavuje pouhý speciální případ obecnějšího rozlišení.

Podívejme se nyní, do jaké míry se takto množinově pojaté vztahy mohou vzájemně lišit a jaké obecné vlastnosti mohou naopak sdílet. Vezměme v úvahu třeba relaci na množině lidí „být narozen ve stejném roce jako“ a porovnejme ji s relací $\leq$ na množině přirozených čísel. Povšimněme si prvního významného rozdílu. Prvky a a b mohou být libovolní lidé, přesto vždy platí, že pokud a je narozen ve stejném roce jako b, pak také b je narozen ve stejném roce jako a. Na druhé straně není pravda, že by pro libovolná čísla a, b platilo, že pokud $a \leq b$, pak také $b \leq a$. Poukázali jsme na určitý rozdíl, avšak tyto relace mají také některé společné rysy. Např. pro každého člověka a musí platit, že a je narozen ve stejném roce jako a. A také pro libovolné číslo a platí, že $a \leq a$.

Právě jsme naznačili, podle jakých kritérií lze relace klasifikovat do různých typů a jak lze studovat jejich vlastnosti. Podrobněji to ukážeme na jednom významném příkladě. Nejprve ale zaveďme následující konvenci.

`12.2.3 Konvence (Relace a náležení):` *Skutečnost, že $\langle a, b\rangle \in R$, kde R je nějaká relace na A, budeme zapisovat zkráceně jako $R(a, b)$. Podobně budeme náležení více prvků $a, b, c, \ldots$ do téže množiny A zapisovat jako $a, b, c, \ldots \in A$.*

Nyní přejdeme k několika případům významných typů relací vedoucích k relaci ekvivalence. S (logickou) ekvivalencí jsme se již setkali v předchozím výkladu jakožto s relací definovanou na formulích `KVL`. Nyní nám jde o vymezení typu, jehož byla tato relace instancí.

`12.2.4 Definice (Relace ekvivalence):` *Nechť A je množina a R je binární relace na A. Řekneme, že R je:*

(1) reflexivní, když pro každé $a \in A$ platí $R(a, a)$,

(2) symetrická, když pro každé $a, b \in A$ platí, že pokud $R(a, b)$, pak i $R(b, a)$,

(3) tranzitivní, když pro každé $a, b, c \in A$ platí, že pokud $R(a, b)$ a $R(b, c)$, pak i $R(a, c)$.

Ekvivalencí se binární relace R na A nazývá tehdy, když je reflexivní, symetrická a tranzitivní zároveň.

Před okamžikem jsme si rozmysleli, že „narodit se ve stejném roce“ je symetrická a reflexivní relace. Hned je patrné, že je to také tranzitivní relace (pokud se a narodil ve stejném roce jako b a b se narodil ve stejném roce jako c, pak se jistě a narodil ve stejném roce jako c). Máme zde tedy příklad relace ekvivalence. Relace na množině přirozených čísel $\leq$

je reflexivní a tranzitivní, ale není symetrická, a proto se nejedná o relaci ekvivalence.

Relace „narodit se ve stejném roce“ vytváří na množině všech lidí jistý efekt, kterého jsme si již výše všimli u formulí,[7] totiž že danou množinu, na níž je definována, rozděluje do nepřekrývajících se skupin předmětů, konkrétně skupin lidí narozených v tomtéž roce. Každý člověk se narodil v nějakém roce, a náleží tedy do některé z těchto skupin. Zároveň lze konstatovat, že se žádný člověk nenarodil ve dvou různých letech, a tedy žádný člověk není zařazen do dvou různých, takto vytvořených skupin. Dokážeme, že tento efekt úzce souvisí s vlastnostmi, které definují relaci ekvivalence. Rozdělení množiny do příslušných skupin se označuje jako její *rozklad*.

`12.2.5 Definice (Rozklad množiny):` *Množinu S nazýváme rozkladem množiny A, když jsou splněny následující tři podmínky:*

(1) S je nějaká množina neprázdných podmnožin množiny A,

(2) každý prvek množiny A je obsažen v nějaké množině, která se nachází v S,

(3) každé dvě různé množiny z S mají prázdný průnik.

Dokážeme, že každá relace ekvivalence na dané množině A určuje jednoznačně nějaký rozklad množiny A. Za tímto účelem zavedeme nové značení.

`12.2.6 Definice (Třída ekvivalence):` *Nechť tedy R je relace ekvivalence na nějaké množině A. Pro každý prvek $a \in A$ definujeme $[a]_R$ jako množinu všech prvků $b \in A$, pro které platí $R(a,b)$, tj. $\{b \mid R(a,b)\}$. Podle okolností lze vynechávat také index R, tj. psát pouze $[a]$. Každá množina $[a]_R$ se nazývá třída ekvivalence.*

`12.2.7 Věta (O rozkladu):` *Nechť R je relace ekvivalence na A. Pak $\{[a]_R \mid a \in A\}$ je rozklad množiny A.*

`Důkaz:` Musíme ověřit, že soubor množin $B = \{[a]_R \mid a \in A\}$ splňuje všechny tři podmínky z definice rozkladu. (1) Je jasné, že B je nějaká množina podmnožin množiny A. Je třeba ještě zdůvodnit, že pro libovolné a z A je množina $[a]_R$ neprázdná. Z reflexivity relace R je zjevné, že pro každé a z A platí $a \in [a]_R$. Tedy B je skutečně množina neprázdných podmnožin množiny A. (2) Ze stejného důvodu platí, že každý

[7] Viz oddíl 8.1.

prvek a množiny A je obsažen v nějaké množině, která je obsažena v B. (3) Zbývá dokázat, že pro každé dva prvky a, b z A platí, že pokud $[a]_R \neq [b]_R$, pak $[a]_R \cap [b]_R$ je prázdná množina. Jinými slovy: jestliže existuje $c \in [a]_R \cap [b]_R$, pak $[a]_R = [b]_R$. Předpokládejme tedy, že existuje prvek c, který je současně v množině $[a]_R$ i v množině $[b]_R$. Chceme dokázat, že pak již každý prvek množiny $[a]_R$ musí být současně prvkem množiny $[b]_R$ a zároveň každý prvek množiny $[b]_R$ musí být prvkem množiny $[a]_R$. Nechť tedy $d \in [a]_R$. To znamená, že $R(a, d)$. Na základě předpokladu platí $R(a, c)$ a díky symetrii i $R(c, a)$. Tudíž díky tranzitivitě $R(c, d)$. Protože předpokládáme, že také $R(b, c)$, znovu můžeme použít tranzitivitu a tvrdit $R(b, d)$. To znamená, že $d \in [b]_R$. Dokázali jsme, že každý prvek množiny $[a]_R$ je zároveň prvkem množiny $[b]_R$. Zcela analogickou úvahou lze zdůvodnit, že také každý prvek množiny $[b]_R$ je prvkem množiny $[a]_R$, a tyto množiny jsou tedy identické. `QED`

Uvědomme si, že naopak také každý rozklad množiny A určuje jednoznačně nějakou relaci ekvivalence na A. Rozklad nám rozloží množinu na disjunktní skupiny objektů. Stačí, když stanovíme, že v relaci jsou ty prvky, které náleží do stejné skupiny. Rozklady množiny A a relace ekvivalence na A představují tedy dvě strany téže mince. Z tohoto popisu je zjevné, že extrémním případem relace ekvivalence je rovnost, v tom smyslu, že každému prvku a základní množiny přiřadí jedinečnou třídu ekvivalence reprezentovanou množinou $\{a\}$. Souvislostem rovnosti a ekvivalence, resp. tříd ekvivalence se budeme zabývat v kapitole 18.

Kromě zmíněných ekvivalencí existuje přirozeně řada dalších významných (typů) relací. Z našeho hlediska je dobré zmínit ještě relaci uspořádání, která se objevuje všude tam, kde existuje nějaká hierarchie mezi objekty.

`12.2.8 Definice (Uspořádání):` *Nechť A je množina a R je binární relace na A. Řekneme, že R je:*

(1) antisymetrická, když pro každé $a, b \in A$ platí, že pokud $R(a, b)$, pak neplatí $R(b, a)$,

(2) slabě antisymetrická, když pro každé $a, b \in A$ platí, že pokud $R(a, b)$ a $R(b, a)$, pak $a = b$.

Relací ostrého uspořádání nazveme R tehdy, když je tranzitivní a antisymetrická, relací neostrého uspořádání tehdy, když je tranzitivní, reflexivní a slabě antisymetrická.

Mezi relace ostrého uspořádání můžeme zařadit třeba relace „být nadřízeným“ (resp. „být podřízeným“) a „být předkem“ (resp. „být potomkem“). Dále sem patří relace „být menší než“ na číselných strukturách, kterou značíme jako $<$, a také relace $\subset$ („být vlastní podmnožinou“) mezi množinami. Mezi relace neostrého uspořádání patří jejich obměny $\leq$ a $\subseteq$. V daný moment se už nebudeme pouštět do podrobnějšího studia těchto významných typů relací a budeme pokračovat ve výstavbě našeho základního pojmového aparátu. K tomu patří především pojem funkce, dále uchopený jako specifický typ relace.

12.3 Funkce

Pojem funkce jsme dříve zmínili jak v souvislosti s Fregovým rozhodnutím modelovat formální význam konstruované logiky na matematických pojmech, tak v souvislosti s motivací Fregova rozlišení smyslu a významu. Tomu odpovídá na jedné straně standardní pojetí funkce jako jisté konstrukce, způsobu, jak se od vstupu dostat k výstupu, a na druhé straně pojetí funkce, v němž je tento způsob považován za nepodstatný, tj. záleží pouze na argumentu a přiřazené hodnotě, nikoli na tom, jak jsou k sobě vztaženy. Je zjevné, že tento druhý pojem funkce odpovídá našemu extenzionálnímu pojetí relace, v němž jsou k sobě vztaženy právě vstup a výstup, tj. relace je uchopena jako množina příslušných dvojic.

Námi využívané pravdivostní funkce, tedy fakt, že se s výjimkou negace jedná o funkce víceargumentové, nám ovšem ukazují, že k tomu, abychom toto ztotožnění mohli provést, musíme disponovat také jinými než pouze binárními relacemi. Těmi lze zachytit pouze jednoargumentovou negaci jako:

$$\{\langle \mathtt{1}, \mathtt{0}\rangle, \langle \mathtt{0}, \mathtt{1}\rangle\}.$$

Víceargumentové pravdivostní funkce jsou ovšem případ obecnějšího problému, vyvěrajícího z potřeby zachytit formálně vztahy, které mají více než dva členy. Řekneme-li např., že Pavel je menší než Petr o 20 centimetrů, rýsuje se nám zde obecný vztah, který může být pojmenován jako „být menší než kdo o kolik“. Tento vztah bychom nyní chtěli uchopit jako množinu uspořádaných trojic takových, že na prvních dvou místech budou vždy lidé a na třetím místě přirozené číslo. Vztahy mohou být dále čtyřčlenné, pětičlenné atd., a není důvod stanovovat nějaký apriorní limit pro počet členů jakéhokoli potenciálního vztahu. Je tedy zřejmé, že budeme potřebovat nejen uspořádané dvojice, ale obecně uspořádané n-tice pro každé přirozené číslo n. Ty však můžeme zavést jednoduše indukcí pomocí pojmu uspořádané dvojice.

`12.3.1 Definice (Uspořádaná` n`-tice):` *Pro* $n = 1$ *definujeme:*

$$\langle a_1 \rangle = a_1.$$

Máme-li již definován pojem uspořádané k-tice, lze pojem uspořádané $(k+1)$-tice definovat takto:

$$\langle a_1, \ldots, a_k, a_{k+1} \rangle = \langle \langle a_1, \ldots, a_k \rangle, a_{k+1} \rangle .$$

Každá množina je tedy množinou uspořádaných 1-tic. Množiny těchto objektů jsou však vhodným kandidátem na logický protipól vlastností. Každou vlastnost bude reprezentovat množina těch objektů, kterým tato vlastnost náleží. Uspořádané 1-tice působí na první pohled poněkud nepřirozeným dojmem. V předchozí definici jsme 1-tice přiřadili k ostatním n-ticím pouze proto, že jsme chtěli poukázat na jistou analogii mezi vlastnostmi a vztahy a na možnost pojmout vlastnosti jako mezní případy vztahů. Nyní tedy zobecníme pojem kartézského součinu a relace.

`12.3.2 Definice (`n`-ární relace):` *Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou libovolné množiny. Kartézský součin těchto množin (značíme $A_1 \times \cdots \times A_n$) je množina všech uspořádaných n-tic $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ takových, že pro každé i $(1 \leq i \leq n)$ je $a_i \in A_i$. Pokud existuje množina A tak, že pro každé i $(1 \leq i \leq n)$ je $A_i = A$, označujeme součin zkráceně A^n. Hovoříme o něm také jako o n-té kartézské mocnině. Platí, že n-ární relace na množině A je každá podmnožina mocniny A^n.*

Nyní můžeme přejít k extenzionální definici funkce coby relace, jejíž poslední člen (funkční hodnota) je jednoznačně určen členy předchozími (argumenty).

`12.3.3 Definice (`n`-argumentová funkce):` *Nechť R je $(n+1)$-ární relace na množině A. Řekneme, že R je n-argumentová funkce na množině A, když pro každé $a_1, \ldots, a_n, b, c \in A$ platí následující podmínka:*

jestliže $\langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle \in R$ a $\langle a_1, \ldots, a_n, c \rangle \in R$, pak $b = c$.

Funkce označujeme často písmeny $f, g, \ldots$ Skutečnost, že $\langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle \in f$, zapisujeme také jako $f(a_1, \ldots, a_n) = b$.

Tedy například tříčlenný vztah „být menší než kdo o kolik" je vlastně dvouargumentová funkce, protože je-li člověk a menší než člověk b, je menší vždy o určitou vzdálenost. Nemůže se tedy stát, že by v této relaci byly trojice $\langle a, b, c \rangle$ a $\langle a, b, d \rangle$, kde c a d jsou různá čísla. Dále např. $+$ je také dvouargumentová funkce, totiž množina trojic, kde poslední člen je určen jednoznačně předchozími dvěma. Relace „být otcem" je jednoargumentová funkce, ale binární relace „být přítelem" není funkce, neboť existují lidé, kteří mají více přátel než jednoho.

`12.3.4 Definice (Definiční obor, obor hodnot):` *Nechť R je binární relace na A. Definiční obor relace R je množina všech těch prvků*

$a \in A$, pro které existuje $b \in A$ tak, že $\langle a, b\rangle \in R$. Obor hodnot relace R je množina všech $b \in A$, pro které existuje $a \in A$ tak, že $\langle a, b\rangle \in R$.

Vezmeme-li v úvahu relaci „být hlavním městem“, je jejím definičním oborem množina hlavních měst, oborem hodnot je množina všech států (protože každý stát má nějaké hlavní město). V případě relace „být bratrem“ je definičním oborem množina těch mužů, kteří mají nějaké sourozence (a jsou tedy bratry těchto sourozenců), oborem hodnot je pak množina všech lidí, kteří mají nějaké bratry.

Stejně jako relace lze i funkce klasifikovat do jistých významných typů, z nichž nejvýznamnější je pojem bijekce, s nímž jsme se již setkali v definici 10.4.1. V definici 10.4.2 vystoupil tento pojem jako kritérium rovnosti kardinalit dvou množin. Nyní provedeme přesnější rekonstrukci tohoto pojmu v rámci teorie množin.

`12.3.5 Definice (Bijektivní funkce):` *Nechť f je jednoargumentová funkce na $A \cup B$, jejíž definiční obor je podmnožinou množiny A a jejíž obor hodnot je podmnožinou množiny B. Řekneme, že:*

(1) f je prostá, jestliže neexistují dva různé prvky a, b tak, že by $f(a) = f(b)$,

(2) f je totální vzhledem k A, jestliže A je definiční obor funkce f,

(3) f je na množinu B, jestliže B je obor hodnot funkce f.

Funkce f je bijekcí mezi množinami A a B, jestliže je prostá, totální vzhledem k A a je na množinu B.

Každá prostá funkce f je tedy bijekcí mezi svým definičním oborem a svým oborem hodnot. Význam definovaných pojmů si přiblížíme na příkladech.

`Příklad 12.3.6:` Představme si, že máme budovu, v níž jsou různé spínače a různá světla. Je na nás, abychom určili, které spínače budou rozsvěcet která světla. Zajímají nás tedy takové množiny dvojic, kde vždy na prvním místě je spínač a na druhém místě je některé světlo. Jinými slovy, zajímají nás takové relace, jejichž definiční obor je podmnožinou množiny spínačů a jejichž obor hodnot je podmnožinou množiny světel. Určíme-li, které spínače budou rozsvěcet která světla, stanovíme tím zároveň jednu konkrétní relaci. Pokud některý spínač rozsvítí dvě či více světel zároveň, není tato relace funkcí. Předpokládejme, že tato relace funkcí je, tj. že každý spínač rozsvítí maximálně jedno světlo. Pokud navíc žádné dva různé spínače nerozsvěcí jedno a totéž světlo, jedná se o prostou funkci. Funkce je totální vzhledem k množině spínačů, když každý spínač rozsvěcí nějaké světlo. Funkce je na množinu světel, jestliže každé světlo se dá rozsvítit nějakým spínačem. Shrneme-li všechny tyto vlastnosti, dostaneme, že funkce je bijekcí mezi množinou spínačů a množinou světel. V tomto případě každý spínač rozsvěcí právě jedno světlo, dva různé spínače rozsvěcí různá světla a každé světlo lze pomocí některého spínače rozsvítit. Pak lze také říci, že spínačů je přesně tolik, kolik je světel.

`Příklad 12.3.7:` Uvažujme funkci, která každému přirozenému číslu přiřadí množinu jeho dělitelů, tedy např. číslu 15 množinu $\{1, 3, 5, 15\}$. Tuto funkci chápeme opět jako relaci, tedy jako množinu dvojic:

$$\{\langle 1, \{1\}\rangle, \langle 2, \{1, 2\}\rangle, \langle 3, \{1, 3\}\rangle, \langle 4, \{1, 2, 4\}\rangle, \langle 5, \{1, 5\}\rangle, \ldots\}.$$

Jedná se o funkci, která je totální na množině přirozených čísel, neboť každému číslu jednoznačným způsobem přiřadí nějakou množinu přirozených čísel. V oboru hodnot této funkce se nacházejí konečné množiny přirozených čísel, funkce však není na množinu všech konečných množin přirozených čísel. Jako důvod lze uvést třeba to, že číslo 1 je dělitelem každého přirozeného čísla, takže množiny, které neobsahují číslo 1, se nenacházejí v oboru hodnot zvažované funkce. Alternativním důvodem je to, že je-li např. číslo 6 dělitelem nějakého čísla, musí být dělitelem tohoto čísla i číslo 3. V oboru hodnot funkce tedy nejsou žádné množiny obsahující číslo 6, a nikoli číslo 3. Funkce je prostá, neboť každé číslo je svým vlastním největším dělitelem. Máme-li tedy dvě čísla m, n taková, že $m < n$, pak se n nachází mezi děliteli čísla n, avšak nikoli mezi děliteli čísla m. Neexistují tedy dvě různá čísla, která by měla stejnou množinu dělitelů.

Vděčným příkladem typizace funkcí jsou přirozeně aritmetické operace, zvláště proto, že se na potřebě dosažení příslušných vlastností, jako je totálnost, ukazuje jejich provázanost se zaváděním nových číselných oborů a obecně s metodou ideálních elementů. Operace sčítání je takto např. evidentně totální na množině N přirozených čísel, není ale na, pokud k nim nepřidáme 0. Bez ní nelze totiž vyjádřit číslo 1 jako součet dvou jiných přirozených čísel. Operace odčítání není na N ani totální, protože pro čísla m a n, kde $m < n$, nevede k žádnému řešení. K tomu dochází až v oboru Z celých čísel, který je fakticky zaveden proto, aby daný stav nastal, jinak řečeno, aby měla funkce sčítání totální inverzní funkci. Stejně tak je v oboru N totální funkce násobení, nikoli však funkce dělení, k čemuž dochází až v oboru Q všech racionálních čísel. Jak jsme již zmínili, zavedení reálných čísel R takto algebraicky – totiž jako výsledek snahy o totální proveditelnost operace odmocňování coby inverze k operaci mocnění – provést nelze s ohledem na výskyt záporných čísel.

Vůči nim dochází k totální proveditelnosti odmocniny až v oboru C čísel komplexních. Tím je jen podtržena skutečnost, že reálná čísla oproti ostatním číselným oborům mají podstatný původ v geometrických úvahách o kontinuitě a nelze je ospravedlnit algebraicko-logickou cestou.

V širší perspektivě zde vlastně vidíme i meze projektu „logifikace" aritmetiky, jak se k němu odhodlal Frege ve svém *Pojmovém písmu*. V příští kapitole probereme vlastní jádro tohoto projektu, tedy to, co dnes známe jako klasickou logiku predikátů, a dobereme se jak jeho nesporných kladů, tak význačných omezení.

Část III

Klasická logika predikátů

13

Kvantifikace

Jak z hlediska našeho výkladu, tak z hlediska historického významu logických systémů, které studujeme, se nyní dostáváme k centrálnímu tématu knihy, totiž ke klasické predikátové logice (zkráceně `KPL`). Věcně je její hodnota dána již tím, že obsahuje – ve vztahu k syntaxi i sémantice – oba dosud studované systémy, tj. klasickou logiku výroků i sylogistiku. To znamená, že v `KPL` budeme s to reprezentovat logicky platné úsudky `KVL` a sylogistiky (s uvedenými omezeními) opět jako logicky platné. Předchozí kapitoly lze tedy vzhledem k tomu, co přijde, chápat jako kapitoly didaktické. Z věcného hlediska bychom si bez jakékoli ztráty vystačili pouze s výkladem `KPL`. Z jiného úhlu pohledu však platí, že nám zvolený postup umožnil věnovat se podrobněji některým filosofickým tématům (jako je např. pravdivost či analytičnost), která jsou obecná, a máme tak volnější ruce pro soustředěnější výklad formálních stránek systému, který je ve srovnání s dosud probraným značně komplikovaný.

Hlavním důvodem této komplikace je zavedení prostředků *kvantifikace*, neboť skrze tyto prostředky umožňující vyjadřovat se k počtu předmětů spadajících pod danou vlastnost (jinými slovy: *kvantifikovat kvalitu*) vstupuje do příslušné formální sémantiky *nekonečno*. Odtud přirozený sklon užívat k výkladu formální sémantiky `KPL` teorii množin, ba dokonce ji považovat za jakousi univerzální sémantickou teorii, do níž je sémantika predikátové logiky, ale i logik jiných vnořena. Zmínili jsme přitom již v úvodu ke kapitole 10, že se v tomto přístupu skrývá jistý kruh, neboť teorie množin je sama pěstována axiomaticky a jako taková sémantiku predikátové logiky předpokládá. V nastávajícím výkladu se tedy budeme snažit o to, abychom se vyhnuli podstatným teoreticko-množinovým předpokladům, nebo abychom na ně alespoň upozornili, budou-li použity.

13.1 Substituční strategie

Podíváme-li se na Kantovu tabulku kategorií, viz oddíl 4.7, je zřejmé, že zatímco `KVL` svou formou rozvíjela *kategorii kvality*, tj. akty vynesení soudu a jeho popření, na metajazykové úrovni pak jeho popření nekonečné, náleží sylogistika *kategorii kvantity*. V té se určuje, a takto kvantifikuje, zda předměty, mající vlastnost stojící v subjektu, splňují vlastnost stojící v predikátu *všechny*, nebo zda ji splňují jen *některé*. V případě sylogistiky nebyl ovšem rozdíl předmětu a vlastnosti, která mu náleží, artikulován jako sémanticky relevantní – porovnávány byly tedy spíše vlastnosti jako takové, a to co do vzájemného překryvu, jak jej reprezentují příslušné kruhy.

V Kantově tabulce se rozdíl předmětu a vlastnosti, resp. jedinečné a obecné představy odráží zavedením třetího typu soudu v rámci kategorie kvantity, totiž soudu jedinečného. Ten se však z čistě formálního hlediska, konkrétně tedy z hlediska jeho výskytu v úsudcích, které by šlo uznat jako formálně platné, neliší od soudu obecného. Jejich odlišnost je až transcendentální povahy, tj. ve vztahu k možné zkušenosti. Typický příklad, kterým lze snadno oddělit logicky platný úsudek predikátové logiky od logiky výroků

$$\frac{\begin{array}{l}\text{všichni psi jsou savci,}\\ \text{Alík je pes}\end{array}}{\text{Alík je savec,}}$$

je tak sice rovněž typickým příkladem, jak oddělit od výrokové logiky logiku sylogistickou, děje se tak však na zcela jiném logickém základě. Ten rozpracoval plnohodnotně až Frege, když od sebe odlišil jména a predikáty jako disjunktní kategorie mimologických výrazů. V důsledku tohoto rozdílu, jak ho vysvětlíme záhy, nemají věty „Alík je pes“ a „bernardýn je pes“ stejnou formu „A je P“ a „B je P“. Zatímco první věta je typické subjekt-predikátové tvrzení, druhá je chápána jako zamaskované obecné tvrzení, jehož přesnější znění je „pro každý objekt x platí, že jestliže x je bernardýn, pak x je pes“.

Ačkoli je zjevné, že tyto typy věty mají odlišný sémantický potenciál, rozdíl příslušné logiky vůči aristotelské tradici se přesto může zdát relativně malý. Že se fakticky jedná o zcela zásadní přeryv, se stane jasné v okamžiku, když fenomén kvantifikace a jeho adekvátní logické zpracování spojíme s jiným fenoménem, totiž uznáním (víceargumentových) vlastností, resp. vztahů jako samostatných logických kategorií. Tím dojde nejprve ke značnému zvýšení možností pojmotvorby, neboť (unární) vlastnosti dovolují fakticky vytvářet nové vlastnosti pouze skládáním reprezentovaným následující řadou:

pes je savec,

malý pes je savec,

malý pes je hladový savec,

malý pes je chlupatý hladový savec

atd.

Všimněme si přitom, že je to právě logické omezení na unární vlastnosti, co vedlo k neobyčejně chudému a sterilnímu pojetí analytického výroku, jenž byl modelován na základě pojmové „identity“, jak jsme o tom hovořili v oddílu 6.4. Totéž se přirozeně týká i pojmu logického vyplývání. Snaha redukovat vícemístné relace na pouhé vlastnosti, jak ji zastával ještě Leibniz, pak nedovoluje zachytit platnost některých úsudků, které mají zjevný formální charakter. Leibniz sám přitom jako příklad takovéhoto úsudku, který tradičními – tedy sylogistickými – prostředky reprezentovatelný není, uvádí tento:

$$\frac{\text{Ježíš Kristus je Bůh}}{\text{matka Ježíše Krista je matka Boží.}}$$ [1]

Důvod, proč až do Fregova projektu pojmového písma nedošlo k uznání relací jako samostatných logických kategorií, přitom nespočíval v neochotě tak učinit, ale ve způsobu, jímž k nim bylo přistupováno, totiž ontologicky, a nikoli synkategorematicky. Vztahy typu „stát nalevo od“ jsou ale zjevně typy významů, které, podobně jako významy spojek, lze jen stěží uchopit jinak nežli skrze větu, v níž je tvrzen fakt, že

Petr stojí nalevo od Evy,

tedy prostřednictvím jazyka. Ten tak působí konstitutivně, tj. začínáme jím, nikoli popisovanou skutečností. Odtud, tj. z přijetí příslušného obratu k jazyku, je pak již přímá cesta k Fregovu logickému projektu, jenž nevychází z prostého skládání již hotových objektů (vlastností), ale začíná naopak rozkladem věty, z níž jsou tyto vlastnosti získávány, a to

[1] Leibniz [1705, s. 498].

mimořádně plodným způsobem, který budeme nazývat *substituční strategií.* Načrtněme nyní, o co se jedná.

Ve větě lze rozeznat jako části výrazy, které spadají pod kategorii jméno. Dosazováním proměnných za (některá či všechna) jména, která se ve větách vyskytují, lze obdržet nový druh výrazů, totiž predikáty, které mohou být pochopitelně i víceargumentové. Vezměme jako příklad větu:

Brutus zabil Caesara.

Různým nahrazováním proměnných x a y za jména Brutus a Caesar získáváme postupně výrazy a jim odpovídající pojmy:

(1) x zabil Caesara (pojem Caesarova vraha),

(2) Brutus zabil y (pojem Brutovy oběti),

(3) x zabil y (relace vraha a jeho oběti).

Pokud bychom vyšli z věty

Brutus zabil Bruta,

získali bychom substitucí ještě formu a pojem

(4) x zabil x (pojem sebevraha).

Povšimněme si, že výsledné výrazy, v nichž se takto volně vyskytují proměnné, nejsou již výroky, tj. něco, co by mohlo mít bez dalšího nárok na pravdu. Frege je označoval jako *nenasycené výrazy* v protikladu k *nasyceným výrazům.* O tom jsme již hovořili v oddílu 5.5. Mezi nasycené výrazy přitom neřadil jen věty, ale také jména. Toto rozhodnutí je přitom relativně kontroverzní, neboť neodpovídá celkovému holistickému naladění Fregova podniku, v němž má, jak tvrdí, jméno význam pouze v kontextu věty. Frege zašel v jistou chvíli svého filosofického vývoje tak daleko, že obě kategorie sloučil v tom smyslu, že větu prohlásil za jméno pravdivostní hodnoty.[2] Tento krok lze ale za jistých okolností omluvit, zdůrazníme-li jeho motivační a technický charakter. Jméno je totiž výrazem, který rovněž umožňuje další substituovatelnost, neboť může obsahovat jiná jména jako své části. Vezměme výraz „matka Ježíše Krista“, který lze přepsat na

matka x,

[2] Frege [1893/1903, díl 1, § 2].

nebo třeba „2+2", z něhož postupně dostáváme výrazy a jim odpovídající funkce:

(1) $x + 2$ (funkce přičítání 2),

(2) $2 + x$ (funkce přičítání k 2),

(3) $x + y$ (funkce sčítání),

(4) $x + x$ (funkce násobení 2).

Jméno je tedy výrazem, který vede přirozeně k funkcionální analogii, za jejíž převedení z matematiky do logiky je Frege – jak jsme již viděli v KVL – zodpovědný. Nenasycené výrazy lze přirozeně, po aritmetickém vzoru výrazů „$x + 2$" či „$x + y$", chápat jako funkce, které přiřazují objektům (resp. n-ticím objektů) jiné objekty. V případě výrazu „$x + 2$" jsou to přirozená čísla přirozeným číslům, v případě výrazu „matka x" jsou to lidé (matky) lidem (synům). Viz obrázek 13.1. Jsou-li výchozími

matka x

Ježíš Kristus $\longmapsto$ panna Marie

Karel IV. $\longmapsto$ Eliška Přemyslovna

Siegfried Wagner $\longmapsto$ Cosima Wagner

Marie Antoinetta $\longmapsto$ Marie Terezie

$\ldots \longmapsto \ldots$

Obrázek 13.1: Význam nevětných výrazů jako funkce

výrazy věty, vede toto srovnání přirozeně k pojetí pravdivosti jako příslušné funkční hodnoty. Dosadíme-li totiž nějaká jména objektů zpět za proměnné, získáme pravdivou nebo nepravdivou větu.

My se přitom v dalším výkladu při výběru výrazů, v nichž lze provádět substituci a které tak vedou k zavedení výrazů nových logických kategorií, omezíme pro jednoduchost pouze na věty. Nenasycenými výrazy pro nás tedy budou vždy n-ární predikáty. Ostatní případy ošetříme zvlášť v oddílu 18.3. Ze sémantického hlediska se také, čistě konvenčně, nebudeme dívat na významy predikátů jako na funkce, ale spřízněně jako na množiny objektů (resp. n-tic objektů). Vyjdeme-li z věty

Sókratés je filosof a Sókratés je moudrý

a vyjmeme-li z ní výraz „Sókratés", výsledkem bude nenasycený výraz:

x je filosof a x je moudrý.

Tím jsme získali pojem moudrého filosofa, který zredukujeme na množinu moudrých filosofů. Ne vždy je výsledný pojem zcela přirozený. Vyjdeme-li z věty

Platón je božský nebo Kant je podivuhodný

a vyjmeme-li výrazy „Platón“ a „Kant“, získáme poněkud umělou relaci, v níž jsou takové dvojice objektů, kde je první člen božský nebo druhý člen podivuhodný. V této relaci je např. dvojice $\langle$Kaddáfí, Kant$\rangle$, protože Kant je podivuhodný. Nepřirozenost této relace není nijak na závadu. Naopak, pouze se zde ukazuje, že náš postup nabízí i některé možnosti, které přirozeně nevyužijeme. Pojem vlastnosti či relace je fakticky rozšířen podobně jako pojem jména, který se prvotně vztahuje na osoby, v logickém kontextu jím ale budeme označovat každý výraz se singulární referencí.

13.2 Substituční a objektová kvantifikace

Máme-li nenasycený výraz, lze ho primárně nasytit nahrazením všech proměnných příslušným počtem jmen. Vznikl-li tento výraz z věty, což nyní považujeme za typický příklad, nabízí se ještě jiná možnost, zavedená rovněž Fregem, v níž nebudou dané proměnné nahrazeny jménem, ale kvantifikovány. Tuto možnost lze popsat tak, že chceme-li nasytit třeba proměnnou y, můžeme před celý výraz uvést:

„pro každé y platí, že“ či „pro nějaké y platí, že“.

Zůstaňme u nenasyceného výrazu:

x zabil y.

Nejprve proveďme částečné nasycení proměnné y, a x nechme zatím volné:

pro nějaké y platí, že x zabil y.

To bychom zkráceně vyjádřili jako

x někoho zabil

čili „x je vrah“. Z relace „x zabil y“ jsme získali vlastnost „být vrahem“. Jestliže aplikujeme stejný kvantifikátor také na proměnnou x, získáme již nasycený výraz (větu):

pro nějaké x platí, že pro nějaké y platí, že x zabil y.

Toto tvrzení vyjadřuje, že někdo někoho zabil. Rýsuje se nám zde způsob, jak vytvářet složitější věty z elementárních. Elementárními větami jsou např. „Sókratés je filosof“ či „Sókratés je smrtelný“. Tyto věty můžeme složit pomocí implikace, čímž získáme větu „jestliže je Sókratés filosof, pak je Sókratés smrtelný“. Dále vyjmeme Sókrata, čímž získáme nenasycený výraz „jestliže je x filosof, pak je x smrtelný“, a nasytíme ho kvantifikací „pro každé x platí, že jestliže je x filosof, pak je x smrtelný“. Výsledkem je věta vyjadřující, že filosofové jsou smrtelní. Samozřejmě se zde nejedná o řetězec úsudků. Pouze poukazujeme na konstrukci věty, a to zatím v neformálním smyslu. Metodu dosazování jmen a metodu kvantifikace bychom k sobě mohli vztáhnout následujícím způsobem.

`13.2.1 Konvence (Kvantifikované věty):` *Mějme A nenasycený výraz obsahující x jako jedinou (zatím) nekvantifikovanou proměnnou. Věta „pro každé x platí, že A“ je pravdivá právě tehdy, když výraz A se stane pravdivou větou při jakémkoli dosazení jména za x. Věta „pro některé x platí, že A“ je pravdivá právě tehdy, když pro některé dosazení jména za x se výraz A stane pravdivou větou.*

Tento postup je velice přehledný, ale bohužel se ho brzy budeme muset vzdát, a to proto, že v obecném případě nebudeme mít pro každý objekt dané oblasti v jazyce k dispozici jeho jméno. Za této situace by pak z toho, že něco platí pro dosazení všech jmen, neplynulo, že to platí pro všechny objekty daného diskurzu, což je ale zřejmý smysl příslušného tvrzení. Rozdíl, který nám zde vyvstal, je znám jako rozdíl mezi *objektovou* a *substituční* kvantifikací.

Z hlediska dalšího výkladu, jenž si je vědom formální povahy příslušného logického systému – a tedy jeho komplikovaného vztahu k tělu přirozeného jazyka – je přitom do značné míry lhostejné, k jakému z obou pojetí kvantifikace se dále přikloníme, tedy zda budeme předpokládat, že na syntaktické straně, v daném formálním jazyce, existuje pro každou významovou jednotku, což bude předmět nějakého diskursu, automaticky jméno, či nikoli. Obojí je v nějakém ohledu čistě technické opatření, které má jako každý další princip formální logiky svá pro a proti, stejně jako má svá pro a proti zavedení tzv. *volných logik*, v nichž naopak nemusí ke každému jménu jazyka existovat příslušný předmět. Za problematická budeme považovat až filosofická zdůvodnění, která k těmto koncepcím vedou a která typicky staví na neadekvátním pojetí vztahu jazyka k tomu, co znamená. Prototypem neadekvátnosti je přitom představa, která vychází z přesvědčení o konvenční povaze jazyka. Z toho, že lze totéž (tentýž význam či obsah) vyjádřit různými způsoby (různými výrazy či výrazy s různým smyslem), se usuzuje, že na příslušném způsobu nijak nezáleží a že v důsledku může příslušné rozlišení existovat nezávisle na jazyce samém. Wittgenstein tento problém traktoval pod názvem *externího vztahu*, v tomto případě externího vztahu jména a jeho předmětu, v němž jedno z relát fakticky nemusí existovat a na druhé to nemá vůbec žádný vliv.[3] Neadekvátnost daného pojetí jazyka má kořeny v tom, že si nevšímá druhé, totiž nutné, nearbitrární stránky příslušného vztahu. Tento postřeh má obecnou platnost a týká se libovolné konvence.

Ve stejném smyslu, v jakém je lhostejné, zda na silnici jezdíme vlevo či vpravo, je lhostejné, zda se pes nazývá „kočka“ nebo „Hund“, zároveň je ale zřejmé, že poté, co se pro jistou možnost rozhodneme, je příslušná konvence nutná s ohledem na plynulost provozu či příslušného diskurzu, ba že tento provoz či diskurz sama teprve umožňuje. V tomto smyslu mají příslušné konvence, dopravní předpisy či jazykové výrazy k tomu, co artikulují, *interní vztah*, a v tomto smyslu jsou na sobě obě reláta podstatně závislá. Interní typ závislosti lze vidět již na korespondenční teorii pravdy, resp. formuli:

věta „sněží“ je pravdivá, když sněží.

Ta sice vyhlíží jako trivialita, ale v externím pojetí jazyka a skutečnosti by mohla být i triviálně nepravdivá, kdyby totiž slovo „sněží“ ve své konvenčnosti znamenalo to, co znamená slovo „prší“, tj. platilo by:

věta „sněží“ je pravdivá, když prší.

Předpoklad triviality je zjevně spjat s předpokladem internosti příslušného vztahu, který podobným výkladům z definice zabraňuje, což jej ovšem z Wittgensteinova hlediska činí fakticky neartikulovatelným, protože příslušná artikulace, jak jsme se jí právě dopustili, s sebou okamžitě nese závazek k externosti. To platí podle Wittgensteina pro všechny záležitosti logiky jako celku.

Z hlediska námi avizovaného přístupu k jazyku coby k podmínce jakéhokoli poznání není nutné zacházet k takovýmto extrémům. Stačí si uvědomit slabiny příslušné ontologizující pozice. Shrňme je do několika bodů:

(1) Z toho, že lze totéž pojmenovat různě, neplyne, že to na pojmenování nezávisí, ale naopak, že k významům dospíváme stanovováním identit v různosti reprezentací čili nalézáním jednoho v mnohém. K tomu se podrobněji vyjádříme v kapitole 18 věnované rovnosti jako logickému symbolu.

[3] Srov. např. Wittgenstein [1983, s. 63].

(2) Z toho, že lze změnit význam některého slova (přiřadit některému jménu jiný předmět), neplyne, že lze totéž udělat se všemi slovy najednou. To je v souladu s postřehem, že některá mince může být falešná, ale že nemohou být falešné všechny, totiž aniž by přestaly být mincemi.

(3) Úvaha, že mnohé z věcí, o nichž obecně mluvíme, např. nebeská tělesa, nemají jména, neboť ještě nebyly objeveny, vychází z omezeného pojetí jazyka, který není chápán v transcendentálním smyslu, ale ve výskytovém smyslu artefaktu, který lze najít např. ve slovníku té které civilizace.

(4) Argumenty, které jako ten uvedený v oddílu 10.5 tvrdí, že existují principiálně nepojmenovatelné objekty, např. reálná čísla, jichž je nespočetně, a tedy více než výrazů přirozeného jazyka, se vedle nedostatečné analýzy užitých pojmů zakládají na příliš schematickém pojetí jazyka, tj. vidí ho opět jako jednoduše, např. induktivně popsatelný artefakt, nikoli jako cosi, co se rozvíjí, jako živý organismus.

Skutečnost, že se v dalším výkladu rozhodneme přiklonit k objektové kvantifikaci, která má ve vztahu k jazyku zřetelné externí rysy, a nikoli ke kvantifikaci substituční, je s ohledem na platnost uvedených bodů stejné povahy, jako bylo naše rozhodnutí traktovat význam větných částí atomisticky, ve smyslu „ontologicky“ neutrálního, technického opatření. Jeho výhody spočívají jednak v tom, že je v souladu s obecným územ, jednak ve velké míře obecnosti, kterou lze přizpůsobit konkrétním požadavkům, např. dodatečnému požadavku na existenci výrazu pro každou sémantickou jednotku.

13.3 Úskalí formalizace

Stručně načrtněme některé problémy týkající se formalizace prostřednictvím `KPL`, zvláště v souvislosti s kvantifikací. Budeme již používat symboliku predikátové logiky, zatím ale velmi volně, s vědomím toho, že její vlastní vymezení přijde až v následující kapitole. Zatím sice nemáme definovaný pojem formule, ale je rámcově jasné, které prostředky budeme mít k dispozici, totiž predikáty (jednomístné i vícečlenné), jména, proměnné, kvantifikátory a výrokové spojky. Predikáty budeme značit velkými písmeny, jména malými písmeny ze začátku abecedy a proměnné malými písmeny z konce abecedy. K symbolům ($\forall$), resp. ($\exists$) se budeme nyní chovat jako ke zkratkám za výrazy „pro každé“, resp. „pro některé“ z přirozeného jazyka. Od příští kapitoly se toto použití změní a ze symbolu ($\forall$) se stane výraz formálního objektového jazyka. V dalším textu budeme mezi oběma úzy kolísat – samozřejmě tak, aby nedošlo k pojmovým potížím –, jako jsme kolísali již v případě výrokových spojek.

Výše jsme srovnávali věty (1) „Alík je pes“ a (2) „bernardýn je pes“. Přiřadíme-li vlastnosti „být psem“ písmeno P, vlastnosti „být bernardýnem“ písmeno B a Alíkovi výraz a, zapíšeme první větu symbolicky prostě jako:

(1) $P(a)$.

Druhou větu budeme symbolicky zapisovat takto:

(2) $(\forall x)(B(x) \rightarrow P(x))$.

Chceme-li vyjádřit obecné tvrzení, které se přímo týká nějaké podskupiny univerza a ne přímo celého univerza, lze to vždy vyřešit jako v předchozím případě, kdy jsme se omezovali na bernardýny. To se děje velmi často, ba typicky, tj. obecná tvrzení nevystupují obvykle v absolutní formě

$$(\forall x)P(x),$$

ale mají právě formu podmíněnou, tj. tvar věty (2). Tato tzv. *podmíněná kvantifikace* vlastnosti P v omezení na nějakou vlastnost B se děje často implicitně. Říkáme-li např. při výuce, že má mít *každý* napříště úkol, děje se tak ve speciálním kontextu, z něhož je jasné, že se to týká žáků z příslušné třídy, nikoli z celé školy či z celého univerza. Podobně při psaní aritmetických zákonů, např. že

$$(\forall x)(x \times 0 = 0),$$

předpokládáme, že se pohybujeme v nějakém konkrétním číselném oboru, např. celých čísel, a tuto informaci nevtělujeme do příslušné věty formou podmínky

$$(\forall x)(x \text{ je celé číslo} \rightarrow x \times 0 = 0).$$

Na místě podmínky B se samozřejmě může vyskytovat nějaká rozvinutější charakteristika, která bývá v přirozeném jazyce vyjádřena třeba vedlejší větou za pomoci výrazu „kteří“ jako v případě věty „psi, kteří štěkají, nekoušou“. Tato věta říká, že pro každý objekt platí, že když je to pes a když štěká, pak není pravda, že kouše. Formalizujeme ji jako:

$$(\forall x)(P(x) \wedge S(x) \rightarrow \neg K(x)).$$

Rozvinutější může být také konsekvent obecné implikace. Třeba větu „lidé se dělí na pracovité a líné“ můžeme chápat jako obecnou implikaci, která říká, že je-li něco člověkem, pak je to pracovité nebo je to líné. Můžeme ji formalizovat jako:

$$(\forall x)(C(x) \rightarrow P(x) \vee L(x)).$$

Často se vyskytuje jedna typická dvojznačnost, o které jsme se již zmínili a která se týká obecných tvrzení. Řekneme-li „všichni hadi nejsou jedovatí“, můžeme tím myslet dvojí. (1) Jednak, že není pravda, že by byli všichni hadi jedovatí, anebo (2) že pro všechny hady platí, že nejsou jedovatí. Z kontextu je jasné, že bychom v tomto případě mínili asi první možnost, ale druhý zápis je blíže doslovnému znění. Z významového hlediska jde o různé věty, kterým odpovídají různé formy:

(1) $\neg(\forall x)(H(x) \rightarrow J(x))$,

(2) $(\forall x)(H(x) \rightarrow \neg J(x))$.

Pro vyjádření druhé z nich máme v přirozeném jazyce pomocný prostředek. Můžeme prostě říci „žádný had není jedovatý“. Je přitom zjevné, že negací věty formy $(\forall x)(H(x) \rightarrow J(x))$ je z definice tvrzení (1), nikoli tvrzení (2). Co se tvrzení (1) týče, pomocí našeho aparátu se nabízí jeho transformace do věty, podle níž některý had jedovatý není. Tím se dostáváme k existenčním tvrzením. Podobně jako obecná tvrzení ani existenční výroky nemají typicky absolutní formu

$$(\exists x)P(x),$$

ale formu podmíněnou. Ta se na rozdíl od obecných tvrzení zpravidla neváže k implikaci, ale ke konjunkci. Větu „někteří lidé jsou líní“ chápeme tak, že existují objekty, které mají vlastnost „být člověkem“ a zároveň vlastnost „být líný“, symbolicky:

$$(\exists x)(C(x) \wedge L(x)).$$

Oba členy konjunkce se opět mohou ve větách různě komplikovat a tím dostáváme složitější formule. Z předchozího výkladu musí být zjevné, že jsme podmíněnými obecnými a existenčními tvary identifikovali formy, které se často opakují a které již známe ze sylogistiky. Fakticky můžeme provést následující přiřazení:

(a)	AaB	$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$,
(e)	AeB	$\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$,
(i)	AiB	$(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$,
(o)	AoB	$\neg(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$.

Příslušné korespondence jsou ale dány až konkrétní podobou formální sémantiky, kterou popíšeme dále. Uvedenými příklady také pochopitelně není vyčerpána rozmanitost případů, se kterými se můžeme setkat v predikátové logice. Podívejme se nyní na některé další. Začněme jednoduchou větou:

Petr má bratra.

Chceme-li danou větu formalizovat, musíme se vždy nejprve zamyslet nad tím, jak ji můžeme reformulovat tak, aby se v ní vyskytovaly jen prostředky, které máme v predikátové logice. Přitom je třeba zvážit, jaké zvolit predikáty a jména. Věta vyjadřuje, že existuje někdo, kdo je Petrovým bratrem. Obecně je na nás, jak jemnou analýzu zvolíme. Platí však, že čím jemněji budeme postupovat, tím více úsudků, které považujeme přirozeně za platné, budeme schopni formálně zachytit. V našem příkladě můžeme vzít buď jeden jednomístný predikát „být bratrem Petra“, který označíme (výjimečně dvěma písmeny) jako BP, a formalizujeme:

$$(\exists x)BP(x).$$

Vhodnější je však použít dvoumístný predikát „být bratrem“ (B) a pro Petra zavést jméno (p). Pak můžeme provést jemnější formalizaci:

$$(\exists x)B(p,x).$$

Často se stává, že pořádek slov ve větě neodpovídá pořádku symbolů po formalizaci. Příkladem je věta:

Aleš každému něco půjčuje.

Zřejmě se zde jedná o tříčlenný vztah „kdo půjčuje komu co“, který formalizujeme pomocí predikátu P. „Aleš“ je jméno, formálně a. Větu budeme číst doslovně, pouze s tím dodatkem, že slovo „každému“ je míněno ve smyslu každému člověku. Budeme tedy potřebovat také predikát „být člověkem“, stručně C. Věta vlastně říká, že pro každého člověka x existuje nějaké y takové, že Aleš půjčuje x-ovi y, symbolicky:

$$(\forall x)(C(x) \rightarrow (\exists y)P(a,x,y)).$$

`Příklad 13.3.1:` Zkusme ještě provést analýzu a formalizaci následujících tří vět:

(1) kdo jinému jámu kopá, sám do ní padá,

(2) každý syn má otce, ale ne každý otec má syna,

(3) psi smějí být přepraveni prostředkem hromadné dopravy jedině dospělou osobou, na řemeni a s náhubkem.

(1) Máme vlastnost „být jámou" (formalizujeme pomocí predikátu J), tříčlenný vztah „kdo kopá komu co" (K) a binární vztah „co padá do čeho" (P). Přísloví je ve skutečnosti obecným tvrzením o lidech, proto se nám bude hodit také vlastnost „být člověkem" (C). Tvrzení vyjadřuje, že pro každé dva lidi x a y a pro každou jámu z platí, že když x kopá y-ovi z, pak x padá do z. Tedy třeba takto:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(C(x) \wedge C(y) \wedge J(z) \rightarrow (K(x, y, z) \rightarrow P(x, z))).$$

Jelikož různé proměnné nemusí zastupovat různé předměty, tj. za x a y lze v souladu se sémantikou slova „každý" vzít dvakrát tentýž předmět, neodpovídá uvedený překlad zcela obsahu věty (1), kde se vlastně explicitně vyžaduje, že je x (kopající jámu) od y (toho, pro koho je kopána) odlišný. Správně bychom měli tuto informaci do formule zahrnout, což lze nejsnáze učinit s pomocí speciálního predikátu (ne)rovnosti. O tom se ještě zmíníme v oddílu 18.2.

(2) Budeme potřebovat vztahy „být synem" a „být otcem". Ve větě jsou spojeny dvě různé věty spojkou „ale", což je pro nás konjunkce. Každou z vět můžeme formalizovat zvlášť. První věta říká, že každý syn má otce, tj. pro každé x platí, že jestliže je x synem někoho, pak také existuje někdo, kdo je otcem tohoto x. Druhá věta říká, že ne každý otec má syna, tj. že není pravda, že pro každé x platí, že pokud je x otcem někoho, pak existuje nějaký syn tohoto x:

$$(\forall x)((\exists y)S(x, y) \rightarrow (\exists y)O(y, x)) \wedge \\ \neg(\forall x)((\exists y)O(x, y) \rightarrow (\exists y)S(y, x)).$$

(3) Ve třetím případě budeme formalizovat vlastnosti „být psem" (P), „moci být přepraven prostředkem hromadné dopravy" (M), „být dospělou osobou" (O), „mít řemen" (R), „mít náhubek" (N) a binární vztah „kdo jede s kým" (J). Ve větě je skryto obecné tvrzení tvaru „A jen tehdy, když B", což formalizujeme pomocí implikace „jestliže A, pak B". Věta říká, že pro každého psa platí, že může být přepraven prostředkem hromadné dopravy jen tehdy, když (a) existuje dospělá osoba, se kterou pes jede, (b) má řemen a (c) má náhubek. Tedy:

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow (M(x) \rightarrow (\exists y)(O(y) \wedge J(x, y)) \wedge R(x) \wedge N(x))).$$

Tím je celá analýza hotova. Plyne z ní, že pokus o sémantickou jednoznačnost vede typicky k velice dlouhým a ne příliš přehledným formulím.

Na závěr se ještě budeme zabývat rolí proměnných, jak již implicitně vysvitla z předchozích případů, zvláště z případu (3). Význam proměnných lze nahlédnout ve spřízněné funkci zájmen. Ta typicky odkazují k osobám či věcem dříve zmíněným. Jde o tzv. *anaforický odkaz* neboli líné užití. V přirozeném jazyce může toto užití vést k víceznačnostem jako již v případě zmíněné věty

> psi smějí být přepraveni prostředkem hromadné dopravy jedině dospělou osobou, na řemeni a s náhubkem,

která umožňuje takové čtení, že nemá mít řemen a náhubek pes, ale doprovodná osoba. Tyto rozdíly lze snadno zachytit vhodným užitím proměnných:

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow (M(x) \rightarrow (\exists y)(O(y) \wedge J(x,y) \wedge R(y) \wedge N(y)))).$$

Ilustrujme si to na jiném příkladě:

> Tom se nepohodl se svým bratrem a syn ho pak našel mrtvého.

Vyskytují se zde dvě nejasnosti. Jednak čí je to syn. A dále koho vlastně tento syn našel mrtvého. Tedy vyvstává otázka, jak doplnit otazníky v následující analýze:

> Tom je bratr x a Tom se nepohodl s x a y je syn ? a y našel mrtvého ?

Věta může být míněna třeba tak, že y je syn Toma a mrtvý je bratr Toma. Tedy doplníme:

> Tom je bratr x a Tom se nepohodl s x a y je syn Toma a y našel mrtvého x.

Zde jsou všechny víceznačnosti odstraněny, ale nastává další problém, neboť k tomu, abychom dostali větu, je zapotřebí proměnné kvantifikovat. Obecná kvantifikace je zde zjevně nevhodná. Použijeme existenční kvantifikaci, i když se to nezdá zcela přirozené – nezdá se totiž, že by se jednalo o existenční tvrzení. Věta však předpokládá existenci jednak Tomova bratra a také Tomova syna, když se o nich vyjadřuje. Při formalizaci budeme muset tento předpoklad explicitně vyjádřit. Můžeme postupovat třeba takto:

$$(\exists x)(B(t,x) \wedge \neg P(t,x) \wedge (\exists y)(S(y,t) \wedge N(y,x))).$$

V tomto výrazu již nejsou žádné volné proměnné, a jedná se tedy o větu, tj. něco, co může mít pravdivostní hodnotu. Při volbě volných proměnných přitom – právě s ohledem na jejich roli zájmen – záleželo na tom, jaké písmeno bylo užito, resp. na tom, že jsou příslušná písmena *různá*. Při vázání proměnných se situace mění v tom ohledu, že se kvantifikátor vztahuje pouze na proměnné ve svém rozsahu, jenž je dán formulí, na niž byl aplikován. V tomto smyslu je např. formule

$$(\forall x)P(x) \wedge (\forall y)Q(x,y)$$

ekvivalentní formuli

$$(\forall z)P(z) \wedge (\forall z)Q(x,z),$$

neboť se rozsahy příslušných kvantifikátorů nepřekrývají. Ale ani ve formuli

$$(\forall x)(P(x) \to (\exists x)R(x))$$

použití stejných proměnných nevadí, neboť se předpokládá, že je druhý výskyt x již vázán v rámci vnořené formule $(\exists x)R(x)$ a druhý kvantifikátor to již nijak podstatně neovlivní, tj. vztahuje se pouze na první výskyt téže proměnné, byť má ten druhý ve svém rozsahu. Pro přehlednost je každopádně vhodné – a nic tomu v těchto případech nestojí v cestě – proměnné pojmenovat rozdílně. K technickým detailům takovýchto úprav přistoupíme v další kapitole věnované formální syntaxi KPL.

13.4 Úskalí interpretace

Případ podmíněné kvantifikace nás upozornil na logický aspekt, který je pro interpretaci kvantifikátoru zásadní, totiž stanovení diskurzu, k němuž se kvantifikovaný výrok vztahuje. Je totiž zjevný rozdíl, čteme-li např. tvrzení „pro každé číslo existuje číslo takové, které v součtu s ním dá nulu“, formálně $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$, ve vztahu k číslům přirozeným (včetně nuly), kde neplatí, či ve vztahu k číslům celým, pro něž je naopak konstituujícím principem, tj. nemůže pro ně neplatit. Možnost odstranit implicitní předpoklad jistého (např. číselného) oboru jeho explicitním zmíněním v antecedentu implikace (pro všechna z taková, která jsou celými čísly, platí, že ...) problém neurčitosti řeší samozřejmě jen relativně, neboť v proměnné z se bude stále z povahy věci skrývat odkaz k něčemu širšímu, než je oblast specifikovaná predikátem podmínky, typicky k nějakému vyššímu druhu či rodu, tedy ke *kategorii* předmětů. Čísla představují jinou kategorii než artefakty, a ty zase jinou nežli živé bytosti atd.

U číselných oborů se přitom např. s ohledem na historii jejich postupného rozšiřování a vnořování předchozích číselných druhů do dalších druhů, např. přirozených čísel do čísel celých, celých do racionálních atd., takto nabízí přijmout Fregovu představu, že se lze – přinejmenším teoreticky – omezit na obor jediný, jenž by sestával ze všech možných předmětů řeči, jakýsi *univerzální obor diskurzu*. Tím by se jakýkoli implicitní odkaz eliminoval ve prospěch explicitního zmínění. Tento kumulativní přístup se zdá konvenovat i realistickému pojetí sémantiky, jako je třeba to Russellovo, podle něhož vše, o čem lze *smysluplně* hovořit, kdesi neproblematicky a nediskriminovaně je, a v tomto smyslu netřeba z logického hlediska sahat k jakýmkoli dalším omezením.

Přes nepopiratelnou lákavost je tento přístup zatížen četnými obtížemi. Vedle zmíněné námitky, že se skrze něj ocitáme ve sporu se situací běžného užití jazyka, jenž kontextuální závislost promluvy nejen využívá, ale není ji v absolutním smyslu schopen nijak odstranit, naráží dané opatření také na problémy technické. Projevem jednoho z nich je Russellův paradox, chápeme-li ho jako důsledek sloučení jistého základního oboru předmětů s oborem množin, které lze nad těmito předměty utvořit. To znamená chápat množiny stejně jako předměty, které je tvoří, jako prvky téže logické kategorie. Zcela analogicky je Fregovo zavedení univerzálního oboru řeči v rozporu s jinými z jeho principů, např. s totální definovaností všech pojmů a funkcí, tedy jejich aplikovatelnosti na libovolný předmět diskurzu.[4]

Tuto potíž by šlo v jistém ohledu čekat, neboť to, že jsme se rozhodli na stejné rovině odkazovat k tak různorodým předmětům, jako jsou čísla a živočichové, musí mít přirozeně za následek, že se v případě užití oborově specifických pojmů, např. pojmu prvočísla, musíme rozhodnout, zda se k předmětům mimo svou obvyklou aplikaci nevztahují vůbec, anebo negativně, tj. nenáleží jim nikoli ve smyslu nepatřičnosti, ale nepravdivosti. Fregovo kritérium pojmové ostrosti vyžaduje druhou možnost, což větu „Mikeš je prvočíslo“ staví na roveň větě „Mikeš je pes“. Máme-li ale nyní funkce jako „$x + y = z$“ v aplikaci na cizorodé objekty typu

$$\text{Měsíc} + \text{Mikeš} = z,$$

mělo by platit, že je příslušná věta nepravdivá, ať už je z jakékoli. Z toho ale plyne, že funkci $+$ nelze na oboru všech možných předmětů definovat jako totální.

Kromě těchto technických problémů univerzálního diskurzu existují ale i problémy filosoficko-logické povahy. K nim patří fakt, že se plošnou kvantifikací přes jediný obor předmětů postupně stírá rozdíl mezi *kontingentní obecností* něčeho, co platí pro všechny předměty, ale nemuselo by, a *logickou nutností*, která platí pro všechny předměty z pojmových důvodů. Na tomto rozdílu se celkem zřetelně odděluje pojetí logiky v ontologickém smyslu od normativního přístupu, pro nějž nemají logická tvrzení čistě deskriptivní charakter, což je pak třeba také zachytit v příslušné sémantice. V logice výroků byla přitom logická pravdivost nějaké věty, např. „Mikeš je kocour nebo Mikeš není kocour“, dána odkazem

[4] Viz třeba Frege [1893/1903, díl II, § 64].

na schéma $\mathtt{p} \vee \neg \mathtt{p}$, které je tautologií právě proto, že platí v *každé* interpretaci proměnných. Odkazem k interpretaci byla tato obecnost lokalizována mimo obsah dané věty (to, že jedná o kocourovi Mikešovi), čímž její pravdivost získala logický charakter. V logice predikátů se ale tato situace mění, neboť v ní pojem obecnosti vystupuje jako konkrétní logický symbol, totiž kvantifikátor. Ten je včleněn dovnitř věty, např. „každý (tvor) je kocour nebo není kocour“, a stává se tak součástí jejího obsahu. Příslušná formalizace $(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$ vyžaduje tedy posouzení dvojí obecnosti, a to:

(1) obecnosti interpretace, která se týká formule jako celku, tedy jejího vztahu k libovolné *interpretaci*,

(2) obecnosti v interpretaci, která se týká vztahu formule k libovolnému *ohodnocení* proměnné x.

S tím souvisí odlišné použití termínu *proměnné*. Z hlediska `KPL` má to, co bylo v `KVL` nazýváno výrokovou proměnnou, konstantní charakter, ve smyslu významového fixování v dané interpretaci coby možném světě. Podobný charakter budou mít nyní výrazy P pro predikáty a c pro jména, proto se jim někdy říká *jmenné* a *predikátové konstanty*, totiž právě v jejich odlišení od objektových proměnných typu x. S ohledem na již zavedený pojem logické konstanty je vhodné o nich hovořit jako o konstantách mimologických, se zřetelně nižším stupněm konstantnosti, což je důsledkem toho, že význam logických konstant zůstává neměnný napříč interpretacemi. Termín proměnné si dále ponecháváme pouze pro to, co se v dané interpretaci mění.

Celý problém s univerzálním oborem diskurzu a potřebou rozlišení dvou typů obecnosti lze formulovat také takto. Pokud by byly ve formální sémantice `KPL` objektové proměnné vztaženy k jednomu jedinému univerzu diskurzu, jenž by vznikl sloučením všech diskurzů lokálních, zdá se, že by neexistoval rozdíl mezi větou tvaru

$$(\forall x)(x \text{ je kocour} \vee \neg x \text{ je kocour})$$

a větou

$$(\forall x)(x \text{ je kocour} \to x \text{ je savec}),$$

neboť ty by měly platit pro všechny předměty naprosto stejným způsobem, předpokládáme-li, že mimo původní obor definujeme pojmy jako „kocour“ a „savec“ tak, aby pro dané objekty neplatily. Dojdeme-li ve formalizaci dále, tedy i na úroveň obecnosti příslušných mimologických pojmů, což znamená na úroveň formulí

$$(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x)) \qquad \text{a} \qquad (\forall x)(P(x) \to Q(x)),$$

přestane být druhá formule pravdivá, zároveň tím ale ztratí význam pojem pravdivosti formule v interpretaci: všechny formule kromě formulí logicky pravdivých musí být v univerzálním diskurzu nutně nepravdivé. V důsledku toho vlastně nezáleží na tom, jak fakticky univerzální obor předmětů vypadá a z čeho a jak byl složen. Jeho prvky si nemají důvod ponechávat žádné specifické kvality a rozlišení, stačí, že jsou od sebe odlišné a že jejich uskupení mají jistý specifický a specifikovatelný počet. Od sémantiky se tak dostáváme k teorii množin, se všemi problémy, které to s sebou nese, včetně otázky, jak velký příslušný obor vlastně je. Tato otázka je zajímavá již proto, že některé formule, např.

$$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)\neg P(x),$$

jsou zjevně pravdivé právě v závislosti na velikosti univerza, které musí mít v daném případě nejméně dva prvky. Tím se do celé záležitosti dostává cizorodý a potenciálně výbušný prvek, jejž známe z historie myšlení pod hlavičkou otázky, zda je univerzum nekonečné. V moderní logice ji nikoli náhodou opět tematizoval Russell. My se k ní ještě dostaneme v kapitole 19.

Nejjednodušší cestou, jak si od těchto problémů odpomoci a zároveň vyhovět výše uvedené potřebě dvou typů obecnosti, je práce s různými diskurzy jakožto bázemi jednotlivých interpretací. Vůči těmto diskurzům tj. vůči platnosti v *každém* z nich, budou definovány logická pravdivost a platnost. Obecná pravdivost té které formule bude přitom vztažena vždy ke konkrétní interpretaci, obnášející specifikaci oboru předmětů, pro něž *všechny* bude tato formule – po příslušné interpretaci mimologických konstant – platit.

Abychom si učinili konkrétnější představu o podobě formální sémantiky `KPL` předtím, než ji vyložíme po technické stránce, podívejme se na případy výroků, které jsou pro ni charakteristické, neboť se opírají o formy, které v předchozích logických systémech nenalezneme, a o jejich expresivně zvláště silné propojení. Jedná se o propojení kvantifikace s víceargumentovými predikáty, tj. relacemi. Právě skrze ně je totiž možné dosáhnout řetězení kvantifikátorů a následného zachycování kvantifikačních závislostí, jak se zvláště plodně uplatnily v reformované matematické analýze, která dala k vytvoření `KPL` rozhodující podnět. Vezmeme-li nyní nějaký dvoumístný predikát, např. relaci „x má rád y“, je zřejmé, že z hlediska možností kvantifikace máme k dispozici následující kombinace, jejichž překlad do běžného jazyka uvádíme vpravo:

(1) $(\forall x)(\forall y)(x \text{ má rád } y)$ (každý má rád každého),

(2) $(\forall x)(\exists y)(x \text{ má rád } y)$ (každý má rád někoho),

(3) $(\exists x)(\forall y)(x \text{ má rád } y)$ (někdo má rád každého),

(4) $(\exists x)(\exists y)(x \text{ má rád } y)$ (někdo má rád někoho).

Zohledníme-li navíc ještě pojmenování proměnných, dostáváme tyto možnosti:

(5) $(\forall y)(\forall x)(x \text{ má rád } y)$ (každého má každý rád),

(6) $(\forall y)(\exists x)(x \text{ má rád } y)$ (každého má někdo rád),

(7) $(\exists y)(\forall x)(x \text{ má rád } y)$ (někoho má každý rád),

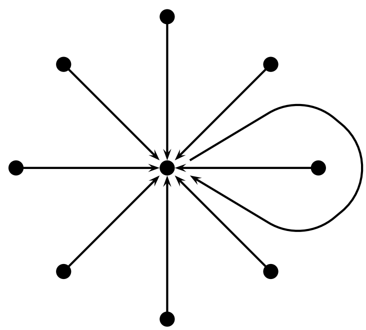
(8) $(\exists y)(\exists x)(x \text{ má rád } y)$ (někoho má někdo rád).

Nyní lze sledovat vzájemné vztahy těchto forem a zkoumat, jak jsou na tom co do logické platnosti, tj. zda lze uvažovat o tom, že platí-li jedna, platí i druhá, a to nutně, tj. nezávisle na obsahu. Z toho nám celkem přirozeně vyjde, jak může vypadat konkrétní podoba interpretace `KPL`.

Podívejme se proto, jak může význam věty ovlivnit prohození kvantifikátorů a prohození proměnných. Případy (1) a (4), a tedy i (5) a (8) jsou zjevně imunní vůči oběma z nich, tj. význam věty „každý má rád každého“ se nezdá být odlišný od věty „každého má každý rád“ apod. Prohodíme-li proměnné, jak se tomu děje mezi případy (2) a (6) či (3) a (7), lze snadno ukázat, že žádná z těchto změn žádným směrem nevede k logicky platnému úsudku. Uvažme např. přechod od (2) k (6):

(I) $$\frac{(\forall x)(\exists y)(x \text{ má rád } y)}{(\forall y)(\exists x)(x \text{ má rád } y).}$$

Jednoduchý protipříklad ukazuje obrázek 13.2, v němž zjevně platí premisa, v tom smyslu, že každý objekt úvahy (znázorněný tečkou) je v relaci (znázorněné šipkami) k nějakému objektu. *Od* každého objektu vede

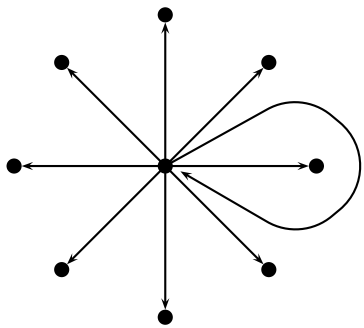


Obrázek 13.2: Protipříklad I

šipka, ale neplatí, že by *do* každého objektu vedla šipka. To však znamená, že závěr úsudku neplatí. Protipříklad k přechodu opačným směrem, od (6) k (2),

$$\text{(II)}\quad \frac{(\forall y)(\exists x)(x \text{ má rád } y)}{(\forall x)(\exists y)(x \text{ má rád } y),}$$

reprezentuje obrázek 13.3, jejž lze získat prostým obrácením směru šipek z obrázku 13.2. Podíváme-li se na případy (3) a (7), je situace obdobná,



Obrázek 13.3: Protipříklad II

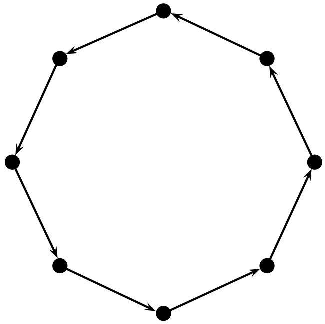
tj. žádný z přechodů neplatí a jako doklad nám opět mohou posloužit protipříklady (I) a (II), i když v opačném pořadí. Prohazujeme-li dále kvantifikátory, budou nás zajímat vztahy případů (2), (7) a (3), (6). Přechod od (2) k (7), konkrétně

$$\text{(III)}\quad \frac{(\forall x)(\exists y)(x \text{ má rád } y)}{(\exists y)(\forall x)(x \text{ má rád } y),}$$

je náš případ tradičního chybného úsudkového principu zmíněného např. v oddílu 1.4. V tomto schématu např. z tvrzení, že má každý jev svoji příčinu, usoudíme, že existuje první příčina všech jevů. Jelikož si nemusíme být nutně vědomi toho, proč by zde mohl být závěr nepravdivý a premisa pravdivá, nabízí se uvést příklad úsudku, kde tomu tak evidentně je, řekněme:

$$\frac{(\forall x)(\exists y)(x < y)}{(\exists y)(\forall x)(x < y).}$$

V aplikaci na konkrétní obor, řekněme přirozených čísel, by v případě platnosti vedl k závěru existence největšího čísla. Alternativou k tomuto postupu nahlédnutí logické neplatnosti schématu je nabídnout skromný protipříklad výše uvedeného typu. Vystačíme si přitom s konečně mnoha objekty, jak to ukazuje obrázek 13.4. Opačný směr nicméně – v daných



Obrázek 13.4: Protipříklad III

sémantických mantinelech – logicky platný je. Způsob, jak to ověřit, se nám přirozeně komplikuje, protože formální sémantika tak, jak byla právě naznačena, zjevně připouští neomezený počet možností, jak příslušné formule interpretovat, a nelze je tedy na rozdíl od KVL jednoduše projít. Způsoby ověřování logické platnosti a pravdivosti v rámci KPL se budeme podrobněji zabývat dále.

14

Syntax a sémantika

Nyní přecházíme k formálnímu vymezení syntaxe a sémantiky klasické predikátové logiky. S ohledem na to, že v postupu, jak ho dosáhnout, kopírujeme do značné míry kapitoly z klasické logiky výroků, nemusíme se některým detailům věnovat tak podrobně, a naopak můžeme zacílit na detaily jiné. Z hlediska dosud řečeného se přitom u logiky predikátů zdá být centrálním a odlišujícím problémem jistý holistický element, který umožnil nezůstat na úrovni výroku a jeho skládání do komplexnějších celků, ale tento výrok rozložit tak, aby mohl být poté zase složen zcela novým a velmi plodným způsobem. Myšlenka větného rozkladu pak určuje také složku sémantickou, pracující s pojmem funkce jako čímsi odvozeným z reflexe na substituční závislost výrazů. Této možnosti jsme ovšem využili již v případě `KVL`, kde bylo uchopení větných spojek coby jistých pravdivostních funkcí vedeno stejnou holisticky motivovanou úvahou. Tu nyní tedy jen dovádíme o krok dál.

14.1 Syntax

Stojíme nyní před tímtéž problémem jako v `KVL`, totiž jak skloubit holistický původ rozlišení, jako jsou spojky, predikáty, relace či funkce, s atomistickou nutností jejich skladby, která zjevně stojí za schopností jazyka expresivně překročit sféru konečnosti, jak ve vztahu ke slovní zásobě, tak k možnostem jejího ovládnutí. Nyní nás přitom zajímá skromná, ryze technická podoba tohoto problému, související s definicí formule. Pokud bychom chtěli postupovat řádně, prohlásili bychom za elementární formuli nějaké zřetězení S základních výrazů, z něhož lze komplexní formuli získat buďto prostředky `KVL`, nebo vyjmutím výskytu či výskytů nějakého jména c a jejich nahrazením proměnnou x, symbolicky

$$S[c/x],$$

a předepsáním kvantifikátoru, symbolicky

$$(\forall x)S[c/x].$$

Pak jsme ovšem příslušnou formuli, totiž $(\forall x)S[c/x]$, složili z něčeho, co formulí není, totiž z $S[c/x]$, což může činit formulační problémy ve vztahu k dalšímu logickému aparátu, např. k důkazu indukcí, jenž se skladebností počítá. Z tohoto důvodu prohlásíme za formuli také něco, co nemá v přirozeném jazyce přímý ekvivalent, a danou situaci budeme řešit na sémantické rovině rozlišením různých typů sémantického ohodnocení, totiž valuace a interpretace. Relativní výhodou bude, že se jedná o stejný typ rozlišení, ke kterému jsme motivováni různými typy obecnosti, jak jsme je diskutovali v předchozí kapitole. Zde je vztáhneme k pojmům otevřené a uzavřené formule.

Jazykem `KPL` budeme rozumět souhrn základních symbolů používaných na objektové úrovni. Tento soubor bude dále organizován pomocí definice, která určí, co je správně utvořený výraz (formule). Základní kostra postupu je tedy zcela analogická tomu, s čím jsme se již seznámili v rámci `KVL`. Analogii můžeme sledovat také v tom, že vedle pomocných symbolů (závorek) a nové kategorie proměnných jsou základní symboly rozděleny na logické a mimologické. Později, až přejdeme k sémantice, budeme opět jednoznačně fixovat význam logických symbolů, zatímco význam mimologických symbolů bude otevřen různým obměnám (interpretacím). Zvláštní status proměnných se obrazí i v sémantice. Nyní se ale již soustřeďme pouze na syntax, tj. čistě na výrazy, jejich druhy a způsoby skládání.

`14.1.1 Definice (Jazyk):` *Jazyk klasické logiky predikátů sestává ze čtyř skupin symbolů, což jsou:*

(1) deskriptivní (mimologické) symboly:

- *(a) jmenné konstanty* $\mathtt{c}_1, \mathtt{c}_2, \mathtt{c}_3, \ldots,$
- *(b) predikátové konstanty (pro každé n)* $\mathtt{P}^{\mathtt{n}}_1, \mathtt{P}^{\mathtt{n}}_2, \mathtt{P}^{\mathtt{n}}_3, \ldots,$

(2) logické symboly:

(a) *výrokové spojky* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$,

(b) *kvantifikátory* $(\forall), (\exists)$,

(3) *proměnné* $\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \ldots$,

(4) *pomocné symboly* $(,)$.

Abychom zpřehlednili zápisy a vyhnuli se psaní indexů, budeme nadále označovat jmenné konstanty (stručně: jména) písmeny $\mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \ldots$, predikátové konstanty (stručně: predikáty) písmeny $\mathtt{P}, \mathtt{Q}, \mathtt{R}, \ldots$ a konečně proměnné písmeny $\mathtt{u}, \mathtt{v}, \mathtt{w}, \ldots$ Užívat k tomu budeme stejně jako v KVL odlišný typ písma pro jasné odlišení umělého jazyka, který zkoumáme, od metajazyka, v němž tak činíme. Často budou tato písmena zastupovat také libovolné (tj. všechny možné) jmenné konstanty, predikáty a proměnné (podobně jako ve výrokové logice písmeno p zastupovalo často libovolný atomický výrok). To bude patrné třeba v těch případech, které budou uvozeny slovy

pro každou jmennou konstantu c platí ...

nebo

předpokládejme, že c je (libovolná) jmenná konstanta ...

Často to však bude zřejmé pouze z kontextu. Číslo n, které je nedílnou součástí každého predikátu a které se nazývá jeho *arita*, bude vždy předem určené či bude patrné z kontextu – v tomto případě ho nemusíme u predikátu uvádět. Pokud je arita predikátu n, budeme také říkat, že predikát je n-místný. Definice formule bude provedena ve více krocích, které odrážejí naše výše uvedené rozhodnutí skladebného postupu. I proto zavádíme pojem termu jako společné označení proměnné a jména.

14.1.2 Definice (Term): *Termem je každá proměnná a dále každá jmenná konstanta. Nic jiného termem není.*

Pro označení libovolných termů budeme používat písmeno t, které tak může zastupovat jak proměnnou, tak jmennou konstantu. Nyní již lze přistoupit k pojmu elementární formule a formule vůbec.

14.1.3 Definice (Elementární formule): *Elementární formulí nazveme výraz tvaru $\mathtt{Q}^n(\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_n)$, kde n je nějaké přirozené číslo, $\mathtt{Q}^n$ je predikát, jehož arita je n a výrazy $\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_n$ jsou libovolné termy.*

Předpokládejme, že arita predikátu P je jedna, predikátu R je dva a predikátu Q je tři. Zde je několik příkladů správně utvořených elementárních formulí:

$$\mathtt{P}(\mathtt{x}), \mathtt{P}(\mathtt{c}), \mathtt{R}(\mathtt{c}, \mathtt{x}), \mathtt{Q}(\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}).$$

V tomto případě není elementární formulí např. posloupnost $\mathtt{P}(\mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{x})$, protože množství připojených termů neodpovídá aritě predikátu $\mathtt{P}$. Následuje induktivní definice formule.

`14.1.4 Definice (Formule):` *Formule* `KPL` *jsou definovány takto:*

(1) každá elementární formule je formule `KPL`*,*

(2) předpokládejme, že ϕ, ψ jsou formule `KPL` *a* `y` *proměnná; pak posloupnosti symbolů $(\neg\phi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ a také $((\forall \mathtt{y})\phi), ((\exists \mathtt{y})\phi)$ jsou formulemi* `KPL`*,*

(3) nic jiného není formulí `KPL`*, než co bylo popsáno v (1) a (2).*

Ve vztahu k definici formule `KVL` zjevně přibyla jen definice formule kvantifikované. Tušíme, že tento krok je všechno jiné než triviální.

`14.1.5 Konvence (Kvantifikátory a formule):` *Mějme formuli tvaru $((\forall \mathtt{x})\phi)$, resp. $((\exists \mathtt{x})\phi)$. První nazýváme obecnou formulí, druhou existenční formulí. Symbol $(\forall)$, resp. $(\exists)$ nazýváme obecným, resp. existenčním kvantifikátorem. Nadále budeme jako kvantifikátor zpravidla označovat celé spojení $(\forall \mathtt{x})$, resp. $(\exists \mathtt{x})$.*

Při psaní formulí přejímáme všechny konvence týkající se vynechávání závorek, které jsme zavedli pro výrokovou logiku. Pouze připojujeme, že kvantifikátory vážou silněji než výrokové spojky a nemusíme u nich zapisovat závorky podobně jako u negace. Arita predikátů $\mathtt{P}, \mathtt{R}, \mathtt{Q}$ je stejná jako výše. Uveďme nyní nějaké příklady správně utvořených formulí:

(1) $\mathtt{Q}(\mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{x})$,

(2) $(\forall \mathtt{x})\mathtt{Q}(\mathtt{d}, \mathtt{d}, \mathtt{x}) \rightarrow (\exists \mathtt{y})\mathtt{Q}(\mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{x})$,

(3) $(\forall \mathtt{x})((\mathtt{P}(\mathtt{d}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{x})) \rightarrow (\forall \mathtt{y})(\mathtt{R}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \rightarrow (\exists \mathtt{z})\mathtt{Q}(\mathtt{z}, \mathtt{d}, \mathtt{c})))$,

(4) $(\forall \mathtt{x})(\forall \mathtt{x})(\exists \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{z})$,

(5) $(\forall \mathtt{z})(\mathtt{P}(\mathtt{z}) \rightarrow (\forall \mathtt{z})(\mathtt{P}(\mathtt{z}) \rightarrow \mathtt{R}(\mathtt{z}, \mathtt{c})))$,

(6) $(\forall \mathtt{y})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\exists \mathtt{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}))$,

(7) $(\forall \mathtt{y})(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\exists \mathtt{x})(\exists \mathtt{z})\mathtt{Q}(\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}))$.

Nyní se musíme prokousat několika technickými definicemi, jejichž důležitost se ukáže později.

`14.1.6 Definice (Rozsah kvantifikátoru):` *Ve formuli* $(\forall \mathtt{y})\vartheta$*, resp.* $(\exists \mathtt{y})\vartheta$ *je formule* ϑ *rozsahem (příslušného výskytu) kvantifikátoru* $(\forall \mathtt{y})$*, resp.* $(\exists \mathtt{y})$.

Všimněme si, že ve formuli (5) je rozsah kvantifikátoru $(\forall \mathtt{z})$ různý pro různé výskyty tohoto kvantifikátoru. Co se týče prvního výskytu, je rozsahem formule $\mathtt{P}(\mathtt{z}) \rightarrow (\forall \mathtt{z})(\mathtt{P}(\mathtt{z}) \rightarrow \mathtt{R}(\mathtt{z}, \mathtt{c}))$. Rozsahem druhého výskytu je formule $\mathtt{P}(\mathtt{z}) \rightarrow \mathtt{R}(\mathtt{z}, \mathtt{c})$. Následující definice jsou důsledkem našeho širšího pojetí formule, které připouští i proměnné, které nejsou v rozsahu žádného kvantifikátoru.

`14.1.7 Definice (Volné a vázané výskyty):` *Daný výskyt proměnné* $\mathtt{y}$ *v dané formuli se nazývá vázaný, pokud se nachází v rozsahu (nějakého výskytu) kvantifikátoru* $(\forall \mathtt{y})$ *nebo* $(\exists \mathtt{y})$*. Výskyt proměnné* $\mathtt{y}$*, který je obsažen ve spojení* $(\forall \mathtt{y})$ *a* $(\exists \mathtt{y})$*, považujeme také za vázaný. Pokud není výskyt proměnné* $\mathtt{y}$ *vázaný, řekneme, že je volný.*

Ve formuli (6) je první výskyt proměnné $\mathtt{x}$ volný, druhý a třetí je vázaný. Oba dva výskyty proměnné $\mathtt{y}$ jsou vázané. Jediný výskyt proměnné $\mathtt{z}$ je volný.

`14.1.8 Definice (Volné a vázané proměnné):` *Proměnná* $\mathtt{y}$ *je volná ve formuli* ϑ*, jestliže zde má alespoň jeden volný výskyt. Proměnná* $\mathtt{y}$ *se nazývá vázaná ve formuli* ϑ*, jestliže zde má vázaný výskyt.*

Proměnná tedy může být v dané formuli volná a vázaná současně. Tak tomu je např. s proměnnou $\mathtt{x}$ ve formuli (6). Následuje velmi důležitá definice sentence, která nás vrací zpět k přímé korespondenci mezi přirozeným jazykem a jeho formalizací: sentence je formule `KPL`, která přímo odpovídá smysluplné větě. Naproti tomu formule, které sentencemi nejsou, reprezentují nenasycené (neúplné) výrazy a jejich role v naší teorii je jen pomocná.

`14.1.9 Definice (Uzavřené a otevřené formule):` *Formule je uzavřená (nebo též sentence), jestliže žádná proměnná v ní není volná. Formule se nazývá otevřená, jestliže není uzavřená, tj. jestliže obsahuje nějaký volný výskyt nějaké proměnné.*

Co se příkladů týče, (6) je otevřená formule. Uzavřenou formulí je např. (7), ale i formule (3) a (5). Z různých důvodů budeme potřebovat nahrazovat proměnné jinými výrazy, typicky jmennými konstantami, ale také jinými proměnnými, ba co víc, budeme potřebovat o tomto nahrazení teoreticky hovořit. K tomu slouží následující konvence.

`14.1.10 Konvence (Výsledek nahrazení):` *Výsledek nahrazení všech volných výskytů proměnné* $\mathtt{y}$ *termem* $\mathtt{t}$ *ve formuli* ϑ *značíme* $\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{t}}$.

Nechť platí:

$$\vartheta \ = (\forall \mathtt{y})((\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})) \rightarrow (\exists \mathtt{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{z})).$$

Potom podle konvence platí:

$$\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}} = (\forall \mathtt{y})((\mathtt{P}(\mathtt{c}) \wedge \mathtt{R}(\mathtt{c},\mathtt{y})) \rightarrow (\exists \mathtt{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{z})).$$

První příklad použití uvedené konvence nalezneme v definici pojmu substituovatelného termu. Ten je motivovaný sémanticky, neboť má zabránit jistým nechtěným případům nahrazení, která se používají již na úrovni interpretovaného jazyka. Větu $(\forall x)(\exists y)(x < y)$ chceme chápat např. tak, že $(\exists y)(x < y)$ platí pro dosazení libovolného termu, tj. proměnné či číslovky $1, 2, 3, \ldots$ za x. Pokud bychom ovšem dovolili dosazení y, dostali bychom tvrzení $(\exists y)(y < y)$, které v dané interpretaci nemůže být pravdivé, čemuž chceme nyní zabránit již na syntaktické úrovni.

`14.1.11 Definice (Substituovatelný term):` *Term* $\mathtt{t}$ *je substituovatelný ve formuli* ϑ *za proměnnou* $\mathtt{y}$*, jestliže* $\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{t}}$ *nemá více vázaných výskytů proměnných než* ϑ.

Podle této definice není term $\mathtt{t}$ substituovatelný za proměnnou $\mathtt{y}$ pouze tehdy, když $\mathtt{t}$ je proměnná, jejíž některý výskyt vzniklý dosazením za volné $\mathtt{y}$ se stane vázaný. Např. ve formuli (6) není proměnná $\mathtt{y}$ substituovatelná za $\mathtt{x}$, protože zde existuje volný výskyt $\mathtt{x}$, ze kterého by se po substituci stal vázaný výskyt $\mathtt{y}$. Jmenné konstanty jsou substituovatelné v jakékoli formuli za jakoukoli proměnnou.

Z hlediska obvyklého výkladu je podstatné, že induktivní definice formule, která pracuje také s formulemi otevřenými, vlastně umožňuje snadno zobecnit pojem (n-árního) predikátu na libovolnou formuli s příslušným počtem volných proměnných. To odpovídá i Fregovu úmyslu, který je založen právě v možnosti skládání nových pojmů z několika mála pojmů elementárních. V analogii k predikátovým konstantám a na nich založeným elementárním formulím, např. formuli

$$\mathtt{P}(\mathtt{x},\mathtt{y}),$$

pak dává smysl užívat zápis

$$\varphi(\mathtt{x},\mathtt{y})$$

pro otevřenou formuli, která obsahuje právě dvě volné proměnné $\mathtt{x}$ a $\mathtt{y}$, a lze ji takto chápat jako složený dvoumístný predikát. Na sémantické rovině můžeme pak hovořit o složených vlastnostech, pojmech či relacích. Podobně lze analogicky k zápisu $(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{c}, \mathtt{x})$, kde $\mathtt{c}$ označuje výskyt jména $\mathtt{c}$ ve formuli, zachytit zápisem

$$\varphi(\mathtt{c})$$

všechny výskyty jména $\mathtt{c}$ ve formuli φ. Výraz $\varphi(\mathtt{c})$ lze tedy chápat jako substituční instanci výrazu $\varphi(\mathtt{x})$, kde naopak $\mathtt{x}$ zachycuje všechny volné výskyty proměnné $\mathtt{x}$. Fakticky se tedy jedná o alternativu zavedeného $\varphi^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}}$. My v dalším textu tento nový způsob zápisu užívat zpravidla nebudeme. Příležitostně si však osvojíme řeč o otevřené formuli jako výrazu pro (komplexní) vlastnost apod.

Nyní již jen v rychlosti zaveďme pojem podformule, opět pomocí pojmu konstrukce, který je přirozeným rozšířením pojmu konstrukce z `KVL`. Neformálně můžeme říci, že podformule dané formule je každá souvislá část této formule, která je sama formulí.

`14.1.12 Definice (Konstruující posloupnost):` *Konečná posloupnost formulí $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ je konstruující posloupností formule χ, když $\vartheta_n = \chi$ a pro každý člen ϑ_i $(1 \leq i \leq n)$ platí jedna z následujících podmínek:*

(1) *ϑ_i je elementární formule,*

(2) *existují indexy $k, l < i$ takové, že ϑ_i vznikla aplikací některé z výrokových spojek na předchozí formule ϑ_k, ϑ_l, tj. $\vartheta_i = \neg\vartheta_k$ nebo $\vartheta_i = \vartheta_k \circ \vartheta_l$,*

(3) *existuje index $k < i$ takový, že $\vartheta_i = (\forall \mathtt{y})\vartheta_k$ nebo $\vartheta_i = (\exists \mathtt{y})\vartheta_k$.*

`14.1.13 Definice (Konstrukce):` *Konstrukcí formule nazýváme konstruující posloupnost formule minimální délky.*

`14.1.14 Definice (Podformule):` *Podformulí dané formule je každý člen její konstrukce a nic jiného.*

Jak již bylo řečeno v `KVL`, obvykle neexistuje jen jedna konstrukce dané formule, nýbrž je jich více. Např. konstrukcí formule

$$(\forall \mathtt{y})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\exists \mathtt{x})\mathtt{R}(\mathtt{x}, \mathtt{y}))$$

je posloupnost

$$\mathtt{P}(\mathtt{x}), \mathtt{R}(\mathtt{x}, \mathtt{y}), (\exists \mathtt{x})\mathtt{R}(\mathtt{x}, \mathtt{y}), \mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\exists \mathtt{x})\mathtt{R}(\mathtt{x}, \mathtt{y}), (\forall \mathtt{y})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\exists \mathtt{x})\mathtt{R}(\mathtt{x}, \mathtt{y})).$$

Právě členy této posloupnosti jsou podformulemi této formule. Kdybychom první dvě formule uvedené posloupnosti prohodili, výsledkem by byla opět konstrukce téže formule – jednalo by se však o jinou posloupnost formulí, a tedy o jinou konstrukci. Pro nás je však podstatné, že i když uspořádání členů nemusí být jednoznačně určeno, všechny konstrukce obsahují stejné formule, a je tedy při určování množiny podformulí lhostejné, z jaké konstrukce vycházíme.

14.2 Varianty notace

Zavedení kvantifikátoru bylo nesporně hlavním přínosem Fregova *Pojmového písma*. To potvrzuje i Frege sám, když říká:

> „V tomto způsobu značení spatřuji jednu z nejpodstatnějších částí svého pojmového písma, které díky němu získalo oproti písmu Boolovu významný náskok také coby pouhá reprezentace logických forem.“[1]

Frege se takto vyjadřuje v reakci na recenzi Ernsta Schrödera,[2] podle níž Fregova logika původní systém algebry logiky podstatně nijak nerozšiřuje. Ve vztahu ke kvantifikaci přitom Schröder argumentuje tím, že obecnost je v Boolově systému vyjádřitelná jednoduše proměnnou coby symbolem obecnosti. K tomu je třeba říci následující. Je-li nějaká věta, např.

> jestliže je Alík pes, pak je Alík savec,

míněna tak, že platí nejen pro Alíka, ale pro všechna zvířata, lze to naznačit proměnnou x takto

> jestliže je x pes, pak je x savec.

Toto opatření však brzy, jak Frege upozorňuje,[3] naráží na problém v rámci komplexních forem, konkrétně negace, neboť předepsáním záporky nedokážeme odlišit *obecnost popření*

(1) $(\forall x)\neg$(jestliže je x pes, pak je x savec)

od *popření obecnosti*

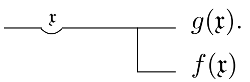
(2) $\neg(\forall x)$(jestliže je x pes, pak je x savec).

[1] Frege [1883, s. 9].
[2] Schröder [1880].
[3] Frege [1883, s. 9].

Kvantifikátor tedy kromě obecnosti reprezentuje také cézuru, která dále strukturuje obsah věty – svou polohou a rozsahem. V tomto smyslu ukazuje zavedení kvantifikátoru na podstatné propojení syntaxe se sémantikou, jak ho později v téže souvislosti zmiňuje i Wittgenstein v *Tractatu*:

> „Kdybychom chtěli např. to, co vyjadřujeme jako ‚$(x).fx$‘, vyjádřit předepsáním indexu před ‚fx‘ – třeba takto: ‚Obec.fx‘ – nestačilo by to – nevěděli bychom, co je zobecněno. Kdybychom to chtěli naznačit indexem ‚$_\alpha$‘ – třeba takto: ‚$f(x_\alpha)$‘ – nestačilo by to – neznali bychom rozsah znaku obecnosti. Kdybychom se o to chtěli pokusit zavedením značky do místa pro argument – třeba takto: $(A, A).F(A, A)$ – nestačilo by to – nemohli bychom stanovit totožnost proměnných. Atd. Všechny tyto způsoby značení nestačí, protože nemají nutnou matematickou variabilitu.“[4]

Frege, jak víme z diskuse jeho verze výrokové logiky, tuto variabilitu spíše přetížil o zbytný, byť zdůvodnitelný dvojdimenzionální prvek. V případě kvantifikace není zmíněný rys dále zužitkován – do vodorovného pruhu je pouze umístěna jamka s názvem proměnné, jejíž vazba je značena tím, že je latinské písmeno nahrazeno německým:



Dnešní verze obecného kvantifikátoru pochází od německého matematika Gerharda Gentzena, který ji zavedl obrácením písmene „A“ pro obecnost (*Allgemeinheit*).[5] Existenční kvantifikátor, který Frege nezavádí, vznikl rovněž obrácením písmene, a to písmene „E“ pro existenci (*Existenz*). Poprvé se tato podoba existenčního kvantifikátoru vyskytuje u Peana, jenž byl jedním z dalších, kdo kvantifikaci zavedli krátce po Fregovi a nezávisle na něm.[6] Pro obecnou kvantifikaci zavedl Peano znak (x), jenž se vyskytuje ve výše uvedeném citátu Wittgensteinově, a v této podobě ho standardně používá i Russell s Whiteheadem v *Principia Mathematica*. Tam se vedle použití neobráceného „E“ v rámci „(Ex)“ pro existenční kvantifikaci ustálil zvyk psát v případě kvantifikované implikace či ekvivalence znak proměnné pod jejich symbol, konkrétně takto:

$$F(x) \underset{x}{\supset} G(x), \qquad \text{resp.} \qquad F(x) \underset{x}{\equiv} G(x).$$

[4] Wittgenstein [1922, § 4.0411].
[5] Gentzen [1935].
[6] Peano [1897].

Jiná konvence je obvykle užívána v Německu v návaznosti na Scholzovu a Stegmüllerovu reformu. Vychází se při ní ze spřízněnosti obecné kvantifikace s konjunkcí

(1) $(\forall x)F(x) \leftrightarrow F(1) \wedge F(2) \wedge F(3) \wedge \cdots$

a existenční kvantifikace s disjunkcí

(2) $(\exists x)F(x) \leftrightarrow F(1) \vee F(2) \vee F(3) \vee \cdots,$

což vede k použití zvětšené podoby těchto symbolů

$\bigwedge_x F(x),$ resp. $\bigvee_x F(x).$

Co se týče spřízněnosti kvantifikace s příslušnými výrokovými spojkami, mělo by být nicméně zjevné, že popsané vztahy (1), (2) nejsou explicitními definicemi a ani takovými být nemohou, právě proto, že nejsou pro neurčitost pravé strany s to nahradit příslušnou spojku. Jednak není jasné, kolik prvků má příslušný obor, přes nějž se kvantifikuje, jednak může být tento obor dokonce nekonečný. Kvantifikátor zjevně není zkratka, ale samostatný logický symbol.

Tato skutečnost nicméně není v rozporu s tím, že to byla souvislost s konjunkcí a disjunkcí, co některé autory k zavedení kvantifikace jako samostatného symbolu přivedlo. Na předním místě je zde vhodné jmenovat Charlese Sanderse Peirce, jenž byl po Fregovi dalším, kdo kvantifikaci roku 1883, tedy čtyři roky po Fregově *Pojmovém písmu*, objevil. Následoval ho roku 1888 Giuseppe Peano.[7] Oba je vhodné zmínit právě proto, že je u nich – na rozdíl od Frega – možné vystopovat také genezi jejich objevu. Peirce[8] zavedl kvantifikátor v rámci své teorie relací, v níž libovolnou relaci l chápe jako logický součet probíhající přes všechny dvojice $(I : J)$ univerza individuí. To pak zachycuje rovnicí

$$l = \sum_i \sum_j l_{ij}(I : J),$$

kde l_{ij} je koeficient, který nabývá hodnot 1 a 0 podle toho, zda indexům odpovídají individua, která v relaci jsou, či nikoli. Skutečnost, že je něco v relaci l k něčemu, nebo že je všechno v relaci k něčemu, lze přitom vyjádřit snadno takto:

$\sum_i \sum_j l_{ij} > 0,$ resp. $\prod_i \sum_j l_{ij} > 0.$

Vynecháme-li nyní dodatek > 0, což Peirce také udělal, máme znak pro kvantifikaci ve Fregově smyslu.

[7] Viz Peano [1888].

[8] Peirce [1931–1958, § 3.351].

14.3 Interpretace a valuace

Vysvětlili jsem úvodem, že sémantika KPL je v principu formována substitučním paradigmatem, které Frege použil při analýze věty. Toto paradigma chápe větu jako složenou ze substituovatelné části, o níž Frege hovoří jako o nasyceném výrazu, a ze substitučního rámce, jenž je výrazem nenasyceným. Na sémantické úrovni je výsledkem rozlišení funkce a jejího argumentu. Sémantika KVL byla již fakticky prezentována jako zvláštní případ tohoto modelu, v němž na jedné, syntaktické, straně stojí věty v roli nasycených výrazů a výrokové spojky v roli výrazů nenasycených, a na druhé, sémantické, straně stojí pravdivostní hodnoty a funkce na nich. V KPL je tentýž vzorec aplikován i na elementární větu coby větu, jejíž částí již nejsou jiné věty, resp. neobsahuje žádný logický symbol KPL. Z toho pak dostáváme rozlišení jména a predikátu na straně syntaxe a rozlišení předmětu a pojmu na straně sémantiky, přičemž pojem vidíme jako funkci z předmětů daného univerza do pravdivostních hodnot. Jelikož v závislosti na počtu výskytů jmen, které substituujeme, získáváme predikáty různé arity a jim odpovídající n-ární relace, jedná se vlastně o funkce z příslušné kartézské mocniny univerza do pravdivostních hodnot.

Mezi funkcemi z množin a jejich kartézských součinů do pravdivostních hodnot a podmnožinami těchto množin, resp. součinů přitom existuje jistá sémanticky významná korespondence, odpovídající v elementární rovině dvěma již zmiňovaným sémantickým interpretacím nenasyceného výrazu. Obě to jsou, či přinejmenším mohou být, interpretace extenzionální. Podle první je výraz typu „filosof“ či „učitel“ označením příslušné množiny filosofů, resp. množiny dvojic sestávajících z učitele a žáka coby podmnožin většího univerza lidí, resp. jejich kartézského součinu. Podle druhé, kterou jsme právě zmínili, se jedná o funkci na množině lidí, resp. jejím kartézském součinu, která těm, co jsou filosofové, resp. tvoří dvojici učitele a žáka, přiřazuje hodnotu pravda, těm, co nejsou, resp. příslušnou dvojici netvoří, hodnotu nepravda. Korespondence obou interpretačních schémat je zjevná a lze ji snadno zobecnit prostřednictvím následujícího pojmu.

14.3.1 Definice (Charakteristická funkce): *Nechť je dána množina A a nějaká její podmnožina B. Charakteristická funkce množiny B (vzhledem k A) je funkce f, jejíž definiční obor je množina A, jejíž obor hodnot je množina pravdivostních hodnot $\{0, 1\}$ a pro niž platí, že $f(a) = 1$ právě tehdy, když $a \in B$.*

Očividně platí, že libovolnou podmnožinu dané množiny lze reprezentovat nějakou charakteristickou funkcí a že libovolnou funkci f z A do pravdivostních hodnot lze reprezentovat jistou množinou B, totiž tou, pro niž platí:

$$B = \{a \mid a \in A \wedge f(a) = \mathtt{1}\}.$$

Mezi oběma, tedy množinou a funkcí, která ji reprezentuje a *vice versa*, proto nebudeme zpravidla v dalším rozlišovat. Pokusme se nyní celou záležitost sémantiky KPL přehledně shrnout. V KVL jsme výrokovým proměnným (resp. konstantám) přiřazovali pravdivostní hodnoty. Interpretací tedy byla rovněž funkce, pro niž platilo:

$$I(\mathtt{p}) \in \{\mathtt{1}, \mathtt{0}\}.$$

Nyní je náš jazyk mnohem bohatší a místo výrokových konstant obsahuje také konstanty jmenné a predikátové. Jejich interpretaci jsme navrhli chápat jako probíhající nad nějakým univerzem diskurzu U, tedy univerzem předmětů, o nichž lze mluvit. Toto univerzum proto k interpretaci patří a odmítneme-li představu jednoho společného předmětného oboru, slučujícího všechny možné kategorie, je vhodné dané univerzum příslušnou interpretací indexovat, tedy psát U_I. Daná interpretace přitom přiřazuje jmenným konstantám nějaké předměty univerza, tj. jedná se o funkci, pro niž platí:

$$I(\mathtt{c}) \in U_I.$$

Co se predikátových konstant týče, těm odpovídají funkce nad univerzem diskurzu, resp. nad jeho kartézskou mocninou. Jelikož funkce, které tu uvažujeme, jsou funkce do pravdivostních hodnot, můžeme se na ně dívat jako na podmnožiny U_I, resp. U_I^n. Pro interpretaci predikátových konstant tedy platí:

$$I(\mathtt{P^n}) \subseteq U_I^n.$$

I v KPL směřuje interpretace jazyka k tomu, aby byl každý z formálních „výroků“, tedy formulí, skutečným výrokem, tedy aby byl jednoznačně pravdivý, či nepravdivý. Tento cíl artikuluje Tarského definice pravdy. V případě KVL říkala zdánlivou trivialitu, např. že

věta $A \wedge B$ je pravdivá, jsou-li pravdivé věty A a B,

přičemž netriviálnost příslušného stanovení plyne z rozdílu „$\wedge$“ oproti spojce „a“, jejíž přirozený význam jsme regulovali dodatečnými podmínkami kladenými na povahu příslušného spojení. Podobné je to nyní v případě, kdy rozkládáme elementární větu. V konkrétním případě věty „Platón je filosof“ nabývá Tarského definice tvaru věta „Platón je filosof“ je pravdivá, spadá-li předmět Platón pod pojem filosofa,

eventuálně, náleží-li předmět Platón do množiny všech filosofů, či ekvivalentně, jestliže funkce filosof přiřazuje Platónovi pravdivostní hodnotu pravda. Z hlediska obsahu se v přepisu levé strany do strany pravé zdánlivě nic nemění, fakticky ale opět platí, že dodatečná upřesnění toho, co očekáváme od pojmu množiny, funkce a relace množinového náležení, činí celou záležitost netriviální. Předpokládáme v nich totiž, že množiny a relace coby množiny zvláštního typu mají ostré okraje, tj. pro každý objekt z univerza, na němž jsou definovány, je jednoznačně určeno, zda pod ně spadá, či nikoli. Podobně předpokládáme, že každá funkce ohodnocuje každý prvek své aplikace jednoznačně hodnotou pravda či nepravda. Důsledkem je pak i jednoznačné určení pravdivostní hodnoty levé strany, a tedy naplnění podmínek kladených na pojem výroku.

Z hlediska vlastního průběhu ohodnocení formulí $\mathtt{KPL}$ pravdivostními hodnotami je přitom vhodné – před vlastní definicí interpretace a formulací Tarského definice – rozlišovat několik základních situací. První je situace elementárních uzavřených formulí (elementárních sentencí), jako jsou $\mathtt{P}(\mathtt{c})$, $\mathtt{R}(\mathtt{c},\mathtt{d})$ apod., obecně tedy:

(1) $\mathtt{P}^{\mathtt{n}}(\mathtt{c}_1,\ldots,\mathtt{c}_{\mathtt{n}})$.

Tato situace odpovídá základnímu sémantickému stavu, v němž nějakému předmětu či předmětům připisujeme nějakou vlastnost nebo nastávání nějaké vztahu mezi nimi. V souladu s tím platí, že takováto formule bude v interpretaci I, která přiřazuje $\mathtt{P}^{\mathtt{n}}$ nějakou množinu nebo relaci $I(\mathtt{P}^{\mathtt{n}})$ nad univerzem U_I a jménu $\mathtt{c}_{\mathtt{i}}$ nějaký předmět $I(\mathtt{c}_{\mathtt{i}})$ tohoto univerza, pravdivá, pokud tyto předměty, resp. jejich uspořádané n-tice jsou prvky příslušné množiny, resp. relace. Symbolicky:

$$\langle I(\mathtt{c}_1),\ldots I(\mathtt{c}_{\mathtt{n}})\rangle \in I(\mathtt{P}^{\mathtt{n}}).$$

Pokud bychom tedy třeba interpretovali binární predikátovou konstantu $\mathtt{R}$ jako relaci „být učitelem“ a jmenné konstanty $\mathtt{c}$ a $\mathtt{d}$ jako Platóna a Sókrata, nebyla by formule $\mathtt{R}(\mathtt{c},\mathtt{d})$ v této interpretaci pravdivá, zatímco formule $\mathtt{R}(\mathtt{d},\mathtt{c})$ ano.

Druhou situaci tvoří elementární formule jako $\mathtt{P}(\mathtt{x})$, $\mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{d})$, které mají mezi spojovanými termy nějakou volnou proměnnou. Obecně tento případ zachytíme takto:

(2) $\mathtt{P}^{\mathtt{n}}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_{\mathtt{n}})$.

Těmto formulím odpovídají na větné straně také schémata jako „x je filosof“, „Sókratés je učitel x“ apod., která ještě – pro svoji nenasycenost danou příslušnou proměnnou – nemají pravdivostní hodnotu. Opět nám tedy vyvstává rozdíl mezi proměnnými a konstantami, kdy je jasné, že interpretace sama v uvedené situaci k určení pravdivosti nestačí. Abychom ji přesto mohli určit – a navíc zachovat uvedené rozlišení různých druhů výrazů formálního jazyka – zavádí se za tímto účelem vedle pojmu *interpretace* umělý pojem *valuace*. Ten se využije – i když trochu jiným způsobem – v případě interpretace kvantifikovaných formulí. Valuace V analogicky k interpretaci I jmenných konstant ohodnocuje všechny proměnné jazyka nějakým předmětem univerza U_I, tj. platí $V(\mathtt{x}) \in U_I$. Máme-li nyní nějaký term `t`, stanovíme jeho ohodnocení ve vztahu k dané interpretaci I a valuaci V následovně:

$$IV(\mathtt{t}) = \begin{cases} I(\mathtt{c}) & \text{jestliže je } \mathtt{t} \text{ jmenná konstanta } \mathtt{c}, \\ V(\mathtt{x}) & \text{jestliže je } \mathtt{t} \text{ proměnná } \mathtt{x}. \end{cases}$$

Situaci ohodnocení elementární otevřené formule pravdivostní hodnotou potom formulujeme analogicky případu ohodnocení elementární sentence ve smyslu:

$$\langle IV(\mathtt{t_1}), \ldots IV(\mathtt{t_n}) \rangle \in I(\mathtt{P^n}).$$

Situace formulí, které jsou složené, ale bez pomoci kvantifikátoru, odpovídá stavu `KVL`, s tím rozdílem, že musíme do formulace vedle interpretace I přidat i valuaci V. Nebudeme je proto nyní řešit zvlášť. Naopak, zvlášť nyní pojednáme o situaci kvantifikované formule, která je formulí uzavřenou, tj. nemá žádnou volnou proměnnou. Zachyťme ji na elementárním a snadno zobecnitelném typu formule:

(3) $(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{c}, \mathtt{x})$.

Máme-li interpretaci výrazů `P` a `c`, např. nad univerzem U_I všech lidí s relací „mít rád“ a Platónem jako předmětem přiřazeným příslušné jmenné konstantě, je na základě obecných postřehů zjevné, že formule bude pravdivá tehdy, pokud je Platón v dané relaci ke každému objektu univerza, tj. pokud má rád všechny lidi. Obecně to lze vyjádřit takto:

pro každé $a \in U_I$ platí, že $\langle I(\mathtt{c}), a \rangle \in I(\mathtt{P})$.

Tím je jednoznačně určena pravdivost dané formule v dané interpretaci. Vidíme přitom, že pojem valuace proměnných zde fakticky nepotřebujeme, totiž v tom smyslu, že by na něm závisela výsledná pravdivostní hodnota. Ta je zjevně určena jednoznačně již specifikací univerza a interpretací mimologických konstant. Pojem valuace lze ovšem použít pomocně, v rámci artikulace vztahu přiřazovaného předmětu a příslušné proměnné. Píšeme např.:

$\langle I(\mathtt{c}), V(\mathtt{x})\rangle \in I(\mathtt{P})$ platí v každé valuaci V.

Začneme-li takto operovat s pojmem valuace, dostane nás další situace kvantifikovaných formulí, které mají volné proměnné, např.

(4) $(\forall\mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{c},\mathtt{x},\mathtt{y})$,

do následujícího problému. Pokud bychom chtěli formulovat její pravdivostní podmínky jako

$\langle I(\mathtt{c}), V(\mathtt{x}), V(\mathtt{y})\rangle \in I(\mathtt{P})$ platí v každé valuaci V,

fakticky bychom se tím vyjádřili k formuli $(\forall\mathtt{x})(\forall\mathtt{y})\mathtt{P}(\mathtt{c},\mathtt{x},\mathtt{y})$. S ohledem na volnou proměnnou je přitom třeba předpokládat, že je pojem valuace třeba využít podstatněji, tj. definovat ohodnocení ve vztahu k oběma, fixní interpretaci I a valuaci V, a odkaz na valuaci v artikulaci pravdivostních podmínek kvantifikátoru formulovat zvlášť. Krok po kroku to znamená napsat nejprve

pro každé $a \in U_I$ platí, že $\langle I(\mathtt{c}), a, V(\mathtt{y})\rangle \in I(\mathtt{P})$

a následně úvodní klauzuli nahradit valuací proměnné $\mathtt{x}$, která ovšem počítá s tím, že již byla nějak ohodnocena proměnná $\mathtt{y}$. To vede k pojmu tzv. $\mathtt{x}$-varianty valuace V, což je valuace $V^{\mathtt{x}}_a$, pro niž platí následující:

$$V^{\mathtt{x}}_a(\mathtt{y}) = \begin{cases} V(\mathtt{y}) & \text{jestliže je } \mathtt{y} \text{ odlišná od proměnné } \mathtt{x}, \\ a & \text{jestliže je } \mathtt{y} \text{ shodná s } \mathtt{x}. \end{cases}$$

Odkaz na „a“, který je v alternativní valuaci uváděn jako dolní index, je metajazykový odkaz na předmět, který bude $\mathtt{x}$-variantou dosazen za proměnnou $\mathtt{x}$, tj. za jedinou proměnnou, jejímž ohodnocením se tato valuace případně (tj. ne nutně) liší od V. Patřičná formulace podmínek případu (4) pro danou interpretaci I a valuaci V pak vypadá takto:

pro každé a platí $\langle I(\mathtt{c}), V^{\mathtt{x}}_a(\mathtt{x}), V^{\mathtt{x}}_a(\mathtt{y})\rangle \in I(\mathtt{P})$.

Tím je pokryta základní škála případů, které mohou nastat a z nichž lze snadno odvodit případy další. Podstatné je, že z hlediska definice pravdivosti a toho, co k ní potřebujeme, budeme věcně rozlišovat následující možnosti:

$$\text{formule} \begin{cases} \text{uzavřené} \begin{cases} \text{bez kvantifikátorů} & I, \\ \text{kvantifikované} & I,\ (V), \end{cases} \\ \text{otevřené} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad I,\ V. \end{cases}$$

Z technického hlediska bude ovšem toto rozlišování zprvu lhostejné, tj. pravdivost pro libovolnou formuli bude od počátku definována vždy vůči dané interpretaci a valuaci.

14.4 Tarského definice pravdy

Zabýváme-li se interpretací nějakých formulí, nemusíme se, stejně jako v případě KVL, zabývat nutně všemi konstantami jazyka, ale omezit se jen na jeho část, která je ve formulích obsažena. Za tímto účelem zavedeme určitý technický význam slova „jazyk“. V našich příkladech budeme často pracovat s množinou $\{\mathtt{R}, \mathtt{P}, \mathtt{c}\}$, kde R je predikát, jehož arita je dvě, P je predikát, jehož arita je jedna, a c je jméno. Budeme-li nadále mluvit o jazyku, budeme mít zpravidla na mysli nějaké takovéto omezené skupiny symbolů. Následuje formální vymezení interpretace, shrnující vše, co jsme k ní řekli dříve.

14.4.1 Definice (Interpretace): *Jazyk je každá množina mimologických symbolů. Interpretací I daného jazyka nazýváme každou funkci, která přiřazuje:*

(1) celému jazyku nějakou neprázdnou množinu U_I, které se říká nosič interpretace či univerzum diskurzu,

(2) každé jmenné konstantě c jazyka nějaký objekt z univerza, tj. $I(\mathtt{c}) \in U_I$,

(3) každému predikátu $\mathtt{Q^n}$, jehož arita je n, n-ární relaci na univerzu, tj. $I(\mathtt{Q^n}) \subseteq U_I^n$.

Objekt, který je přiřazen v interpretaci I danému mimologickému symbolu, se nazývá realizace tohoto symbolu v interpretaci I.

Poznamenejme, že z této definice plyne, že jednomístnému predikátu $\mathtt{Q}^1$, přiřazuje interpretace I nějakou podmnožinu univerza, tj. $I(\mathtt{Q}^1) \subseteq U_I$. Univerzum interpretace může sestávat z čehokoli, o čem lze smysluplně něco vypovídat. Konkrétně může sestávat třeba z lidí, planet, měst, institucí, zákonů, atomů, čísel, písmen, formulí, vztahů, pocitů a čehokoli, na co si čtenář vzpomene. V definici používáme nejobecnější možný pojem objektu (resp. množiny objektů).

Příklad 14.4.2: Zkonstruujeme si interpretaci jazyka $\{\mathtt{R}, \mathtt{P}, \mathtt{c}\}$ se stálým názvem M. K této interpretaci se budeme nadále vracet a ilustrovat na ní další sémantické pojmy. Tvoří ji následující přiřazení:

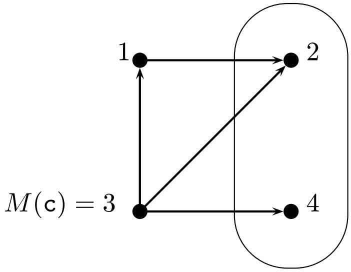
(1) nosná množina U_M je množina čísel $\{1, 2, 3, 4\}$,

(2) jménu c je přiřazen objekt univerza 3, tedy $M(\mathtt{c}) = 3$,

(3) predikátu R je přiřazena množina dvojic $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$,

(4) predikátu P je přiřazena množina $\{2, 4\}$.

Tím je interpretace zcela vymezena. Toto vymezení si můžeme názorněji reprezentovat pomocí obrázku 14.1. Množina šipek zde zastupuje relaci $M(\mathtt{R})$, ovál množinu $M(\mathtt{P})$. Necháme na fantazii čtenáře, jaké objekty si



`Obrázek 14.1: Model` M

bude pod čísly představovat, jakou vlastnost těchto objektů bude reprezentovat predikát `P` a jaký vztah mezi nimi bude reprezentovat predikát `R`. Může jít třeba o státy Kanada, Francie, Brazílie, Německo. Predikát `P` může reprezentovat vlastnost „být evropským státem“, predikát `R` může reprezentovat nějaký specifický závazek, který jeden stát může mít vůči státu druhému.

Zamysleme se v této souvislosti krátce nad tím, jakou rozmanitost v sobě pojem interpretace skrývá. I když se omezíme na tak skromný jazyk, jako je $\{\mathtt{R}, \mathtt{P}, \mathtt{c}\}$, a na tak skromné univerzum, jako je $U_M = \{1, 2, 3, 4\}$, dostaneme obrovský (i když konečný) počet možných interpretací. Máme čtyři možnosti, jak přiřadit prvek univerza jménu `c`. Kolika možnými způsoby můžeme realizovat predikáty `R` a `P`? Predikát `R` realizujeme jako nějakou binární relaci na univerzu a predikát `P` realizujeme jako podmnožinu univerza. Kolik je tedy binárních relací a podmnožin na čtyřprvkovém univerzu? Obecně platí, že n-prvková množina má 2^n podmnožin. Tedy existuje 2^4 možných realizací predikátu `P`. Všech možných uspořádaných dvojic našeho univerza je $4 \times 4 = 16$. Binární relace je libovolná podmnožina množiny všech dvojic. Existuje tedy 2^{16} možných realizací predikátu `R`. Realizace jednotlivých mimologických symbolů jsou na sobě nezávislé a mohou se libovolně kombinovat. Celkem zde tedy máme:

$$2^2 \times 2^4 \times 2^{16} = 2^{22} = 4194304 \text{ možných interpretací.}$$

Univerzum samo však může mít libovolnou mohutnost. Může být nekonečné a třeba i nespočetně nekonečné, ať už to – v kontextu našich dřívějších poznámek – znamená cokoli. Je tedy jasné, že všech interpretací je nekonečně mnoho – a to i pro konečný jazyk. Interpretace může být pochopitelně vymezena i jinak než výčtem prvků univerza a prvků realizací mimologických symbolů. Pro nekonečné interpretace je to nezbytné, mnohdy je to však prakticky (nikoli teoreticky) nezbytné i u konečných interpretací.

`Příklad 14.4.3:` Pro náš ukázkový jazyk $\{\mathtt{R}, \mathtt{P}, \mathtt{c}\}$ by mohl popis interpretace vypadat taky třeba takto:

(1) univerzum je množina obyvatel ČR,

(2) relace, která je přiřazena interpretací predikátu `R`, je relace ekvivalence taková, že člověk a je v této relaci s člověkem b, když a má trvalé bydliště ve stejném městě či vesnici jako b,

(3) predikátu P je přiřazena množina obyvatel ČR ženského pohlaví,

(4) jménu `c` je přiřazen nějaký konkrétní obyvatel, třeba aktuálně nejstarší obyvatel ČR.

Teoreticky by zde šlo nakreslit analogický graf jako v předchozím případě. Na množině všech přirozených čísel bychom mohli realizovat mimologické symboly např. tak, že predikátu `R` přiřadíme relaci „menší než“, predikátu `P` přiřadíme množinu všech prvočísel a jménu `c` přiřadíme číslo 1983.

Nyní pokračujme ve výkladu sémantických pojmů a distinkcí. Jak jsme uvedli v předchozím oddílu, abychom mohli přesně definovat sémantiku kvantifikátorů, budeme potřebovat pojem valuace, který zapojuje do hry proměnné.

`14.4.4 Definice (Valuace):` *Valuací proměnných V v interpretaci I nazýváme funkci, která každé proměnné* `y` *přiřazuje nějaký objekt univerza interpretace I, tj. $V(\mathtt{y}) \in U_I$.*

Jedním z důvodů, proč bylo v definici 14.4.1 požadováno, aby bylo univerzum U_I interpretace I neprázdné, tj. obsahovalo alespoň jeden prvek, je ten, že teprve pak na něm může existovat nějaká valuace. Je-li univerzum interpretace alespoň dvouprvkové, je v něm počet všech možných valuací proměnných nespočetný. Jak ale uvidíme, v mnoha konkrétních úvahách je možné omezit se na nějakou konečnou sadu proměnných. Je-li univerzum konečné, máme zde vždy konečně mnoho valuací této zúžené sady proměnných. Valuací interpretací z příkladů 14.4.3 může být jakákoli funkce, která přiřadí každé proměnné nějakého obyvatele ČR, resp. nějaké přirozené číslo.

`Příklad 14.4.5:` K naší cvičné interpretaci M z příkladu 14.4.2 si zkonstruujeme valuaci, kterou označíme jako Z a pro kterou platí:

$$Z(\mathtt{u}) = 4 \qquad Z(\mathtt{v}) = 2 \qquad Z(\mathtt{w}) = 1 \qquad Z(\mathtt{x}) = 2.$$

Další proměnné nás nezajímají. Aby naše vymezení bylo úplné, můžeme stanovit, že valuace Z přiřazuje všem ostatním proměnným číslo 1.

Následující konvence nám poskytne zmíněné užitečné značení, s jehož pomocí již zformulujeme Tarského definici pravdy pro `KPL`.

`14.4.6 Konvence (x-varianta valuace):` *Je-li V valuace v interpretaci I, $a \in U_I$ a $\mathtt{x}$ je proměnná, pak jako $V^{\mathtt{x}}_a$ značíme opět valuaci v I, která každé proměnné odlišné od $\mathtt{x}$ přiřazuje stejnou hodnotu jako V. Proměnné $\mathtt{x}$ přiřazuje hodnotu a. Vyjádřeno symbolicky: Pokud $\mathtt{y}$ je odlišná proměnná od $\mathtt{x}$, platí $V^{\mathtt{x}}_a(\mathtt{y}) = V(\mathtt{y})$. Dále platí $V^{\mathtt{x}}_a(\mathtt{x}) = a$. Valuaci $V^{\mathtt{x}}_a$ říkáme $\mathtt{x}$-varianta valuace V.*

Následující tabulka ukazuje na příkladě valuace Z, jakým způsobem varianty mění původní valuaci. V každém políčku je uvedeno, jakou hodnotu daná valuace přiřazuje dané proměnné. Přitom si uvědomme, že varianta dané valuace je opět valuace, a proto můžeme podle stejného principu dále vytvářet varianty variant atd. To je ilustrováno v posledních dvou řádcích tabulky

	`u`	`v`	`w`	`x`	...
Z	4	2	1	2	...
$Z^{\mathtt{v}}_2$	4	2	1	2	...
$Z^{\mathtt{v}}_3$	4	3	1	2	...
$Z^{\mathtt{w}}_4$	4	2	4	2	...
$Z^{\mathtt{v}\,\mathtt{v}}_{3\,4}$	4	4	1	2	...
$Z^{\mathtt{u}\,\mathtt{v}\,\mathtt{x}}_{2\,3\,4}$	2	3	1	4	...

Než přistoupíme k Tarského definici pravdy, zaveďme ještě oficiálně jednu již zmíněnou konvenci.

`14.4.7 Konvence (Ohodnocení termu):` *Nechť $\mathtt{t}$ je term. Je-li $\mathtt{t}$ konstanta, pak $IV(\mathtt{t}) = I(\mathtt{t})$. Je-li $\mathtt{t}$ proměnná, pak $IV(\mathtt{t}) = V(\mathtt{t})$.*

Tato konvence odpovídá faktu, že každé jméno čerpá svoji hodnotu z interpretace samé. Proměnná čerpá svoji hodnotu z valuace v interpretaci. $IV(\mathtt{t})$ pak říká, jaká je hodnota termu $\mathtt{t}$ bez ohledu na to, zda se jedná o proměnnou či o jméno. Pro naši konkrétní interpretaci M a valuaci Z platí:

$$MZ(\mathtt{c}) = 3,\ MZ(\mathtt{u}) = 4,\ MZ(\mathtt{v}) = 2,\ MZ(\mathtt{w}) = 1,\ MZ(\mathtt{x}) = 2.$$

Podobně jako v `KVL` nyní Tarského definice pravdy uvede do vztahu pojem formule a pojem interpretace – propojí tedy syntaktické objekty s objekty sémantickými tím, že mezi nimi definuje vztah či relaci.

`14.4.8 Definice (Tarského definice pravdy):` *Nechť V je valuace v interpretaci I. Formule ϑ je pravdivá v interpretaci I při valuaci V, resp. interpretace I a valuace V splňují formuli ϑ, symbolicky $IV \models \vartheta$, jestliže platí jedna z následujících podmínek:*

(1) $\vartheta = \mathtt{Q}^{\mathtt{n}}(\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_{\mathtt{n}})$ *a* $\langle IV(\mathtt{t}_1), \ldots, IV(\mathtt{t}_{\mathtt{n}})\rangle \in I(\mathtt{Q}^{\mathtt{n}})$,

(2) $\vartheta = \neg\phi$ *a neplatí* $IV \models \phi$,

(3) $\vartheta = \phi \wedge \psi$ *a* $IV \models \phi$ *a* $IV \models \psi$,

(4) $\vartheta = \phi \vee \psi$ *a* $IV \models \phi$ *nebo* $IV \models \psi$,

(5) $\vartheta = \phi \rightarrow \psi$ *a jestliže* $IV \models \phi$, *pak* $IV \models \psi$,

(6) $\vartheta = \phi \leftrightarrow \psi$ *a* $IV \models \phi$ *tehdy a jen tehdy, když* $IV \models \psi$,

(7) $\vartheta = (\forall \mathtt{y})\phi$ *a pro každé* $a \in U_I$ *platí* $IV^{\mathtt{y}}_a \models \phi$,

(8) $\vartheta = (\exists \mathtt{y})\phi$ *a pro některé* $a \in U_I$ *platí* $IV^{\mathtt{y}}_a \models \phi$.

V opačném případě říkáme, že formule ϑ je v interpretaci I a valuaci V nepravdivá, což zapisujeme také jako $IV \not\models \vartheta$.

Uvědomme si nejprve, že pro případ jednomístného predikátu $\mathtt{Q}$ nám definice říká, že $IV \models \mathtt{Q}(\mathtt{t})$ platí právě tehdy, když $IV(\mathtt{t}) \in I(\mathtt{Q})$. Mechanismus, který se skrývá za Tarského definicí, bude patrný z řady příkladů.

`Příklad 14.4.9:` Definujeme interpretaci I pro jazyk $\{\mathtt{R}\}$ takto: $U_I = \{1, 2, 3\}$ a $I(\mathtt{R}) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$. V této interpretaci definujeme valuaci V tak, že přiřazuje každé proměnné objekt 1. Chceme podle Tarského definice pravdy určit, zda:

(*) $IV \models (\forall \mathtt{u})(\exists \mathtt{v})\mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{v})$.

Tento případ rozebereme do detailů. Uvedené tvrzení platí právě tehdy, když pro každé $a \in U_I$ platí $IV^{\mathtt{u}}_a \models (\exists \mathtt{v})\mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{v})$. To nastává právě tehdy, když platí následující tři tvrzení:

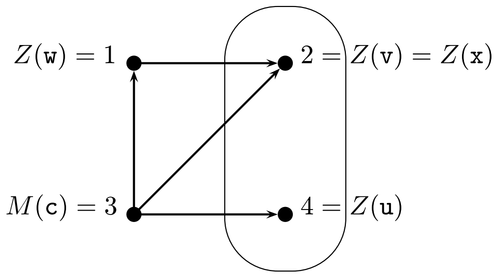
(1) $IV^{\mathtt{u}}_1 \models (\exists \mathtt{v})\mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{v})$,

(2) $IV^{\mathtt{u}}_2 \models (\exists \mathtt{v})\mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{v})$,

(3) $IV^{\mathtt{u}}_3 \models (\exists \mathtt{v})\mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{v})$.

Ověříme každé z těchto tvrzení zvlášť. Tvrzení (1) platí právě tehdy, když existuje $a \in U_I$ takové, že platí $IV^{\mathtt{uv}}_{1a} \models \mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{v})$. Toto tvrzení je pravdivé právě tehdy, když je pravdivé alespoň jedno z následujících tvrzení: (a) $IV^{\mathtt{uv}}_{11} \models \mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{v})$, (b) $IV^{\mathtt{uv}}_{12} \models \mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{v})$, (c) $IV^{\mathtt{uv}}_{13} \models \mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{v})$. A skutečně, tvrzení (b) pravdivé je, neboť $\langle IV^{\mathtt{uv}}_{12}(\mathtt{u}), IV^{\mathtt{uv}}_{12}(\mathtt{v})\rangle \in I(R)$. Stačí si uvědomit, že $\langle IV^{\mathtt{uv}}_{12}(\mathtt{u}), IV^{\mathtt{uv}}_{12}(\mathtt{v})\rangle = \langle V^{\mathtt{uv}}_{12}(\mathtt{u}), V^{\mathtt{uv}}_{12}(\mathtt{v})\rangle = \langle 1, 2\rangle$. Tím jsem tedy zdůvodnili platnost tvrzení (1). Podobně tvrzení (2) platí proto, že např. $IV^{\mathtt{uv}}_{23} \models \mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{v})$, a tvrzení (3) platí proto, že $IV^{\mathtt{uv}}_{31} \models \mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{v})$. Zdůvodnili jsme, že platí (1), (2) i (3), což znamená, že musí platit také (*). Povšimněme si, že v celém procesu nehrálo žádnou roli, jaká je konkrétní povaha valuace V. Kdyby na jejím místě byla jakákoli jiná valuace v interpretaci I, výsledek by byl stejný. Důvodem je, že formule $(\forall\mathtt{u})(\exists\mathtt{v})\mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{v})$ je sentence. Zanedlouho zformulujeme výsledek, viz věta 14.7.4, který ukazuje, že to platí zcela obecně, tj. že pravdivost sentence v interpretaci není nikdy ovlivněna povahou valuace.

Nyní znovu zobrazíme naši cvičnou interpretaci M, tentokrát v ní však uvedeme i valuaci Z (omezíme se přitom na proměnné $\mathtt{u}, \mathtt{v}, \mathtt{w}, \mathtt{x}$). Viz obrázek 14.2. Nemělo by být zavádějící, že každý prvek univerza je hod-



Obrázek 14.2: Model M a valuace Z

notou některé proměnné či je přiřazen jménu. To je čistě náhoda. Kdybychom přiřadili každé proměnné např. číslo 1, čísla 2 a 4 by zůstala nepřiřazena. V návaznosti na to uvedeme komentovaný seznam formulí, které jsou v M a Z podle Tarského definice pravdivé. Poslouží nám jako další ilustrace problému.

Příklad 14.4.10: Tvrdíme, že následující formule jsou pravdivé v M a Z. Celkově je takových formulí samozřejmě nekonečně mnoho.

(1) $\mathtt{R}(\mathtt{c}, \mathtt{u})$,

(2) $\mathtt{R}(\mathtt{w}, \mathtt{v}) \wedge \mathtt{P}(\mathtt{x})$,

(3) $\neg\mathtt{R}(\mathtt{w}, \mathtt{w})$,

(4) $\neg\mathtt{P}(\mathtt{c}) \vee \mathtt{R}(\mathtt{w}, \mathtt{w})$,

(5) $\mathtt{R}(\mathtt{c}, \mathtt{c}) \to \mathtt{R}(\mathtt{x}, \mathtt{u})$,

(6) $\neg(\mathtt{R}(\mathtt{c},\mathtt{u}) \leftrightarrow (\mathtt{P}(\mathtt{c}) \vee \mathtt{R}(\mathtt{w},\mathtt{w})))$,

(7) $(\forall \mathtt{v})\neg\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{v})$,

(8) $(\exists \mathtt{v})\mathtt{R}(\mathtt{c},\mathtt{v})$,

(9) $\neg(\forall \mathtt{v})\mathtt{R}(\mathtt{c},\mathtt{v})$,

(10) $(\exists \mathtt{v})(\exists \mathtt{w})\neg(\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w}) \vee \mathtt{R}(\mathtt{w},\mathtt{v}))$,

(11) $(\forall \mathtt{v})(\forall \mathtt{w})(\forall \mathtt{x})((\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w}) \wedge \mathtt{R}(\mathtt{w},\mathtt{x})) \rightarrow \mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{x}))$,

(12) $\neg(\forall \mathtt{v})(\exists \mathtt{w})(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{v}) \rightarrow \mathtt{R}(\mathtt{w},\mathtt{x}))$,

(13) $(\exists \mathtt{x})(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{u}) \wedge \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{w}) \wedge \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{v}) \wedge \neg\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \neg\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{x}))$.

(14) $(\forall \mathtt{v})(\forall \mathtt{w})(\mathtt{P}(\mathtt{v}) \rightarrow \neg\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w}))$,

(15) $(\forall \mathtt{v})(\forall \mathtt{w})(\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w}) \rightarrow (\mathtt{P}(\mathtt{w}) \vee \mathtt{R}(\mathtt{c},\mathtt{w})))$.

Formule (1) je v MZ pravdivá, protože $\langle 3,4\rangle \in M(\mathtt{R})$. Dále platí, že formule (2) je pravdivá, protože $\langle 1,2\rangle \in M(\mathtt{R})$ a $2 \in M(\mathtt{P})$. Formule (3) je pravdivá, protože $\langle 1,1\rangle \notin M(\mathtt{R})$. Formule (4) je disjunkce, a je tedy pravdivá, je-li pravdivý alespoň jeden její člen. Skutečně, první člen je pravdivý, protože $3 \notin M(\mathtt{P})$. Formule (5) je pravdivá, protože je to implikace, jejíž oba členy jsou nepravdivé. Formule (6) je pravdivá, protože je to negace ekvivalence, která spojuje pravdivou a nepravdivou formuli. Těchto prvních šest formulí ze seznamu neobsahovalo kvantifikátory. Na nich můžeme vidět, jakým specifickým způsobem se vyhodnocují elementární formule a že se po tomto vyhodnocení výrokové spojky chovají stejně jako ve výrokové logice. Nyní vezmeme v úvahu kvantifikátory. Zdůvodníme pečlivě podle Tarského definice pravdivost formule (7). Platí $MZ \models (\forall \mathtt{v})\neg\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{v})$ právě tehdy, když pro každý prvek univerza a platí $MZ^{\mathtt{v}}_a \models \neg\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{v})$. To platí právě tehdy, když $MZ^{\mathtt{v}}_1 \models \neg\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{v})$ a $MZ^{\mathtt{v}}_2 \models \neg\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{v})$ a $MZ^{\mathtt{v}}_3 \models \neg\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{v})$ a $MZ^{\mathtt{v}}_4 \models \neg\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{v})$. A toto platí právě tehdy, když $\langle 1,1\rangle \notin M(\mathtt{R})$ a $\langle 2,2\rangle \notin M(\mathtt{R})$ a $\langle 3,3\rangle \notin M(\mathtt{R})$ a $\langle 4,4\rangle \notin M(\mathtt{R})$. Všechny tyto čtyři podmínky jsou skutečně splněny. Formule (8) je pravdivá, protože existuje $a \in U_M$ tak, že $MZ^{\mathtt{v}}_a \models \mathtt{R}(\mathtt{c},\mathtt{v})$. Platí totiž např. $MZ^{\mathtt{v}}_1 \models \mathtt{R}(\mathtt{c},\mathtt{v})$, neboť $\langle 3,1\rangle \in M(\mathtt{R})$. Formule (9) je pravdivá, neboť není pravda, že pro všechna a platí $MZ^{\mathtt{v}}_a \models \mathtt{R}(\mathtt{c},\mathtt{v})$. Konkrétně platí, že $MZ^{\mathtt{v}}_3 \not\models \mathtt{R}(\mathtt{c},\mathtt{v})$, protože $\langle 3,3\rangle \notin \mathtt{M}(\mathtt{R})$. Formule (10) platí, protože existuje $a \in U_M$ takové, že $MZ^{\mathtt{v}}_a \models (\exists \mathtt{w})\neg(\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w}) \vee \mathtt{R}(\mathtt{w},\mathtt{v}))$. Konkrétně totiž platí, že $MZ^{\mathtt{v}}_2 \models (\exists \mathtt{w})\neg(\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w}) \vee \mathtt{R}(\mathtt{w},\mathtt{v}))$, neboť existuje $a \in U_M$ takové, že $MZ^{\mathtt{v}\mathtt{w}}_{2a} \models \neg(\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w}) \vee \mathtt{R}(\mathtt{w},\mathtt{v}))$, např. $MZ^{\mathtt{v}\mathtt{w}}_{24} \models \neg(\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w}) \vee \mathtt{R}(\mathtt{w},\mathtt{v}))$.

Zbylé formule okomentujeme pouze stručně. V jejich případě by byl přesný postup podle definice velmi zdlouhavý. Důležité je ale uvědomit si možnost tohoto přesného postupu a mít představu o jeho průběhu.

Formule (11) je pravdivá právě tehdy, když je relace $M(\mathtt{R})$ tranzitivní, a ta skutečně tranzitivní je. Na formuli (12) můžeme sledovat, že když se střídá více různých kvantifikátorů, je těžké rozluštit, co vlastně formule o interpretaci říká. Při analýze této formule podle Tarského definice pravdy zjistíme, že pro její pravdivost postačí, že existuje prvek univerza (např. 2), který je v $M(\mathtt{P})$, a že zároveň ze všech prvků univerza někam nevede šipka. Pravdivost formule (13) lze doložit, vezmeme-li v úvahu $Z_3^{\mathtt{x}}$ jako $\mathtt{x}$-variantu valuace Z. Formule (14) je pravdivá, protože z objektů, které jsou v $M(\mathtt{P})$, nevedou žádné šipky. Konečně formule (15) je pravdivá, protože když vede do nějakého předmětu univerza šipka, tak musí vést z trojky či z jedničky. Ale ta jediná šipka, která vede z jedničky, vede do dvojky, což je objekt, který se nachází v $M(\mathtt{P})$.

Kdybychom chtěli uvést několik formulí, které jsou v MZ nepravdivé, stačilo by vzít negace uvedených pravdivých formulí. To nás vede k následující větě. Budeme-li nadále mluvit o interpretaci nějaké formule či množiny formulí, budeme mít na mysli interpretaci jazyka sestávajícího právě z těch mimologických symbolů, které se v této formuli, resp. množině formulí vyskytují.

`14.4.11 Věta:` *Nechť ϑ je formule, I interpretace jejího jazyka a V valuace v interpretaci I. Pak platí, že $IV \vDash \vartheta$ nebo $IV \vDash \neg\vartheta$.*

`Důkaz:` Platí buď $IV \vDash \vartheta$, nebo $IV \nvDash \vartheta$. Přitom podle Tarského definice můžeme $IV \nvDash \vartheta$ automaticky přepsat na $IV \vDash \neg\vartheta$. `QED`

Je tedy dobré udržovat si představu, že každá interpretace a valuace pro daný jazyk nám rozdělí množinu formulí tohoto jazyka na dvě skupiny – na pravdivé a nepravdivé. Přitom mezi pravdivými jsou negace všech nepravdivých a mezi nepravdivými jsou negace všech pravdivých.

14.5 Důkaz indukcí a jeho specifika

Tarského definice pravdy je definice indukcí. Na tu se úzce váže technika důkazu indukcí, která je také v predikátové logice hojně využívána. Jaká jsou specifika této techniky v `KPL`, uvidíme na následujících dvou větách, jejichž důkazy z cvičných důvodů formulujeme velmi podrobně. Obě věty budeme v následujícím textu potřebovat. První z nich nám říká, že vyhodnocujeme-li pravdivostní hodnotu formule v dané interpretaci a valuaci, nezáleží na tom, co valuace přiřazuje proměnným, které se ve formuli nevyskytují volně.

`14.5.1 Věta:` *Nechť V a W jsou valuace proměnných v interpretaci I, které přiřazují stejné hodnoty všem volným proměnným formule ϑ. Pak $IV \models \vartheta$ právě tehdy, když $IW \models \vartheta$.*

`Důkaz:` Postupujeme indukcí podle složitosti formule ϑ. (i) Pokud ϑ je elementární formule $\mathtt{Q}(\mathtt{t_1}, \ldots, \mathtt{t_n})$, tak na základě předpokladu věty platí pro každý term $\mathtt{t_i}$ $(1 \leq i \leq n)$, že $IV(\mathtt{t_i}) = IW(\mathtt{t_i})$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní, a je tedy splněn základ indukce:

(1) $IV \models \mathtt{Q}(\mathtt{t_1}, \ldots, \mathtt{t_n})$,

(2) $\langle IV(\mathtt{t_1}), \ldots, IV(\mathtt{t_n})\rangle \in I(\mathtt{Q})$,

(3) $\langle IW(\mathtt{t_1}), \ldots, IW(\mathtt{t_n})\rangle \in I(\mathtt{Q})$,

(4) $IW \models \mathtt{Q}(\mathtt{t_1}, \ldots, \mathtt{t_n})$.

(ii) Nyní zdůvodněme induktivní krok. Nechť dokazované tvrzení platí pro formule ϕ a ψ. (ii.i) Předpokládejme, že $\vartheta = \neg\phi$ a že V a W přiřazují stejné hodnoty volným proměnným formule ϕ. Pak $IV \models \neg\phi$ právě tehdy, když $IV \not\models \phi$, a to je na základě induktivního předpokladu ekvivalentní $IW \not\models \phi$, což znamená, že $IW \models \neg\phi$. (ii.ii) Nechť $\vartheta = \phi \wedge \psi$ a ohodnocení V a W přiřazují stejné hodnoty volným proměnným ve formulích ϕ a ψ. Pak $IV \models \vartheta$ právě tehdy, když $IV \models \phi$ a $IV \models \psi$ právě tehdy, když $IW \models \phi$ a $IW \models \psi$ právě tehdy, když $IW \models \vartheta$. (ii.iii) Pro ostatní výrokové spojky můžeme postupovat analogicky. (ii.iv) Zbývá ukázat krok pro kvantifikátory. Nechť $\vartheta = (\forall \mathtt{y})\phi$. Nyní je třeba si uvědomit, že pokud V a W přiřazují stejné hodnoty volným proměnným formule ϑ, pak také pro každé $a \in U_I$ přiřazují $V^{\mathtt{y}}_a$ a $W^{\mathtt{y}}_a$ stejné hodnoty volným proměnným formule ϕ, protože ta může mít oproti formuli ϑ pouze jednu volnou proměnnou navíc, a to konkrétně proměnnou $\mathtt{y}$. Proto jsou následující tvrzení ekvivalentní. Induktivní předpoklad zajišťuje ekvivalenci mezi druhým a třetím výrokem:

(1) $IV \models \vartheta$,

(2) pro každé $a \in U_I$ platí $IV^{\mathtt{y}}_a \models \phi$,

(3) pro každé $a \in U_I$ platí $IW^{\mathtt{y}}_a \models \phi$,

(4) $IW \models \vartheta$.

Induktivní krok pro existenční kvantifikátor je analogický. `QED`

Výše jsme zavedli dvojí, vzájemně se podobající značení. To první bylo pro nahrazování termů ve formulích:

$\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{t}}$, kde $\mathtt{y}$ je proměnná a $\mathtt{t}$ je term.

To druhé pro $\mathtt{y}$-varianty valuace:

$V^{\mathtt{y}}_{a}$, kde $\mathtt{y}$ je proměnná a a je nějaký objekt z U_I.

Nyní zformulujeme větu, která ukazuje souvislost mezi těmito dvěma pojmy. Věta zhruba říká, že pokud jde o pravdivost, je jedno, jestli nahradíme ve formuli proměnnou $\mathtt{x}$ termem $\mathtt{t}$ nebo jestli vezmeme takovou $\mathtt{x}$-variantu valuace, která přiřazuje proměnné $\mathtt{x}$ to, co je přiřazeno termu $\mathtt{t}$. Formulace věty je tedy poněkud kostrbatá a důkaz zdlouhavý a technický, i když se ve výsledku nejedná o nijak překvapivé tvrzení. Toto tvrzení se však ukáže jako velice užitečné a v následujících kapitolách ho využijeme hned několikrát na klíčových místech.

`14.5.2 Věta (O konstantách):` *Nechť term* $\mathtt{t}$ *je substituovatelný za proměnnou* $\mathtt{x}$ *ve formuli* ϑ. *Nechť* I *je libovolná interpretace a* V *valuace v této interpretaci. Pak* $IV \vDash \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}}$ *právě tehdy, když* $IV_{IV(\mathtt{t})}^{\mathtt{x}} \vDash \vartheta$.

`Důkaz:` Postupujeme indukcí dle složitosti formule ϑ. (i.i) Nechť ϑ je atomická formule $\mathtt{Q}(\mathtt{t_1}, \dots, \mathtt{t_n})$ a proměnná $\mathtt{x}$ se nevyskytuje mezi jejími volnými proměnnými. Pak platí, že vzhledem ke každé $\mathtt{x}$-variantě valuace V bude mít ϑ v I stejnou pravdivostní hodnotu jako vzhledem k samotnému V. Také platí, že $\mathtt{Q}(\mathtt{t_1}, \dots, \mathtt{t_n}) = \mathtt{Q}(\mathtt{t_1}, \dots, \mathtt{t_n})^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}}$. Tedy požadované tvrzení je pravdivé. (i.ii) Nyní zvážíme případ, že $\mathtt{x}$ je mezi volnými proměnnými, což budeme zapisovat jako $\vartheta = \mathtt{Q}(\mathtt{t_1}, \dots, \mathtt{x}, \dots, \mathtt{t_n})$. Přitom $\mathtt{x}$ se může ve formuli pochopitelně vyskytovat vícekrát. V tom případě bude symbol „$\mathtt{x}$“ v našem zápise odkazovat ke všem těmto výskytům. Pak platí $\mathtt{Q}(\mathtt{t_1}, \dots, \mathtt{t}, \dots, \mathtt{t_n}) = \mathtt{Q}(\mathtt{t_1}, \dots, \mathtt{x}, \dots, \mathtt{t_n})^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}}$. Pokud stanovíme, že $IV(\mathtt{t}) = a$, pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) $IV \vDash \mathtt{Q}(\mathtt{t_1}, \dots, \mathtt{x}, \dots, \mathtt{t_n})^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}}$,

(2) $IV \vDash \mathtt{Q}(\mathtt{t_1}, \dots, \mathtt{t}, \dots, \mathtt{t_n})$,

(3) $\langle IV(\mathtt{t_1}), \dots, IV(\mathtt{t}), \dots, IV(\mathtt{t_n})\rangle \in I(\mathtt{Q})$,

(4) $\langle IV^{\mathtt{x}}_{a}(\mathtt{t_1}), \dots, IV^{\mathtt{x}}_{a}(\mathtt{x}), \dots, IV^{\mathtt{x}}_{a}(\mathtt{t_n})\rangle \in I(\mathtt{Q})$,

(5) $IV^{\mathtt{x}}_{a} \vDash \mathtt{Q}(\mathtt{t_1}, \dots, \mathtt{x}, \dots, \mathtt{t_n})$.

(ii) Předpokládejme dále, že term $\mathtt{t}$ je substituovatelný za $\mathtt{x}$ ve formulích ϕ a ψ a že dokazované tvrzení je pro tyto formule pravdivé. (ii.i) Dokážeme tvrzení pro $\vartheta = \phi \wedge \psi$. $IV \vDash (\phi \wedge \psi)^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}}$ právě tehdy, když $IV \vDash \phi^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}} \wedge \psi^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}}$, což platí právě tehdy, když $IV \vDash \phi^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}}$ a $IV \vDash \psi^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}}$. Poslední platí podle induktivního předpokladu právě tehdy, když $IV^{\mathtt{x}}_{a} \vDash \phi$ a $IV^{\mathtt{x}}_{a} \vDash \psi$, což zase platí právě tehdy, když $IV^{\mathtt{x}}_{a} \vDash \phi \wedge \psi$. (ii.ii) V případě ostatních výrokových spojek postupujeme analogicky. (ii.iii) Ještě je potřeba provést induktivní krok pro kvantifikátory. Rozebereme případ obecného kvantifikátoru. Předpokládejme, že term $\mathtt{t}$ je substituovatelný za proměnnou $\mathtt{x}$ ve formuli $(\forall \mathtt{v})\phi$. V případě, že proměnná $\mathtt{v}$ je totožná s proměnnou $\mathtt{x}$, musíme dokázat, že platí:

$$IV \vDash ((\forall \mathtt{x})\phi)^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}} \text{ právě tehdy, když } IV^{\mathtt{x}}_{a} \vDash (\forall \mathtt{x})\phi.$$

To lze zdůvodnit takto: Jelikož formule $(\forall \mathtt{x})\phi$ neobsahuje žádný volný výskyt proměnné $\mathtt{x}$, tak $((\forall \mathtt{x})\phi)^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}}$ je formule totožná s $(\forall \mathtt{x})\phi$. Navíc valuace V a $V^{\mathtt{x}}_{a}$ přiřazují stejné hodnoty všem volným proměnným formule $(\forall \mathtt{x})\phi$, a podle předchozí věty musí být tedy hodnota této formule v IV a v $IV^{\mathtt{x}}_{a}$ stejná. Nyní můžeme předpokládat, že $\mathtt{v}$ je odlišná od $\mathtt{x}$. Pak můžeme zdůvodnit, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $IV \vDash ((\forall \mathtt{v})\phi)^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}}$,

(2) $IV \vDash (\forall \mathtt{v})\phi^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}}$,

(3) pro každé $b \in U_I$ platí $IV^{\mathtt{v}}_{b} \vDash \phi^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}}$,

(4) pro každé $b \in U_I$ platí $IV^{\mathtt{v}\mathtt{x}}_{b\,a} \vDash \phi$,

(5) pro každé $b \in U_I$ platí $IV^{\mathtt{x}\mathtt{v}}_{a\,b} \vDash \phi$,

(6) $IV^{\mathtt{x}}_{a} \vDash (\forall \mathtt{v})\phi$.

Přechody mezi (1) a (2) jsou dány charakterem substituce ve formuli. Tarského definice pravdy povoluje přechody mezi (2) a (3). Vztah mezi (3) a (4) je zajištěn induktivním předpokladem, který se pro formuli ϕ vztahuje na každou valuaci v I. V tomto kroku je také využit předpoklad, že term $\mathtt{t}$ je substituovatelný za proměnnou $\mathtt{x}$ ve formuli $(\forall \mathtt{v})\phi$, jelikož zaručuje, že pokud se $\mathtt{x}$ vyskytuje volně ve formuli ϕ, pak $\mathtt{t}$ musí být odlišný od $\mathtt{v}$, což znamená, že $IV^{\mathtt{v}}_{b}(\mathtt{t}) = IV(\mathtt{t}) = a$. Jen díky této skutečnosti lze pak použít induktivní předpoklad. Pokud se $\mathtt{x}$ nevyskytuje volně ve formuli ϕ, je ekvivalence mezi (3) a (4) zajištěna větou 14.5.1. Ekvivalence (4) a (5) je dána tím, že $\mathtt{x}$ a $\mathtt{v}$ jsou různé proměnné. Ekvivalence (5) a (6) je opět zajištěna Tarského definicí pravdy. Induktivní krok pro existenční kvantifikátor je analogický. `QED`

14.6 Vztahy mezi kvantifikátory

Stejně jako v `KVL` není ani v `KPL` výběr logických symbolů dán čistě jejich expresivními možnostmi. V tomto ohledu jsme mohli být v `KVL` mnohem úspornější a omezit se např. pouze na implikaci a negaci, jako to udělal Frege. Víme totiž, že tyto dvě spojky tvoří adekvátní skupinu, což znamená, že na ně lze jednak všechny ostatní spojky převést a jednak že umožňují vyjádřit libovolnou pravdivostní funkci. Nejinak je tomu v KPL a opět to byl Frege, kdo nás na to ve svém *Pojmovém písmu* upozornil. Zmínili jsme přitom, že ačkoli se kvantifikátory jeví jako jisté zobecnění spojek konjunkce a disjunkce, není vlastní převedení na tyto spojky možné s ohledem na rozdíly v proměnnosti kvantifikace: zatímco konjunkce a disjunkce vážou vždy pouze dva výroky, vztahuje se kvantifikace na jejich nespecifikovaný počet, včetně počtu nekonečného. Kvantifikátor je tedy svébytný symbol. Jak nám ale opět naznačuje Fregův systém, nejsou zapotřebí kvantifikátory dva, ale jen jeden, na nějž lze ten druhý pomocí výrokových spojek jednoduše převést. Vztahům mezi kvantifikátory, na něž jsme již v textu opakovaně narazili, se budeme věnovat v tomto oddílu.

První dva vztahy, které přesně artikulujeme, ukazují, že v dané interpretaci a valuaci lze přesunout negaci přes kvantifikátor s tím, že se tento kvantifikátor změní, aniž by se však změnila pravdivostní hodnota formule.

14.6.1 Věta (O vztahu kvantifikátorů 1): *Nechť ϑ je formule, I interpretace jejího jazyka a V valuace v interpretaci I. Pak platí:*

(a) $IV \models \neg(\exists \mathtt{y})\vartheta$ *právě tehdy, když* $IV \models (\forall \mathtt{y})\neg\vartheta$,

(b) $IV \models \neg(\forall \mathtt{y})\vartheta$ *právě tehdy, když* $IV \models (\exists \mathtt{y})\neg\vartheta$.

Důkaz: (a) $IV \models \neg(\exists \mathtt{y})\vartheta$ platí právě tehdy, když neplatí $IV \models (\exists \mathtt{y})\vartheta$, tj. když není pravda, že existuje $a \in U_I$ tak, že $IV^{\mathtt{y}}_a \models \vartheta$. To nastává tehdy a jen tehdy, když pro každé $a \in U_I$ není pravda, že $IV^{\mathtt{y}}_a \models \vartheta$, tj. pro každé $a \in U_I$ platí $IV^{\mathtt{y}}_a \models \neg\vartheta$. Poslední podmínka je ekvivalentní tvrzení, že $IV \models (\forall \mathtt{y})\neg\vartheta$. (b) Tento vztah se dokáže zcela analogicky. QED

Zde se nám již rýsuje možnost jistých syntaktických transformací. Jako příklad vezměme omezenou kvantifikaci, třeba větu „každé prvočíslo je liché“. Po formalizaci získáme formuli:

$$(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{L}(\mathtt{x})).$$

Chtěli bychom, aby negace této věty znamenala totéž, co věta „některé prvočíslo není liché“, kterou formalizujeme jako:

$$(\exists \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \neg\mathtt{L}(\mathtt{x})).$$

Formální aparát, který jsme zavedli, splňuje toto očekávání, protože v každé interpretaci a valuaci lze provést při zachování pravdivostní hodnoty tyto transformace:

(1) $\neg(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{L}(\mathtt{x}))$,

(2) $(\exists \mathtt{x})\neg(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{L}(\mathtt{x}))$,

(3) $(\exists \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \neg \mathtt{L}(\mathtt{x}))$.

Přechod od formule (1) k formuli (2) je korektní díky bodu (b) předchozí věty. Přechod od formule (2) k formuli (3) je zajištěn tím, že v dané interpretaci a valuaci můžeme provádět výrokové úpravy, tj. nahrazovat formuli formulí, která je jí z hlediska KVL logicky ekvivalentní, aniž by se měnila pravdivostní hodnota. To je prostým důsledkem faktu, že výrokové spojky se v predikátové logice vyhodnocují stejně jako ve výrokové. Následující věta je drobnou úpravou té předchozí. Ukazuje možnost vyjádřit jeden kvantifikátor pomocí druhého.

`14.6.2 Věta (O vztahu kvantifikátorů 2):` *Nechť ϑ je formule, I interpretace jejího jazyka a V valuace v interpretaci I. Pak platí:*

(a) $IV \models (\exists \mathtt{y})\vartheta$ právě tehdy, když $IV \models \neg(\forall \mathtt{y})\neg\vartheta$,

(b) $IV \models (\forall \mathtt{y})\vartheta$ právě tehdy, když $IV \models \neg(\exists \mathtt{y})\neg\vartheta$.

`Důkaz:` Plyne přímo z 14.6.1. `QED`

Tím máme založeny vztahy, které jsme diskutovali již v souvislosti s logickým čtvercem (viz oddíl 11.2) a paradoxy typu lháře (viz oddíl 10.3), v nichž docházelo k špatným představám o negaci kvantifikované formule. Konkrétně byl např. opak věty „všichni Kréťané jsou lháři“ uchopen jako „žádný Kréťan nelže“. Ve vší obecnosti je samozřejmě spor o to, zda jsou tyto věty ve vzájemném vztahu negace, obtížně řešitelný, neboť závisí na podpůrné sémantice, která – jak jsme opět viděli – je jiná v případě aristotelské sylogistiky a jiná v případě predikátové logiky, do níž jsme nyní s to příslušné výroky rovněž přeložit. Pokud např. chápeme významy užitých termínů „Kréťan“ a „lhát“ po platónském způsobu jako nerozborné celky nacházející se ve vztazích úplného překrytí či exkluze, pak se o negace jedná, stejně jako kdybychom v KPL chápali termín „Kréťan“ jako jméno individua. Jestliže je naopak chápeme jako dělitelné, případně sestávající z jednotlivých individuí typu Epiménida, je situace jiná. Uvažovat lze pak třeba takto. Předpokládám, že všichni (Kréťané) lžou, tedy

$$(\forall \mathtt{x})\mathtt{L}(\mathtt{x}),$$

a že negací tohoto tvrzení je, že nikdo (žádný Kréťan) nelže, tedy

$$\neg(\exists \mathtt{x})\mathtt{L}(\mathtt{x}).$$

Pokud by se jednalo o negace, nemohly by být tyto věty zároveň pravdivé, ale nemohly by být ani zároveň nepravdivé. Kdyby tedy byla věta $\neg(\exists \mathtt{x})\mathtt{L}(\mathtt{x})$ nepravda, což podle sémantiky negace nastává tehdy a jen tehdy, když je $(\exists \mathtt{x})\mathtt{L}(\mathtt{x})$ pravda, měla by být nutně $(\forall \mathtt{x})\mathtt{L}(\mathtt{x})$ pravdivá. Z toho ale, že někdo lže, určitě neplyne, že lžou všichni, o negace se tedy jednat nemůže. Podobnými úvahami lze dospět k tomu, že negací věty tvaru $(\forall \mathtt{x})\mathtt{L}(\mathtt{x})$ je věta tvaru

$$(\exists \mathtt{x})\neg\mathtt{L}(\mathtt{x}),$$

s tím, že máme neustále na zřeteli navržený sémantický model, tj. nepřidržujeme se čistě jazykových – a tedy syntaktických – úvah, které mohou vést snadno k přesvědčení, že se pohybujeme v kruhu. To není směřováno proti proklamované závislosti sémantiky na jazyku a platných inferencích, uznává se tím nicméně původ jazyka a jeho obsahu ve smyslových reprezentacích a obecné znakovosti, která má ve formálních úvahách, jako jsou tyto, tendenci mizet.

O tom, že je třeba brát v úvahu obojí, syntax a sémantiku, se přesvědčíme později, v kapitole 21 věnované intuicionismu. Ten totiž, stejně jako jeho odnož – matematický konstruktivismus, odmítá z toho, že

neplatí, že by všechna čísla měla nějakou vlastnost P,

usoudit na to, že

existuje číslo, které vlastnost P nemá.

Činí tak právě proto, že se příslušný úsudek opírá pouze o jisté jazykové schéma, totiž

(1) $\neg(\forall \mathtt{x})\vartheta \rightarrow (\exists \mathtt{x})\neg\vartheta,$

aniž by byl přezkoumán jeho vztah k příslušné (matematické) zkušenosti. Při práci s konečnými obory přitom, jak intuicionismus uznává, příslušný přechod triviálně platí, ale nad nekonečnými obory, které tvoří vlastní doménu matematiky, jeho platnost zajištěna není, stejně jako v jejich případě neplatí vyloučený třetí:

(2) $(\forall \mathtt{x})\vartheta \vee \neg(\forall \mathtt{x})\vartheta.$

Toto možná překvapivé tvrzení se přitom podle L. E. J. Brouwera, jenž daný typ uvažování rozpracoval do celého filosoficko-matematického systému, spočívá ve spojení sémantiky s představou jisté lidsky proveditelné konstrukce. Ta se má v Brouwerově pojetí odehrávat v lidské mysli, což s sebou nese jistý značně subjektivizující nádech, jehož jsme zbaveni až uchopením celé teorie v termínech „efektivních“ procedur, jak je reprezentují moderní počítače. K tomu byly jisté kroky učiněny právě v rámci konstruktivismu. V něm také dochází do značné míry k propojení pojmů pravdivosti a dokazatelnosti, jak to ukazuje konstruktivistické čtení formule (1):

> z toho, že jistá věta neplatí pro každé z přirozených čísel, by mělo jít určit případ čísla, pro které tato věta platí.

To ale nemusí být v obecnosti možné, neboť důkaz neplatnosti oné věty může být veden nepřímo, tj. můžeme být sledem korektních kroků přivedeni od věty tvaru $(\forall \mathtt{x})\vartheta$ ke sporu, aniž bychom měli jakýkoli náznak toho, jaké číslo by potvrdilo tvrzení $(\exists \mathtt{x})\neg\vartheta$. Podobně neplatí formule (2) proto, že v obecném případě aritmetických tvrzení nejsme s to předvést ani důkaz věty, ani důkaz její negace, jak to ukazuje již zmíněný příklad Goldbachovy domněnky, která má obecný tvar $(\forall \mathtt{x})\vartheta$.

My sami budeme mít přitom možnost pozorovat přirozené spojení pravdivosti s dokazatelností v souvislosti s metodou stromů, obecně tedy s variantami metody axiomatické, které byly navrženy právě s ambicí ustanovit v protikladu k ideálně koncipovaným sémantickým metodám koncept „efektivní“ procedury. Z toho totiž, že pro daný vstup (formuli `KPL`) nedostaneme odpověď `NE` (není to logická pravda), ještě neplyne, že dostaneme odpověď `ANO` (je to logická pravda), právě proto, že se obecně jedná o proceduru nekonečnou, a nepřítomnost odpovědi, tedy fakt, že se procedura zatím nezastavila, není dokladem toho, že se ještě nezastaví. Obecně to lze vyjádřit třeba tak, že

> absence nesouhlasu neznamená souhlas,

což vede k neplatnosti další, klasicky platné formule, tautologie `KVL` i `KPL`

$$\neg\neg\vartheta \rightarrow \vartheta.$$

Tento příklad přirozeného použití Brouwerova pojetí logických spojek nijak neprotiřečí našemu původnímu rozhodnutí chápat pravdivost konkrétních vět v sémantice `KVL` a `KPL` jako nezávislou na jejich ověřitelnosti. K platnosti disjunkce $A \vee B$ např. nepotřebujeme vědět, která z vět A či B je pravdivá, stačí pouze, že je to jedna z nich, a podobně je tomu i s kvantifikací. Proto také na rozdíl od Brouwera nedokážeme rozlišit mezi tvrzením (2) a tvrzením

(3) $(\forall \mathtt{x})\vartheta \vee (\exists \mathtt{x})\neg\vartheta$,

jejichž ekvivalence v intuicionistické logice právě s ohledem na neplatnost (1) rovněž neplatí. Podle klasického čtení, opírajícího se o Tarského definici pravdivosti, je přitom zjevné, že všechny předměty daného oboru buď mají danou vlastnost, nebo existuje předmět, který ji nemá, *tertium non datur*. Pokud o této úvaze Brouwer a jeho žáci pochybují, nelze proti tomu nic namítat, stačí si uvědomit, že tím fakticky budují jiný koncept sémantického založení příslušných spojek. Potíž nastane ve chvíli, kdy ho označí za přirozený či přirozenější v nějakém absolutním smyslu. To by bylo naivní právě proto, že v pozadí jejich úvah jsou opět nutně nějaká schémata, která se v jiném kontextu ukážou jako omezená či lichá.

Nyní se vraťme zpět do `KPL`. Poslední věta, kterou zmíníme, odráží vztahy mezi dvojicemi kvantifikátorů tak, jak jsme je již mnohokráte, i když zatím jen neformálně, zkoumali. Předvedeme v ní jejich oficiální založení.

`14.6.3 Věta (O vztahu kvantifikátorů 3):` *Obecně platí, že:*

(a) $IV \models (\forall \mathtt{v})(\forall \mathtt{u})\vartheta$ *právě tehdy, když* $IV \models (\forall \mathtt{u})(\forall \mathtt{v})\vartheta$,

(b) $IV \models (\exists \mathtt{v})(\exists \mathtt{u})\vartheta$ *právě tehdy, když* $IV \models (\exists \mathtt{u})(\exists \mathtt{v})\vartheta$.

Pokud $\mathtt{u}$ *a* $\mathtt{v}$ *jsou různé proměnné, pak platí:*

(c) *jestliže* $IV \models (\exists \mathtt{v})(\forall \mathtt{u})\vartheta$, *pak* $IV \models (\forall \mathtt{u})(\exists \mathtt{v})\vartheta$.

`Důkaz:` (a) Pokud $\mathtt{u}$ a $\mathtt{v}$ jsou stejné proměnné, pak $(\forall \mathtt{v})(\forall \mathtt{u})\vartheta = (\forall \mathtt{u})(\forall \mathtt{v})\vartheta$ a tvrzení platí triviálně. Předpokládejme tedy jednak, že $IV \models (\forall \mathtt{v})(\forall \mathtt{u})\vartheta$, a dále, že $\mathtt{u}$ a $\mathtt{v}$ jsou různé proměnné. Z prvního předpokladu plyne, že pro každé a platí, že pro každé b platí $IV^{\mathtt{vu}}_{ab} \models \vartheta$. To znamená, že vezmeme-li si libovolné b, platí pro každé a, že $IV^{\mathtt{vu}}_{ab} \models \vartheta$. Na základě předpokladu různosti proměnných $\mathtt{u}$ a $\mathtt{v}$ platí $V^{\mathtt{vu}}_{ab} = V^{\mathtt{uv}}_{ba}$. Tedy celkem můžeme usoudit, že pro každé b platí, že pro každé a platí $IV^{\mathtt{uv}}_{ba} \models \vartheta$, tj. $IV \models (\forall \mathtt{u})(\forall \mathtt{v})\vartheta$. Důkaz pravolevé implikace je stejný. V případě tvrzení (b) je úvaha podobná jako v bodě (a). Nyní dokážeme tvrzení (c). Předpokládejme, že $\mathtt{u}$ a $\mathtt{v}$ jsou různé proměnné a že platí $IV \models (\exists \mathtt{v})(\forall \mathtt{u})\vartheta$. To znamená, že v univerzu existuje alespoň jeden objekt a takový, že $IV^{\mathtt{v}}_{a} \models (\forall \mathtt{u})\vartheta$. Z těchto objektů jeden vyberme a označme si ho jako o. Platí tedy $IV^{\mathtt{v}}_{o} \models (\forall \mathtt{u})\vartheta$. Nechť je dán libovolný prvek a z univerza interpretace. Pak musí platit $IV^{\mathtt{vu}}_{oa} \models \vartheta$. Protože $\mathtt{u}$ a $\mathtt{v}$ jsou různé proměnné, platí $V^{\mathtt{vu}}_{oa} = V^{\mathtt{uv}}_{ao}$. Platí tedy $IV^{\mathtt{uv}}_{ao} \models \vartheta$. Z toho jistě můžeme usoudit, že v univerzu existuje prvek b takový, že $IV^{\mathtt{uv}}_{ab} \models \vartheta$, tj. že $IV^{\mathtt{u}}_{a} \models (\exists \mathtt{v})\vartheta$. Protože a bylo libovolné, platí $IV \models (\forall \mathtt{u})(\exists \mathtt{v})\vartheta$. `QED`

K sémantice kvantifikátorů jsme řekli ve stručnosti vše, co je třeba, a nyní můžeme přejít k cílovým pojmům formální sémantiky, totiž k pojmům modelu, logické pravdivosti a vyplývání. Uvidíme, že se nám jejich struktura dále komplikuje.

14.7 Splnitelnost a model

Rozlišení interpretace a valuace v souvislosti se zavedením kvantifikátoru, a tedy potřebou rozlišení dvojí obecnosti, s sebou přináší důsledky i pro další sémantické pojmy, konkrétně pojmy splnitelnosti a vyplývání. V tomto oddílu se budeme věnovat prvnímu z nich. Splnitelnost v rámci KVL byla fakticky definována odkazem na existenci modelu, tedy jakožto odvozený pojem. V KPL se situace liší a pojmy splnitelnosti a modelu jsou definovány odlišně, v tom smyslu, že být splnitelný neznamená totéž, co mít model. Stručně k tomu lze říci toto:

> *splnitelnost* představuje v KPL nejnižší úroveň partikulárnosti, ve smyslu pravdivosti v *nějaké* interpretaci a *nějaké* valuaci,
>
> existence *modelu* představuje v KPL první stupeň obecnosti, totiž pravdivosti v *nějakém* modelu při *každé* valuaci.

Z rozpisu je zjevné, že kvantifikace a rozlišování patřičných typů kvantifikačních závislostí nabývá značného významu i na metaúrovni. Fakt, že byla valuace jako podstatný sémantický nástroj zavedena kvůli otevřeným formulím, se plně projeví v důkazu, že pro uzavřené formule pojmy splnitelnosti a existence modelu koincidují. Totéž nastane i pro dva různé druhy vyplývání, k jejichž rozlišení a následnému spojení pro uzavřené formule dospějeme v dalším oddílu. Nyní přistupme k definicím.

14.7.1 Definice (Splnitelnost): *Formule ϑ je splnitelná v interpretaci I, jestliže existuje valuace V v I taková, že $IV \vDash \vartheta$. Formule je splnitelná, jestliže existuje interpretace, v níž je splnitelná.*

Definici vysvětleme na příkladech. Ptejme se nejprve, zda je splnitelná např. formule:

$$\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w}).$$

Ptáme se tedy, zda existuje interpretace a valuace, vzhledem k nimž je pravdivá. Tato formule není sice pravdivá v naší interpretaci M při valuaci Z, viz příklady 14.4.2 a 14.4.5, ale postačí, vezmeme-li v této interpretaci vhodně nějakou jinou valuaci, např. $Z^{\mathtt{vw}}_{12}$. Vzhledem k ní již bude formule $\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w})$ pravdivá. To tedy znamená, že tato formule je splnitelná v interpretaci M, a to dále znamená, že je splnitelná. Nyní se ptejme, zda je splnitelná formule:

$$\mathtt{R}(\mathtt{c},\mathtt{c}).$$

Podívejme se na interpretaci M. Zjistíme, že ať budeme jakkoli obměňovat valuace, nebude to mít na pravdivost této formule vliv. Tato formule je v M nepravdivá při každé valuaci, a proto zde není splnitelná. To však neznamená, že není vůbec splnitelná. Lehce najdeme interpretaci I, ve které splnitelná je. Vezměme třeba univerzum U_I, jehož jediným prvkem je třeba Praha. Jméno $\mathtt{c}$ nemůže být realizováno jinak než jako Praha, predikát $\mathtt{R}$ realizujeme relací $\{\langle \text{Praha}, \text{Praha} \rangle\}$. V této interpretaci existuje jen jedna valuace V. Vzhledem k I a V je formule $\mathtt{R}(\mathtt{c}, \mathtt{c})$ pravdivá, a tato formule je tedy splnitelná. Uvažme nyní formuli:

$$\mathtt{R}(\mathtt{c}, \mathtt{c}) \wedge \neg \mathtt{R}(\mathtt{c}, \mathtt{c}).$$

Ta má tvar výrokové kontradikce. Protože výrokové spojky se vyhodnocují stejně jako ve výrokové logice, není tato formule pravdivá v žádné interpretaci a valuaci, a není tedy splnitelná. Formule

$$(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \neg \mathtt{P}(\mathtt{c})$$

nemá sice tvar výrokové kontradikce, přesto také není splnitelná. Je-li totiž v dané interpretaci a valuaci pravdivá formule $(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})$, znamená to, že v množině, která je realizací predikátu $\mathtt{P}$, je každý prvek univerza, tedy i ten, který je realizací jména $\mathtt{c}$. Proto musí platit také $\mathtt{P}(\mathtt{c})$. Formule $(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})$ a $\neg \mathtt{P}(\mathtt{c})$ nemohou být pravdivé současně, a proto nemůže být pravdivá ani jejich konjunkce.

Položme si nyní přirozenou otázku, jestli bychom se nemohli v principu obejít bez nekonečných interpretací, tj. takových interpretací, jejichž univerzum je nekonečná množina. Neplatí náhodou, že pokud je formule splnitelná, pak je také splnitelná v nějaké konečné interpretaci? Následující příklad ilustruje, že tomu tak není, a že tedy existují formule, které jsou splnitelné jen v některých nekonečných interpretacích.

`Příklad 14.7.2:` Zkusme najít interpretaci, v níž je splnitelná konjunkce následujících tří formulí:

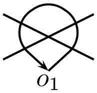
(1) $(\forall \mathtt{u})(\forall \mathtt{v})(\forall \mathtt{w})(\mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{v}) \wedge \mathtt{R}(\mathtt{v}, \mathtt{w}) \to \mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{w}))$,

(2) $(\forall \mathtt{u})(\exists \mathtt{v})\mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{v})$,

(3) $(\forall \mathtt{u})\neg \mathtt{R}(\mathtt{u}, \mathtt{u})$.

Předpokládejme, že konjunkce těchto tří formulí je pravdivá v nějaké interpretaci I při nějaké valuaci a představujme si, že na univerzu interpretace je jistá množina šipek reprezentující realizaci predikátu $\mathtt{R}$. Mějme na paměti, že formule (1) je pravdivá jen tehdy, když realizace predikátu $\mathtt{R}$ je tranzitivní.

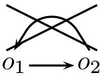
Vyberme si libovolný objekt z univerza této interpretace a označme ho jako o_1. Platnost formule (2) vede k tomu, že z o_1 vede nějaká šipka, ale tato šipka nemůže vést do samotného o_1, neboť tomu brání pravdivost formule (3):



Šipka tedy vede do nějakého jiného prvku, řekněme do o_2:

$$o_1 \longrightarrow o_2$$

Díky formuli (2) musí také z o_2 vést šipka, ta však nemůže vést ani do o_1, ani do o_2, v obou případech bychom totiž porušili platnost formule (3):



Pokud by šipka vedla z o_2 do o_2, tak je to zjevné, pokud by vedla do o_1, pak by z tranzitivity relace, jak ji reprezentuje formule (1), plynulo, že vede také z o_2 do o_2. Z o_2 tedy musí vést šipka do nějakého odlišného objektu o_3:

$$o_1 \longrightarrow o_2 \longrightarrow o_3$$

Podobně si formule vynutí existenci dalších objektů $o_4, o_5, o_6, \ldots$ Celkem si tedy formule vynutí nekonečné univerzum:

$$o_1 \longrightarrow o_2 \longrightarrow o_3 \longrightarrow \cdots$$

Zatím je zjevné, že konjunkce uvedených tří formulí nemůže být pravdivá v žádné konečné interpretaci. Zbývá ověřit, že je pravdivá v nějaké nekonečné interpretaci. Z toho, co jsme již řekli, je patrné, že tato konjunkce bude pravdivá např. v takové interpretaci, v níž univerzum tvoří množina přirozených čísel a realizace predikátu `R` je relace ostrého uspořádání $<$. Valuace v této interpretaci může být libovolná.

V předchozím příkladě jsme viděli případ interpretace množiny formulí, jejichž pravdivostní hodnota v této interpretaci byla stejná pro jakoukoli valuaci. To bylo reálně zapříčiněno tím, že se v příslušných formulích nevyskytovala žádná volná proměnná. I kdyby se však ve formulích nějaká volná proměnná vyskytla, byla by okolnost, že žádná valuace nezmění hodnotu formulí, znakem toho, že je tato formule v dané interpretaci na valuacích nezávislá. Tím se dostáváme k pojmu modelu.

`14.7.3 Definice (Model):` *Říkáme, že ϑ je pravdivá v interpretaci I nebo také, že ϑ je splněna interpretací I (symbolicky $I \models \vartheta$), když pro každou valuaci proměnných V v I platí, že $IV \models \vartheta$. Pokud ϑ je pravdivá v interpretaci I, říkáme také, že I je modelem formule ϑ. Dále říkáme, že interpretace I je modelem množiny formulí T, když I je modelem každé formule, která je prvkem množiny T.*

Je zřejmé, že má-li formule model, pak je splnitelná. To je důsledkem našeho předpokladu, že univerzum každé interpretace je neprázdné, a tudíž v interpretaci existuje vždy alespoň jedna valuace. Fakticky tu máme tedy situaci sylogistického čtverce s jeho přechodem od obecné věty k větě částečné, symbolicky:

$$\frac{(\exists I)(\forall V)IV \models \vartheta}{(\exists I)(\exists V)IV \models \vartheta.}$$

Fixujeme-li I, máme pak:

$$\frac{(\forall V)IV \models \vartheta}{(\exists V)IV \models \vartheta.}$$

Díky předpokladu neprázdnosti jakéhokoli univerza U_I bude vždy splněn i požadavek neprázdnosti oboru různých valuací nad ním, a přechod tedy platí, neboť je-li daná formule pravdivá v nějaké interpretaci, je zde pravdivá při každé valuaci a my můžeme jednu z valuací vybrat jako tu, která nám dosvědčí splnitelnost této formule. Není snad třeba upozorňovat, že kvantifikátory uvedené v zápisu je třeba číst jako výrazy metajazyka. Z podobného důvodu je zřejmé, že opačný přechod platit nemusí a ani neplatí, což znamená, že existují formule, které jsou splnitelné, ale nemají model. Příkladem může být formule:

$$\mathtt{P}(\mathtt{v}) \land \neg\mathtt{P}(\mathtt{w}).$$

Tu není zjevně problém splnit, disponujeme-li univerzem se dvěma odlišnými předměty. Existence modelu je ovšem vyloučena, neboť by vyžadovala platnost pro jakoukoli valuaci proměnných $\mathtt{v}$ a $\mathtt{w}$, tedy i takovou valuaci, které přiřazuje oběma proměnným tentýž předmět univerza. Ten by tak musel náležet a nenáležet interpretaci predikátové konstanty $\mathtt{P}$, což je vyloučeno z definice interpretace.

K dalšímu rozdvojení základních pojmů dochází v záležitostech bivalence ohodnocení formule na základě dané interpretace. Z Tarského definice pravdivosti vidíme, že v dané interpretaci a valuaci je vždy pravdivá buď ϑ, nebo $\neg\vartheta$, tj. tvrzení

$$IV \models \vartheta \qquad\qquad IV \models \neg\vartheta$$

jsou tvrzení kontradiktorická. Omezíme-li se na pravdivost v interpretaci (nezávisle na valuaci), začíná se situace komplikovat. Vezměme si opět interpretaci M z příkladu 14.4.2. Při valuaci Z z příkladu 14.4.5 není pravdivá formule $\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w})$, a je tedy pravdivá $\neg\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w})$. Při valuaci $Z^{\mathtt{vw}}_{12}$ je pravdivá formule $\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w})$, a není tedy pravdivá formule $\neg\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w})$. Takže pro dané M neplatí ani $M \models \mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w})$, ani $M \models \neg\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w})$. To nás musí vést k veliké opatrnosti ohledně jistých úsudkových přechodů, typicky třeba tohoto:

$$\frac{I \not\models \vartheta}{I \models \neg\vartheta.}$$

Z okolnosti, že jsme si jej mohli dovolit ve výrokové logice, totiž neplyne jeho platnost v rámci `KPL`, jak to okamžitě zjistíme, provedeme-li jeho rozpis do kvantifikované podoby:

$$\frac{\neg(\forall V)IV \models \vartheta}{(\forall V)IV \models \neg\vartheta.}$$

Z toho, že neplatí, že by byla formule ϑ pravdivá v I pro každou valuaci, rozhodně neplyne, že by byla v I pro každou valuaci pravdivá $\neg\vartheta$, neboť je možný případ, že obě nastávají v některých valuacích, ale žádná ve všech. Z aristotelského úhlu pohledu zde máme případy tvrzení

$$I \models \vartheta \qquad\qquad I \models \neg\vartheta,$$

která nejsou kontradiktorická, ale kontrární. Nemohou totiž, opět s ohledem na existenci alespoň jedné valuace v dané interpretaci, současně platit, mohou však současně neplatit, totiž existují-li valuace, které je jednotlivě splní.

Kontrárnost pravdivosti *v interpretaci* ovšem přejde zpět v kontradiktoričnost pravdivosti *v interpretaci a valuaci* tehdy, omezíme-li se pouze na uzavřené formule. Důsledkem věty 14.5.1 totiž je, že při vyhodnocování sentence nezáleží vůbec na charakteru valuace. To lze zformulovat několika způsoby. Třeba tak, že v dané interpretaci je formule pravdivá vzhledem k nějaké valuaci právě tehdy, když je zde pravdivá vzhledem ke všem valuacím.

`14.7.4 Věta:` *Nechť ϑ je sentence, I je interpretace jejího jazyka a V je valuace v této interpretaci. Pak $IV \models \vartheta$ právě tehdy, když $I \models \vartheta$.*

`Důkaz:` Všechny valuace přiřazují stejné hodnoty všem volným proměnným formule ϑ. To platí jednoduše proto, že ϑ žádné volné proměnné nemá. Tedy věta 14.5.1 nám říká, že $IV \models \vartheta$ tehdy a jen tehdy, když pro každé ohodnocení W platí $IW \models \vartheta$, což právě znamená, že $I \models \vartheta$. `QED`

Nyní již máme na dosah ruky závěr, že není-li sentence v interpretaci pravdivá, je v ní pravdivá její negace.

`14.7.5 Věta:` *Nechť ϑ je sentence a I interpretace jejího jazyka. Pak platí buď $I \models \vartheta$, nebo $I \models \neg\vartheta$, nikdy ne obojí.*

Důkaz: Nechť V je valuace v I. Pokud neplatí $I \models \vartheta$, neplatí podle předchozí věty ani $IV \models \vartheta$. Pak $IV \models \neg\vartheta$ a opět podle předchozí věty $I \models \neg\vartheta$. Platnost $I \models \vartheta$ a $I \models \neg\vartheta$ nemůže nastat zároveň, neboť pak by platilo také $IV \models \vartheta$ a $IV \models \neg\vartheta$, což by byl spor. QED

14.7.6 Věta: *Sentence je splnitelná právě tehdy, když má model.*

Důkaz: Plyne přímo z věty 14.7.4. QED

Nyní zavedeme dva jednoduché způsoby, jak formuli transformovat na sentenci. Ty nám umožní formulovat a jasněji rozpoznat jisté vztahy mezi splnitelností a existencí modelu. Nejprve definice.

14.7.7 Definice (Uzávěr): *Nechť $\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n$ jsou právě všechny volné proměnné formule ϑ. Pak formuli $(\forall \mathtt{x}_1) \ldots (\forall \mathtt{x}_n)\vartheta$ nazýváme generálním uzávěrem formule ϑ a tuto formuli značíme zkráceně jako $\vartheta^{(\forall)}$. Existenčním uzávěrem formule ϑ je pak formule $(\exists \mathtt{x}_1) \ldots (\exists \mathtt{x}_n)\vartheta$, kterou značíme jako $\vartheta^{(\exists)}$. Pokud je ϑ sentence, pak $\vartheta = \vartheta^{(\forall)} = \vartheta^{(\exists)}$.*

Nyní uveďme první ze slíbených vztahů, který dokáže fakt platnosti pro některou či každou valuaci, a tedy fakt splnitelnosti či existence modelu převést na platnost jisté sentence.

14.7.8 Věta (O uzávěru 1): *Nechť I je interpretace jazyka formule ϑ. Pak platí:*

(a) ϑ je pravdivá v I právě tehdy, když $I \models \vartheta^{(\forall)}$,

(b) ϑ je splnitelná v I právě tehdy, když $I \models \vartheta^{(\exists)}$.

Důkaz: (a) ($\Rightarrow$) Nechť $\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n$ jsou právě všechny volné proměnné ve formuli ϑ. Nechť nejprve $I \models \vartheta$. Pak ϑ je pravdivá v I při libovolné valuaci v I. Nechť V je libovolná valuace v I. Pak pro každé $a \in U_I$ platí $IV_a^{\mathtt{x}_n} \models \vartheta$, a tedy i $IV \models (\forall \mathtt{x}_n)\vartheta$. Protože V byla libovolná, platí také $I \models (\forall \mathtt{x}_n)\vartheta$. Opakujeme-li totéž pro proměnné $\mathtt{x}_{n-1}, \mathtt{x}_{n-2}, \ldots, \mathtt{x}_1$, jako výsledek obdržíme, že platí $I \models \vartheta^{(\forall)}$. ($\Leftarrow$) Nechť nyní $I \models \vartheta^{(\forall)}$. Nechť V je opět libovolná valuace v I. Platí $IV \models \vartheta^{(\forall)}$. Pak pro každé $a \in U_I$ platí $IV_a^{\mathtt{x}_1} \models (\forall \mathtt{x}_2)(\forall \mathtt{x}_3) \ldots (\forall \mathtt{x}_n)\vartheta$. Tedy i $IV_{V(\mathtt{x}_1)}^{\mathtt{x}_1} \models (\forall \mathtt{x}_2)(\forall \mathtt{x}_3) \ldots (\forall \mathtt{x}_n)\vartheta$. Ale $V_{V(\mathtt{x}_1)}^{\mathtt{x}_1} = V$, což znamená, že $IV \models (\forall \mathtt{x}_2)(\forall \mathtt{x}_3) \ldots (\forall \mathtt{x}_n)\vartheta$. Totéž opakujeme pro zbylé proměnné $\mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \ldots, \mathtt{x}_n$. Získáme $IV \models \vartheta$, a protože V bylo libovolné, platí $I \models \vartheta$. (b) ϑ není splnitelná v I právě tehdy, když $I \models \neg\vartheta$. Z bodu (a) této věty pak plyne, že ϑ není splnitelná v I právě tehdy, když $I \models (\neg\vartheta)^{(\forall)}$. ϑ tedy je splnitelná v I právě tehdy, když neplatí $I \models (\neg\vartheta)^{(\forall)}$. To podle věty 14.7.5 nastává právě tehdy, když $I \models \neg(\neg\vartheta)^{(\forall)}$, protože $(\neg\vartheta)^{(\forall)}$ je sentence. Nyní stačí pro každou valuaci použít n-krát větu 14.6.1 (b) a uvědomit si, že v dané interpretaci a valuaci můžeme vždy škrtnout zdvojenou negaci, aniž by se nám tím změnila pravdivostní hodnota formule, v níž tak učiníme. QED

Následující větu lze chápat jako zobecnění věty 14.7.6, neboť z definice je dáno, že pokud je ϑ sentencí, platí $\vartheta = \vartheta^{(\forall)} = \vartheta^{(\exists)}$.

14.7.9 Věta (O uzávěru 2): *Nechť I je interpretace jazyka formule ϑ. Pak platí:*

(a) ϑ má model právě tehdy, když $\vartheta^{(\forall)}$ má model,

(b) ϑ je splnitelná právě tehdy, když $\vartheta^{(\exists)}$ má model.

Důkaz: Bod (a) je důsledkem 14.7.8 (a) a bod (b) je důsledkem 14.7.8 (b). QED

Vezmeme-li formuli $\mathtt{P(v)} \wedge \neg\mathtt{P(w)}$, o níž jsme dříve ukázali, že je splnitelná, ale nemá model, lze totéž nahlédnout skrze postřeh, že

$$(\exists\mathtt{v})(\exists\mathtt{w})(\mathtt{P(v)} \wedge \neg\mathtt{P(w)})$$

má model, ale

$$(\forall\mathtt{v})(\forall\mathtt{w})(\mathtt{P(v)} \wedge \neg\mathtt{P(w)})$$

nikoli. Výhoda tohoto postupu spočívá v tom, že zde pracujeme s formulemi, které perspektivně zastupují výroky, nikoli jen jejich fragmenty, a v tomto smyslu lépe vystihují příslušné sémantické vztahy. Proto je pro nás také, v souladu s původním pojmem interpretace, podstatnější pojem modelu, neboť nám umožňuje volný přechod mezi otevřenou a uzavřenou formulí, resp. otevřenou formulí a její generalizací, které ve vztahu k němu znamenají totéž.

14.8 Logická pravda

Motivace pro zavedení pojmu logické pravdivosti byla dostatečně objasněna v rámci KVL. Významná změna, která nás nyní zasáhla, se týká její spojitosti s obecností. Viděli jsme, že prostá substituovatelnost mimologických výrazů, např. výrazu „Willy“ ve větě

je-li Willy savec, pak není Willy ryba,

nestačí, protože vede k pouhé kontingentní obecnosti

$(\forall x)(x$ je savec $\rightarrow \neg\ x$ je ryba).

Na té by nic neměnila ani kvantifikace výrazů pro predikáty, kterou stávající logický systém neumožňuje, a probereme ji až později, v kapitole 19. Taková kvantifikace by vedla k větě typu

$$(\forall X)(\forall Y)(\forall x)(X(x) \rightarrow \neg Y(x)),$$

která nemá o nic více logický charakter než předchozí případ. Situaci, v níž je nějaká věta pouze kontingentně pravdivá pro všechny předměty daného diskurzu, zachycuje přitom např. případ pravdivosti formule $\mathtt{P(x)}$ v dané interpretaci pro každou valuaci, tj.:

(1) pro každé V platí $IV \vDash \mathtt{P(x)}$.

Interpretace zde popisuje příslušný možný svět, v němž obecnost věty tvaru $\mathtt{P(x)}$ nastává. Víme, že to je z definice ekvivalentní situaci:

(2) $I \vDash \mathtt{P(x)}$.

A tato situace je zase ekvivalentní situaci:

(3) $I \vDash (\forall \mathtt{x})\mathtt{P(x)}$.

Jako logicky pravdivou přitom nazveme formuli, která neplatí pouze pro všechny předměty (valuace) daného univerza diskurzu a pro interpretaci, jež je na něm založena, ale pro všechny předměty všech možných univerz diskurzů všech možných interpretací, tedy ve všech možných světech. Nastává tedy toto:

(4) pro každé I platí $I \vDash \mathtt{P(x)}$.

Stejně jako v případě modelu ve vztahu k valuaci se okolnost, že formule platí v každé interpretaci, chápe tak, že na této interpretaci nezáleží, a nemusí se tedy zmiňovat. Proto se opět zavádí zápis:

(5) $\vDash \mathtt{P(x)} \vee \neg\mathtt{P(x)}$.

Původ logické pravdivosti lze také spatřit v obecnosti, která je ale vyjádřena na metajazykové úrovni vlevo od formule, viz případ (4), a ve formuli samé se neobjevuje – nanejvýš se v ní, Wittgensteinovými slovy, pouze ukazuje. Přesněji řečeno, formule explicitně zachycuje to, co dělá nějakou větu logicky pravdivou, totiž její formu. Ta se liší z hlediska KVL a z hlediska KPL. Věta „každý pes je savec“ není logicky pravdivá (z hlediska KPL), tj. není pravdivá čistě na základě své formy, neboť existuje jiná věta stejné formy (např. „každé prvočíslo je sudé“), která je nepravdivá. Oproti tomu věta „pokud někdo všechny miluje, pak je každý někým milován“ je logicky pravdivá z hlediska KPL, tj. pravdivá čistě na základě své formy, která v tomto případě vypadá takto:

(*) $(\exists \mathtt{u})(\forall \mathtt{v})\mathtt{M}(\mathtt{u},\mathtt{v}) \to (\forall \mathtt{v})(\exists \mathtt{u})\mathtt{M}(\mathtt{u},\mathtt{v})$.

Co do formulace samé je oficiální definice logické pravdivosti pro KPL stejná jako v KVL. Nepoužívá se pro ni ovšem pojem tautologičnosti. Reálně je zde přitom situace mnohem komplikovanější. Jednak s ohledem na existenci valuace, jednak proto, že již obecně nepostačí mechanicky projít konečně mnoho interpretací a ověřit tak pro danou formuli, zda je, či není logicky pravdivá.

14.8.1 Definice (Logická pravdivost): *Formule ϑ je logicky pravdivá (značíme $\models \vartheta$), když je pravdivá ve všech interpretacích (svého jazyka), tj. když pro každé I platí $I \models \vartheta$.*

Již jsme naznačili, že v každé interpretaci a valuaci musí být splněna každá formule, která má tvar výrokové tautologie. Právě v tomto smyslu predikátová logika obsahuje výrokovou logiku. To znamená, že ať už jsou ϑ, χ jakékoli formule predikátové logiky, formule jako $\vartheta \vee \neg\vartheta$, $\neg\neg\vartheta \to \vartheta$, $(\vartheta \vee (\chi \wedge \vartheta)) \leftrightarrow \vartheta$ atd. musí být logicky pravdivé. Existují ovšem další formule, které nemají tvar výrokové tautologie, a přesto jsou také splněny v každé interpretaci. Příkladem může být formule:

$$\neg\mathtt{P}(\mathtt{c}) \vee (\exists \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}).$$

Zdůvodníme to tak, že vezmeme libovolnou interpretaci I (pro jazyk $\{\mathtt{P},\mathtt{c}\}$) a valuaci V a ukážeme, že v ní musí být tato formule pravdivá. Skutečně, buď platí $IV \models \neg\mathtt{P}(\mathtt{c})$, a v tom případě je v IV pravdivá celá disjunkce, nebo $IV \not\models \neg\mathtt{P}(\mathtt{c})$, a pak $IV \models \mathtt{P}(\mathtt{c})$. V tomto druhém případě existuje $a \in U_I$, konkrétně $a = I(\mathtt{c})$, tak, že $IV^{\mathtt{x}}_{a} \models \mathtt{P}(\mathtt{x})$, a tedy $IV \models (\exists \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})$. Celá disjunkce je každopádně pravdivá.

Další případy logických formulí můžeme získat různými způsoby. Ve větách 14.6.1, 14.6.2 a 14.6.3 jsme např. ukázali určité vztahy, které existují mezi kvantifikátory. Z těchto vět s použitím Tarského definice pravdy vyplývá, že platí:

(α) $\models \neg(\exists \mathtt{y})\vartheta \leftrightarrow (\forall \mathtt{y})\neg\vartheta$,

(β) $\models \neg(\forall \mathtt{y})\vartheta \leftrightarrow (\exists \mathtt{y})\neg\vartheta$,

(γ) $\models (\exists \mathtt{y})\vartheta \leftrightarrow \neg(\forall \mathtt{y})\neg\vartheta$,

(δ) $\models (\forall \mathtt{y})\vartheta \leftrightarrow \neg(\exists \mathtt{y})\neg\vartheta$,

(ϵ) $\models (\forall \mathtt{v})(\forall \mathtt{u})\vartheta \leftrightarrow (\forall \mathtt{u})(\forall \mathtt{v})\vartheta$,

(ζ) $\models (\exists \mathtt{v})(\exists \mathtt{u})\vartheta \leftrightarrow (\exists \mathtt{u})(\exists \mathtt{v})\vartheta$,

(η) $\models (\exists \mathtt{v})(\forall \mathtt{u})\vartheta \to (\forall \mathtt{u})(\exists \mathtt{v})\vartheta$.

Logická pravdivost formule (*) tedy vyplývá z bodu (c) věty 14.6.3. Uveďme ještě několik dalších příkladů logicky pravdivých formulí:

(θ) $\models (\forall \mathtt{u})(\mathtt{P}(\mathtt{u}) \rightarrow \mathtt{Q}(\mathtt{u})) \rightarrow ((\forall \mathtt{u})\mathtt{P}(\mathtt{u}) \rightarrow (\forall \mathtt{u})\mathtt{Q}(\mathtt{u}))$,

(ι) $\models (\forall \mathtt{u})(\mathtt{P}(\mathtt{u}) \rightarrow \mathtt{Q}(\mathtt{u})) \rightarrow ((\exists \mathtt{u})\mathtt{P}(\mathtt{u}) \rightarrow (\exists \mathtt{u})\mathtt{Q}(\mathtt{u}))$,

(κ) $\models ((\forall \mathtt{u})\mathtt{P}(\mathtt{u}) \vee (\forall \mathtt{u})\mathtt{Q}(\mathtt{u})) \rightarrow (\forall \mathtt{u})(\mathtt{P}(\mathtt{u}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{u}))$,

(λ) $\models (\exists \mathtt{u})(\mathtt{P}(\mathtt{u}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{u})) \rightarrow ((\exists \mathtt{u})\mathtt{P}(\mathtt{u}) \wedge (\exists \mathtt{u})\mathtt{Q}(\mathtt{u}))$.

Zdůvodněme alespoň platnost první z nich, tj. (θ). Přepokládejme, že je dána interpretace I a valuace V v této interpretaci. Chceme ukázat, že pak platí:

jestliže $IV \models (\forall \mathtt{u})(\mathtt{P}(\mathtt{u}) \rightarrow \mathtt{Q}(\mathtt{u}))$, pak $IV \models (\forall \mathtt{u})\mathtt{P}(\mathtt{u}) \rightarrow (\forall \mathtt{u})\mathtt{Q}(\mathtt{u})$.

Předpokládejme tedy, že platí $IV \models (\forall \mathtt{u})(\mathtt{P}(\mathtt{u}) \rightarrow \mathtt{Q}(\mathtt{u}))$. To znamená, že realizace predikátu $\mathtt{P}$ je podmnožinou realizace predikátu $\mathtt{Q}$. Předpokládáme-li navíc $IV \models (\forall \mathtt{u})\mathtt{P}(\mathtt{u})$, znamená to, že realizací predikátu $\mathtt{P}$ je celé univerzum. Pak ale také realizací predikátu $\mathtt{Q}$ musí být celé univerzum, což znamená, že $IV \models (\forall \mathtt{u})\mathtt{Q}(\mathtt{u})$. Tím jsme zdůvodnili, co jsme potřebovali. Logická platnost ostatních formulí se zdůvodní obdobně. Bez důkazu poznamenejme, že v uvedených případech bychom mohli výskyty elementárních formulí $\mathtt{P}(\mathtt{u})$ a $\mathtt{Q}(\mathtt{u})$ nahradit libovolnými formulemi ϑ, χ, a logická pravdivost by zůstala zachována.

Uvedený postup obhájení logické pravdivosti je – ve srovnání s tabulkovou metodou – dosti nenázorný, a proto hrozí, že se ve zdůvodnění zmýlíme. S ohledem na nekonečnost případných interpretací ale není možné postupovat obdobně, tj. prostým výčtem a jeho kontrolou. Zde se nabízí využít podstatně metodu protipříkladu, tj. nesnažit se logickou pravdivost formule přímo potvrdit, ale naopak vyvrátit tím, že vyjdeme z předpokladu její nepravdivosti a pokusíme se odvodit spor. V uvedeném případě formule (θ) předpokládejme, že v nějaké interpretaci a valuaci platí:

(1) $IV \models (\forall \mathtt{u})(\mathtt{P}(\mathtt{u}) \rightarrow \mathtt{Q}(\mathtt{u}))$,

(2) $IV \not\models (\forall \mathtt{u})\mathtt{P}(\mathtt{u}) \rightarrow (\forall \mathtt{u})\mathtt{Q}(\mathtt{u})$.

Nyní se z tohoto předpokladu pokusme vytěžit všechny dostupné informace. Z (2) plyne, že platí následující:

(3) $IV \models (\forall \mathtt{u})\mathtt{P}(\mathtt{u})$,

(4) $IV \not\models (\forall \mathtt{u})\mathtt{Q}(\mathtt{u})$.

Z (4) plyne, že pro nějaké a z univerza nastává:

(5) $IV_a^{\mathtt{u}} \not\models \mathtt{Q(u)}$.

Zároveň by ale podle (3) a (1) mělo pro toto a platit:

(6) $IV_a^{\mathtt{u}} \models \mathtt{P(u)}$,

(7) $IV_a^{\mathtt{u}} \models \mathtt{P(u)} \to \mathtt{Q(u)}$.

Z toho plyne:

(8) $IV_a^{\mathtt{u}} \models \mathtt{Q(u)}$.

Z (5) a (8) dostáváme spor. V KVL byla tato metoda užívána jako doplňková proto, že vedla často rychleji k cíli než exponenciálně narůstající konstrukce tabulky. V KPL je situace jiná, protože zde tabulková metoda nedává smysl, tj. metoda protipříkladem se stane hlavním prostředkem kontroly. Její rozpracování v rámci techniky sémantických stromů nám později pomůže v mnoha případech rozhodnout, zda je daná formule logicky pravdivá, či nikoli. Na rozdíl od KVL nepůjde ovšem o obecně fungující algoritmus rozhodnutí. V některých případech metoda sémantických stromů povede k nekonečnému procesu kontroly, a nevyústí tedy v žádné řešení. Tam, kde se však metoda dopočítá, nám dá spolehlivou informaci, tj. je korektní. Navíc ověříme, že nám dá odpověď ANO vždy, když to bude možné, tj. je úplná.

Závěrem zmíníme obecný případ logické pravdivosti, tj. případ nevztahující se na jednotlivou formuli, ale na každou formuli určitého tvaru. Tento případ využijeme později při axiomatizaci predikátové logiky.

14.8.2 Věta: *Je-li ϑ formule a $\mathtt{t}$ term, který je substituovatelný za $\mathtt{x}$ v ϑ, pak platí, že* $\models (\forall \mathtt{x})\vartheta \to \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}}$.

Důkaz: Předpokládejme, že $IV \models (\forall \mathtt{x})\vartheta$, kde I, V jsou libovolné. Chceme dokázat, že $IV \models \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}}$. Náš předpoklad znamená, že pro každý prvek a univerza U_I platí $IV^{\mathtt{x}}_a \models \vartheta$. Tedy i pro prvek $o = IV(\mathtt{t})$ musí platit $IV^{\mathtt{x}}_o \models \vartheta$. To je však podle věty 14.5.2 ekvivalentní tomu, že $IV \models \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{t}}$. Důkaz je tedy hotov. QED

14.9 Vyplývání

Pojem vyplývání můžeme nyní definovat stejně jako v KVL. Opět je tato podobnost pouze povrchová, protože v definici samé musíme skrytě pracovat s termínem valuace. Navíc se nám zde, podobně jako v případě splnitelnosti a existence modelu, pojem vyplývání rozdvojí.

`14.9.1 Definice (Globální a lokální vyplývání):` *Formule ϑ vyplývá globálně z množiny formulí T (značíme $T \models_g \vartheta$), když každý model množiny T je také modelem formule ϑ. Řekneme, že ϑ lokálně vyplývá z T (značíme $T \models_l \vartheta$), když platí, že kdykoli je pravdivé v nějaké interpretaci a valuaci vše z T, pak je zde pravdivé také ϑ.*

Povšimněme si nejprve, jaký je rozdíl mezi těmito pojmy vyplývání. Podmínky, které je definují, podrobněji rozepíšeme a zapíšeme pod sebe. Opět použijeme k zápisu objektovou kvantifikaci ve významu kvantifikace metajazykové a totéž bude platit i pro ostatní logické spojky. Navíc zavedeme následující zkratku.

`14.9.2 Konvence (Splnění formulí):` *Píšeme-li $IV \models T$, kde T je množina formulí, znamená to, že $IV \models \chi$ pro každou formuli χ z T.*

Nyní již slíbený rozpis:

(g) $(\forall I)((\forall V)IV \models T \to (\forall V)IV \models \vartheta)$,

(l) $(\forall I)(\forall V)(IV \models T \to IV \models \vartheta)$.

Z tohoto zápisu je hned zjevné, že se oba pojmy vyplývání liší ve způsobu distribuce příslušných valuací. V prvním případě je valuace distribuována v závislosti na předchozím globálním stanovení interpretace, v druhém případě je distribuce lokální, vždy ve spojení s příslušnou interpretací. Ze vztahu příslušných kvantifikátorů plyne, že podmínka lokálního vyplývání je silnější než podmínka globálního vyplývání. Tím míníme následující tvrzení.

`14.9.3 Věta:` *Kdykoli platí $T \models_l \vartheta$, pak již musí platit také $T \models_g \vartheta$.*

`Důkaz:` Zdůvodnění by bylo podobné jako zdůvodnění logické pravdivosti formule

$$(\forall \mathtt{u})(\mathtt{P}(\mathtt{u}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{u})) \to ((\forall \mathtt{u})\mathtt{P}(\mathtt{u}) \to (\forall \mathtt{u})\mathtt{Q}(\mathtt{u}))$$

z předchozího oddílu. Jinak řečeno, kdykoli pro každou valuaci V v nějakém I platí $IV \models T$, pak lokální vyplývání zajistí, že pro každou valuaci V v tomtéž I platí též $IV \models \vartheta$. `QED`

Obrácený vztah však neplatí. Ukážeme protipříklad, který je až překvapivě jednoduchý a poslouží nám i v dalším textu.

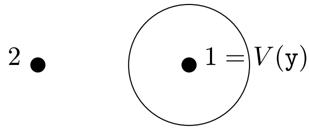
`Příklad 14.9.4:` Z vlastností uzávěru, jak ho artikulovala věta 14.7.8, nám plyne vztah:

$$\mathtt{P}(\mathtt{y}) \models_g (\forall \mathtt{y})\mathtt{P}(\mathtt{y}).$$

Dokážeme ještě, že:

$\mathtt{P(y)} \nvDash_l (\forall \mathtt{y})\mathtt{P(y)}$.

Vezměme třeba interpretaci K, jejíž univerzum je dvouprvková množina obsahující čísla 1 a 2. Viz obrázek 14.3. Realizace predikátu P je jed-



Obrázek 14.3: Model K

noprvková množina obsahující číslo 1. Valuace V přiřazuje proměnné $\mathtt{y}$ číslo 1. Pak $KV \vDash \mathtt{P(y)}$, ale $KV \nvDash (\forall \mathtt{y})\mathtt{P(y)}$.

Následující věta vyjadřuje obecnější a poněkud komplikovanější verzi předchozího příkladu. V této podobě bude hrát zvláštní roli při axiomatizaci predikátové logiky.

14.9.5 Věta: *Předpokládejme, že se proměnná* $\mathtt{y}$ *nevyskytuje volně ve formuli* ϑ. *Pak platí* $\vartheta \to \chi \vDash_g \vartheta \to (\forall \mathtt{y})\chi$.

Důkaz: Pro spor předpokládejme, že pro nějakou interpretaci I platí, že $I \vDash \vartheta \to \chi$ a $I \nvDash \vartheta \to (\forall \mathtt{y})\chi$. To znamená, že v interpretaci I existuje valuace V taková, že $IV \vDash \vartheta$ a $IV \nvDash (\forall \mathtt{y})\chi$. Podle Tarského definice pravdy tedy existuje v univerzu interpretace I nějaký objekt a takový, že $IV^{\mathtt{y}}_a \nvDash \chi$. Jelikož předpokládáme, že $\mathtt{y}$ se nevyskytuje v ϑ volně, shodují se valuace V a $V^{\mathtt{y}}_a$ na všech volných proměnných formule ϑ. Můžeme tedy aplikovat větu 14.5.1 a získáváme, že platí $IV^{\mathtt{y}}_a \vDash \vartheta$. Pak ale $IV^{\mathtt{y}}_a \nvDash \vartheta \to \chi$, což je ve sporu s předpokladem, že $I \vDash \vartheta \to \chi$. **QED**

Všimněme si nyní následujícího. Víme, že platí

(1) $\mathtt{P(y)} \vDash_g (\forall \mathtt{y})\mathtt{P(y)}$,

zároveň ale není pravdou, že by

(2) $\vDash \mathtt{P(y)} \to (\forall \mathtt{y})\mathtt{P(y)}$,

přičemž protipříklad je naprosto stejný jako ten zkonstruovaný v rámci příkladu 14.9.4, tj. interpretace K, vůči platnosti vztahu

(3) $\mathtt{P(y)} \vDash_l (\forall \mathtt{y})\mathtt{P(y)}$.

Z toho lze tušit, že věta o dedukci zjevně neplatí ve vztahu ke globálnímu vyplývání, mohla by ale případně platit ve vztahu k vyplývání lokálnímu. A tak tomu skutečně je, což se dokáže zcela analogicky důkazu v `KVL`. Zápisy

$\vDash \vartheta \to \chi$ a $\vartheta \vDash_l \chi$

jsou zápisy téhož sémantického faktu. Ve vztahu ke globálnímu vyplývání platí ovšem omezená varianta věty, která tvrdí, že přes symbol vyplývání lze přesunout libovolnou sentenci. Lze tušit, že ve vztahu k sentencím oba pojmy vyplývání splynou. Postupujme však krok za krokem.

`14.9.6 Věta (Sémantická věta o dedukci):` *T je množina formulí, χ je sentence a ϑ je formule. Pak $T, \chi \vDash_g \vartheta$ právě tehdy, když platí $T \vDash_g \chi \to \vartheta$.*

`Důkaz:` Předpokládejme nejprve ($\Rightarrow$), že $T, \chi \vDash_g \vartheta$. Nechť I je modelem množiny formulí T. Chceme dokázat, že I je také modelem formule $\chi \to \vartheta$. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není. To znamená, že existuje valuace V v I taková, že $IV \nvDash \chi \to \vartheta$. To znamená, že $IV \vDash \chi$ a $IV \nvDash \vartheta$. Jelikož je χ sentence, dostáváme z věty 14.7.4, že $I \vDash \chi$ a I je modelem množiny T, χ. Předpoklad, že ϑ globálně vyplývá z T, χ, nás vede k závěru, že $I \vDash \vartheta$, čímž se dostáváme do sporu. Předpokládejme naopak ($\Leftarrow$), že $T \vDash_g \chi \to \vartheta$. Pak jistě pro každou interpretaci platí, že pokud je modelem množiny T, χ, pak je též modelem formule ϑ, protože je modelem $\chi \to \vartheta$ i χ. `QED`

Omezíme-li se na takové množiny předpokladů, které obsahují pouze sentence, globální vyplývání se začne krýt s lokálním.

`14.9.7 Věta:` *Nechť T je množina sentencí a ϑ je formule. Pak $T \vDash_g \vartheta$ právě tehdy, když $T \vDash_l \vartheta$.*

`Důkaz:` Již jsme objasnili, že případ lokálního vyplývání je vždy také případem globálního vyplývání. Stačí tedy ověřit, že pro sentence je také každý případ globálního vyplývání případem lokálního vyplývání. Nechť $T \vDash_g \vartheta$. Předpokládejme, že $IV \vDash T$. Protože v T jsou jen sentence, platí podle věty 14.7.4, že $I \vDash \chi$ pro každou χ z T. Protože ϑ globálně vyplývá z T, platí také $I \vDash \vartheta$, a tedy i $IV \vDash \vartheta$. Takže celkem $T \vDash_l \vartheta$. `QED`

Na základě právě uvedené věty můžeme v těch případech, kde se bude jednat pouze o sentence, psát jednoduše:

$$T \vDash \vartheta.$$

To znamená, že nemusíme symbol $\vDash$ opatřovat indexem.

`Příklad 14.9.8:` Ověřme, zda platí následující dvě tvrzení:

(1) $(\forall \mathtt{x})(\mathtt{R}(\mathtt{c},\mathtt{x}) \to (\mathtt{P}(\mathtt{x}) \vee (\exists \mathtt{y})(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \wedge \mathtt{P}(\mathtt{y})))) \vDash$
$(\forall \mathtt{x})(\mathtt{R}(\mathtt{c},\mathtt{x}) \wedge \mathtt{P}(\mathtt{x}) \to (\exists \mathtt{y})(\mathtt{R}(\mathtt{c},\mathtt{y}) \wedge \mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{x})))$,

(2) $(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \neg \mathtt{O}(\mathtt{x})), \mathtt{O}(\mathtt{c}) \vDash (\exists \mathtt{x})\neg \mathtt{P}(\mathtt{x})$.

Tvrzení (1) není pravdivé. Abychom to doložili, je třeba najít protipříklad, tj. interpretaci, kde platí předpoklad, ale neplatí závěr. Vhodným protipříkladem je např. interpretace M z příkladu 14.4.2. Ověříme, že je pravdivé tvrzení (2). Předchozí věta 14.9.7 nám říká, že nesejde na tom, zda tento vztah budeme ověřovat pro lokální nebo globální vyplývání. My ho ověříme pro lokální vyplývání. Nechť tedy pro nějakou interpretaci I a valuaci V platí:

(a) $IV \vDash (\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \neg \mathtt{O}(\mathtt{x}))$,

(b) $IV \vDash \mathtt{O}(\mathtt{c})$.

Tvrzení (a) nám říká, že pro každý objekt a univerza U_I platí $IV_a^{\mathtt{x}} \vDash \mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \neg \mathtt{O}(\mathtt{x})$. Protože $o = I(\mathtt{c})$ je objekt univerza, pak platí také $IV_o^{\mathtt{x}} \vDash \mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \neg \mathtt{O}(\mathtt{x})$. Z toho plyne, že o není prvkem $I(\mathtt{P})$ nebo o není prvkem $I(\mathtt{O})$. Ale z předpokladu (b) víme, že o je prvkem $I(\mathtt{O})$. Musí tedy platit, že o není prvkem $I(\mathtt{P})$. To znamená, že $IV_o^{\mathtt{x}} \vDash \neg \mathtt{P}(\mathtt{x})$. Lze tedy říci, že existuje nějaký prvek a univerza U_I takový, že $IV_a^{\mathtt{x}} \vDash \neg \mathtt{P}(\mathtt{x})$, což znamená, že $IV \vDash (\exists \mathtt{x})\neg \mathtt{P}(\mathtt{x})$. To jsme chtěli dokázat.

Další případy logického vyplývání pro predikátovou logiku uvidíme poté, co zavedeme metodu sémantických stromů, která nám pomůže určovat platnost či neplatnost úsudků. Tato metoda bude definována jen pro sentence. Následující věty nám říkají, že to není příliš velké omezení, neboť problém vyplývání (ať už globálního či lokálního) mezi formulemi vždy můžeme převést na problém vyplývání mezi sentencemi. Pro globální vyplývání to lze provést jednoduše tak, že řešíme otázku pro generální uzávěry přítomných formulí. Za účelem přehledné formulace věty si zavedeme následující značení.

`14.9.9 Konvence (Uzávěr formulí):` *Předpokládejme, že T je množina formulí. Pak $T^{(\forall)}$ je množina generálních uzávěrů těchto formulí, tedy:* $T^{(\forall)} = \left\{\chi^{(\forall)} \mid \chi \in T\right\}$.

`14.9.10 Věta:` $T \vDash_g \vartheta$ *právě tehdy, když* $T^{(\forall)} \vDash \vartheta^{(\forall)}$.

`Důkaz:` Věta je důsledkem toho, že formule je pravdivá v dané interpretaci právě tehdy, když je v ní pravdivý její generální uzávěr. Viz věta 14.7.8 (a). `QED`

Nabízí se otázka, zda analogická věta neplatí také pro lokální vyplývání s tím, že místo generálních uzávěrů bychom aplikovali existenční uzávěry. Ukazuje se, že tomu tak není. Např. platí:

$$\mathtt{P(y)} \vee \mathtt{Q(y)}, \neg \mathtt{P(y)} \vDash_l \mathtt{Q(y)}.$$

Avšak neplatí

$$(\exists \mathtt{y})(\mathtt{P(y)} \vee \mathtt{Q(y)}), (\exists \mathtt{y})\neg \mathtt{P(y)} \vDash_l (\exists \mathtt{y})\mathtt{Q(y)},$$

neboť protipříkladem je každá interpretace, ve které realizujeme predikát $\mathtt{Q}$ jako prázdnou množinu a predikát $\mathtt{P}$ jako množinu neprázdnou, která však není shodná s celým univerzem, tj. jejíž doplněk je též neprázdný.

Přesto existuje určitý způsob, jak také vztahy lokálního vyplývání mezi formulemi redukovat na vztahy vyplývání mezi sentencemi. Stačí, nahradíme-li všechny volné proměnné daného úsudku jmény, která se jinak v úsudku nevyskytují. Tuto operaci budeme pro tuto chvíli značit hvězdičkou. Zdůvodnění však vyžaduje vykonat určitou technickou práci. Nechť $\mathtt{x_1}, \ldots, \mathtt{x_n}$ tvoří množinu volných proměnných formule ϑ, která je v jazyce J. Předpokládejme, že O je nějaká nekonečná množina jmenných konstant, které se nenacházejí v množině J. Předpokládejme také, že je dána nějaká prostá funkce přiřazující proměnným konstanty z O. Každé proměnné je tedy přiřazena konstanta a různým proměnným jsou přiřazeny různé konstanty. Každé proměnné $\mathtt{x_i}$, která je volná v ϑ, je přiřazena konstanta $\mathtt{c_i}$ z množiny O. Pak jako ϑ^* budeme nyní označovat sentenci

$$\vartheta^{\mathtt{x_1}}_{\mathtt{c_1}} \ldots {}^{\mathtt{x_n}}_{\mathtt{c_n}},$$

tj. sentenci, kterou získáme z formule ϑ tak, že v ní nahradíme všechny výskyty všech volných proměnných těmi konstantami, které jsou proměnným přiřazeny. Nechť je dána interpretace I jazyka J a valuace V. Jako I_V budeme označovat interpretaci jazyka $J \cup O$ takovou, která se shoduje ve všem s interpretací I, jen navíc ještě realizuje konstanty z množiny O. Tato realizace se řídí valuací V, a to v tom smyslu, že $I_V(\mathtt{c})$ je vždy ten objekt, který valuace V přiřazuje proměnné, které je přiřazena konstanta $\mathtt{c}$. Tedy konkrétně platí:

$$I_V(\mathtt{c_1}) = V(\mathtt{x_1}),\ \ldots,\ I_V(\mathtt{c_n}) = V(\mathtt{x_n}).$$

Zdůrazněme, že zatímco IV označuje interpretaci a valuaci, I_V označuje pouze interpretaci (která je však definována pomocí valuace V).

`14.9.11 Věta:` *$IV \vDash \vartheta$ právě tehdy, když $I_V \vDash \vartheta^*$.*

`Důkaz:` Lze postupně zdůvodnit ekvivalence mezi následujícími tvrzeními:

(1) $IV \models \vartheta$,

(2) $I_V V \models \vartheta$,

(3) $I_V V^{\mathtt{x_1}}_{V(\mathtt{x_1})} \cdots {}^{\mathtt{x_n}}_{V(\mathtt{x_n})} \models \vartheta$,

(4) $I_V V^{\mathtt{x_1}}_{I_V(\mathtt{c_1})} \cdots {}^{\mathtt{x_n}}_{I_V(\mathtt{c_n})} \models \vartheta$,

(5) $I_V V \models \vartheta^*$,

(6) $I_V \models \vartheta^*$.

Ekvivalence mezi (1) a (2) je dána tím, že z hlediska symbolů nacházejících se v ϑ jsou I a I_V nerozlišitelné. Tvrzení (3) vyjadřuje totéž jako (2), neboť $V^{\mathtt{x_1}}_{V(\mathtt{x_1})} \cdots {}^{\mathtt{x_n}}_{V(\mathtt{x_n})} = V$. Dále jsme využili způsob definování realizace nových konstant. Ekvivalence mezi (4) a (5) je přímou aplikací věty 14.5.2. Poslední krok je oprávněn faktem, že ϑ^* je sentence. `QED`

Nechť je vše dáno jako doposud s tím, že J je jazyk nějaké množiny formulí T plus formule ϑ, takže žádná konstanta z O se nevyskytuje nikde v T ani v ϑ. Pak T^* bude množina sentencí, které získáme z formulí množiny T stejným způsobem, jakým jsme ϑ^* získali z ϑ. Tedy:

$$T^* = \{\chi^* \mid \chi \in T\}.$$

Nyní již následuje slibovaná redukce lokálního vyplývání na vyplývání mezi sentencemi.

`14.9.12 Věta:` *$T \models_l \vartheta$ právě tehdy, když $T^* \models \vartheta^*$.*

`Důkaz:` Předpokládejme ($\Rightarrow$), že $T \models_l \vartheta$. Dokazujeme, že $T^* \models \vartheta^*$. Nechť je tedy dán model H množiny sentencí T^*. Můžeme předpokládat, že je to nějaká interpretace jazyka $J \cup O$. Nyní je potřeba si uvědomit, že k této interpretaci existuje interpretace I jazyka J a valuace V v I taková, že $H = I_V$. Podle předchozí věty v IV platí vše z T, a na základě našeho předpokladu tedy $IV \models \vartheta$, což znamená – opět dle předchozí věty –, že $I_V \models \vartheta^*$. Protože $H = I_V$, dokázali jsme, že $T^* \models \vartheta^*$. Nyní předpokládejme ($\Leftarrow$), že $T^* \models \vartheta^*$. Nechť je dána interpretace I a valuace V taková, že vše z T platí v IV. Pak také vše z T^* platí v I_V a na základě předpokladu můžeme odvodit $I_V \models \vartheta^*$. To nás vede k tomu, že $IV \models \vartheta$. Dokázali jsme tedy $T \models_l \vartheta$. `QED`

Rozlišení mezi dvěma typy vyplývání vede k rozlišení mezi dvěma typy logické ekvivalence, jimž se budeme věnovat v dalším oddílu.

14.10 Logická ekvivalence a normální formy

Lokální logická ekvivalence je definována pomocí lokálního vyplývání a globální logická ekvivalence pomocí globálního vyplývání. Na obou těchto úrovních je definice analogická tomu, jak byl tento pojem zaveden ve výrokové logice.

`14.10.1 Definice (Logická ekvivalence):` *Řekneme, že formule ϑ je lokálně (resp. globálně) logicky ekvivalentní formuli χ, když χ lokálně (resp. globálně) vyplývá z ϑ a zároveň ϑ lokálně (resp. globálně) vyplývá z χ. Symbolicky píšeme $\vartheta \mathrel{=\!\!|\!\!\models_l} \chi$ (resp. $\vartheta \mathrel{=\!\!|\!\!\models_g} \chi$).*

Lokální logická ekvivalence představuje v jistém smyslu přirozenější pojem, protože, jak brzy zdůvodníme, pro ni platí podstatná vlastnost zaměnitelnosti ekvivalentních formulí. Tato vlastnost neplatí pro globální ekvivalenci. Jako příklad zvažme formuli:

(1) $(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x}))$.

Formule $\mathtt{P}(\mathtt{x})$ je globálně logicky ekvivalentní formuli $(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})$. Avšak formule (1) není globálně logicky ekvivalentní formuli:

(2) $(\forall \mathtt{x})((\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x}))$.

Dokladem je každá interpretace, v níž realizace predikátu `P` nepokrývá celé univerzum – takže je pravdivá formule (2) – a zároveň není podmnožinou realizace predikátu `Q` – tudíž není pravdivá formule (1). Ovšem pro lokální vyplývání zaměnitelnost platí, jak nyní dokážeme. Učiníme tak prostřednictvím pomocného tvrzení, které koresponduje s větou 8.1.1 z `KVL`.

`14.10.2 Věta (O nahrazení 1):` *Nechť I je interpretace, χ je libovolná podformule formule ϑ a $I \models \chi \leftrightarrow \xi$. Nechť ϑ^* je formule, která vznikla nahrazením kteréhokoli výskytu podformule χ ve formuli ϑ formulí ξ. Pak platí, že $I \models \vartheta \leftrightarrow \vartheta^*$.*

`Důkaz:` Důkaz provedeme postupem, který je nestandardní, i když připomíná indukci podle složitosti formule. Ukážeme v něm, jak se ekvivalence šíří z částí formulí na jejich celky přes všechny možné logické operátory, tj. tvrdíme, že platí-li předpoklad

$$I \models \phi \leftrightarrow \psi,$$

pak pro dané formule ϕ, ψ platí

$$I \models \neg\phi \leftrightarrow \neg\psi,$$

$I \vDash (\forall \mathtt{y})\phi \leftrightarrow (\forall \mathtt{y})\psi$ pro libovolnou $\mathtt{y}$,

$I \vDash (\exists \mathtt{y})\phi \leftrightarrow (\exists \mathtt{y})\psi$ pro libovolnou $\mathtt{y}$,

$I \vDash (\phi \circ \chi) \leftrightarrow (\psi \circ \chi)$ pro libovolnou χ,

$I \vDash (\chi \circ \phi) \leftrightarrow (\chi \circ \psi)$ pro libovolnou χ.

Pro ilustraci projdeme krok pro obecný kvantifikátor. Lze postupovat tímto způsobem:

(1) Předpokládejme, že $I \vDash \phi \leftrightarrow \psi$.

(2) Tedy pro každé V (v I) platí $IV \vDash \phi \leftrightarrow \psi$.

(3) Tedy pro každé V platí $IV \vDash \phi$ tehdy a jen tehdy, když $IV \vDash \psi$.

(4) Tedy pro každé V a pro každé $a \in U_I$ platí $IV^{\mathtt{y}}_a \vDash \phi$ tehdy a jen tehdy, když $IV^{\mathtt{y}}_a \vDash \psi$.

(5) Tedy pro každé V platí, že pro každé $a \in U_I$ platí $IV^{\mathtt{y}}_a \vDash \phi$ tehdy a jen tehdy, když pro každé $a \in U_I$ platí $IV^{\mathtt{y}}_a \vDash \psi$.

(6) Tedy pro každé V platí $IV \vDash (\forall \mathtt{y})\phi$ tehdy a jen tehdy, když $IV \vDash (\forall \mathtt{y})\psi$.

(7) Tedy pro každé V platí $IV \vDash (\forall \mathtt{y})\phi \leftrightarrow (\forall \mathtt{y})\psi$.

(8) Tedy $I \vDash (\forall \mathtt{y})\phi \leftrightarrow (\forall \mathtt{y})\psi$.

Ostatní případy se dokážou obdobně. QED

Abychom ilustrovali, jak načrtnutý důkaz funguje, zvažme nějakou interpretaci I, pro niž platí $I \vDash \mathtt{P}(\mathtt{x}) \leftrightarrow (\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\forall \mathtt{y})\mathtt{Q}(\mathtt{y}))$. Věta 14.10.2 nám pak říká, že musí také platit např.:

(*) $I \vDash (\neg(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})) \leftrightarrow (\neg(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\forall \mathtt{y})\mathtt{Q}(\mathtt{y})) \wedge \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))$.

Důkaz skutečně vede k tomuto závěru, protože nám říká, že jsou-li v I ekvivalentní formule $\mathtt{P}(\mathtt{x})$ a $\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\forall \mathtt{y})\mathtt{Q}(\mathtt{y})$, tak musí být v I ekvivalentní také formule $(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})$ a $(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\forall \mathtt{y})\mathtt{Q}(\mathtt{y}))$. A jsou-li v I ekvivalentní tyto formule, jsou ekvivalentní také $\neg(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})$ a $\neg(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\forall \mathtt{y})\mathtt{Q}(\mathtt{y}))$, a platí tedy i (*). Nyní přistupme k důkazu kýžené věty.

`14.10.3` **`Věta (O nahrazení 2):`** *Nechť χ je libovolná podformule formule ϑ a $\chi \dashv\vDash_I \xi$. Předpokládejme dále, že ϑ^* je formule, která vznikla nahrazením nějakého výskytu podformule χ ve formuli ϑ formulí ξ. Pak platí, že $\vartheta \dashv\vDash_I \vartheta^*$.*

`Důkaz:` Z předpokladu $\chi \dashv\vDash_l \xi$ plyne v důsledku platnosti sémantické věty o dedukci pro lokální vyplývání $\vDash \chi \leftrightarrow \xi$. To znamená, že pro každé I platí $I \vDash \chi \leftrightarrow \xi$. Tedy na základě věty 14.10.2 platí pro každé I, že $I \vDash \vartheta \leftrightarrow \vartheta^*$. To znamená, že $\vDash \vartheta \leftrightarrow \vartheta^*$, a tedy že $\vartheta \dashv\vDash_l \vartheta^*$. QED

Platnost principu zaměnitelnosti pro lokální logickou ekvivalenci je důvodem, proč v rámci tohoto oddílu budeme symboly

$$\vDash \qquad \text{a} \qquad \dashv\vDash$$

myslet vždy lokální vyplývání a logickou ekvivalenci. Všechny dvojice formulí, které jsou logicky ekvivalentní z hlediska `KVL` (např. každá dvojice formulí tvaru ϑ a $\neg\neg\vartheta$), jsou samozřejmě logicky ekvivalentní i v `KPL`. Již jsme se také setkali s příklady formulí, které jsou logicky ekvivalentní specificky v `KPL`. Např. libovolné formule tvaru $\neg(\forall \mathtt{x})\vartheta$ a $(\exists \mathtt{x})\neg\vartheta$.

Pro vlastní výklad má pojem logické ekvivalence smysl pomocný, v rámci jiných pojmů, v nichž se vyskytuje. K takovým patří opět pojem normální formy. V `KVL` jsme ukázali, že lze každou formuli převést na její konjunktivní (resp. disjunktivní) normální formu, tj. formuli, která je té původní logicky ekvivalentní a která je v jistém standardizovaném tvaru. Lze tedy zásadním způsobem redukovat rozmanitost výrokových forem, aniž bychom přitom snížili naše vyjadřovací možnosti. Cokoli lze ve výrokové logice vyjádřit, lze vyjádřit v normální formě. Nyní provedeme podobnou standardizaci také v predikátové logice. Definujeme formule v prenexním normálním tvaru a ukážeme, že každá formule v predikátové logice je logicky ekvivalentní nějaké formuli tohoto typu.

Formule je v prenexním normálním tvaru, když se skládá ze dvou částí. První z nich je (možná prázdný) řetězec kvantifikátorů a druhá část je bezkvantifikátorové „tělo“ formule. Příkladem je tato formule:

$$(\forall \mathtt{v})(\forall \mathtt{w})(\exists \mathtt{x})(\forall \mathtt{y})(\exists \mathtt{z})(\neg \mathtt{P}(\mathtt{z}) \rightarrow \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{v},\mathtt{w},\mathtt{x})).$$

A zde máme příklad jednoduché formule, která není v prenexním normálním tvaru:

$$(\exists \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\forall \mathtt{y})\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})).$$

Obecný kvantifikátor se vyskytuje „uvnitř“ formule, a tudíž nevyhovuje definici prenexního normálního tvaru. Formuli v prenexní normální formě poznáme tak, že v ní není žádná podformule, která má jako svůj hlavní operátor některou z výrokových spojek, přitom však obsahuje nějaký kvantifikátor. V právě uvedené formuli najdeme podformuli

$$\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\forall \mathtt{y})\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}),$$

která má jako hlavní operátor konjunkci, přitom však obsahuje obecný kvantifikátor. Nejedná se tedy o formuli v prenexním normálním tvaru. V prenexním normálním tvaru by tedy nebyla ze stejných důvodů ani formule:

$$(\exists \mathtt{x})((\forall \mathtt{y})\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \wedge \mathtt{P}(\mathtt{x})).$$

Ekvivalentně lze použít definici, podle níž je formule v prenexním normálním tvaru, pokud se v rozsahu každého výskytu kvantifikátoru nacházejí všechny výrokové spojky dané formule. Pro pořádek uvádíme i formální (samozřejmě též ekvivalentní) definici využívající zavedenou symboliku.

`14.10.4 Definice (Prenexní normální forma):` *Formule ϑ je v prenexní normální formě, když existuje formule χ, která neobsahuje kvantifikátory a $\vartheta = (Q_1\mathtt{x}_1)\ldots(Q_n\mathtt{x}_n)\chi$, kde $Q_1,\ldots,Q_n$ jsou kvantifikátory a $n \geq 0$.*

Chceme tedy nyní ukázat, že každou formuli lze převést na formuli, která je jí logicky ekvivalentní a která je v prenexní normální formě. Následující dvě logické ekvivalence naznačují, že by se to mohlo podařit. Nechť ϑ a χ jsou libovolné formule. Pak platí:

(1) $(\forall \mathtt{x})\vartheta \wedge (\forall \mathtt{x})\chi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\forall \mathtt{x})(\vartheta \wedge \chi)$,

(2) $(\exists \mathtt{x})\vartheta \vee (\exists \mathtt{x})\chi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\exists \mathtt{x})(\vartheta \vee \chi)$.

Zákony tohoto typu se nám hodí, neboť ukazují, jak je možné kvantifikátory, které se původně nacházejí uvnitř formule, přesunout na začátek formule. Přesněji řečeno, potřebujeme takové zákony, protože snižují počet případů, v nichž nějaká výroková spojka není v rozsahu nějakého kvantifikátoru. Postup však nebude tak přímočarý, jak by se zpočátku mohlo zdát. Zaměníme-li v (1) a (2) konjunkci za disjunkci a *vice versa*, výsledné vztahy již neplatí. Platí pouze směry:

(3) $(\forall \mathtt{x})\vartheta \vee (\forall \mathtt{x})\chi \models (\forall \mathtt{x})(\vartheta \vee \chi)$,

(4) $(\exists \mathtt{x})(\vartheta \wedge \chi) \models (\exists \mathtt{x})\vartheta \wedge (\exists \mathtt{x})\chi$.

K opačným směrům lze lehce najít protipříklady. Např. uvažujme interpretaci, jejíž univerzum sestává z objektů a a b. Realizace predikátu $\mathtt{P}$ je množina obsahující právě prvek a, realizace predikátu $\mathtt{Q}$ je množina obsahující právě prvek b. V této interpretaci platí $(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x}))$ a také $(\exists \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\exists \mathtt{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x})$, ale ne $(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \vee (\forall \mathtt{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x}))$ ani $(\exists \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{x}))$. Z toho plyne, že:

(5) $(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x})) \not\models (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \vee (\forall \mathtt{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x})$,

(6) $(\exists \mathrm{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\exists \mathrm{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x}) \nvDash (\exists \mathrm{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{x}))$.

Lze pro formuli $(\exists \mathrm{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\exists \mathrm{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x})$ zvolit nějaký jiný postup a oba existenční kvantifikátory přesunout na začátek formule tak, aby se konjunkce nacházela v jejich rozsahu a výsledná formule byla logicky ekvivalentní té původní? Ukážeme, že je to možné. Vybereme si nejprve libovolný výskyt kvantifikátoru a přesuneme ho na začátek formule. To lze provést, neboť platí následující ekvivalence:

(7) $(\exists \mathrm{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\exists \mathrm{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x}) \dashv\vDash (\exists \mathrm{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\exists \mathrm{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x}))$,

(8) $(\exists \mathrm{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\exists \mathrm{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x}) \dashv\vDash (\exists \mathrm{x})((\exists \mathrm{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{x}))$.

Jejich platnost lze lehce ověřit poté, co zavedeme metodu sémantických stromů. Nyní pokračujeme ve zmíněné transformaci. Vybereme si např. první variantu a původní formuli nahradíme za $(\exists \mathrm{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\exists \mathrm{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x}))$. Platí, že existenční kvantifikátor jsme mohli „vytknout“, neboť ve formuli $(\exists \mathrm{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x})$ se nevyskytuje proměnná $\mathtt{x}$ volně. To artikuluje ekvivalence (f) níže. V rozsahu prvního výskytu kvantifikátoru $(\exists \mathrm{x})$ se nacházejí již všechny spojky dané formule, v našem případě jediný výskyt spojky $\wedge$. Nemusíme se tedy tímto výskytem zabývat a zaměříme se na „tělo“ formule, kterým je podformule $\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\exists \mathrm{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x})$. Druhý existenční kvantifikátor jednoduše vytknout nemůžeme, protože formule $\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\exists \mathrm{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x})$ a $(\exists \mathrm{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{x}))$ nejsou logicky ekvivalentní. Důvodem je, že ve formuli $\mathtt{P}(\mathtt{x})$ je volný výskyt proměnné $\mathtt{x}$ a tato proměnná se nachází také u kvantifikátoru, jejž potřebujeme „vytknout“. Uvedenou komplikaci lze lehce obejít. Vezměme si libovolnou proměnnou, která se vůbec nenachází ve formuli, třeba proměnnou $\mathtt{y}$. Formule $(\exists \mathrm{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x})$ je logicky ekvivalentní formuli $(\exists \mathrm{y})\mathtt{Q}(\mathtt{y})$, viz ekvivalence (b) níže. Tedy díky možnosti zaměňovat ekvivalentní formule musí platit, že i celá formule $(\exists \mathrm{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\exists \mathrm{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x}))$ je ekvivalentní s formulí $(\exists \mathrm{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\exists \mathrm{y})\mathtt{Q}(\mathtt{y}))$. Nyní lze již v podformuli $(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge (\exists \mathrm{y})\mathtt{Q}(\mathtt{y}))$ vytknout kvantifikátor $(\exists \mathrm{y})$, neboť v $\mathtt{P}(\mathtt{x})$ není volný výskyt proměnné $\mathtt{y}$. Celkem získáme formuli, která je již v prenexním normálním tvaru, totiž $(\exists \mathrm{x})(\exists \mathrm{y})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{y}))$.

Postup nyní zobecníme tak, abychom dostali algoritmus vhodný pro transformaci libovolné formule. Uvedeme seznam logicky ekvivalentních schémat, která budeme pro tento algoritmus potřebovat. Nechť ϑ a χ jsou libovolné formule. Je-li to nutné, uvádíme vedle logických ekvivalencí pro tyto formule dodatečné podmínky. Proměnné $\mathtt{x}$ a $\mathtt{y}$ jsou chápány jako libovolné:

(a) $(\forall \mathrm{x})\vartheta \dashv\vDash (\forall \mathrm{y})\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}}$ (nevyskytuje-li se $\mathtt{y}$ v ϑ),

(b) $(\exists \mathrm{x})\vartheta \dashv\vDash (\exists \mathrm{y})\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}}$ (nevyskytuje-li se $\mathtt{y}$ v ϑ),

(c) $\neg(\forall \mathrm{x})\vartheta \dashv\vDash (\exists \mathrm{x})\neg\vartheta$,

(d) $\neg(\exists \mathbf{x})\vartheta \mathrel{\dashv\vDash} (\forall \mathbf{x})\neg\vartheta$,

(e) $\chi \wedge (\forall \mathbf{x})\vartheta \mathrel{\dashv\vDash} (\forall \mathbf{x})(\chi \wedge \vartheta)$ (není-li $\mathbf{x}$ volná v χ),

(f) $\chi \wedge (\exists \mathbf{x})\vartheta \mathrel{\dashv\vDash} (\exists \mathbf{x})(\chi \wedge \vartheta)$ (není-li $\mathbf{x}$ volná v χ),

(g) $\chi \vee (\forall \mathbf{x})\vartheta \mathrel{\dashv\vDash} (\forall \mathbf{x})(\chi \vee \vartheta)$ (není-li $\mathbf{x}$ volná v χ),

(h) $\chi \vee (\exists \mathbf{x})\vartheta \mathrel{\dashv\vDash} (\exists \mathbf{x})(\chi \vee \vartheta)$ (není-li $\mathbf{x}$ volná v χ),

(i) $\chi \rightarrow (\forall \mathbf{x})\vartheta \mathrel{\dashv\vDash} (\forall \mathbf{x})(\chi \rightarrow \vartheta)$ (není-li $\mathbf{x}$ volná v χ),

(j) $\chi \rightarrow (\exists \mathbf{x})\vartheta \mathrel{\dashv\vDash} (\exists \mathbf{x})(\chi \rightarrow \vartheta)$ (není-li $\mathbf{x}$ volná v χ),

(k) $(\forall \mathbf{x})\vartheta \rightarrow \chi \mathrel{\dashv\vDash} (\exists \mathbf{x})(\vartheta \rightarrow \chi)$ (není-li $\mathbf{x}$ volná v χ),

(l) $(\exists \mathbf{x})\vartheta \rightarrow \chi \mathrel{\dashv\vDash} (\forall \mathbf{x})(\vartheta \rightarrow \chi)$ (není-li $\mathbf{x}$ volná v χ).

Vzhledem ke komutativitě konjunkce a disjunkce stačí k těmto spojkám uvést jediný zákon pro obecný a jediný pro existenční kvantifikátor. Zbývající zákon pro případ, že kvantifikátor je u prvního členu konjunkce (resp. disjunkce), je analogický a dá se lehce odvodit. Implikace komutativní není, a proto zde máme odlišné zákony pro případ, že je kvantifikátor v antecedentu, a pro případ, kdy je v konsekventu.

Celkem lze říci, že když je splněna podmínka, že proměnná není volná v odpovídající formuli – což lze vždy zajistit pomocí zákonů (a) a (b) –, lze „vytknutí“ bez problémů provést. Jedinou výjimku tvoří případy (k) a (l), kdy se kvantifikátor nachází v antecedentu implikace. I tehdy lze kvantifikátory „vytknout“, ale musíme při tom vytýkané kvantifikátory pozměnit, a to existenční na obecný a *vice versa.* Neuvádíme zákony pro ekvivalenci, kterou můžeme z formule vždy eliminovat. Podobným způsobem bychom samozřejmě mohli eliminovat další spojky a ponechat pouze např. konjunkci a negaci, které dohromady tvoří adekvátní množinu spojek. Platnost uvedených zákonů nebudeme nyní ověřovat. Později naznačíme, jak je lze ověřit pomocí metody sémantických stromů. Obecný algoritmus transformace na prenexní normální formu, který využívá možnosti zaměňovat logicky ekvivalentní formule, vypadá takto:

(1) V prvním kroku pozměníme s využitím ekvivalencí (a) a (b) kvantifikátory tak, aby vždy vázaly různé proměnné, ale aby zároveň nevázaly proměnné, které se někde ve formuli vyskytují volně.

(2) Tudíž nám nic nebrání, abychom pomocí postupných aplikací ekvivalencí (c–l) vytlačovali kvantifikátory směrem na okraj formule.

(3) Nemůžeme-li již žádný ze zákonů (c–l) použít, máme formuli v prenexním normálním tvaru.

Ještě většího stupně standardizace bychom mohli docílit tak, že bychom požadovali, aby bezkvantifikátorové tělo formule bylo upraveno do konjunktivní (resp. disjunktivní) normální formy. Jak vypadá uvedený postup v konkrétním případě, ukážeme na formuli:

$$(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to (\exists \mathtt{x})\neg(\forall \mathtt{y})(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \vee (\exists \mathtt{y})\mathtt{Q}(\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{z})).$$

Následující posloupnost je tedy transformací této formule na ekvivalentní formuli v prenexní normální formě. Vpravo je vždy uvedeno, kterou logickou ekvivalenci jsme použili.

(1) $(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to (\exists \mathtt{x})\neg(\forall \mathtt{y})(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \vee (\exists \mathtt{y})\mathtt{Q}(\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{z}))$,

(2) $(\forall \mathtt{u})\mathtt{P}(\mathtt{u}) \to (\exists \mathtt{x})\neg(\forall \mathtt{y})(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \vee (\exists \mathtt{y})\mathtt{Q}(\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{z}))$ (a),

(3) $(\forall \mathtt{u})\mathtt{P}(\mathtt{u}) \to (\exists \mathtt{x})\neg(\forall \mathtt{y})(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \vee (\exists \mathtt{v})\mathtt{Q}(\mathtt{x},\mathtt{v},\mathtt{z}))$ (b),

(4) $(\forall \mathtt{u})\mathtt{P}(\mathtt{u}) \to (\exists \mathtt{x})\neg(\forall \mathtt{y})(\exists \mathtt{v})(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x},\mathtt{v},\mathtt{z}))$ (h),

(5) $(\forall \mathtt{u})\mathtt{P}(\mathtt{u}) \to (\exists \mathtt{x})(\exists \mathtt{y})\neg(\exists \mathtt{v})(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x},\mathtt{v},\mathtt{z}))$ (c),

(6) $(\forall \mathtt{u})\mathtt{P}(\mathtt{u}) \to (\exists \mathtt{x})(\exists \mathtt{y})(\forall \mathtt{v})\neg(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x},\mathtt{v},\mathtt{z}))$ (d),

(7) $(\exists \mathtt{u})(\mathtt{P}(\mathtt{u}) \to (\exists \mathtt{x})(\exists \mathtt{y})(\forall \mathtt{v})\neg(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x},\mathtt{v},\mathtt{z})))$ (k),

(8) $(\exists \mathtt{u})(\exists \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{u}) \to (\exists \mathtt{y})(\forall \mathtt{v})\neg(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x},\mathtt{v},\mathtt{z})))$ (j),

(9) $(\exists \mathtt{u})(\exists \mathtt{x})(\exists \mathtt{y})(\mathtt{P}(\mathtt{u}) \to (\forall \mathtt{v})\neg(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x},\mathtt{v},\mathtt{z})))$ (j),

(10) $(\exists \mathtt{u})(\exists \mathtt{x})(\exists \mathtt{y})(\forall \mathtt{v})(\mathtt{P}(\mathtt{u}) \to \neg(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x},\mathtt{v},\mathtt{z})))$ (i).

Desátá formule je v prenexní normální formě. Snad je zřejmé, že uvedený postup lze aplikovat na libovolnou formuli, takže můžeme vyslovit bez důkazu následující větu.

`14.10.5 Věta (O prenexní normální formě):` *K libovolné formuli ϑ existuje formule χ v prenexní normální formě taková, že $\vartheta \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \chi$.*

`Důkaz:` Důkaz lze provést mechanickým způsobem indukcí podle složitosti formule. `QED`

Prenexní normální formy mají velký teoretický význam, neboť tím, že jasně oddělují výrokové tělo formule od bloku kvantifikátorů, umožňují prostředkovat spojitost mezi formulemi predikátové logiky a formulemi logiky výrokové. O tom se později ještě velmi stručně zmíníme v oddílu 18.3. Další spojitost, kterou normální formy prostředkují a kterou jsme již popsali v `KVL`, je spojitost syntaxe se sémantikou. Ta nám nyní stejně jako dříve umožňuje plynule přejít k další kapitole, která náš rozbor dané logiky tematicky uzavře, totiž ke kapitole věnované axiomatizaci. Na rozdíl od kapitol věnovaných `KVL` na ni ve zbytku této části navážeme diskusí několik dalších schémat, jak v této axiomatizaci postupovat, přičemž začneme hilbertovskou kalkulizací `KPL`. Ostatní koncepty budou vždy představeny dvakrát, pro `KVL` i `KPL`.

15

Axiomatizace

V této kapitole rozšíříme kalkul výrokové logiky tak, aby v něm byly dokazatelné všechny logicky platné formule KPL. Dokážeme úplnost vůči sémantice predikátové logiky a z úplnosti odvodíme také některé zajímavé sémantické vlastnosti, jako je kompaktnost. Důkaz úplnosti bude kopírovat postup z oddílu 9.4, kde jsme dokázali větu o silné úplnosti HK pro výrokovou logiku. Před studiem této kapitoly tedy doporučujeme znovu si projít důkaz uvedený v 9.4, protože se na něj budeme často odkazovat.

Úplná a korektní kalkulizace KPL byla podána Fregem v jeho *Pojmovém písmu* (1879),[1] přirozeně bez příslušného důkazu, neboť ten vyžaduje rozvinutí náročných metateoretických úvah. Tento důkaz, resp. důkaz možnosti úplné axiomatizace KPL, předložil Gödel v článku „Úplnost axiomů logického funkcionálního kalkulu“ (1930), byť pro jiný axiomatický systém.[2] Základní rozdíl mezi KVL a KPL tedy nespočívá v úplnosti, ale v tom, že v KPL nemáme k dispozici algoritmus, který by nám – jako tabulková metoda v případě logiky výroků – dovolil pro libovolnou formuli efektivně rozhodnout, zda je logicky platná, či nikoli. Tento postřeh se opírá o Churchův důkaz z „Poznámky k problému rozhodnutí“ (1936),

[1] Frege [1879].
[2] Gödel [1930].

který zde nebudeme reprodukovat.[3] Naznačíme však, v jakém smyslu nám příslušné kalkulizace nabízejí algoritmus *polorozhodnutí*, tedy metodu efektivního potvrzení toho, že daná formule je logicky platnou. Tyto úvahy hrají v moderní logice značný význam, neboť souvisejí se snahou získat jistotu v uvažování jeho převedením na mechanické procesy, jak je exemplifikují současné počítače. Tomu odpovídají i změny v pojmech sebeevidence a analytičnosti, jak jsme o nich hovořili v předchozí části, zvláště pak v kapitole 9.

15.1 Hilbertovský kalkul

I když lze zhruba říci, že úplnost kalkulu pro KPL lze dokázat stejnou metodou, kterou jsem uplatnili v případě KVL, budeme se muset vypořádat s několika drobnými technickými překážkami, které se na výrokové úrovni neobjevily. Celý postup bude vypadat takto:

(1) Definujeme HK pro KPL.

(2) Pro tento kalkul definujeme pojem konzistentní teorie a pojem mk-teorie.

(3) Formulujeme navíc další speciální vlastnost teorií KPL, tzv. existenční uzavřenost. Právě kolem této vlastnosti se točí ony technické překážky, jež jsme zmínili.

(4) Ukážeme, že existenčně uzavřené mk-teorie mají model.

(5) Poté ukážeme, že každou konzistentní teorii lze rozšířit do existenčně uzavřené mk-teorie, z čehož plyne, že každá konzistentní teorie má model.

(6) Toto tvrzení následně můžeme lehce převést na větu o úplnosti.

Axiomatický systém pro predikátovou logiku, který budeme studovat, je formulovaný ve stejném stylu jako HK pro výrokovou logiku.

15.1.1 Definice (Hilbertovský kalkul): HK *pro* KPL*, nebo jen* HK*, je systém sestávající ze čtyř axiomatických schémat:*

(H1) $\vartheta \to (\chi \to \vartheta)$,

(H2) $(\vartheta \to (\chi \to \gamma)) \to ((\vartheta \to \chi) \to (\vartheta \to \gamma))$,

(H3) $(\neg\chi \to \neg\vartheta) \to (\vartheta \to \chi)$,

[3] Church [1936].

(H4) $(\forall \mathtt{y})\vartheta \to \vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{t}}$, *je-li* $\mathtt{t}$ *substituovatelný za* $\mathtt{y}$ *v* ϑ.

Dále k němu patří dvě odvozovací pravidla, modus ponens a generalizace:

(`MP`*)* $\vartheta, \vartheta \to \chi / \chi$,

(`G`*)* $\vartheta \to \chi / \vartheta \to (\forall \mathtt{y})\chi$, *nevyskytuje-li se* $\mathtt{y}$ *volně v* ϑ.

Stejně jako v `KVL` i v `KPL` mají axiomy i odvozovací pravidla schematickou podobu. Avšak na rozdíl od `HK` pro `KVL` zde řecká písmena zastupují libovolné formule jazyka `KPL`. Schematicky se chovají i proměnné, a to v tom smyslu, že písmeno $\mathtt{y}$ reprezentuje libovolnou proměnnou, takže např. formule $(\forall \mathtt{z})\mathtt{P}(\mathtt{z}) \to \mathtt{P}(\mathtt{c})$ je instancí schématu $(H4)$. Podobně jako ve výrokové logice jsme kvůli úspornosti omezili základní skupinu logických symbolů. Z výrokových spojek pracujeme opět pouze s negací a implikací. Z kvantifikátorů jsme si vybrali obecný. Existenční kvantifikátor funguje jako zkratka. Výraz $(\exists \mathtt{x})$ zastupuje výraz $\neg(\forall \mathtt{x})\neg$.

Důkaz formule ϑ je opět definován jako posloupnost formulí, jejímž posledním členem je ϑ a ve které se vyskytují pouze axiomy nebo formule odvozené pomocí některého odvozovacího pravidla z formulí předchozích. Odvození z množiny formulí T definujeme stejně jako důkaz, přičemž navíc platí, že se v posloupnosti mohou vyskytovat navíc formule z množiny T. Pokud existuje důkaz formule ϑ, říkáme, že ϑ je dokazatelná a píšeme $\vdash \vartheta$. Pokud existuje odvození formule ϑ z množiny T, říkáme, že ϑ je odvoditelná z T a píšeme $T \vdash \vartheta$. `HK` pro `KPL` je v jistém smyslu rozšířením `HK` pro `KVL`. Přidali jsme pouze axiomatické schéma $(H4)$ a pravidlo generalizace. Jelikož `HK` pro `KVL` je úplný, můžeme mít jistotu, že všechny kroky, které jsou platné na základě výrokové logiky, lze nasimulovat i v právě formulovaném kalkulu. Takové kroky tedy budeme provádět automaticky s odkazem na `KVL`.

Sémantická motivace pro axiom $(H4)$ je zcela jasná. Axiom vyjadřuje, že pokud můžeme říci, že něco platí pro všechny objekty, můžeme to také vypovídat o kterémkoli z těchto objektů zvlášť. Motivace pro pravidlo generalizace je nám rovněž známa, neboť mu odpovídá krok, který na metaúrovni provádíme neustále. Např. chceme-li odvodit nějaké obecné tvrzení, které platí pro všechna čísla, začneme tím, že si vezmeme nějaké libovolné číslo n. To, že je n libovolné, tj. že jsme zatím o něm nic konkrétního neřekli, odpovídá podmínce pravidla (`G`), že proměnná $\mathtt{x}$ se nevyskytuje v ϑ volně. Dokážeme-li o tomto n nějaké tvrzení, můžeme usoudit, že toto tvrzení platí pro všechna čísla. Tomu odpovídá na objektové úrovni, že je-li dokázáno

$$\vartheta \to \chi,$$

můžeme usoudit, že platí

$$\vartheta \to (\forall \mathtt{x})\chi.$$

Nebudeme uvádět žádný konkrétní důkaz v HK pro KPL. To, jak kalkul funguje, ilustrujeme na následujících metateorémech. Bod (a) této věty využijeme v důkazu bodu (b) a body (b), (c) a (d) využijeme v důkazu úplnosti. U bodu (b) by bylo možné formulovat o něco slabší podmínku na proměnnou y a tvrzení by stále platilo. Silnější podmínku formulujeme proto, že její formulace je jednodušší a že nám to v této podobě postačí při důkazu úplnosti.

`15.1.2 Věta:` *Pro* HK *pro* KPL *platí:*

(a) $\vdash (\vartheta \to (\exists \mathtt{y})\chi) \to (\exists \mathtt{y})(\vartheta \to \chi)$,

(b) $\vdash (\exists \mathtt{y})((\exists \mathtt{x})\vartheta \to \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}})$, *nevyskytuje-li se* y *v* ϑ,

(c) $\vdash \neg(\forall \mathtt{y})\vartheta \to (\exists \mathtt{y})\neg\vartheta$,

(d) jestliže $T \vdash \chi \to \vartheta$, *pak* $T \vdash (\exists \mathtt{y})\chi \to \vartheta$, *není-li* y *volná v* ϑ.

`Důkaz:` (a) Postupujeme v těchto krocích:

(1)	$\vdash (\vartheta \wedge \neg\chi) \to \vartheta$	KVL,
(2)	$\vdash (\vartheta \wedge \neg\chi) \to \neg\chi$	KVL,
(3)	$\vdash (\forall \mathtt{y})(\vartheta \wedge \neg\chi) \to (\vartheta \wedge \neg\chi)$	$(H4)$,
(4)	$\vdash (\forall \mathtt{y})(\vartheta \wedge \neg\chi) \to \neg\chi$	KVL, (2), (3),
(5)	$\vdash (\forall \mathtt{y})(\vartheta \wedge \neg\chi) \to (\forall \mathtt{y})\neg\chi$	(G), (4),
(6)	$\vdash (\forall \mathtt{y})(\vartheta \wedge \neg\chi) \to \vartheta$	KVL, (1), (3),
(7)	$\vdash (\forall \mathtt{y})(\vartheta \wedge \neg\chi) \to \vartheta \wedge (\forall \mathtt{y})\neg\chi$	KVL, (5), (6),
(8)	$\vdash \neg(\vartheta \wedge (\forall \mathtt{y})\neg\chi) \to \neg(\forall \mathtt{y})(\vartheta \wedge \neg\chi)$	KVL, (7),
(9)	$\vdash (\vartheta \to \neg(\forall \mathtt{y})\neg\chi) \to \neg(\forall \mathtt{y})\neg(\vartheta \to \chi)$	KVL, (8),
(10)	$\vdash (\vartheta \to (\exists \mathtt{y})\chi) \to (\exists \mathtt{y})(\vartheta \to \chi)$	$(\exists \mathtt{y}) = \neg(\forall \mathtt{y})\neg$, (9).

(b) Z předpokladu, že se y nevyskytuje v ϑ, plyne, že x je substituovatelná za y v $\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}}$ a že po této substituci dostaneme zpět formuli ϑ. Tím je zdůvodněn následující krok (1):

(1)	$\vdash (\forall \mathtt{y})\neg\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}} \to \neg\vartheta$	$(H4)$,
(2)	$\vdash (\forall \mathtt{y})\neg\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}} \to (\forall \mathtt{x})\neg\vartheta$	(G), (1),

(3) $\vdash \neg(\forall \mathtt{x})\neg\vartheta \to \neg(\forall \mathtt{y})\neg\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}}$ KVL, (2),

(4) $\vdash (\exists \mathtt{x})\vartheta \to (\exists \mathtt{y})\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}}$ $(\exists \mathtt{x}) = \neg(\forall \mathtt{x})\neg$, (3),

(5) $\vdash ((\exists \mathtt{x})\vartheta \to (\exists \mathtt{y})\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}}) \to (\exists \mathtt{y})((\exists \mathtt{x})\vartheta \to \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}})$ (a),

(6) $\vdash (\exists \mathtt{y})((\exists \mathtt{x})\vartheta \to \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}})$ (MP), (4), (5).

(c) Postupujeme v následujících krocích:

(1) $\vdash (\forall \mathtt{y})\neg\neg\vartheta \to \neg\neg\vartheta$ $(H4)$,

(2) $\vdash \neg\neg\vartheta \to \vartheta$ KVL,

(3) $\vdash (\forall \mathtt{y})\neg\neg\vartheta \to \vartheta$ KVL, (1), (2),

(4) $\vdash (\forall \mathtt{y})\neg\neg\vartheta \to (\forall \mathtt{y})\vartheta$ (G), (3),

(5) $\vdash \neg(\forall \mathtt{y})\vartheta \to \neg(\forall \mathtt{y})\neg\neg\vartheta$ KVL, (4),

(6) $\vdash \neg(\forall \mathtt{y})\vartheta \to (\exists \mathtt{y})\neg\vartheta$ $(\exists \mathtt{y}) = \neg(\forall \mathtt{y})\neg$, (5).

(d) Postupujeme v následujících krocích:

(1) $T \vdash \chi \to \vartheta$ předpoklad,

(2) $T \vdash \neg\vartheta \to \neg\chi$ KVL, (1),

(3) $T \vdash \neg\vartheta \to (\forall \mathtt{y})\neg\chi$ (G), (2),

(4) $T \vdash \neg(\forall \mathtt{y})\neg\chi \to \vartheta$ KVL, (3),

(5) $T \vdash (\exists \mathtt{y})\chi \to \vartheta$ $(\exists \mathtt{y}) = \neg(\forall \mathtt{y})\neg$, (3).

QED

V důkazu úplnosti se neobejdeme bez věty o dedukci, resp. bez její mírně omezené verze. Důkaz věty o dedukci je přímočarým rozšířením důkazu o dedukci pro KVL.

15.1.3 Věta (O dedukci): *Nechť T je množina formulí, ϑ je sentence a χ je formule. Pak platí $T, \vartheta \vdash \chi$ právě tehdy, když $T \vdash \vartheta \to \chi$.*

Důkaz: Směr zprava doleva ($\Leftarrow$) je triviální. Zaměříme se na směr zleva doprava ($\Rightarrow$). Postupujeme stejně jako v KVL. Předpokládáme, že

$$T, \vartheta \vdash \chi,$$

tj. že existuje posloupnost

$$\xi_1, \ldots, \xi_n = \chi,$$

která je odvozením z T, ϑ. Dokazujeme indukcí, že pro každé i takové, že $1 \leq i \leq n$, platí tvrzení:

$$T \vdash \vartheta \to \xi_i.$$

Konkrétně tak získáme také požadované $T \vdash \vartheta \to \chi$. Všechny kroky jsou stejné jako ve výrokové logice. Musíme zvážit navíc pouze případ, že ξ_i je odvozena pomocí pravidla (G). ξ_i musí být tvaru $\phi \to (\forall \mathtt{y})\psi$. Chceme dokázat $T \vdash \vartheta \to (\phi \to (\forall \mathtt{y})\psi)$. Postupujeme takto:

(1) $T \vdash \vartheta \to (\phi \to \psi)$ induktivní předpoklad,

(2) $T \vdash (\vartheta \wedge \phi) \to \psi$ KVL, (1),

(3) $T \vdash (\vartheta \wedge \phi) \to (\forall \mathtt{y})\psi$ (G), (2),

(4) $T \vdash \vartheta \to (\phi \to (\forall \mathtt{y})\psi)$ KVL, (3).

V kroku (3) jsme využili předpoklad, že formule ϑ je sentence, a tudíž se v ní nevyskytuje volně proměnná y. Víme, že ani ve ϕ se y nemůže vyskytovat volně, protože $\phi \to (\forall \mathtt{y})\psi$ byla předtím odvozena pomocí (G) z $\phi \to \psi$. Jen z těchto důvodů jsme mohli ve třetím kroku aplikovat pravidlo (G). QED

Nyní již směřujeme přímo k větě o úplnosti. Tu dostaneme snadno z tvrzení, že pro bezespornou množinu formulí lze zkonstruovat model. K tomu je třeba učinit několik kroků, které jsou obsahem dalšího oddílu.

15.2 Kanonická interpretace

Na cestě k větě o úplnosti nejprve zavedeme pojmy konzistentní a maximálně konzistentní teorie a dokážeme o nich několik tvrzení. Tyto pojmy přesně kopírují pojmy formulované v části 9.4. Avšak je důležité mít na paměti, že nyní se vztahují na rozšířený kalkul predikátové logiky, a obsah těchto vět je tedy odlišný, i když znění se shoduje. Protože v důkazech hojně využíváme větu o dedukci, která v sobě nese podmínku uzavřenosti dané formule, je vhodné omezit pojmy teorie a *mk*-teorie na sentence.

15.2.1 Konvence (Spor): *Libovolnou sentenci tvaru* $\neg(\vartheta \to \vartheta)$ *označme zkráceně symbolem* $\perp$ *a nazývejme ji spor.*

15.2.2 Definice (Konzistentní teorie): *Nechť T je množina sentencí. Řekneme, že T je konzistentní teorie, jestliže z T nelze odvodit spor (tj. $T \nvdash \perp$). Není-li T konzistentní teorie, říkáme, že je nekonzistentní.*

15.2.3 Věta: *Daná teorie je nekonzistentní právě tehdy, když je z ní odvoditelná každá formule.*

Důkaz: Stejný jako v analogické větě 9.4.4. QED

15.2.4 Věta: *Pro libovolnou množinu sentencí T a pro libovolnou sentenci ϑ platí: $T \nvdash \vartheta$ právě tehdy, když $T, \neg\vartheta$ je konzistentní.*

Důkaz: Důkaz je stejný jako v analogické větě 9.4.5. QED

15.2.5 Definice (*mk*-teorie): *Nechť S je libovolná množina sentencí. Řekneme, že S je maximální konzistentní teorie (zkráceně mk-teorie), když S je konzistentní teorie a navíc platí, že přidáme-li k S libovolnou sentenci, která nenáleží do S, získáme nekonzistentní teorii. Řečeno v symbolech: $S \nvdash \perp$ a pro každou sentenci ϑ takovou, že $\vartheta \notin S$, platí $S, \vartheta \vdash \perp$.*

První důležitou vlastností *mk*-teorií je jejich deduktivní uzavřenost. Platí tedy analogie tvrzení 9.4.7

15.2.6 Věta (O deduktivní uzavřenosti): *Předpokládejme, že S je mk-teorie a $S \vdash \vartheta$. Pak $\vartheta \in S$.*

Důkaz: Důkaz je stejný jako v analogické větě 9.4.7. QED

Pojem *mk*-teorie je čistě syntaktický. Jelikož však směřujeme k větě o úplnosti, musíme nějak propojit syntax se sémantikou. Na výrokové úrovni k tomu v tuto chvíli posloužila věta 9.4.8. Chceme formulovat analogickou větu pro KPL, zde ale nastávají jisté technické potíže s kvantifikátory. Abychom tyto potíže zdolali, musíme si zavést další pojem, který vyjadřuje určitou vlastnost teorií. Neformálně můžeme říci, že daná teorie má tuto vlastnost, když v jazyce máme jméno pro každý objekt, jehož existenci explicitně v teorii tvrdíme.

15.2.7 Definice (Existenční uzavřenost): *Nechť je dána množina sentencí S. Řekneme, že S je existenčně uzavřená, když ke každé formuli tvaru $(\exists \mathtt{y})\vartheta$ z S existuje v S nějaká formule tvaru $\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$, kde $\mathtt{c}$ je jmenná konstanta.*

Omezíme-li se na existenčně uzavřené *mk*-teorie, můžeme již propojit naše syntaktické pojmy s Tarského definicí pravdy podobně jako tomu bylo ve větě 9.4.8.

15.2.8 Věta (O *mk*-teorii 1): *Nechť S je mk-teorie, která je existenčně uzavřená, a ϕ, ψ jsou libovolné sentence v jazyce této teorie, tj.*

obsahují jen predikáty a konstanty, které se v této teorii vyskytují. Pak platí:

(a) $\neg\phi \in S$ *právě tehdy, když* $\phi \notin S$,

(b) $\phi \rightarrow \psi \in S$ *právě tehdy, když* $\phi \notin S$ *nebo* $\psi \in S$,

(c) $(\forall \mathtt{y})\phi \in S$ *právě tehdy, když pro každou konstantu* $\mathtt{c}$, *která se vyskytuje v* S, *platí* $\phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} \in S$.

`Důkaz:` Pro body (a) a (b) je postup stejný jako ve větě 9.4.8. Zbývá dokázat bod (c). ($\Rightarrow$) Předpokládejme nejprve, že $(\forall \mathtt{y})\phi \in S$. Nechť $\mathtt{c}$ je libovolná konstanta, která se vyskytuje v S. Formule $(\forall \mathtt{y})\phi \rightarrow \phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$ je nějakou instancí axiomu $(H4)$. Z deduktivní uzavřenosti množiny S tedy plyne, že $\phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} \in S$. ($\Leftarrow$) Předpokládejme nyní, že $(\forall \mathtt{y})\phi \notin S$. Pak díky bodu (a) této věty, bodu (c) věty 15.1.2 a deduktivní uzavřenosti množiny S musí platit $(\exists \mathtt{y})\neg\phi \in S$. Díky existenční uzavřenosti množiny S tedy musí existovat nějaká konstanta $\mathtt{c}$ taková, že $\neg\phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} \in S$. Pro toto $\mathtt{c}$ opět díky bodu (a) platí $\phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} \notin S$. `QED`

Předchozí věta naznačuje, že – podobně jako v `KVL` – můžeme ke každé existenčně uzavřené *mk*-teorii zkonstruovat kanonický model, ve kterém platí přesně ty sentence, které náleží do této teorie. Tento kanonický model zkonstruujeme ze syntaktického materiálu. Jmenné konstanty zde budou vystupovat v dvojí roli. Jednak budou tvořit prvky univerza. Zároveň budou nadále vystupovat jako jazykové symboly. Je dobré také zmínit, že každá existenčně uzavřená *mk*-teorie musí obsahovat alespoň jednu jmennou konstantu, takže máme zajištěno, že definované univerzum je neprázdné. To plyne z existenční uzavřenosti a např. z faktu, že $\vdash (\exists \mathtt{y})((\exists \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{P}(\mathtt{y}))$, viz 15.1.2 (b).

`15.2.9 Definice (Kanonická interpretace):` *Nechť* S *je existenčně uzavřená mk-teorie. Kanonickou interpretaci mk-teorie* S *budeme značit* I^S. *Přitom platí, že univerzum* U *tvoří množina jmenných konstant, které se vyskytují v* S. *V* I^S *každá jmenná konstanta realizuje sama sebe, tj. platí* $I^S(\mathtt{c}) = \mathtt{c}$. *Každý n-ární predikát* $\mathtt{Q}$ *jazyka* J *je realizován takto:* $I^S(\mathtt{Q}) = \{\langle \mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_n \rangle \mid \mathtt{Q}(\mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_n) \in S\}$.

Nyní platí následující věta:

`15.2.10 Věta (O mk-teorii 2):` S *je existenčně uzavřená mk-teorie. Pak pro každou sentenci* ϑ *v jazyce teorie* S *platí:* $I^S \vDash \vartheta$ *právě tehdy, když* $\vartheta \in S$.

Důkaz: Postupujeme indukcí podle složitosti sentence ϑ. (i) Předpokládejme nejprve, že se jedná o atomickou sentenci $\mathtt{Q}(\mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_\mathtt{n})$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $I^S \models \mathtt{Q}(\mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_\mathtt{n})$,

(2) $\langle I^S(\mathtt{c}_1), \ldots, I^S(\mathtt{c}_\mathtt{n})\rangle \in I^S(\mathtt{Q})$,

(3) $\langle \mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_\mathtt{n}\rangle \in I^S(\mathtt{Q})$,

(4) $\mathtt{Q}(\mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_\mathtt{n}) \in S$.

Dokázali jsme první krok indukce. (ii.i) Nyní dokážeme tvrzení pro negaci. Předpokládejme, že dokazované tvrzení platí pro nějakou sentenci ϕ. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $I^S \models \neg\phi$,

(2) $I^S \not\models \phi$,

(3) $\phi \notin S$,

(4) $\neg\phi \in S$.

Ekvivalence mezi tvrzením (1) a (2) je zajištěna větou 14.7.5, podle níž interpretace není modelem dané sentence právě tehdy, když tato interpretace je modelem její negace. Ekvivalence mezi tvrzením (2) a (3) je zajištěna induktivním předpokladem. Ekvivalence mezi tvrzením (3) a (4) je zajištěna bodem (a) věty 15.2.8. (ii.ii) Induktivní krok pro implikaci je analogický. Předpokládáme, že tvrzení platí pro sentence ϕ a ψ. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $I^S \models \phi \rightarrow \psi$,

(2) $I^S \not\models \phi$ nebo $I^S \models \psi$,

(3) $\phi \notin S$ nebo $\psi \in S$,

(4) $\phi \rightarrow \psi \in S$.

Ekvivalence mezi (1) a (2) je důsledkem věty 14.7.4. Induktivní předpoklad vede k ekvivalenci mezi tvrzením (2) a (3) a ekvivalence mezi tvrzením (3) a (4) je zajištěna bodem (b) věty 15.2.8. (ii.iii) V induktivním kroku pro obecný kvantifikátor předpokládáme, že tvrzení platí pro každou sentenci tvaru $\phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$, kde $\mathtt{c}$ je nějaká konstanta jazyka teorie S. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $I^S \models (\forall \mathrm{y})\phi$,

(2) pro každou valuaci V platí $I^S V \models (\forall \mathrm{y})\phi$,

(3) pro každou valuaci V a prvek $\mathtt{c}$ univerza U platí $I^S V^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} \models \phi$,

(4) pro každou valuaci V a prvek $\mathtt{c}$ univerza U platí $I^S V \models \phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$,

(5) pro každý prvek $\mathtt{c}$ univerza U platí $I^S \models \phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$,

(6) pro každou konstantu $\mathtt{c}$, která se vyskytuje v S, platí $I^S \models \phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$,

(7) pro každou konstantu $\mathtt{c}$, která se vyskytuje v S, platí $\phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} \in S$,

(8) $(\forall \mathtt{y})\phi \in S$.

Ekvivalence mezi (3) a (4) je důsledkem věty 14.5.2. V přechodech mezi tvrzeními (5) a (6) jsme využili definici univerza U interpretace I^S. V přechodech mezi (6) a (7) jsme využili induktivní předpoklad. V přechodech mezi (7) a (8) jsme využili bod (c) věty 15.2.8. QED

Tím jsme se ocitli skoro u cíle. K jeho dosažení potřebujeme ještě dvě pomocná tvrzení, z nichž věta o úplnosti přímo vyplyne spolu s několika dalšími významnými výsledky.

15.3 Věta o úplnosti a spřízněná tvrzení

Chceme dokázat, že každá konzistentní teorie je obsažena v nějaké existenčně uzavřené *mk*-teorii. Řekněme, že je dána množina sentencí T. Nechť J je jazyk množiny T, tj. množina všech mimologických symbolů, které se v T vyskytují. Můžeme předpokládat, že máme k dispozici nekonečnou posloupnost jmenných konstant

$$\mathtt{c}_1, \mathtt{c}_2, \mathtt{c}_3, \ldots,$$

které se v T vůbec nevyskytují. Dále budeme pracovat s jazykem $J \cup \{\mathtt{c}_1, \mathtt{c}_2, \mathtt{c}_3, \ldots\}$. Označme tento jazyk jako J^+. Vezměme všechny sentence v jazyce J^+ a z nich vyberme ty, které jsou tvaru $(\exists \mathtt{x})\vartheta$. Uspořádejme je do nekonečné posloupnosti:

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$$

Na základě množiny T definujeme posloupnost množin

$$T_1, T_2, T_3, \ldots$$

následujícím způsobem:

(1) $T_1 = T$,

(2) $T_{i+1} = T_i, (\exists \mathtt{x})\vartheta \to \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}}$, kde $(\exists \mathtt{x})\vartheta$ je formule ϕ_i a $\mathtt{c}$ je první konstanta z posloupnosti $\mathtt{c}_1, \mathtt{c}_2, \mathtt{c}_3, \ldots$, která se nevyskytuje ani v T_i, ani ve formuli ϕ_i.

Jako teorii T^+ označíme sjednocení této posloupnosti teorií. Všimněme si, že J^+ je jazyk teorie T^+.

`15.3.1 Věta:` *Jestliže množina sentencí T je konzistentní, pak T^+ je také konzistentní.*

`Důkaz:` Předpokládejme, že T je konzistentní množina sentencí. Pro spor předpokládejme, že T^+ není konzistentní, tj. $T^+ \vdash \bot$. To znamená, že existuje odvození formule $\bot$ z množiny T^+, a tedy také z nějaké její konečné podmnožiny, neboť v odvození se může nacházet jen konečně mnoho formulí. Existuje tedy nějaké číslo k takové, že $T_k \vdash \bot$. Vezměme nejmenší k s touto vlastností. Jistě $k > 1$, neboť T_1 je množina T, která je podle předpokladu konzistentní. Pro $\phi_{k-1} = (\exists \mathtt{x})\vartheta$ a nějakou konstantu c, která se nevyskytuje ani v T_{k-1}, ani v ϕ_{k-1}, platí:

$$T_{k-1}, (\exists \mathtt{x})\vartheta \to \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}} \vdash \bot.$$

Užitím věty o dedukci získáváme:

$$T_{k-1} \vdash ((\exists \mathtt{x})\vartheta \to \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}}) \to \bot.$$

Existuje tedy odvození formule $((\exists \mathtt{x})\vartheta \to \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}}) \to \bot$ z množiny T_{k-1}. Indukcí podle délky odvození lze dokázat, že když v celém tomto odvození nahradíme každý výskyt konstanty `c` nějakou novou proměnnou `y`, která se také nevyskytuje ani v T_{k-1}, ani v ϕ_{k-1}, získáme odvození formule $((\exists \mathtt{x})\vartheta \to \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}}) \to \bot$ z množiny T_{k-1}. Detaily ponecháme čtenáři jako cvičení. Tedy:

$$T_{k-1} \vdash ((\exists \mathtt{x})\vartheta \to \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}}) \to \bot.$$

Na základě bodu (d) věty 15.1.2 získáváme:

$$T_{k-1} \vdash (\exists \mathtt{y})((\exists \mathtt{x})\vartheta \to \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}}) \to \bot.$$

Avšak na základě bodu (b) věty 15.1.2 je dokazatelný antecedent uvedené implikace, a tedy platí také:

$$T_{k-1} \vdash (\exists \mathtt{y})((\exists \mathtt{x})\vartheta \to \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}}).$$

Na základě aplikace (`MP`) získáváme závěr, že $T_{k-1} \vdash \bot$, tj. že T_{k-1} není konzistentní, což je ve sporu s předpokladem, že k je nejmenší index takový, že T_k není konzistentní. `QED`

Zbývá nám ještě jedno podpůrné tvrzení.

`15.3.2 Věta (Lindenbaumovo lemma):` *Nechť T je konzistentní množina sentencí. Pak existuje existenčně uzavřená mk-teorie S taková, že $T \subseteq S$.*

`Důkaz:` Důkaz je podobný jako v analogické větě 9.4.11. Navíc nám zde vystupuje podmínka existenční uzavřenosti. Postupujeme ve dvou krocích. Předpokládáme, že T je konzistentní množina sentencí. Nejprve množinu T rozšíříme výše popsaným způsobem na množinu T^+, která musí být podle předchozí věty také konzistentní. V druhém kroku rozšíříme množinu T^+ na *mk*-teorii S přesně stejným způsobem, jaký byl popsán v důkazu věty 9.4.11. V této konstrukci pracujeme s posloupností všech sentencí jazyka J^+, jenž obsahuje dodatečné konstanty, které se nevyskytovaly v T, ale jsou obsaženy v T^+. Zbývá zdůvodnit, že S je existenčně uzavřená. Nechť $(\exists \mathtt{x})\vartheta$ je sentence z S. Z konstrukce množiny T^+ je jasné, že pro nějakou konstantu $\mathtt{c}$ se nachází v T^+, a tedy i v S formule $(\exists \mathtt{x})\vartheta \rightarrow \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}}$. Protože S je deduktivně uzavřená, platí tedy, že $\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}} \in S$. `QED`

Nyní můžeme sklízet plody předchozí technické práce. Získáváme několik významných důsledků.

`15.3.3 Věta (O existenci modelu):` *Je-li množina sentencí konzistentní, pak má model.*

`Důkaz:` V předchozí větě jsme dokázali, že ke každé konzistentní množině sentencí T existuje existenčně uzavřená *mk*-teorie S. Ve větě 15.2.10 jsme ukázali, že modelem množiny S je kanonická interpretace I^S. Tato interpretace je tedy zároveň modelem množiny T. `QED`

`15.3.4 Věta (O silné úplnosti):` *Nechť T je množina sentencí a ϑ sentence. Platí, že $T \vdash \vartheta$ právě tehdy, když $T \models \vartheta$.*

`Důkaz:` Směr zleva doprava ($\Rightarrow$) je věta o korektnosti. Plyne přímo z korektnosti `HK` pro `KVL` a z vět 14.8.2 a 14.9.5. Korektnost pravidel se dokazuje vůči globálnímu vyplývání. Směr zprava doleva ($\Leftarrow$) je přímým důsledkem vět 15.2.4 a 15.3.3. Zdůvodnění je stejné jako v analogické větě 9.4.13. `QED`

Následují dva významné sémantické důsledky předchozích úvah týkající se konečnosti a nekonečnosti jak ve vztahu k velikosti množin formulí, tak k velikosti interpretací, lze-li ovšem – a zmínili jsme již, že je to problematické – považovat nekonečnost za velikost. První tvrzení přitom typově známe z `KVL`.

`15.3.5 Věta (O kompaktnosti):` *(a) Určitá sentence vyplývá z dané množiny sentencí právě tehdy, když vyplývá z nějaké její konečné podmnožiny. (b) Množina sentencí je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná každá její konečná podmnožina.*

`Důkaz:` Toto tvrzení je přímým důsledkem věty 15.3.4. Zdůvodnění je stejné jako v analogické větě 9.4.14. `QED`

Druhé tvrzení je specifické pro `KPL`.

`15.3.6 Věta (Löwenheimova-Skolemova věta):` *Má-li množina sentencí model, pak má také model spočetný.*

`Důkaz:` Z věty o korektnosti plyne, že každá splnitelná množina je konzistentní. Pokud by totiž nebyla, znamenalo by to, že z dané splnitelné množiny je odvoditelný – a tedy vyplývá – spor. Tento spor by musel tedy být pravdivý v modelu této množiny, což je nemožné. Každou splnitelnou množinu T lze tedy rozšířit pomocí výše uvedené konstrukce do nějaké existenčně uzavřené mk-teorie S. Jazyk mk-teorie S obsahuje symboly jazyka množiny T a navíc obsahuje spočetně mnoho dalších konstant. Pokud obsahuje samotný jazyk množiny T spočetně mnoho jmenných konstant, což jsme zatím neproblematicky předpokládali, musí být konstant v jazyce mk-teorie S také spočetně mnoho. Jelikož univerzum U modelu I^S sestává z konstant jazyka mk-teorie S, musí být samozřejmě spočetné. `QED`

Tvrzení lze formulovat také tak, že každá splnitelná množina sentencí `KPL` má model nad univerzem přirozených čísel. Jeho obecnější podoba tvrdí, že má-li množina sentencí `KPL` model, má i model libovolné vyšší mohutnosti, tedy i mohutnosti vyšší, než je mohutnost spočetná. Nebudeme uvádět detaily příslušného důkazu, jelikož jsme nezavedli dostatečně bohatý množinověteoretický aparát a obecně nepřistoupili na množinové postupy. Vše se nicméně opírá o vhled, že stejný postup, jaký je popsán v důkazu, by měl být možný i tehdy, kdybychom v přechodu od množiny T k množině T^+ přidali do jazyka libovolné, tedy i „nespočetné" množství jmenných konstant, opět při vědomí toho, že je pochybné, zda se jedná o „množství" v pravém slova smyslu. Z hlediska teorie množin je přitom Löwenheimova-Skolemova věta zdrojem tzv. *Löwenheimova-Skolemova paradoxu.* Jeho jádrem je toto:

> Teorie, které jako axiomatizovaná teorie množin presuponují – např. skrze Cantorovu větu, která je v ní dokazatelná – existenci vyšších mohutností, musí mít podle Löwenheimovy-Skolemovy věty spočetné modely či modely nezamýšlených mohutností.

Podívejme se stručně na detaily celého problému. Teorie množin je formalizovatelná v `KPL` jako teorie s jedinou binární predikátovou konstantou $\in$ v perspektivní interpretaci množinového náležení. Každý model teorie množin by měl mít přitom, jak naznačila např. Fregova konstrukce číselné řady $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ nekonečně mnoho prvků, viz oddíl 10.2. K tomu je ale navíc typicky vyžadována existence množiny, která je *sama* nekonečná, neboť má (spočetně) nekonečně prvků.[4] Z hlediska KPL to znamená, že je vyžadována existence prvku a perspektivního modelu, který je ve vztahu $x \in a$ k nekonečně mnoha jiným prvkům x modelu, typicky právě k prvkům značeným jako $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ Dále by měl model axiomů teorie množin obsahovat potenci b prvku a, o níž lze dokázat, že je nespočetná, což znamená, že neexistuje žádné bijektivní přiřazení prvků a prvkům b. Podstatné je ale následující. Neexistence příslušné bijektivní funkce není, jako v dřívějších úvahách, vyjádřena v metajazyce, ale v rámci jazyka KPL skrze jednu z dokazatelných formulí. To znamená, že z *vnějšího pohledu* nijak nepopíráme, že je příslušných prvků spočetně, pouze požadujeme, aby *v rámci modelu* neexistoval objekt c, který reprezentuje existenci příslušného spočetného přiřazení (bijektivní „funkce“ mezi „prvky“ „množin“ a a b). Nic z toho není nijak v rozporu s příslušným metajazykovým tvrzením, tj. paradox nevzniká, neboť spočetnost celého modelu se nezdá nijak vnitřně souviset s existencí či neexistencí daného prvku, tj. jsou vůči sobě externí.

Celá úvaha přitom vykazuje jistý argumentační vzorec, který jsme již sledovali v pokusech o řešení jiných paradoxů, v nichž byla také tendence rozlišovat mezi dvěma rovinami příslušného tvrzení: „uvnitř“ a „vně“. Tak např. verzi paradoxu lháře, která je postavena na větě

já lžu,

která je pravdivá, když je nepravdivá, a *vice versa*, lze rozkrýt jako plynoucí z nerozlišení odkazu

(1) ke konkrétnímu celku vět, které jsem již vyřkl a k nimž se takto z vnějšku vztahuji,

(2) od pozice v tomto celku samotném, z níž nelze odkaz k sobě rekonstruovat, a pokusíme-li se o to, dospíváme ke sporu.

To, co získáme, je pak vlastně wittgensteinovská dialektika toho, o čem lze a o čem již nelze – právě pod hrozbou sporu – hovořit. Její rozvinutí spočívá v tom, že si povšimneme, že v rámci řešení paradoxu hovoříme vlastně o obojím, o čem lze i nelze mluvit, což ale znamená, že překonání sporu netkví a nemůže tkvět v nalezení nějakého externího řešení, nového úhlu pohledu, ale v tomto *překonávání* samém. Tím získá celá záležitost hegelovský rozměr. Kantovy antinomie, kupř. ta, podle níž lze substanci neomezeně dělit a zároveň je nedělitelná, nejsou způsobeny

[4] Srov. k tomu výklad z oddílu 19.5.

chybným vedením rozumu, ale naopak základními rozumovými principy, které na jedné straně vyžadují vždy jasně definovaná a určená řešení (např. přesnou kvantifikaci počtu), na druhé straně tato konkrétní řešení vždy upřesňují a překračují (např. lepší kvantifikací počtu). V tomto ohledu je vše myslitelné z definice sporné, tj. současně diskrétní i spojité, konečné i nekonečné, spočetné i nespočetné atd., a řešení předložených logických a teoretickomnožinových paradoxů snadno následuje.

15.4 Rozhodnutelnost a polorozhodnutelnost

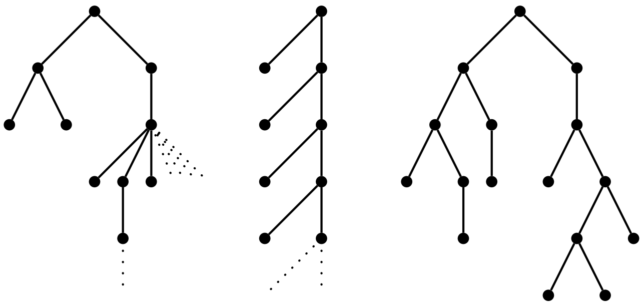
Zmínili jsme, že úvahy o rozhodnutelnosti hrají v KPL specifikou roli, a to právě proto, že příslušná logika – resp. možnost její kalkulizace – tuto vlastnost ztrácí. Jedná se přitom o úvahy původní, stopovatelné do minulosti až k ideji *logického stroje*, jak ji artikuloval Lully a jak ji pak rozpracovává především Leibniz v myšlence logického kalkulu. Jeho rolí bylo posuzovat platnost argumentů čistě mechanickými, počtářskými prostředky, což je výmluvně vyjádřeno např. zde:

> „Kdyby bylo možné najít znaky či symboly uzpůsobené tak, aby šlo jejich prostřednictvím vyjádřit všechny naše myšlenky zrovna tak jasně a zřetelně, jako jsou v aritmetice vyjádřena čísla a v geometrii čáry, zjevně by bylo možné zacházet se všemi předměty, jsou-li podřízeny rozumnému myšlení, stejným způsobem, jako se to dělá v aritmetice a geometrii. Neboť všechna zkoumání závisející na rozumném myšlení by se uskutečňovala transformací těchto znaků a jistým druhem kalkulu, což by usnadnilo objev mnoha krásných věcí. [...] Nadto by se každý mohl snadno přesvědčit o tom, co bylo objeveno a usouzeno, neboť přezkoumat kalkul by bylo velmi lehké, ať již jeho následováním, nebo zkusmo několika testy, jež by se podobaly devítkové zkoušce v aritmetice. [...] A kdyby někdo pochyboval o tom, co bych předvedl, řekl bych mu: ‚Počítejme, milý pane', a s perem a inkoustem bychom dospěli ke shodě.“[5]

O tom, jak zasahují úvahy o mechaničnosti či efektivitě jistých postupů platnost našich důkazů, přitom celkem názorně svědčí výše dokázaná věta o kompaktnosti, resp. její souvislost se zdánlivě neškodným a intuitivním teorémem, jenž je znám jako Königovo lemma. To se týká matematických struktur známých jako stromy, s nimiž budeme o něco systematičtěji pracovat v další kapitole.

[5] Leibniz [1960, 90 nn.].

Z matematického hlediska se jedná o uspořádané množiny prvků, tzv. *uzlů*, pospojovaných po vzoru stromu do celku, jenž začíná designovaným uzlem, *kořenem*, který nemá žádného předchůdce, a postupuje



Obrázek 15.1: Stromy

následným větvením, které spojuje uzel s jeho následníky. Viz obrázek 15.1. Toto větvení může být jednak nekonečné, tj. jeden uzel může mít za přímé následníky nekonečně mnoho uzlů, jednak může do nekonečna postupovat. Větví nazýváme posloupnost uzlů – po řadě přímých následníků – začínající kořenem a končící buďto v tzv. *listu*, tj. uzlu bez následníka, nebo pokračující do nekonečna. Zmíněné lemma pak říká následující.

15.4.1 Věta (Königovo lemma): *Nekonečný strom, v němž má každý uzel pouze konečně mnoho přímých následníků, má nekonečnou větev.*

Její důkaz se přitom zdá být nasnadě. V konečně se větvícím stromu musí mít uzel – nejprve tedy kořen stromu – s nekonečně mnoha následníky alespoň jednoho přímého následníka, jenž má rovněž nekonečně mnoho následníků. Pokud by tomu tak nebylo, měl by konečně mnoho přímých následníků s konečně mnoha obecnými následníky, úhrnem tedy konečně mnoho následníků, což je spor. Pro určení příslušné nekonečné větve je tedy nutné postupem od kořene vždy jeden takový uzel s nekonečně mnoha následníky vybrat a postupovat dál. Problém je ovšem také zřejmý. To, zda má jeden z konečně mnoha uzlů nekonečně mnoho následníků, nelze efektivně zjistit, protože by to znamenalo všechny tyto následníky projít. Důkaz dané věty se tedy nezakládá na efektivní úvaze, konkrétně na algoritmu, který by hledanou nekonečnou větev, posloupnost uzlů $u_1, u_2, u_3, \ldots$, efektivně generoval, popsal. V tomto smyslu se jedná o tvrzení dokázané neefektivně, nepřímo. Předpoklad, že by každá větev stromu byla konečná, byl doveden ke sporu, aniž by však byla popsána nějaká konkrétní větev nekonečná.

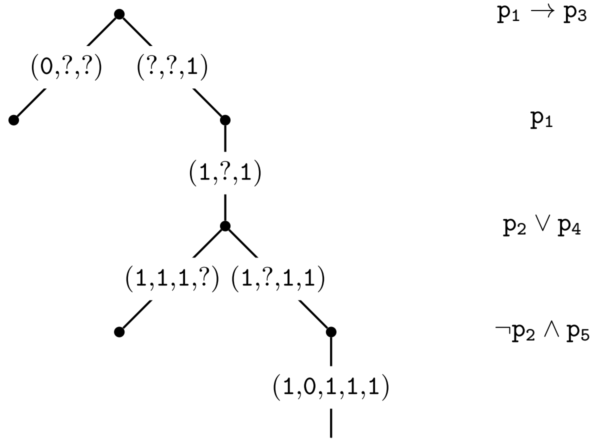
Ukažme souvislost Königova lemmatu s větou o kompaktnosti pro jednodušší případ výrokové logiky. Odkryje se nám tím jádro i ostatních postupů v důkazech věty o úplnosti. Předpokládejme, že má každá konečná podmnožina formulí nějaké (spočetné) množiny S model. Víme, že v omezení na konečné množiny můžeme uvažovat pouze konečně mnoho interpretací. Máme-li formule z S očíslovány přirozenými čísly jako

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots,$$

můžeme brát jednu po druhé a vytvářet tak jakýsi strom jejich ohodnocení. Kořen je označen formulí φ_1 a větvení odpovídají těm ohodnocením, která ji splňují. Následnické uzly jsou pak všechny označeny formulí φ_2, větvení odpovídají ohodnocením, která rozšiřují ohodnocení dané větve a přitom splňují φ_2 atd. Pro konkrétní příklad množiny

$$\{\mathtt{p}_1 \to \mathtt{p}_3, \mathtt{p}_1, \mathtt{p}_2 \vee \mathtt{p}_4, \neg\mathtt{p}_2 \wedge \mathtt{p}_5, \ldots\}$$

to ukazuje obrázek 15.2. Je zřejmé, že takto musíme díky předpokladu splnitelnosti v každém stadiu přidat alespoň jeden další uzel, v důsledku toho jich má strom nekonečně mnoho, a jelikož je každé jeho větvení konečné, musí mít i nekonečnou větev. Ta určuje model množiny S. Nyní



Obrázek 15.2: Kompaktnost

přikročme k přesnějšímu vymezení pojmu rozhodnutelnosti, k němuž nás motivovaly předvedené úvahy a který vyvolávají otázky spojené s kalkulizací KVL a KPL. Obecně řekneme toto:

`15.4.2 Vysvětlení (Rozhodnutelnost):` *Podmnožina O množiny M se nazývá rozhodnutelná, jestliže existuje algoritmus, který pro libovolný prvek $a \in M$ řekne v konečně mnoha krocích* `ANO`*, jestliže $a \in O$, a* `NE`*, jestliže $a \notin O$.*

Je zřejmé, že např. množina všech prvočísel P coby podmnožina všech přirozených čísel N je rozhodnutelná, protože existuje algoritmus, jenž pro dané $m \in N$ v konečně mnoha krocích řekne, zda se jedná o prvočíslo, či nikoli. Popíšeme jej takto:

> Dané číslo m je třeba dělit všemi čísly menšími, jichž je vždy pouze konečně mnoho, a v případě, že je z nich dělitelem m pouze číslo 1, odpovědět `ANO`, v jiném případě `NE`. (Platí přitom, že 1 není prvočíslo).

Ve vztahu k množině všech tautologií `KVL` coby podmnožině všech formulí `KVL` platí totéž, totiž s ohledem na existenci tabulkové metody. Totéž platí pro vyplývání z konečně mnoha premis. Jak jsme již naznačili, množina logicky platných formulí `KPL` vlastnost rozhodnutelnosti v tomto smyslu ztrácí, aniž by přestala být axiomatizovatelná úplným kalkulem. Úplnost přitom s problémem rozhodnutelnosti přímo souvisí, neboť příslušný úplný kalkul lze uchopit jako algoritmus sloužící ke konečnému generování, vyčíslení formulí jisté vlastnosti, totiž těch, co jsou tautologiemi a právě jich. Jelikož vyčíslení nějaké množiny objektů vede k jejich indexování přirozenými čísly, je možné vyčíslitelnost rovnou omezit na podmnožiny přirozených čísel.

`15.4.3 Vysvětlení (Vyčíslitelnost):` *Řekneme, že podmnožina O přirozených čísel N je vyčíslitelná, jestliže existuje algoritmus, který její prvky uspořádá v posloupnost.*

Je zřejmé, že rozhodnutelné množiny (přirozených čísel) jsou vyčíslitelné, což artikuluje následující postup:

> Máme-li rozhodnutelnou množinu O přirozených čísel, stačí procházet čísla $1, 2, 3, \ldots$ jedno po druhém. Jsme-li u čísla m, spustíme na něm algoritmus rozhodnutí a když řekne `ANO`, dáme ho do daného vyčíslení, řekne-li `NE`, pak nikoli. Tento postup zajišťuje, že se ve vyčíslení objeví každý prvek O v konečně mnoha krocích.

Opak přirozeně neplatí, tj. z toho, že mám vyčíslení nějaké podmnožiny O přirozených čísel N, neplyne, že je to podmnožina rozhodnutelná, protože ověření přináležitosti k O obnáší v obecném případě její postupné generování, které mi pro případ, že číslo m v O není, nedá v konečném počtu kroků žádnou odpověď, ale jednoduše neskončí. Přesto mi sama vyčíslitelnost množiny O jistá data k rozhodnutí dává, totiž v případě, že prvek m náleží do O. Pak totiž v konstrukci příslušného vyčíslení musím v konečně mnoha krocích na tento prvek narazit a dostat odpověď `ANO`. V této souvislosti se někdy hovoří o polorozhodnutelnosti.

`15.4.4 Vysvětlení (Polorozhodnutelnost):` *Řekneme, že podmnožina O množiny M je polorozhodnutelná, jestliže existuje algoritmus, který pro libovolný prvek $a \in M$ řekne v konečně mnoha krocích* `ANO` *tehdy a jen tehdy, když $a \in O$.*

Všimněme si, že to, co algoritmus polorozhodnutí provede v případě, že daný vstup nesplňuje ověřovanou vlastnost, není v definici řečeno, tj. může se zastavit a dát odpověď `NE`, ale může také – jako v uvedeném případu vyčíslování – postupovat do nekonečna, tedy nedat odpověď žádnou. Toho budeme svědky v následující kapitole právě v situaci rozhodování logické pravdivosti `KPL`. Platí přitom, že polorozhodnutelnost a vyčíslitelnost koincidují v následujícím smyslu:

> Máme-li polorozhodnutelnou množinu O, nezískáme její vyčíslení jednoduše tak, že bychom na posloupnost $1, 2, 3, \ldots$ nasadili vždy algoritmus polorozhodnutí, neboť to by v okamžiku čísla, které v O není, mohlo vést k nekonečnému cyklu, jenž by nedovolil vyčíslit už žádné číslo další. Namísto toho je třeba postupovat tak, že algoritmus polorozhodnutí aplikujeme jedním krokem na číslo 1, dvěma kroky na čísla $1, 2$, třemi kroky na čísla $1, 2, 3$ atd. Tímto způsobem dospějeme pro každé číslo, které náleží O, a jenom pro ně, v konečně mnoha krocích k odpovědi `ANO`, což umožní jeho zařazení na seznam.

Z uvedené možnosti vyčíslit logicky platné formule `KPL` plyne polorozhodnutelnost logické platnosti `KPL`, která ovšem nijak nenaznačuje cestu k její rozhodnutelnosti. To, že neexistuje jiný algoritmus, který by takovou cestu od polorozhodnutelnosti k rozhodnutelnosti umožnil, tedy že se v případě ověřování logické platnosti formulí `KPL` jedná o skutečně nerozhodnutelný problém, je ovšem tvrzení jiného a podstatně náročnějšího typu než nerozhodnutelnost problému jednou konkrétní metodou.

K provedení důkazu nerozhodnutelnosti by bylo zapotřebí dále vymezit pojem rozhodnutelnosti nějakým schematickým způsobem, stejně jako byla v antickém Řecku konstruovatelnost spjata s pravítkem a kružítkem, a bylo tedy možné formulovat tezi, že kvadratura kruhu není – právě kružítkem a pravítkem – proveditelná. Zmínili jsme v oddílu 10.7, že bez této specifikace není příslušný problém smysluplný, neboť kvadraturu kruhu můžeme provést pomocí rozličných *ad hoc* metod. Stejně tak lze očekávat, že pro danou formuli KPL lze v konečném počtu kroků zjistit, zda se jedná či nejedná o logicky platnou formuli, nikoli však algoritmem, který by šlo použít i pro všechny formule ostatní. Pravítkem a kružítkem algoritmické metody je přitom Turingův stroj, který lze užít jak ke schematickému vymezení pojmu rozhodnutelnosti, tak k vymezení pojmu vyčíslitelnosti. Jeho konkrétní podobu zde ale popisovat nebudeme[6] a i v další kapitole, kde předvedeme verzi kalkulizace KPL (a tudíž i KVL), která je od počátku stavěna jako algoritmus (polo)rozhodnutí, zůstaneme na rovině širšího předporozumění tomu, co to algoritmus je.

[6] Lze ji ve stručné podobě najít třeba zde: Kolman [2008, s. 493].

16

Sémantické stromy

Zformulovali jsme definici logické pravdivosti a vyplývání pro KPL. Avšak již víme, že jednou věcí je daný pojem dobře definovat a jinou věcí je mít k dispozici nějaký postup, který nám pomůže v konkrétním případě rozhodnout, zda daný objekt pod pojem spadá. V minulé kapitole jsme provedli axiomatizaci KPL. Věta o úplnosti nám říká, že pokud je formule logicky pravdivá (resp. pokud vyplývá z určité sady předpokladů), existuje důkaz (resp. odvození), že tomu tak skutečně je – přičemž pojem důkazu (resp. pojem odvození) je zcela přesně vymezený. Z axiomatického systému samého však není nijak patrné, jak tento důkaz sestrojit. Axiomatický systém nám tedy přímo neposkytuje algoritmus pro řešení tohoto typu úloh.

Otázkou nyní bude, jak systematicky zjistit, zda je formule KPL logicky pravdivá, případně jestli vyplývá z určité množiny premis. V případě KVL byla takovým postupem tabulková metoda. Snaha o nalezení analogické metody pro KPL, která by vždy vedla k cíli, je marná. Je dokázáno, že taková metoda neexistuje. Nejenže zatím nebyla nalezena, ale nalezena být ani nemůže. Přesně to je smyslem tvrzení, že predikátová logika prvního řádu je nerozhodnutelná. Nyní se přitom seznámíme s poměrně spolehlivou metodou, která nám dá odpověď ANO vždy, když jí předložíme logicky pravdivou formuli, a nedá nám odpověď ANO, pokud jí předložíme formuli, která logicky pravdivá není. V tomto druhém případě nám někdy dá správnou odpověď NE, když formule není logicky pravdivá, a někdy – a zde je klíčový bod, kvůli kterému se nejedná o rozhodovací proceduru – začne provádět nekonečný výpočet a v žádném okamžiku nerozpozná, jestli tento výpočet je skutečně nekonečný nebo jestli se již blíží správná odpověď.

Uvedené metodě říkáme metoda *sémantických* stromů, abychom je uvedli do kontrastu ke stromům *syntaktickým*, jakými jsou např. konstruující stromy, se kterými jsme se setkali dříve (viz obrázek 3.4). Metodu sémantických stromů si představíme nejprve na výrokové logice, protože tak lze snadno pochopit její princip. K méně intuitivní predikátové logice se pak dostaneme pomocí několika dodatečných úprav. U výrokové logiky představuje metoda sémantických stromů plnohodnotný algoritmus rozhodnutí. Uvidíme, co podstatně nového s sebou zmíněné dodatečné úpravy přinášejí, a budeme tak schopni nahlédnout, v čem spočívá důležitý rozdíl mezi výrokovou a predikátovou logikou.

16.1 Sémantické stromy pro KVL

Metodu sémantických stromů původně navrhl E. W. Beth[1] a do praktičtější podoby blízké té, kterou předkládáme, ji upravili R. M. Smullyan[2] a J. Hintikka.[3] Tato metoda v podstatě odpovídá systematickému hledání protipříkladu, kterému jsme se již věnovali v podkapitole 6.2. Jako určité úskalí daného přístupu jsme uvedli, že v některých případech se úvaha několikrát větví a postup začíná být zdlouhavý a nepřehledný. Zdlouhavost postupu v obecném případě asi odstranit nelze.

Uvádíme zde přitom slůvko „asi“, protože toto tvrzení lze zformulovat jako matematickou větu, kterou se zatím nepodařilo dokázat. Bylo by však velkým překvapením, kdyby ji někdo vyvrátil. Všeobecně se má za to, že bude *asi* pravdivá a dříve nebo později se objeví její důkaz. Problém existence „rychlého algoritmu“ pro výrokovou logiku je ekvivalentní jedné z největších nezodpovězených matematických otázek současnosti – otázce, zda třída P-úloh, tj. takových úloh, které lze řešit v polynomiálním čase, je totožná s třídou NP-úloh, u nichž lze v polynomiálním čase ověřit správnost předloženého řešení. Jinak řečeno, zda lze každý problém, jehož řešení může být počítačem „rychle“ ověřeno, tímto počítačem také „rychle“ vyřešit. Většina odborníků se přiklání k názoru, že tato rovnost neplatí, což odpovídá tomu, že pro výrokovou logiku neexistuje „rychlý“ algoritmus.

[1] Beth [1959].
[2] Smullyan [1968].
[3] Ohledně vývoje metody a příspěvků jednotlivých aktérů panuje jistá kontroverze, kterou popisuje např. Anellis [1990].

Metoda sémantických stromů nám každopádně dává nástroj, jak přehledně zpracovat případy (opakovaného) větvení. Oproti metodě hledání protipříkladu bude potřeba pozměnit způsob zápisu. Pro ilustraci se vraťme k jednoduchému příkladu bez větvení. Máme určit, zda je tautologií formule:

$$\mathtt{p} \to (\mathtt{q} \to \mathtt{p}).$$

Hledejme tedy protipříklad. Je-li formule v nějaké interpretaci nepravdivá, tj. platí-li

$$I(\mathtt{p} \to (\mathtt{q} \to \mathtt{p})) = \mathtt{0},$$

je antecedent $\mathtt{p}$ pravdivý a konsekvent $\mathtt{q} \to \mathtt{p}$ nepravdivý, tj. platí

$$I(\mathtt{p}) = \mathtt{1} \qquad\qquad I(\mathtt{q} \to \mathtt{p}) = \mathtt{0}.$$

Avšak je-li formule $\mathtt{q} \to \mathtt{p}$ nepravdivá, pak platí:

$$I(\mathtt{q}) = \mathtt{1} \qquad\qquad I(\mathtt{p}) = \mathtt{0}.$$

Jinak řečeno: $\mathtt{p}$ je pravdivý a nepravdivý zároveň, což je spor, neboť úhrnem by muselo nastat

$$I(\mathtt{p}) = \mathtt{1} \qquad\qquad I(\mathtt{p}) = \mathtt{0},$$

a my můžeme usoudit, že interpretace, v níž by byla formule $\mathtt{p} \to (\mathtt{q} \to \mathtt{p})$ nepravdivá, neexistuje, a jedná se tedy o tautologii. První zjednodušení, které navrhneme, spočívá v tom, že nebudeme pracovat současně s oběma póly – s pravdivostí i nepravdivostí –, ale omezíme se pouze na pravdivost, což je možné, protože nepravdivost lze chápat jednoduše jako pravdivost negace. Uvedenou úvahu pak lze přehledně zapsat jako sekvenci formulí, které musí být na základě předpokladu pravdivé:

$$\begin{array}{c} \boxed{\neg(\mathtt{p} \to (\mathtt{q} \to \mathtt{p}))} \\ | \\ \mathtt{p} \\ | \\ \neg(\mathtt{q} \to \mathtt{p}) \\ | \\ \mathtt{q} \\ | \\ \neg\mathtt{p} \end{array}$$

Formuli, ze které vycházíme, uvádíme v rámečku. Spor z předešlé úvahy nyní odpovídá tomu, že v této posloupnosti formulí se vyskytuje nějaký atom a zároveň jeho negace. Jak přehledně postupovat v situaci, kdy se nám úvaha větví? Vezměme si otázku, zda je tautologií formule

$$(p \vee (q \wedge p)) \rightarrow p$$

a řešme ji metodou hledání protipříkladu. Existuje-li interpretace, v níž je formule nepravdivá, pak:

$p \vee (q \wedge p)$ je pravdivá a p je nepravdivá.

Díky disjunkci se úvaha větví:

p je pravdivá nebo $q \wedge p$ je pravdivá.

Ani jeden z případů však nemůže nastat, neboť oba vyžadují pravdivost p. Protipříklad tedy neexistuje. Pomocí metody sémantických stromů zapíšeme úvahu takto:

$$\begin{array}{ccc}
 & \boxed{\neg((p \vee (q \wedge p)) \rightarrow p)} & \\
 & | & \\
 & p \vee (q \wedge p) & \\
 & | & \\
 & \neg p & \\
 \swarrow & & \searrow \\
p & & q \wedge p \\
 & & | \\
 & & q \\
 & & | \\
 & & p
\end{array}$$

Rozvedením předpokladu jsme získali strukturu, které budeme říkat *sémantický strom.* V našem příkladě si předpokládaná pravdivost prvního řádku vynucuje pravdivost druhého a třetího řádku. Pravdivost druhého řádku si vynucuje pravdivost alespoň jedné formule uvedené hned po rozvětvení stromu. Pravdivost formule v pravé větvi si vynucuje pravdivost obou formulí, které následují. Strom není kam dál rozvíjet, protože původní formuli jsme rozebrali až ke všem atomům, které se v ní vyskytují.

Pro sémantické stromy si zavedeme užitečnou terminologii, jejíž význam ilustrujeme na příkladě předchozího stromu a kterou jsme již z větší části dříve zmínili v oddílu 15.4. Výskytům formulí na stromu říkáme *uzly* stromu. Nejvýše postavenou formuli nazýváme *kořen* stromu – strom tedy roste shora dolů. Uzly, po kterých již nenásledují žádné další, označujeme jako *listy* stromu či jako koncové uzly. V našem případě má strom dva listy – u obou se jedná o výskyt atomu p. Každá posloupnost uzlů vedoucí od kořene až k listu se nazývá *větev* stromu. Náš strom má dvě větve:

(1) $\neg((p \vee (q \wedge p)) \rightarrow p), p \vee (q \wedge p), \neg p, p,$

(2) $\neg((p \vee (q \wedge p)) \rightarrow p), p \vee (q \wedge p), \neg p, q \wedge p, q, p.$

Obsahuje-li nějaká větev atom spolu s jeho negací, říkáme, že je *větev uzavřená*. V opačném případě, tedy neobsahuje-li větev žádný atom spolu s jeho negací, je *větev otevřená*. Jsou-li všechny větve na stromě uzavřené, jedná se o *uzavřený strom*. Existuje-li na stromě otevřená větev, pak se jedná o *otevřený strom*. V našem případě jsou obě větve stromu uzavřené, a tedy celý strom je uzavřený. Naše metoda se bude chovat rozumně v tom smyslu, že strom se uzavře na všech větvích právě tehdy, když bude rozvíjet tautologii. Toto tvrzení však budeme muset teprve dokázat.

Předtím ale musíme ještě přesně popsat způsob rozvíjení stromu. Strom jsme rozvinuli podle přesně daných pravidel, jejichž kompletní výčet nyní uvedeme. Metoda sémantických stromů pro `KVL` je algoritmem. Je-li dána libovolná formule, slepé následování těchto pravidel vede k určení sémantického stromu této formule. Zde je výčet pravidel. Pro každou binární spojku jsou dvě. Začněme s konjunkcí a disjunkcí:

$$
\begin{array}{cccc}
(\wedge) & (\neg\wedge) & (\vee) & (\neg\vee) \\[2ex]
\begin{array}{c} \phi \wedge \psi \\ | \\ \phi \\ | \\ \psi \end{array}
&
\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(\phi \wedge \psi)} \\ \diagup & \diagdown \\ \neg\phi & \neg\psi \\ & \\ & \end{array}
&
\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\phi \vee \psi} \\ \diagup & \diagdown \\ \phi & \psi \\ & \\ & \end{array}
&
\begin{array}{c} \neg(\phi \vee \psi) \\ | \\ \neg\phi \\ | \\ \neg\psi \end{array}
\end{array}
$$

Vidíme, že zde máme jedno pravidlo pro konjunkci v pozitivní podobě a druhé pro konjunkci v negativní podobě, tj. pro negaci konjunkce. Pro konjunkci tedy zvažujeme dva možné případy. Jeden, když je konjunkce pravdivá, a druhý, když je nepravdivá. Stejně tak je tomu s disjunkcí. Zamysleme se nad tím, co se za pravidly skrývá. Je-li konjunkce pravdivá, jsou oba její členy pravdivé ($\wedge$), je-li nepravdivá, je alespoň jeden z členů nepravdivý ($\neg\wedge$). Je-li disjunkce pravdivá, je alespoň jeden z jejích členů pravdivý ($\vee$), je-li nepravdivá, jsou oba členy nepravdivé ($\neg\vee$). Podobná pravidla můžeme sestrojit pro implikaci a ekvivalenci:

$$
\begin{array}{cccc}
(\rightarrow) & (\neg \rightarrow) & (\leftrightarrow) & (\neg \leftrightarrow) \\[2ex]
\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\phi \rightarrow \psi} \\ \diagup & \diagdown \\ \neg\phi & \psi \\ & \\ & \end{array}
&
\begin{array}{c} \neg(\phi \rightarrow \psi) \\ | \\ \phi \\ | \\ \neg\psi \end{array}
&
\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\phi \leftrightarrow \psi} \\ \diagup & \diagdown \\ \neg\phi & \phi \\ | & | \\ \neg\psi & \psi \end{array}
&
\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(\phi \leftrightarrow \psi)} \\ \diagup & \diagdown \\ \neg\phi & \phi \\ | & | \\ \psi & \neg\psi \end{array}
\end{array}
$$

Je-li implikace pravdivá, pak je antecedent nepravdivý nebo konsekvent pravdivý ($\rightarrow$). Je-li implikace nepravdivá, pak je antecedent pravdivý a konsekvent nepravdivý ($\neg \rightarrow$). Je-li ekvivalence pravdivá, pak jsou buď oba její členy nepravdivé, nebo jsou oba pravdivé ($\leftrightarrow$). Je-li ekvivalence nepravdivá, pak je buď přední člen nepravdivý a zadní pravdivý, nebo přední pravdivý a zadní nepravdivý ($\neg \leftrightarrow$). Doplníme poslední pravidlo dvojité negace. Tu lze vždy bez změny pravdivostní hodnoty škrtnout:

$$(\neg\neg)$$

$$\begin{array}{c} \neg\neg\phi \\ | \\ \phi \end{array}$$

Metodu sémantických stromů ve smyslu příslušného algoritmu zavedeme pro případ vyplývání z konečně mnoha premis. Je přitom zřejmé, že algoritmus lze použít i ke zjišťování toho:

(1) zda je formule tautologií,

(2) zda se jedná o kontradikci,

(3) zda je formule či konečná množina formulí splnitelná.

Tyto problémy jsou totiž na sebe převoditelné:

(1) tautologie vyplývá z prázdné množiny premis,

(2) kontradikce je negací tautologie,

(3) množina formulí je splnitelná, jestliže z ní nevyplývá kontradikce.

Samostatnou otázku tvoří ověřování vyplývání z nekonečně mnoha premis, k němuž se vyjádříme stručně později. Standardním vstupem našeho algoritmu bude momentálně posloupnost:

$$\chi_1, \ldots, \chi_n \vDash \vartheta.$$

Konstruujeme tedy strom, na jehož začátku je posloupnost premis

$$\chi_1, \ldots, \chi_n,$$

která může být i prázdná, a negace závěru

$$\neg\vartheta.$$

Nejprve tedy strom obsahuje buď jednu, nebo více pod sebou seřazených, nevětvících se formulí. Formule, se kterými začínáme, budou vždy uvedeny v rámečku. Strom dále rozvíjíme tím, že na komplexní formule aplikujeme jednotlivá pravidla. Pokud jsme již v procesu rozvíjení stromu aplikovali nějaké pravidlo na určitou formuli, řekneme o ní, že je *vyčerpaná*.

Kvůli stručnosti budeme v tomto kontextu mluvit o formulích, i když by bylo přesnější mluvit o výskytech formulí. Jedna formule se může vyskytovat na dvou oddělených místech stromu a pravidlo je pak třeba aplikovat na oba tyto výskyty. Není-li formule literálem a není-li vyčerpaná, pak o ní řekneme, že je *nevyčerpaná*. Dojdeme-li do stadia, kde již nemáme k dispozici žádnou nevyčerpanou formuli, získáme tzv. *úplně rozvinutý strom pro* `KVL`. Úhrnem máme tuto definici:

`16.1.1 Definice (Metoda sémantických stromů):` *Metodou sémantických stromů pro* `KVL` *rozumíme postup podle následujícího algoritmu, jehož vstupem je testovaná posloupnost „$\chi_1, \ldots, \chi_n \vDash \vartheta$“:*

(1) Sepiš pod sebe premisy $\chi_1, \ldots, \chi_n$ a negaci závěru $\neg\vartheta$.

(2) Existuje-li na výsledném stromu nějaká otevřená větev a nevyčerpaná formule, aplikuj na ni pravidlo podle jejího tvaru, což spočívá v rozvinutí stromu o formule uvedené v závěru pravidla ($\wedge$), ($\neg\wedge$), ($\vee$), ($\neg\vee$), ($\rightarrow$), ($\neg \rightarrow$), ($\leftrightarrow$), ($\neg \leftrightarrow$), ($\neg\neg$). Tyto formule připoj předepsaným způsobem, tj. bez větvení či s příslušným větvením, jako koncové uzly ke každé otevřené větvi, na níž se nevyčerpaná formule nachází.

(3) Nevyčerpanou formuli po aplikaci pravidla označ – např. přeškrtnutím, my ji budeme značit symbolem ✓ – za vyčerpanou.

(4) Celý postup opakuj od bodu (2), dokud to jde, tj. dokud existují nevyčerpané formule.

Důležité je, že ať už začínáme s jakoukoli konečnou sadou formulí, v konečně mnoha krocích dostaneme úplně rozvinutý strom, protože aplikace libovolného pravidla rozloží některou z výchozích formulí či nějakou její podformuli na formule, které jsou méně složité, a v konečně mnoha krocích se tedy musíme dostat až k literálům a rozložit vše, co v dané situaci lze. Proto můžeme říci, že:

> pokud má úplně rozvinutý strom všechny větve uzavřené, řekne metoda `ANO`,
>
> pokud v úplně rozvinutém stromě existuje nějaká otevřená větev, řekne metoda `NE`.

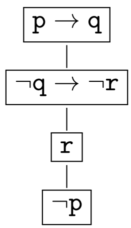
Všimněme si, že jsme neuvedli pořadí, ve kterém máme nevyčerpané formule rozvíjet. Algoritmus tedy není zcela striktní. Různé pořadí formulí, které vyčerpáváme, může ovlivnit tvar stromu, ale neovlivní počet větví a jejich obsah. To znamená, že na tomto pořadí příliš nesejde. Abychom učinili algoritmus zcela deterministický, mohli bychom třeba určit, že vždy pokračujeme nejvýše položenou nevyčerpanou formulí ve větvi, která je nejvíc vlevo z těch, které vůbec nějakou nevyčerpanou formuli obsahují. To je však pro naše účely zbytečné. Pořadí nevyčerpaných formulí budeme volit libovolně. Lze pouze doporučit upřednostnit kvůli úspornosti takové formule, jejichž bezprostřední rozvinutí neznamená větvení stromu. Celý postup ilustrujeme pomocí dvou příkladů, které se již v našem textu objevily. Formalizujeme postupně dva úsudky a pomocí metody sémantických stromů rozhodneme o jejich správnosti z hlediska `KVL`. Uvažme následující úsudek:

> jestliže mám dobrý sluch, pak poznám, že tato hudba je špatná;
> nepoznám-li, že tato hudba je špatná, pak nejsem členem *Hudebního spolku*;
> já ale jsem členem *Hudebního spolku*
> ―――――――――――――――――――――――
> mám dobrý sluch.

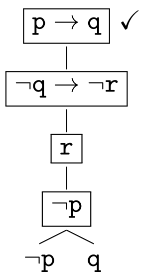
Jeho formalizace vypadá takto:

$$\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}, \neg\mathtt{q} \rightarrow \neg\mathtt{r}, \mathtt{r} \models \mathtt{p}.$$

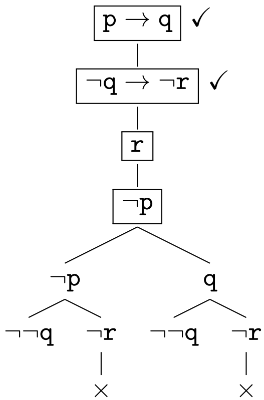
Rozvineme podle algoritmu její strom. Budeme postupovat po jednotlivých krocích. Začneme soupisem premis a negace závěru:



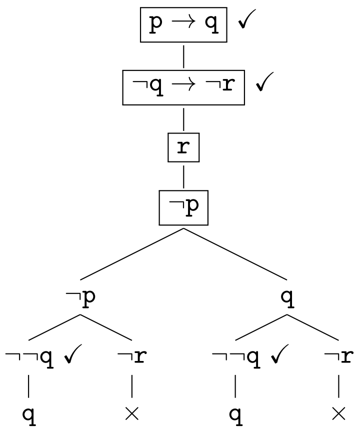
Máme zde jednu větev, čtyři formule, z toho první dvě nevyčerpané. Jsou to implikace, budeme tedy muset strom rozvětvit. Aplikujeme příslušné pravidlo na nejvýše umístěnou formuli:



Aplikovali jsme pozitivní pravidlo pro implikaci na první formuli, kterou jsme poté označili, abychom věděli, že je již vyčerpaná a nemusíme se již o ni starat. Ve stromě je nyní jedna nevyčerpaná formule. Je to opět implikace. Rozvineme ji podle algoritmu na všech větvích, ve kterých se nachází. Formule se přitom nemusí nacházet na všech větvích stromu. Je důležité si uvědomit, že strom pak v tomto kroku nerozvíjíme ve větvích, ve kterých se formule nenachází:



Dvě větve se nám uzavřely, což značíme symbolem ×. Posledním krokem je odstranění dvojitých negací. Jde vlastně o dva kroky, které vykonáme najednou:



Dále pokračovat nemůžeme. Ve stromu již není žádná nevyčerpaná formule. Získali jsme úplně rozvinutý strom, který má čtyři větve, z nichž dvě jsou otevřené a dvě uzavřené. Je to tedy otevřený strom, což svědčí o tom, že závěr naší úlohy nevyplývá z premis.

Velkou výhodou metody, kterou lze okamžitě nahlédnout, je navíc to, že nám ukáže možné *protipříklady*. Na každé otevřené větvi se vyskytuje skupina atomů, které určují nějaké ohodnocení. V našem případě shodou okolností obě otevřené větve obsahují atomy $\mathtt{q}, \mathtt{r}$. Protipříkladem je tedy interpretace I taková, že:

$$I(\mathtt{p}) = 0 \qquad I(\mathtt{q}) = 1 \qquad I(\mathtt{r}) = 1.$$

Metoda stromů pro KVL má tedy komplexní průběh. V případě, že se jedná o případ vyplývání, řekne ANO. V případě, že se nejedná o případ vyplývání, řekne NE a navíc zkonstruuje protipříklad. Přejděme k druhému příkladu. Formalizujme a ověřme platnost úsudku:

viníkem je Petr nebo Pavel a je-li viníkem Petr, pak Pavel nebyl v 11 hodin na místě zločinu;
je-li viníkem Pavel, pak je jasný motiv zločinu
byl-li Pavel v 11 hodin na místě zločinu, pak je jasný motiv zločinu.

Zajímá nás tedy platnost následujícího metatvrzení:

$$(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{p} \rightarrow \neg\mathtt{r}), \mathtt{q} \rightarrow \mathtt{s} \vDash \mathtt{r} \rightarrow \mathtt{s}.$$

Začneme opět soupisem premis a negace závěru:

$$\begin{array}{c}
\boxed{(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{p} \rightarrow \neg\mathtt{r})} \\
| \\
\boxed{\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{s}} \\
| \\
\boxed{\neg(\mathtt{r} \rightarrow \mathtt{s})}
\end{array}$$

Rozvineme konjunkci a označíme ji tečkou:

$$\begin{array}{c}
\boxed{(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{p} \rightarrow \neg\mathtt{r})} \checkmark \\
| \\
\boxed{\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{s}} \\
| \\
\boxed{\neg(\mathtt{r} \rightarrow \mathtt{s})} \\
| \\
\mathtt{p} \vee \mathtt{q} \\
| \\
\mathtt{p} \rightarrow \neg\mathtt{r}
\end{array}$$

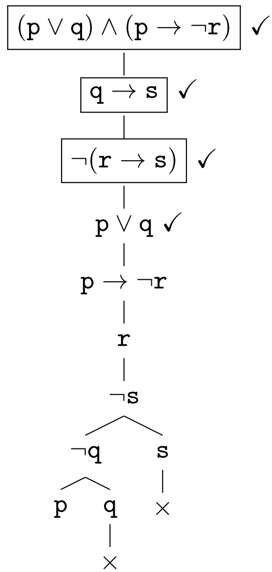
Rozvineme negaci implikace:

$$
\begin{array}{c}
\boxed{(\mathtt{p} \lor \mathtt{q}) \land (\mathtt{p} \to \neg \mathtt{r})}\ \checkmark \\
| \\
\boxed{\mathtt{q} \to \mathtt{s}} \\
| \\
\boxed{\neg(\mathtt{r} \to \mathtt{s})}\ \checkmark \\
| \\
\mathtt{p} \lor \mathtt{q} \\
| \\
\mathtt{p} \to \neg \mathtt{r} \\
| \\
\mathtt{r} \\
| \\
\neg \mathtt{s}
\end{array}
$$

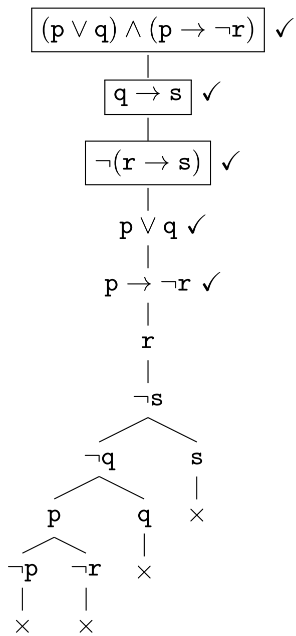
Nyní se již nevyhneme větvení:

$$
\begin{array}{c}
\boxed{(\mathtt{p} \lor \mathtt{q}) \land (\mathtt{p} \to \neg \mathtt{r})}\ \checkmark \\
| \\
\boxed{\mathtt{q} \to \mathtt{s}}\ \checkmark \\
| \\
\boxed{\neg(\mathtt{r} \to \mathtt{s})}\ \checkmark \\
| \\
\mathtt{p} \lor \mathtt{q} \\
| \\
\mathtt{p} \to \neg \mathtt{r} \\
| \\
\mathtt{r} \\
| \\
\neg \mathtt{s} \\
\diagup \quad \diagdown \\
\begin{array}{cc}
\neg \mathtt{q} & \mathtt{s} \\
 & | \\
 & \times
\end{array}
\end{array}
$$

Jedna větev se uzavřela. Je na ní atom `s` i jeho negace. Pokračujeme disjunkcí. Jejím rozvinutím se uzavře další větev. Uzavřené větve je zbytečné dále rozvíjet:



A ještě zbývá rozvinout implikaci. Tím se uzavřou další dvě větve:



Dospěli jsme k úplně rozvinutému stromu, který má čtyři větve. Všechny jsou uzavřené a pokud metoda pracuje korektně – a v příští kapitole ukážeme, že ano –, tak to znamená, že závěr vyplývá z předpokladů. Tímto je metoda stromů pro KVL dostatečně popsána a vysvětlena. Můžeme tedy přejít k příslušným metateoretickým výsledkům, ověřujícím, zda vyhovuje cílům, k nimž byla vybudována.

16.2 Úplnost metody sémantických stromů pro KVL

Naším úkolem je nyní dokázat, že metoda sémantických stromů skutečně funguje podle našich představ. Dokážeme tedy, že závěr vyplývá z premis právě tehdy, když strom, který rozvíjí premisy a negaci závěru, se uzavře ve všech větvích. Zmíněná věta je (metajazykovou) ekvivalencí. Musíme tedy dokázat dvě implikace. Tyto implikace se z pochopitelných důvodů označují termíny, které již známe. Jednou z nich je věta o korektnosti a druhou věta o úplnosti. Přitom jako věta o úplnosti se někdy také označuje celá ekvivalence, tj. obě implikace dohromady. Díváme-li se na celou metodu jako na algoritmický problém prizmatem rozhodnutí a polorozhodnutí případů vyplývání, dostaneme ve výsledku následující závěry:

(1) pokud nastává případ vyplývání, metoda řekne ANO,

(2) pokud metoda řekne ANO, nastává případ vyplývání,

(3) pokud nenastává případ vyplývání, metoda neřekne ANO,

(4) pokud nenastává případ vyplývání, metoda řekne NE.

Po řadě se jedná o:

(1) úplnost metody,

(2) korektnost metody,

(3) kontrapozici korektnosti,

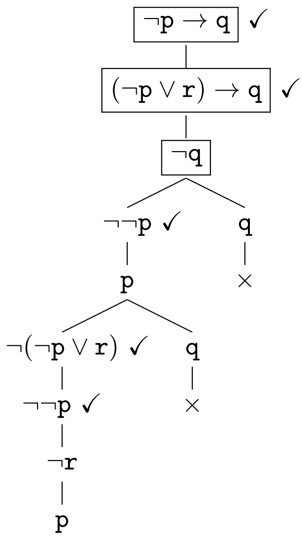
(4) rozhodnutelnost metody, platí-li také (1).

Bod (4) spočívá v tom, že je každý úplně rozvinutý strom konečný, a jako takový nejen nabízí konstrukci protipříkladu, což bude platit i v případě stromů pro KPL, ale tento protipříklad předkládá v konečně mnoha krocích, což již v KPL s ohledem na existenci nekonečných stromů platit nebude. Všimněme si, že přechod od (3) ke (4) je právě ten, který není efektivně možný, a je proto jako logicky platný zpochybněn intuicionistickou logikou, viz úvahy v oddílu 14.6 a dále kapitola 21.

Věta o korektnosti je důsledkem tvrzení, které říká, že splnitelnost se šíří stromem vždy alespoň v jednom směru až k nějakému listu. Přesněji: splnitelný počáteční úsek stromu lze vždy v souladu s pravidly rozšířit do splnitelné větve úplně rozvinutého stromu. Ilustrujme nejprve obsah tvrzení na příkladě. Vezměme si nějakou množinu, o které víme, že je splnitelná, třeba:

$$\{\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}, (\neg\mathtt{p} \lor \mathtt{r}) \to \mathtt{q}, \neg\mathtt{q}\}.$$

Ohodnocení přiřazující nuly atomům $\mathtt{q}$ a $\mathtt{r}$ a jedničku atomu $\mathtt{p}$ je modelem této množiny. Vytvořme úplně rozvinutý strom rozvíjející formule z této množiny:



Tento případ nám umožňuje sledovat, proč a jak se splnitelnost počátečního úseku šířila stromem až do splnitelné větve, ve které je počáteční úsek obsažen. Věta, kterou vzápětí dokážeme, říká, že toto platí zcela obecně. Uvidíme, že důkaz je založen na analýze pravidel, podle kterých strom rozvíjíme. V našem příkladě jsme použili při rozvíjení pětkrát nějaké pravidlo. Nejprve jsme vyšli z úseku obsahujícího formuli $\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}$, na kterou jsme použili odpovídající pravidlo. Došlo tedy k větvení. Na jednu větev jsme přidali $\neg\neg\mathtt{p}$ a na druhou $\mathtt{q}$. Předpokládali jsme, že původní množina je splnitelná. Bez ohledu na to, které konkrétní ohodnocení ji splňuje, je-li v něm pravdivá formule $\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}$, je v něm $\neg\mathtt{p}$ nepravdivá nebo $\mathtt{q}$ pravdivá. Vidíme, že protože je počáteční úsek splnitelný, musí být splnitelné alespoň jedno z jeho bezprostředních prodloužení. Víme, že ve skutečnosti jde o to prodloužení, které přidává formuli $\neg\neg\mathtt{p}$. Něco podobného nastává při aplikaci každého pravidla. Pro ilustraci se ještě podívejme na závěrečný moment rozvíjení zobrazeného stromu. Před provedením předposledního kroku se již ve stromě vyskytoval počáteční splnitelný úsek obsahující formule:

$$\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}, (\neg\mathtt{p} \vee \mathtt{r}) \to \mathtt{q}, \neg\mathtt{q}, \neg\neg\mathtt{p}, \mathtt{p}, \neg(\neg\mathtt{p} \vee \mathtt{r}).$$

Protože je tento úsek splnitelný, existuje interpretace, ve které jsou pravdivé všechny jeho formule, tedy i doposud nevyčerpaná formule $\neg(\neg\mathtt{p}\vee\mathtt{r})$. Pak ale v této interpretaci nemůže být pravdivý ani literál $\neg\mathtt{p}$, ani atom $\mathtt{r}$. Rozšíříme-li úsek o formule $\neg\neg\mathtt{p}$ a $\neg\mathtt{r}$, získáme jistě opět splnitelný úsek:

$$\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}, (\mathtt{p} \vee \mathtt{r}) \to \mathtt{q}, \neg\mathtt{q}, \neg\neg\mathtt{p}, \mathtt{p}, \neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{r}), \neg\neg\mathtt{p}, \neg\mathtt{r}.$$

Přidáme-li nyní $\mathtt{p}$, ani tím splnitelnost nepokazíme. Avšak to jsme již dospěli k otevřené větvi úplně rozvinutého stromu. Vidíme, že povaha pravidel nám v našem příkladě zajistila, že splnitelný úsek se rozšířil vždy alespoň v jednom směru na splnitelný úsek větší délky. Nyní zbývá dokázat tento fakt zcela obecně.

`16.2.1 Věta:` *Předpokládejme, že je dán splnitelný počáteční úsek nějaké větve v úplně rozvinutém stromě. Pak v tomto stromě existuje otevřená větev, která daný úsek obsahuje.*

`Důkaz:` Abychom tvrzení skutečně dokázali, musíme projít každé pravidlo a obecně u něho dokázat, že přidává ke splnitelné množině vždy alespoň v jednom směru formuli, která splnitelnost neporušuje, resp. přidává dvě formule, které splnitelnost neporušují. Probereme pouze pravidla $(\wedge)$, $(\neg\wedge)$ pro konjunkci. Zbylá pravidla můžeme ponechat čtenáři jako cvičení. $(\wedge)$ Předpokládejme tedy nejprve, že splnitelná množina formulí T tvoří počáteční úsek stromu a obsahuje nevyčerpanou formuli $\phi \wedge \psi$, na kterou aplikujeme příslušné pravidlo. Protože je T splnitelná, existuje interpretace I, v níž je vše z T pravdivé. Tedy $I(\phi \wedge \psi) = \mathtt{1}$, což znamená, že $I(\phi) = \mathtt{1}$ a $I(\psi) = \mathtt{1}$. V interpretaci je tedy pravdivé vše z T, ϕ, ψ a rozšířený úsek stromu tvoří splnitelnou množinu formulí. $(\neg\wedge)$ Předpokládejme nyní, že splnitelná množina T obsahuje nevyčerpanou formuli $\neg(\phi \wedge \psi)$. Aplikujeme-li příslušné pravidlo, strom se rozvětvuje. Získáváme dvě rozšíření počátečního úseku T. Jednak je to $T, \neg\phi$ a dále je to $T, \neg\psi$. Ze splnitelnosti množiny T plyne existence interpretace I, v níž je pravdivé vše z T, tedy i $I(\neg(\phi \wedge \psi)) = \mathtt{1}$. Pak ale $I(\phi) = \mathtt{0}$ nebo $I(\psi) = \mathtt{0}$. Tedy v I je pravdivé vše z $T, \neg\phi$ nebo vše z $T, \neg\psi$. To znamená, že aplikujeme-li pravidlo $(\neg\wedge)$, pak alespoň jeden z počátečních úseků bezprostředně rozšiřujících T je splnitelný. V ostatních případech postupujeme podobně. Celkově tento postup ukazuje, že splnitelnost se šíří stromem vždy alespoň v jednom směru až k nějakému listu. Větev obsahující tento list musí být otevřená. `QED`

Následuje věta o korektnosti metody sémantických stromů `KVL`.

`16.2.2 Věta (O korektnosti):` *Je-li úplně rozvinutý strom, který rozvíjí formule $\chi_1, \ldots, \chi_n, \neg\vartheta$, uzavřený, pak $\chi_1, \ldots, \chi_n \vDash \vartheta$.*

`Důkaz:` Postupujme sporem. Předpokládejme, že strom rozvíjející příslušné formule je uzavřený a že neplatí $\chi_1, \ldots, \chi_n \vDash \vartheta$. Druhý z těchto předpokladů znamená, že množina formulí $\{\chi_1, \ldots, \chi_n, \neg\vartheta\}$ je splnitelná. Tato množina tvoří počáteční úsek každé větve našeho stromu. Podle předchozí věty tedy existuje ve stromě větev, která je otevřená. To je spor s předpokládanou uzavřeností stromu. `QED`

Tím máme potvrzenu korektnost metody. Víme tedy, že když nám dá na otázku, zda $\chi_1, \ldots, \chi_n \vDash \vartheta$, odpověď `ANO`, pak závěr skutečně vyplývá z daných premis. Nyní chceme dokázat obrácené tvrzení, tj. že vyplývá-li závěr z premis, příslušný strom je uzavřený a my dostaneme odpověď `ANO`. Nejprve ve zkratce naznačíme, jak budeme v důkazu postupovat. Ukážeme, že na větvích libovolného úplně rozvinutého stromu se nemohou vyskytovat libovolné množiny formulí, ale vždy jen množiny určitého typu. Označíme je jako saturované. Tyto množiny mají speciální vlastnost, totiž že neobsahují-li žádný atom spolu s jeho negací, pak už musí být splnitelné. Tato vlastnost zajistí kýžený výsledek, protože z ní plyne, že otevřený strom obsahuje nějakou větev, která je splnitelná. To, jak uvidíme, odpovídá tvrzení úplnosti. Nejprve tedy potřebujeme definici saturovanosti. Tato definice úzce souvisí s pravidly rozvoje stromů.

`16.2.3 Definice (Saturovaná množina):` *Řekneme, že množina formulí S je saturovaná, splňuje-li pro libovolné formule ϕ, ψ následující podmínky:*

(1) *jestliže $\phi \wedge \psi \in S$, pak $\phi, \psi \in S$,*

(2) *jestliže $\neg(\phi \wedge \psi) \in S$, pak $\neg\phi \in S$ nebo $\neg\psi \in S$,*

(3) *jestliže $\phi \vee \psi \in S$, pak $\phi \in S$ nebo $\psi \in S$,*

(4) *jestliže $\neg(\phi \vee \psi) \in S$, pak $\neg\phi, \neg\psi \in S$,*

(5) *jestliže $\phi \rightarrow \psi \in S$, pak $\neg\phi \in S$ nebo $\psi \in S$,*

(6) *jestliže $\neg(\phi \rightarrow \psi) \in S$, pak $\phi, \neg\psi \in S$,*

(7) *jestliže $\phi \leftrightarrow \psi \in S$, pak $\phi, \psi \in S$ nebo $\neg\phi, \neg\psi \in S$,*

(8) *jestliže $\neg(\phi \leftrightarrow \psi) \in S$, pak $\phi, \neg\psi \in S$ nebo $\neg\phi, \psi \in S$,*

(9) *jestliže $\neg\neg\phi \in S$, pak $\phi \in S$.*

Představme si soubor všech množin formulí. Předchozí definice rozděluje tento soubor na dva podsoubory. V jednom jsou saturované množiny a v druhém nesaturované množiny. Předloží-li nám někdo množinu formulí, např.

$$\{\mathtt{p}, (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee \mathtt{r}, \neg\mathtt{s}\},$$

můžeme jednoznačně rozhodnout, do kterého z těchto souborů patří. V tomto případě vidíme, že se jedná o nesaturovanou množinu, protože obsahuje formuli $(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee \mathtt{r}$, ale neobsahuje ani formuli $\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}$, ani formuli $\mathtt{r}$. Není tedy splněna třetí podmínka předchozí definice. Jako příklady saturovaných množin uveďme tyto:

$$\{\mathtt{p}, (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee \mathtt{r}, \neg\mathtt{s}, \mathtt{r}\},$$

$$\{\neg\mathtt{p}\},$$

$$\{\mathtt{p} \to (\mathtt{q} \wedge \neg\mathtt{p}), \neg\mathtt{p}, (\mathtt{p} \wedge \neg\neg\mathtt{q}) \vee \mathtt{r}, \mathtt{p} \wedge \neg\neg\mathtt{q}, \mathtt{p}, \neg\neg\mathtt{q}, \mathtt{q}\}.$$

Žádná z těchto množin neporušuje žádnou podmínku z definice saturovanosti. Nyní ukážeme, že neobsahuje-li saturovaná množina žádný atom spolu s jeho negací, je splnitelná. Uvědomme si přitom, že tato vlastnost není nijak samozřejmá. Pro mnoho nesaturovaných množin neplatí. Např. nesaturovaná množina $\{\mathtt{p} \to \mathtt{q}, \mathtt{p}, \neg\mathtt{q}\}$ neobsahuje žádný atom spolu s jeho negací a splnitelná není.

`16.2.4 Konvence (Interpretace k formulím):` *Saturované množině S přiřadíme interpretaci I^S, která je definována následujícím způsobem: $I^S(\mathtt{p}) = \mathtt{1}$ právě tehdy, když $\mathtt{p} \in S$.*

Tímto způsobem je pro danou množinu S přiřazena pravdivostní hodnota každému atomu $\mathtt{p}$, a I^S je tedy skutečně interpretací.

`16.2.5 Věta:` *Předpokládejme, že S je saturovaná množina formulí neobsahující žádný atom spolu s jeho negací. Pak interpretace I^S je modelem množiny S.*

`Důkaz:` Musíme dokázat, že pro každou formuli $\vartheta \in S$ platí, že $I^S(\vartheta) = \mathtt{1}$. Postupujeme indukcí. Metodu indukce však musíme přizpůsobit povaze metody sémantických stromů. U každé formule ukážeme, že tvrzení platí pro tuto formuli samu i pro její negaci. Jak hned uvidíme, dovolí nám to použít v induktivním kroku silnější induktivní předpoklad než obvykle. (i) Pro atomické formule tvrzení platí přímo z definice interpretace I^S. Případ negace atomické formule je též přímočarý. Jestliže $\neg\mathtt{p} \in S$, pak díky předpokladu věty $\mathtt{p} \notin S$. Tedy $I^S(\mathtt{p}) = \mathtt{0}$, tj. $I^S(\neg\mathtt{p}) = \mathtt{1}$. Opět nebudeme procházet všechny další případy. Ověříme případy ($\wedge$) a ($\neg\wedge$) konjunkce a zbytek přenecháme čtenáři. (ii) Induktivním předpokladem je, že tvrzení platí pro formule ϕ a ψ a také pro formule $\neg\phi$ a $\neg\psi$. (ii.i)

Nechť $\phi \wedge \psi \in S$. S je saturovaná, takže díky první podmínce v definici saturovanosti platí, že $\phi \in S$ a $\psi \in S$. Díky induktivnímu předpokladu $I^S(\phi) = 1$ a $I^S(\psi) = 1$. Tedy i $I^S(\phi \wedge \psi) = 1$. (ii.ii) Nyní předpokládejme, že $\neg(\phi \wedge \psi) \in S$. Pak díky druhé podmínce z definice saturovanosti platí $\neg\phi \in S$ nebo $\neg\psi \in S$. Díky induktivnímu předpokladu $I^S(\neg\phi) = 1$ nebo $I^S(\neg\psi) = 1$. Tedy $I^S(\phi) = 0$ nebo $I^S(\psi) = 0$. To znamená, že $I^S(\phi \wedge \psi) = 0$, z čehož plyne $I^S(\neg(\phi \wedge \psi)) = 1$. (ii.iii) V ostatních případech je postup podobný.)iii) Dokázali jsme tedy, že interpretace I je modelem množiny S a tato množina je splnitelná. QED

16.2.6 Věta: *Otevřená větev úplně rozvinutého stromu tvoří saturovanou množinu formulí, na níž se nevyskytuje žádný atom spolu s jeho negací, a tato množina je tedy splnitelná.*

Důkaz: K důkazu saturovanosti dané množiny postačí porovnat pravidla pro rozvíjení stromů s podmínkami v definici saturovanosti. Protože je větev otevřená, neobsahuje žádný atom spolu se svou negací. Z předchozí věty tedy plyne, že tato větev má model a představuje splnitelnou množinu formulí. QED

Pomocí předchozí věty můžeme snadno dokázat úplnost metody sémantických stromů.

16.2.7 Věta (O úplnosti): *Pokud $\chi_1, \ldots, \chi_n \vDash \vartheta$, pak je úplně rozvinutý strom, který rozvíjí formule $\chi_1, \ldots, \chi_n, \neg\vartheta$, uzavřený.*

Důkaz: Postupujeme sporem. Předpokládáme, že $\chi_1, \ldots, \chi_n \vDash \vartheta$, tj. že množina $\{\chi_1, \ldots, \chi_n, \neg\vartheta\}$ není splnitelná. Zároveň pro spor předpokládáme, že strom není uzavřený, tj. že obsahuje otevřenou větev. Podle předchozí věty musí být množina formulí tvořící tuto větev splnitelná. Pak je ale splnitelná také každá její podmnožina. To platí speciálně i pro počáteční úsek $\{\chi_1, \ldots, \chi_n, \neg\vartheta\}$. To je spor. QED

Máme tedy potvrzení, že pro každý pozitivní případ vyplývání řekne metoda stromů ANO. Vedlejším produktem důkazu je i to, že na základě otevřené větve úplně rozvinutého stromu, kterou chápeme jako množinu formulí S, vždy můžeme zkonstruovat protipříklad I^S k tvrzení, že daný závěr vyplývá z premis. Konstrukce je jednoduchá. Daný atom je v interpretaci pravdivý právě tehdy, když leží na této otevřené větvi. Máme tedy potvrzeno i to, že pokud se o případ vyplývání nejedná, metoda řekne NE a tento závěr podloží konkrétním protipříkladem.

Pokud bychom v rámci KVL připustili nekonečně mnoho premis, záležitost by se značně zkomplikovala, protože bychom museli z definice přijmout existenci nekonečných stromů. To by celou věc zatížilo nikoli z teoretického hlediska, ale z hlediska algoritmického. Jak bychom postupovali, jsme přitom částečně naznačili dříve, v rámci oddílu 15.4. Premisy by do těla stromu musely být přidávány postupně, přičemž s ohledem na větu o kompaktnosti platí, že nastává-li $T \vDash \vartheta$, děje se tak již pro nějakou konečnou podmnožinu množiny T, což znamená, že se strom i v nekonečném případě uzavře po konečně mnoha krocích. Problematický je ale právě případ, kdy $T \vDash \vartheta$ neplatí: pak totiž v případě nekonečného T přestane být daný algoritmus algoritmem rozhodnutí. V následujícím oddílu uvidíme, že v `KPL` nás tentýž výsledek čeká i při omezení na konečné T.

16.3 Sémantické stromy pro KPL

Nyní je naším cílem rozšířit metodu sémantických stromů tak, abychom ji mohli aplikovat i na predikátovou logiku. Opět chceme metodu používat při řešení otázky, zda je daná formule logicky pravdivá či zda nějaká formule vyplývá z daných premis. Omezíme se přitom na sentence. Jak jsme již naznačili, není to nijak podstatné omezení. Platí totiž, že formule je logicky platná právě tehdy, když je logicky platný její generální uzávěr. Ve větách 14.9.10 a 14.9.12 jsme navíc ukázali, jak vztah globálního i lokálního vyplývání mezi formulemi redukovat na vztah vyplývání mezi sentencemi.

Princip rozvoje stromu bude analogický tomu, který již známe z `KVL`. Musíme však systém pravidel rozvoje obohatit o pravidla pro kvantifikované formule a jejich negace, což povede k jistým komplikacím a úpravám dané metody. Nejprve přidáme dvě pravidla pro negované případy. Ta jsou velmi jednoduchá:

$(\neg\forall)$

$$\begin{array}{c} \neg(\forall \mathtt{y})\phi \\ | \\ (\exists \mathtt{y})\neg\phi \end{array}$$

$(\neg\exists)$

$$\begin{array}{c} \neg(\exists \mathtt{y})\phi \\ | \\ (\forall \mathtt{y})\neg\phi \end{array}$$

Pravidla pro pozitivní případy jsou o něco složitější, neboť k nim patří ještě doplňující podmínky, jak je specifikujeme níže:

$(\forall)$

$$\begin{array}{c} (\forall \mathtt{y})\phi \\ | \\ \phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} \end{array}$$

$(\exists)$

$$\begin{array}{c} (\exists \mathtt{y})\phi \\ | \\ \phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} \end{array}$$

Pro pravidlo $(\forall)$ platí, že $\mathtt{c}$ je nějaká jmenná konstanta, která se vyskytuje na té větvi, na které pravidlo aplikujeme. Pouze v případě, že se na takové větvi doposud žádné jméno nevyskytlo, představuje $\mathtt{c}$ nějaké nově zavedené jméno. Obecně kvantifikované formule se chovají v sémantických stromech jinak než formule ostatní. Často musíme na jednu obecně kvantifikovanou formuli aplikovat právě uvedené pravidlo vícekrát během jednoho rozvoje. Ostatní formule vždy aplikací příslušného pravidla „vyčerpáme" a nemusíme si jich nadále všímat. Oproti tomu obecné formule nikdy „nevyčerpáváme" (tj. na obecné formule se terminologie „vyčerpanosti" nevztahuje), necháváme je k dispozici pro další použití, a proto je nikdy nebudeme označovat symbolem $\checkmark$. Pozitivní pravidlo ($\exists$) pro existenční kvantifikátor vypadá velmi podobně jako to pro obecný kvantifikátor, jeho použití se však od předchozího podstatně liší. Zcela zásadní je, že – na rozdíl od pravidla pro obecný kvantifikátor – $\mathtt{c}$ musí být vždy nové jméno, tj. takové, které se na větvi, na níž pravidlo aplikujeme, zatím nevyskytlo. Protože jmen máme v jazyce KPL nekonečně mnoho a protože před každou formulí na každém sémantickém stromu bude vždy jen konečně mnoho sentencí, nemusíme se bát, že bychom jmenné konstanty někdy vypotřebovali, a tudíž již neměli žádné k dispozici pro další aplikaci uvedeného pravidla.

Proč při aplikaci pravidla pro obecný kvantifikátor substituujeme již dříve použitá jména (existují-li nějaká) a při aplikaci pravidla pro existenční kvantifikátor substituujeme vždy jména nová? Důvod je prostý. Pokud máme k dispozici nějaké obecné tvrzení, můžeme ho aplikovat na všechny objekty, které známe a které jsme již pojmenovali. Víme-li např., že každá planeta naší sluneční soustavy obíhá kolem Slunce a že Merkur, Venuše atd. jsou planety naší sluneční soustavy, lze usoudit, že Merkur obíhá kolem Slunce, Venuše obíhá kolem Slunce atd. Na druhé straně, máme-li k dispozici existenční tvrzení, můžeme si objekt, jehož existenci toto tvrzení vyjadřuje, pojmenovat. Neměli bychom však použít jména, která jsou již vyhrazena pro jiné objekty. Např. když astronomové objevili, že v naší sluneční soustavě existuje planeta, která se nachází za Uranem, mohli zavést pro tento nový objekt jméno. Nebylo však vhodné označit tuto novou planetu třeba jménem „Mars", neboť toto jméno bylo již použito pro jiný objekt a v našem názvosloví by tak došlo k dvojznačnosti působící značné problémy. Byly by pak např. pravdivé kontradiktorické věty jako „Mars je čtvrtou planetou naší sluneční soustavy a zároveň Mars není čtvrtou planetou naší sluneční soustavy". Mohli však zvolit jakékoli jiné jméno – a objevitel planety Urbain Le Verrier zvolil jméno „Neptun" –, které pro žádnou planetu použito nebylo.

Tento obrázek je dobré mít na paměti, přestože v našem případě je situace komplikovanější v tom, že pojmenovaný objekt není určen jednoznačně, neboť existenční tvrzení říká jen, že alespoň jeden objekt dané vlastnosti existuje, a připouští tedy, že těchto objektů může být více. Rozvoj stromu pro sentence KPL ilustrujeme na příkladech.

`Příklad 16.3.1:` Máme pomocí stromové metody zjistit, zda je logicky platná sentence:

$$(\exists \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})).$$

Rozvineme strom začínající negací dané sentence:

$$\boxed{\neg(\exists \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}))}$$

Aplikujeme negativní pravidlo pro existenční kvantifikátor ($\neg\exists$) a tím způsobem vyčerpáme první sentenci:

$$\begin{array}{c}
\boxed{\neg(\exists \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}))} \checkmark \\
| \\
(\forall \mathtt{x})\neg(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}))
\end{array}$$

Nyní jsme v situaci, kdy musíme použít pozitivní pravidlo pro obecný kvantifikátor ($\forall$) a nemáme k dispozici na dané větvi žádné jméno. Jedině v takové situaci zavádíme při aplikaci tohoto pravidla nové jméno (třeba `c`) a pokračujeme v rozvoji. Obecnou formuli nevyčerpáváme:

$$\begin{array}{c}
\boxed{\neg(\exists \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}))} \checkmark \\
| \\
(\forall \mathtt{x})\neg(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})) \\
| \\
\neg(\mathtt{P}(\mathtt{c}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}))
\end{array}$$

Dále můžeme použít negativní pravidlo pro implikaci ($\neg \rightarrow$). Na to navážeme hned použitím negativního pravidla pro obecný kvantifikátor ($\neg\forall$):

$$\begin{array}{c}
\boxed{\neg(\exists \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}))} \checkmark \\
| \\
(\forall \mathtt{x})\neg(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})) \\
| \\
\neg(\mathtt{P}(\mathtt{c}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})) \checkmark \\
| \\
\mathtt{P}(\mathtt{c}) \\
| \\
\neg(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \checkmark \\
| \\
(\exists \mathtt{x})\neg\mathtt{P}(\mathtt{x})
\end{array}$$

Aplikujeme pozitivní pravidlo pro existenční kvantifikátor ($\exists$), musíme tedy zavést nové jméno, tj. takové, které se na větvi ještě nevyskytuje. Vybereme třeba `d`:

$$
\begin{array}{c}
\boxed{\neg(\exists \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}))} \checkmark \\
| \\
(\forall \mathtt{x})\neg(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})) \\
| \\
\neg(\mathtt{P}(\mathtt{c}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})) \checkmark \\
| \\
\mathtt{P}(\mathtt{c}) \\
| \\
\neg(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \checkmark \\
| \\
(\exists \mathtt{x})\neg\mathtt{P}(\mathtt{x}) \checkmark \\
| \\
\neg\mathtt{P}(\mathtt{d})
\end{array}
$$

Když se nám na větvi objevilo nové jméno, musíme na něj opět vztáhnout obecně kvantifikovanou formuli, která se nachází výše. Poté ihned aplikujeme pravidlo pro negaci implikace. Tak se nám objeví na jediné větvi tohoto stromu elementární formule $\mathtt{P}(\mathtt{d})$ spolu se svou negací $\neg\mathtt{P}(\mathtt{d})$. Tím se tato větev, a tedy celý strom uzavře a my nebudeme muset pokračovat v jeho rozvíjení:

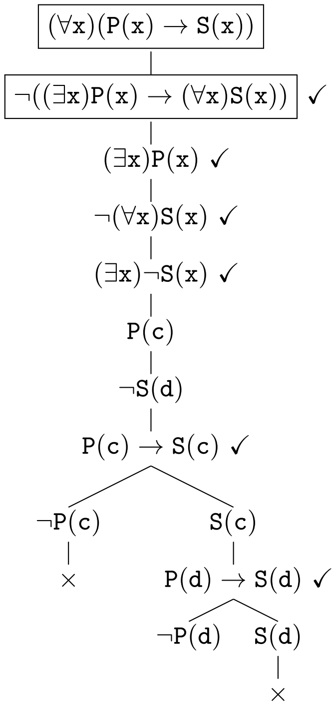
$$
\begin{array}{c}
\boxed{\neg(\exists \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}))} \checkmark \\
| \\
(\forall \mathtt{x})\neg(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})) \\
| \\
\neg(\mathtt{P}(\mathtt{c}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})) \checkmark \\
| \\
\mathtt{P}(\mathtt{c}) \\
| \\
\neg(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \checkmark \\
| \\
(\exists \mathtt{x})\neg\mathtt{P}(\mathtt{x}) \checkmark \\
| \\
\neg\mathtt{P}(\mathtt{d}) \\
| \\
\neg(\mathtt{P}(\mathtt{d}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})) \checkmark \\
| \\
\mathtt{P}(\mathtt{d}) \\
| \\
\neg(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \\
| \\
\times
\end{array}
$$

Brzy dokážeme, že stejně jako u výrokové logiky dává uzavřenost stromu kladnou odpověď na výchozí otázku, tj. v našem případě na otázku, zda je sentence $(\exists \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}))$ logicky platná. Ukážeme ještě několik příkladů úplně rozvinutého stromu.

`Příklad 16.3.2:` Ptáme se, zda platí:

$$(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{S}(\mathtt{x})) \models (\exists \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to (\forall \mathtt{x})\mathtt{S}(\mathtt{x}).$$

Rozvíjíme tedy strom, jehož počátečním úsekem je předpoklad a negace závěru. Po aplikaci pravidel vypadá úplně rozvinutý strom takto:



Podle našich pravidel již dále v rozvoji pokračovat nelze. Vidíme, že výsledný strom má jednu otevřenou větev. Později dokážeme, že to opět znamená, že vztah vyplývání neplatí.

Opět přitom můžeme z otevřené větve zkonstruovat interpretaci, která představuje protipříklad k výchozímu úsudku. Jeho univerzum bude sestávat z množiny konstant, které se vyskytují na otevřené větvi, tj. univerzum interpretace je množina $\{\mathtt{c}, \mathtt{d}\}$. Každé konstantě (jakožto objektu jazyka) je přiřazena interpretací tato konstanta sama (jakožto objekt univerza). Realizace predikátů $\mathtt{P}$ a $\mathtt{S}$ se bude řídit elementárními formulemi, které se vyskytují na otevřené větvi stromu. V našem případě to jsou formule $\mathtt{P}(\mathtt{c})$ a $\mathtt{S}(\mathtt{c})$. V souladu s tím je realizace predikátu $\mathtt{P}$ stejně tak jako realizace predikátu $\mathtt{S}$ množina $\{\mathtt{c}\}$. Necháme na čtenáři, aby si ověřil, že v této interpretaci platí formule $(\forall\mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{S}(\mathtt{x}))$, ale již nikoli $(\exists\mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to (\forall\mathtt{x})\mathtt{S}(\mathtt{x})$. Tento postup zanedlouho zobecníme, aby byl použitelný na každý otevřený úplně rozvinutý strom.

Příklad 16.3.3: Ověříme nyní jeden ze zákonů, které jsme potřebovali při formulaci algoritmu převádějícího formule do prenexního normálního tvaru. Jelikož nám v těchto zákonech vystupují celá schémata, a nikoli jednotlivé formule, ověření musí být také schematické. Vytvoříme úplně rozvinutý strom pro směr $(\Rightarrow)$ z ekvivalence (k) z podkapitoly 14.10:

$$(\forall\mathtt{x})\vartheta \to \chi \vDash_l (\exists\mathtt{x})(\vartheta \to \chi), \text{ není-li } \mathtt{x} \text{ volná v } \chi.$$

V rozvoji si povšimněme především místa, kde potřebujeme podmínku, že $\mathtt{x}$ není volná v χ. To znamená, že pro libovolnou konstantu $\mathtt{c}$ platí $\chi^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}} = \chi$, a tedy i $(\neg(\vartheta \to \chi))^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}} = \neg(\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}} \to \chi)$. To se projeví v levé i pravé větvi stromu. Přitom v pravé větvi nám fakt, že formule χ je substitucí nepozměněna, zajistí uzavření této větve:

$$\begin{array}{c}
\boxed{(\forall\mathtt{x})\vartheta \to \chi} \ \checkmark \\
| \\
\boxed{\neg(\exists\mathtt{x})(\vartheta \to \chi)} \ \checkmark \\
| \\
(\forall\mathtt{x})\neg(\vartheta \to \chi) \\
\swarrow \qquad \searrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\neg(\forall\mathtt{x})\vartheta \ \checkmark & \chi \\
| & | \\
(\exists\mathtt{x})\neg\vartheta \ \checkmark & (\neg(\vartheta \to \chi))^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}} = \neg(\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}} \to \chi) \ \checkmark \\
| & | \\
\neg\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}} & \vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}} \\
| & | \\
(\neg(\vartheta \to \chi))^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}} = \neg(\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}} \to \chi) \ \checkmark & \neg\chi \\
| & | \\
\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}} & \times \\
| & \\
\neg\chi & \\
| & \\
\times &
\end{array}$$

Protože jsme v tomto stromě nepracovali s jednotlivými formulemi, ale se schématy, potřebujeme ke zdůvodnění toho, že výsledný strom je skutečně uzavřený, ještě ukázat, že obsahuje-li počáteční úsek nějakého úplně rozvinutého stromu formuli a její negaci, pak všechny větve stromu, které daný úsek obsahují, jsou uzavřené. Lze to dokázat indukcí podle složitosti formule, což už ponecháme čtenáři jako cvičení. Skutečnost, že metoda sémantických stromů byla formulována jen pro sentence, zatímco v ověřovaném tvrzení bychom potřebovali pracovat i s formulemi otevřenými, je rovněž ošetřena větou 14.9.12, která převádí problém lokálního vyplývání na otázku vyplývání mezi sentencemi.

Ve výrokové logice jsme se při rozvoji stromu vždy nutně dostali po konečně mnoha krocích do situace, kdy již nešlo aplikovat žádné pravidlo. To bylo způsobeno tím, že jsme každou formuli jejím použitím vyčerpali. V predikátové logice se však vyskytují obecně kvantifikované formule, a ty nevyčerpáváme. To může způsobit, že se rozvoj stromu zacyklí a dojde k produkci nekonečného stromu.

`Příklad 16.3.4:` Pro ilustraci zkusíme ověřit, zda je logicky pravdivá sentence $\neg(\forall x)(\exists y)R(x,y)$. Rozvíjíme strom. Postup je jednoznačný:

$$
\begin{array}{c}
\boxed{\neg\neg(\forall x)(\exists y)R(x,y)}\ \checkmark \\
| \\
(\forall x)(\exists y)R(x,y) \\
| \\
(\exists y)R(c_1,y)\ \checkmark \\
| \\
R(c_1,c_2) \\
| \\
(\exists y)R(c_2,y)\ \checkmark \\
| \\
R(c_2,c_3) \\
| \\
(\exists y)R(c_3,y)\ \checkmark \\
| \\
R(c_3,c_4) \\
| \\
\vdots
\end{array}
$$

Tento nekonečný strom tvoří jedna nekonečná větev, na které se vyskytuje nekonečně mnoho konstant $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots$ a elementární formule $R(c_1,c_2), R(c_2,c_3), R(c_3,c_4), \dots$ To nám – stejně jako v předchozím případě – určuje nějaký protipříklad:

$$c_1 \longrightarrow c_2 \longrightarrow c_3 \longrightarrow \cdots$$

Univerzum interpretace tvoří opět množina konstant na otevřené větvi. Realizaci predikátu R určují elementární formule na této větvi. Sentence $\neg(\forall x)(\exists y)R(x,y)$ je skutečně v této interpretaci nepravdivá.

Všimněme si, že metoda sémantických stromů nám sice pomohla nalézt nějaký protipříklad, nikoli však ten nejjednodušší možný. Tím by byla interpretace, jejíž univerzum obsahuje jediný objekt, řekněme a, a kde realizace predikátu R obsahuje dvojici $\langle a, a\rangle$. U stromů pro výrokovou logiku nebylo podstatné pořadí, v jakém jsme při rozvíjení aplikovali pravidla. V konečně mnoha krocích muselo dojít na každé pravidlo, které bylo vůbec možné při rozvoji aplikovat. U stromů predikátové logiky je situace jiná. Viděli jsme, že se rozvoj může zacyklit, a při nesystematické aplikaci pravidel bychom se tak mohli vyhnout použití některého z pravidel, které by mohlo cyklení předejít. Vše osvětlí následující příklad.

`Příklad 16.3.5:` Zvažme tento úsudek v přirozeném jazyce:

> každý miluje někoho, kdo je laskavý,
> <u>nikdo laskavý není krutý</u>
> ne všichni jsou krutí.

Naším úkolem je tento úsudek formalizovat a rozhodnout na základě metody sémantických stromů, zda se jedná o úsudek platný z hlediska predikátové logiky. Formalizace vypadá takto:

$$(\forall \mathtt{x})(\exists \mathtt{y})(\mathtt{L}(\mathtt{y}) \land \mathtt{M}(\mathtt{x},\mathtt{y})), (\forall \mathtt{x})(\mathtt{L}(\mathtt{x}) \to \neg \mathtt{K}(\mathtt{x})) \models \neg(\forall \mathtt{x})\mathtt{K}(\mathtt{x}).$$

Nejprve budeme rozvíjet strom nesystematickou aplikací pravidel:

$$\begin{array}{c}
\boxed{(\forall \mathtt{x})(\exists \mathtt{y})(\mathtt{L}(\mathtt{y}) \land \mathtt{M}(\mathtt{x},\mathtt{y}))}\\
|\\
\boxed{(\forall \mathtt{x})(\mathtt{L}(\mathtt{x}) \to \neg \mathtt{K}(\mathtt{x}))}\\
|\\
\boxed{\neg\neg(\forall \mathtt{x})\mathtt{K}(\mathtt{x})} \ \checkmark\\
|\\
(\forall \mathtt{x})\mathtt{K}(\mathtt{x})\\
|\\
(\exists \mathtt{y})(\mathtt{L}(\mathtt{y}) \land \mathtt{M}(\mathtt{c}_1,\mathtt{y})) \ \checkmark\\
|\\
\mathtt{L}(\mathtt{c}_2) \land \mathtt{M}(\mathtt{c}_1,\mathtt{c}_2)\\
|\\
(\exists \mathtt{y})(\mathtt{L}(\mathtt{y}) \land \mathtt{M}(\mathtt{c}_2,\mathtt{y})) \ \checkmark\\
|\\
\mathtt{L}(\mathtt{c}_3) \land \mathtt{M}(\mathtt{c}_2,\mathtt{c}_3)\\
|\\
(\exists \mathtt{y})(\mathtt{L}(\mathtt{y}) \land \mathtt{M}(\mathtt{c}_3,\mathtt{y})) \ \checkmark\\
|\\
\mathtt{L}(\mathtt{c}_4) \land \mathtt{M}(\mathtt{c}_3,\mathtt{c}_4)\\
|\\
\vdots
\end{array}$$

Získali jsme nekonečný otevřený strom podobný tomu, který jsme uvedli výše. Avšak nezávisle na metodě sémantických stromů lze ověřit, že závěr naší úlohy skutečně vyplývá z jejích premis, a pokud naše metoda funguje tak, jak má, strom by se měl uzavřít. Musíme se tedy zeptat, co je závadného na uvedeném postupu a systematicky se podobným jevům vyhnout. Povšimněme si, že problémem je, že v popsaném nekonečném rozvoji nikdy nevyčerpáme určité formule, které bychom přitom vyčerpat mohli, např. sentenci $\mathtt{L}(\mathtt{c}_2) \wedge \mathtt{M}(\mathtt{c}_1, \mathtt{c}_2)$. Takový strom proto není úplně rozvinutý, přestože je nekonečný.

Nežádoucímu efektu, kdy se neuzavře strom, který by uzavřen být mohl, se vyhneme tím, že pozitivní pravidlo pro kvantifikátory použijeme jen tehdy, když nemůžeme použít žádné jiné pravidlo. Algoritmus načrtnutý v KVL se tedy změní následujícím způsobem.

`16.3.6 Definice (Metoda sémantických stromů):` *Metodou sémantických stromů pro* KPL *nazveme následující algoritmus, jehož vstupem je posloupnost „$\chi_1, \ldots, \chi_n \vDash \vartheta$“ sentencí* KPL*:*

(1) Sepiš pod sebe premisy $\chi_1, \ldots, \chi_n$ a negaci závěru $\neg\vartheta$.

(2) Vyčerpej nejprve všechny formule, na něž jsou aplikovatelná pravidla KVL.

(3) Dále aplikuj negativní pravidla pro kvantifikátory $(\neg\forall)$, $(\neg\exists)$ a vyčerpej všechny negace kvantifikovaných formulí.

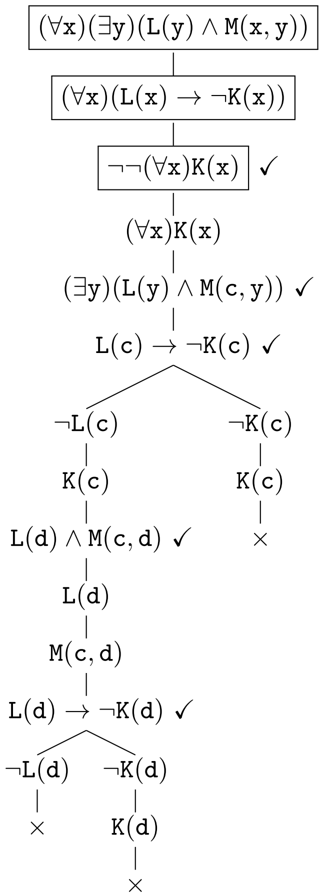
(4) Poté vyčerpej existenční formule pravidlem $(\exists)$. Získáš-li při tomto rozvoji formule, na něž lze aplikovat pravidla z KVL*, ihned je aplikuj.*

(5) Nelze-li aplikovat jiné pravidlo, rozviň všechny obecné formule o instance všech jmen, která se vyskytují na odpovídajících větvích, podle pravidla $(\forall)$. Nevyskytuje-li se na dané větvi žádné jméno, zaveď nové. Získáš-li při tomto rozvoji formule, na něž lze aplikovat pravidla z KVL*, ihned je aplikuj.*

(6) Průběžně uzavírej větve, kde se vyskytuje elementární formule spolu se svou negací. Tyto větve není třeba dále rozvíjet.

(7) Je-li výsledný strom uzavřený, skonči. Není-li výsledný strom po aplikaci těchto kroků uzavřený, vrať se k bodu (2) nebo, nelze-li aplikovat již žádné pravidlo, skonči.

Držíme-li se popsaného postupu, tak pro předchozí úlohu dospějeme k následujícímu (konečnému) uzavřenému stromu:



Definujeme tedy *úplně rozvinutý strom pro* KPL jako takový (možná nekonečný) strom, jenž byl zkonstruován podle uvedeného postupu a v jehož rozvoji již dále nelze v souladu s pravidly pokračovat.

Poznamenejme, že to, v jakém pořadí pravidla aplikujeme, je důležité pouze v případě, kdy chceme něco usoudit z toho, že se nám strom neuzavřel. Jak jsme viděli, v takovém případě by mohlo špatné pořadí aplikace pravidel vést k chybné informaci. Avšak když používáme pravidla nesystematickým způsobem, tj. v libovolném pořadí, a dospějeme přitom k uzavřenému stromu, je tento výsledek spolehlivý – v takovém případě by se strom uzavřel, i kdybychom důsledně sledovali předepsané pořadí. Tento fakt nám mnohdy usnadní práci. Např. pro předchozí úlohu bychom mohli konstruovat o něco jednodušší strom, v němž vynecháváme některé kroky, které algoritmus rozvoje předepisuje:

$$
\begin{array}{c}
\boxed{(\forall x)(\exists y)(L(y) \land M(x,y))} \\
| \\
\boxed{(\forall x)(L(x) \to \neg K(x))} \\
| \\
\boxed{\neg\neg(\forall x)K(x)} \ \checkmark \\
| \\
(\forall x)K(x) \\
| \\
(\exists y)(L(y) \land M(c,y)) \ \checkmark \\
| \\
L(d) \land M(c,d) \ \checkmark \\
| \\
L(d) \\
| \\
M(c,d) \\
| \\
L(d) \to \neg K(d) \ \checkmark \\
\begin{array}{cc}
\neg L(d) & \neg K(d) \\
| & | \\
\times & K(d) \\
 & | \\
 & \times
\end{array}
\end{array}
$$

Proč je dodržování předepsaného pořadí aplikace pravidel důležité pouze tehdy, když chceme usuzovat z toho, že se nám strom neuzavřel, by mělo být zřejmé z důkazu úplnosti.

16.4 Úplnost metody sémantických stromů pro KPL

Dokazujeme, že úplně rozvinutý strom sestavený v reakci na otázku, zda daná formule vyplývá z jisté konečné množiny formulí, je uzavřený právě tehdy, když odpověď na tuto otázku je ANO. Dokážeme zvlášť obě implikace této ekvivalence. Budeme přitom kopírovat a doplňovat postup, který jsme uplatnili při důkazu úplnosti metody stromů pro KVL. Dokazujeme tedy, že uzavře-li se odpovídající strom, pak závěr úsudku vyplývá z jeho premis. Stejně jako v případě KVL využijeme při důkazu tvrzení, že splnitelný úsek stromu je obsažen v otevřené větvi. Avšak obsah tvrzení je zde jiný, neboť znění této věty (jakožto i znění vět následujících) se tentokrát vztahuje na metodu stromů pro predikátovou logiku.

16.4.1 Věta: *Předpokládejme, že je dán splnitelný počáteční úsek nějaké větve v úplně rozvinutém stromě. Pak v tomto stromě existuje otevřená větev, která daný úsek obsahuje.*

Důkaz: Z definice uzavřené větve plyne, že každá taková větev musí být konečná. Postačí nám tedy, dokážeme-li, že každý splnitelný počáteční úsek, který netvoří celou větev, je obsažen v nějakém splnitelném úseku větší délky.

Je třeba zkontrolovat všechna pravidla. Pro výroková pravidla jsme již tvrzení ověřili v analogické větě 16.2.1. Její důkaz je nyní třeba doplnit o rozbor pravidel pro kvantifikátory. U každého takového pravidla musíme ukázat, že jeho aplikací na splnitelný úsek vzniká splnitelný úsek větší délky. Případ negativních pravidel $(\neg\forall)$, $(\neg\exists)$ je triviální, neboť vždy přidávají k danému úseku formuli logicky ekvivalentní nějaké formuli z tohoto úseku, a to té formuli, která se aplikací pravidla vyčerpá. Přidaná formule tedy musí být pravdivá v každé interpretaci, v níž jsou pravdivé všechny formule z původního úseku. Je-li počáteční úsek splnitelný, je tedy splnitelný i úsek rozšířený o tuto formuli.

Zbývají pozitivní pravidla $(\forall)$, $(\exists)$. Předpokládejme, že T je splnitelný počáteční úsek nějakého stromu. $(\forall)$ Začneme obecným kvantifikátorem, který již máme téměř vyřešený. Z věty 14.8.2 totiž víme, že $(\forall \mathtt{y})\phi \to \phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$ je logicky platná sentence. Z toho plyne, že obsahuje-li splnitelná množina T sentenci $(\forall \mathtt{y})\phi$, je množina $T, \phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$ též splnitelná. $(\exists)$ Nyní předpokládejme, že se ve splnitelném počátečním úseku T vyskytuje sentence $(\exists \mathtt{y})\phi$, na kterou aplikujeme odpovídající pravidlo a přidáváme sentenci $\phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$, kde $\mathtt{c}$ je nějaká nová konstanta nevyskytující se v T. Protože předpokládáme, že úsek T tvoří splnitelná množina sentencí, existuje interpretace I, v níž je pravdivé vše z T. Tedy pro libovolnou valuaci V platí $IV \models (\exists \mathtt{y})\phi$, což znamená, že existuje objekt a z univerza interpretace, pro který platí $IV^{\mathtt{y}}_{a} \models \phi$. Vezměme interpretaci J, která se shoduje ve všem s I, s tou případnou výjimkou, že konstantě $\mathtt{c}$ přiřazuje objekt a. Protože $\mathtt{c}$ se v T nevyskytuje, je v J opět pravdivé vše z T. Musí platit také $JV^{\mathtt{y}}_{a} \models \phi$. Pak podle věty 14.5.2 platí $JV \models \phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$, což znamená, že množina T rozšířena o sentenci $\phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$ je splnitelná. QED

Naprosto stejným argumentem jako v analogické větě 16.2.2 zdůvodníme pomocí předchozího tvrzení korektnost metody sémantických stromů pro predikátovou logiku.

16.4.2 Věta (O korektnosti): *Je-li úplně rozvinutý strom, který rozvíjí formule $\chi_1, \ldots, \chi_n, \neg\vartheta$, uzavřený, pak $\chi_1, \ldots, \chi_n \models \vartheta$.*

Dále dokazujeme, že vyplývá-li závěr z nějakých premis, pak se odpovídající strom uzavře. Nejprve rozšíříme pojem saturované množiny sentencí pro jazyk predikátové logiky. Dodatečné podmínky kopírují dodatečná pravidla pro rozvíjení stromu.

`16.4.3 Definice (Saturovaná množina):` *Nechť S je množina sentencí. Řekneme, že S je saturovaná, splňuje-li pro libovolné formule ϕ, ψ jazyka predikátové logiky podmínky (1–9) z definice 16.2.3 a navíc těchto pět podmínek:*

(10) jestliže $\neg(\forall \mathtt{y})\vartheta \in S$, pak $(\exists \mathtt{y})\neg\vartheta \in S$,

(11) jestliže $\neg(\exists \mathtt{y})\vartheta \in S$, pak $(\forall \mathtt{y})\neg\vartheta \in S$,

(12) jestliže $(\forall \mathtt{y})\vartheta \in S$, pak $\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} \in S$ pro každou konstantu $\mathtt{c}$ z S,

(13) jestliže $(\exists \mathtt{y})\vartheta \in S$, pak $\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} \in S$ pro nějakou konstantu $\mathtt{c}$ z S,

(14) v S se vyskytuje alespoň jedna konstanta.

Například množina sentencí

$$\{(\exists \mathtt{x})(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{c}) \wedge \mathtt{P}(\mathtt{x})), \mathtt{R}(\mathtt{d},\mathtt{c}) \wedge \mathtt{P}(\mathtt{d}), \mathtt{R}(\mathtt{d},\mathtt{c}), \mathtt{P}(\mathtt{d}), (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}), \mathtt{P}(\mathtt{c})\}$$

je saturovaná, neboť pro tuto množinu je splněna každá z uvedených čtrnácti podmínek. Naproti tomu obě následující množiny sentencí

$$\{(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})\},$$
$$\{\mathtt{Q}(\mathtt{c}) \to (\exists \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}), (\exists \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}), (\forall \mathtt{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x}), \mathtt{Q}(\mathtt{d})\}$$

saturované nejsou, neboť v prvním případě se v množině nevyskytuje žádná konstanta, a je tedy porušena podmínka (14). V druhém případě jsou porušeny jak podmínka (12), tak podmínka (13). Nyní každé saturované množině S přiřadíme interpretaci I^S. Definice interpretace I^S je naprosto stejná jako definice kanonické interpretace pro existenčně uzavřené *mk*-teorie, kterou jsme zavedli při axiomatizaci predikátové logiky v oddílu 15.2. To znamená následující:

`16.4.4 Konvence (Interpretace k formulím):` *Univerzum U interpretace I^S tvoří množina konstant, které se vyskytují v S. Díky podmínce (14) máme zajištěno, že se v S vyskytuje alespoň jedna konstanta, a samo univerzum je tedy neprázdné. V interpretaci I^S každá konstanta realizuje sama sebe: $I^S(\mathtt{c}) = \mathtt{c}$. Každý n-ární predikát $\mathtt{Q}^{\mathtt{n}}$ jazyka množiny S je realizován takto: $I^S(\mathtt{Q}^{\mathtt{n}}) = \{\langle \mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_{\mathtt{n}} \rangle \mid \mathtt{Q}^{\mathtt{n}}(\mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_{\mathtt{n}}) \in S\}$.*

Nelze očekávat podobné tvrzení jako pro existenčně uzavřené *mk*-teorie, totiž že sentence je obsažena v S právě tehdy, když platí v I^S. Důvodem je, že saturovaná množina může obsahovat jen několik málo sentencí, zatímco v interpretaci I^S jistě platí nekonečně mnoho sentencí. Navíc saturovaná množina vůbec nemusí být splnitelná. Nám však postačí, že platí následující věta:

16.4.5 Věta: *Nechť S je saturovaná množina sentencí, v níž se nevyskytuje žádná elementární sentence spolu se svou negací. Pak I^S je modelem S.*

Důkaz: Nechť S je saturovaná množina sentencí. Dokazujeme, že platí:

pokud $\vartheta \in S$, pak $I^S \vDash \vartheta$.

Postupujeme indukcí přizpůsobenou metodě sémantických stromů. Jednak na každé úrovni dokazujeme, že tvrzení platí jak pro zvažovanou formuli, tak pro její negaci. Díky tomu můžeme použít silnější induktivní předpoklad. Dále postačí, provedeme-li indukci přes sentence v jazyce mimologických symbolů vyskytujících se v S. (i) Nechť nejprve $\mathtt{Q}(\mathtt{c_1}, \ldots, \mathtt{c_n}) \in S$. Pak z definice interpretace I^S máme:

$$\left\langle I^S(\mathtt{c_1}), \ldots, I^S(\mathtt{c_n}) \right\rangle = \langle \mathtt{c_1}, \ldots, \mathtt{c_n} \rangle \in I^S(\mathtt{Q}).$$

Z toho již plyne, že $I^S \vDash \mathtt{Q}(\mathtt{c_1}, \ldots, \mathtt{c_n})$. Jestliže $\neg\mathtt{Q}(\mathtt{c_1}, \ldots, \mathtt{c_n}) \in S$, pak – protože předpokládáme, že S neobsahuje žádnou elementární sentenci spolu s její negací – platí $\mathtt{Q}(\mathtt{c_1}, \ldots, \mathtt{c_n}) \notin S$. Tedy:

$$\left\langle I^S(\mathtt{c_1}), \ldots, I^S(\mathtt{c_n}) \right\rangle = \langle \mathtt{c_1}, \ldots, \mathtt{c_n} \rangle \notin I^S(\mathtt{Q}).$$

Tedy $I^S \vDash \neg\mathtt{Q}(\mathtt{c_1}, \ldots, \mathtt{c_n})$. (ii) Předpokládáme, že tvrzení platí pro sentence ϕ, ψ a jejich negace. (ii.i) Kroky pro výrokové spojky jsou stejné jako v důkazu analogického tvrzení 16.2.5. (ii.ii) Zbývá dokázat tvrzení pro kvantifikované sentence. Nechť ϕ je formule obsahující maximálně jednu volnou proměnnou – tuto proměnnou označme jako $\mathtt{y}$. Můžeme zde použít induktivní předpoklad, že tvrzení platí pro každou sentenci tvaru $\phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$ (kde $\mathtt{c}$ je konstanta z U) a zároveň pro negace těchto sentencí. Nejprve vyřešíme pozitivní případy kvantifikovaných sentencí. ($\forall$) Nechť tedy $(\forall \mathtt{y})\phi \in S$. Podle definice saturované množiny platí, že pro každé $\mathtt{c} \in U$ je $\phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} \in S$. Podle induktivního předpokladu tedy pro každé $\mathtt{c} \in U$ platí $I^S \vDash \phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$. Vezměme si libovolnou valuaci V v interpretaci I^S. Jelikož platí pro každé $\mathtt{c} \in U$, že $I^S V \vDash \phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$, musí podle věty 14.5.2 platit také pro každé $\mathtt{c} \in U$, že $I^S V^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} \vDash \phi$. Z toho plyne, že $I^S V \vDash (\forall \mathtt{y})\phi$, a jelikož $(\forall \mathtt{y})\phi$ je sentence, platí také $I^S \vDash (\forall \mathtt{y})\phi$. ($\exists$) Nechť $(\exists \mathtt{y})\phi \in S$. Podle definice saturované množiny platí, že pro nějaké $\mathtt{c} \in U$ je $\phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} \in S$, a podle induktivního předpokladu to znamená, že $I^S \vDash \phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$. Vezměme si libovolnou valuaci V. Pak $I^S V \vDash \phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$, a tedy i $I^S V^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} \vDash \phi$, což znamená, že $I^S V \vDash (\exists \mathtt{y})\phi$, a tedy i $I^S \vDash (\exists \mathtt{y})\phi$. Negativní případy ($\neg\forall$), ($\neg\exists$) se vyřeší obdobně. Předpokládejme, že $\neg(\forall \mathtt{y})\phi \in S$, resp. $\neg(\exists \mathtt{y})\phi \in S$. Pak podle definice saturovanosti je v S také sentence $(\exists \mathtt{y})\neg\phi$, resp. $(\forall \mathtt{y})\neg\phi$, a tedy i nějaká, resp. všechny sentence tvaru $\neg\phi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$. Protože se na tyto sentence vztahuje induktivní předpoklad, můžeme dále postupovat stejně jako u pozitivních případů pro kvantifikaci a dokázat, že $I^S \models (\exists \mathtt{y})\neg\phi$, resp. $I^S \models (\forall \mathtt{y})\neg\phi$. Pak jistě i $I^S \models \neg(\forall \mathtt{y})\phi \in S$, resp. $I^S \models \neg(\exists \mathtt{y})\phi$. `QED`

Pro platnost následující věty, která je důsledkem věty předchozí, je nezbytně nutné požadovat, abychom při rozvoji stromu aplikovali pravidla v předepsaném pořadí.

`16.4.6 Věta:` *Otevřená větev úplně rozvinutého stromu tvoří saturovanou množinu formulí, na níž se nevyskytuje žádný atom spolu s jeho negací, a tato množina je tedy splnitelná.*

`Důkaz:` Je třeba porovnat pravidla pro rozvíjení stromu s podmínkami z definice saturované množiny sentencí. Zbytek je zajištěn povahou postupu, podle něhož strom rozvíjíme. `QED`

Důsledkem předchozího tvrzení je následující věta, ke které jsme směřovali, tj. úplnost stromové metody pro `KPL`.

`16.4.7 Věta (O úplnosti):` *Pokud* $\chi_1, \ldots, \chi_n \models \vartheta$, *pak je úplně rozvinutý strom, který rozvíjí sentence* $\chi_1, \ldots, \chi_n, \neg\vartheta$, *uzavřený.*

`Důkaz:` Kopírujeme důkaz analogické věty 16.2.7. `QED`

V definici interpretace I^S je zároveň popsána metoda, jak zkonstruovat z otevřené větve úplně rozvinutého stromu protipříklad. Tím máme dokázány podstatné metateorémy teorie stromů. V další a poslední kapitole věnované predikátové logice budeme studovat poslední případ kalkulizace, který představuje metodologický mezistupeň *axiomatické metody* reprezentované hilbertovským kalkulem a algoritmické metody, jak ji reprezentuje *metoda sémantických stromů.*

17

Kalkuly přirozené dedukce

Úloha hilbertovského kalkulu je výsostně teoretická. Tyto kalkuly poskytují jednak rámec pro explikaci cílů axiomaticko-deduktivní metody, jednak umožňují snadné a elegantní důkazy teorémů, které se týkají této metody samé. Z praktického hlediska důkazového nástroje je ale tento typ kalkulu mimořádně nešikovný, neboť nenabízí jasný způsob, jak v něm samém určitou konkrétní formuli dokázat. S ohledem na to, že je úsporný v úsudkových pravidlech, vede navíc k tomu, že k odvození velmi stručných teorémů typu $\mathtt{p} \to \mathtt{p}$ vyžaduje velký počet dlouhých axiomů, viz příklad 9.2.5. Metoda sémantických stromů je naopak založena praktickou potřebou ověřit logickou pravdivost formule či platnost případu vyplývání, tj. poskytuje návodný postup, jak danou formuli či sled formulí schematicky transformovat tak, aby se jejich příslušná sémantická vlastnost vyjevila.

Metoda přirozené dedukce, jak ji anticipoval Gerhard Gentzen ve svých *Zkoumáních logického usuzování* (1934)[1] a do dnešní podoby upravil a systematizoval Dag Prawitz (1965),[2] v nějakém ohledu sdílí přednosti obou zmíněných metod – hilbertovského kalkulu i sémantických stromů. Jedná se o metodu deduktivní, v tom smyslu, že z lo-

[1] Gentzen [1935].
[2] Prawitz [1965].

gicky platných premis odvozuje kýžený závěr, činí tak nicméně způsobem, který odpovídá praktickému dokazování, včetně důkazu nepřímého, resp. důkazu sporem. Její specifikum oproti metodě hilbertovských kalkulů spočívá v tom, že není založena na axiomech, ale na pravidlech, čímž lépe zachycuje původní vymezení logiky jako oblasti, která nekonstruuje specifickou sféru pravd (totiž pravd logických), ale věnuje se přenosu pravdivosti v původních materiálních oborech. Z toho vyplývají i její zvláštnosti oproti hilbertovské metodě. V dalším budeme používat verzi zápisu, kterou zavedl Frederic Fitch.[3] Podobně jako při výkladu metody sémantických stromů se nejprve budeme zabývat úrovní výrokové logiky, kterou pak vhodným způsobem doplníme, abychom získali systém, který je korektní a úplný vůči sémantice klasické predikátové logiky.

17.1 Kalkul přirozené dedukce pro KVL

Problematika axiomatizace je vedena snahou získat přehledně schematizovaný a uchopitelný pojem důkazu. V hilbertovském kalkulu, kde je důkaz vymezen jako jistá posloupnost formulí, toho bylo zcela jistě dosaženo. Získali jsme dobře fungující a přitom jednoduchý důkazový koncept, a to koncept přímého důkazu. Cena za tuto jednoduchost spočívala v tom, že jsme se do značné míry vzdálili reálné důkazové praxi, která obvykle není založena na prosté posloupnosti vět, z nichž každá je axiomem či něčím, co lze odvodit z dříve dokázaného pomocí nějakého jednoduchého pravidla, ale obsahuje i komplikovanější odkazy a úsudkové zvraty. Podívejme se na některé z nich.

Pro důkaz věty A předpokládáme, že A neplatí, tj. vycházíme z negace věty, kterou chceme dokázat. Tuto negaci, která vede ke sporu, přijímáme ovšem pouze hypoteticky, tj. chováme se k ní na chvilku jen *jako kdyby* byla pravdivá. V hlavní linii důkazu ji pochopitelně za pravdivou považovat nemůžeme, jinak řečeno, v rámci důkazu používáme větu, která se – je-li důkaz sporem úspěšný – později ukáže být nepravdivou. Pokusíme se to ilustrovat na velmi jednoduchém příkladě. Řekněme, že víme, že jsou následující dvě věty pravdivé:

(a) pokud nebyl dnes Jarda v práci, tak navštívil Petra,

(b) Jarda dnes Petra nenavštívil.

Chtěli bychom z toho odvodit (dokázat), že Jarda dnes v práci byl. Mohli bychom nabídnout následující nepřímé zdůvodnění:

[3] Fitch [1952].

(1) hypoteticky předpokládejme, že Jarda dnes v práci nebyl,

(2) zároveň víme, že pokud nebyl v práci, tak navštívil Petra,

(3) pak ale Jarda musel navštívit Petra,

(4) to je ale ve sporu s tím, že víme, že ho nenavštívil,

(5) takže musíme odmítnout náš hypotetický předpoklad, můžeme tudíž tvrdit to, co předpoklad negoval, totiž že Jarda dnes v práci byl.

Vidíme, že toto zdůvodňování není lineární proces, neboť má různé úrovně a podúrovně. Odvozování z hypotetického předpokladu se děje na jiné úrovni než odvozování v hlavní části důkazu. Právě to, že se v hilbertovském kalkulu povedlo tento nelineární proces linearizovat, a tedy zjednodušit, má velký metateoretický význam, neboť to usnadňuje metadůkazy vět, které popisují některé vlastnosti důkazů coby objektů formálního jazyka. Avšak sami jsme viděli, že tato linearizace velmi komplikuje práci uvnitř důkazového systému.

S jednoduchým příkladem axiomatického systému typu přirozené dedukce jsme se již setkali při kalkulizaci sylogistiky. V kalkulech přirozené dedukce ztrácíme linearitu důkazů, ale za tuto cenu získáváme mnoho výhod, např. zachycení techniky nepřímého důkazu. K tomuto účelu opět využijeme symbol $\perp$, který stejně jako dříve můžeme chápat jako zkratku za nějakou formuli, která zastupuje kontradikce, třeba:

$$\neg(\mathtt{p} \to \mathtt{p}).$$

V rámci kalkulu je význam $\perp$ dán pravidlem, které říká, že *spor* je něco, co nastává, když jsme dokázali vzájemně si protiřečící tvrzení:

(S) $\vartheta, \neg\vartheta/\perp$.

Techniku *nepřímého důkazu* pak zachytíme pomocí pravidla

(ND) $[\neg\vartheta : \perp]/\vartheta$,

které čteme takto: formuli ϑ můžeme odvodit tak, že odvodíme spor z její negace. Kalkuly přirozené dedukce jsou založeny na pravidlech a neobsahují žádné axiomy. Každou spojku můžeme charakterizovat pomocí určitých pravidel, která jsou pro tuto spojku specifická. Pro implikaci je například charakteristické pravidlo *modus ponens*:

(MP) $\vartheta \to \chi, \vartheta/\chi$.

Toto pravidlo určuje, jakým způsobem lze při dokazování implikaci využít, tj. jakým způsobem z ní lze něco odvodit. Ještě ale budeme potřebovat jedno pravidlo, které také charakterizuje logické chování implikace. To naopak říká, jak implikaci můžeme získat, čili jakým způsobem lze formuli tohoto tvaru odvodit: formuli $\vartheta \to \chi$ lze odvodit tak, že odvodíme χ z ϑ. Toto pravidlo se nazývá *kondicionální důkaz* a symbolicky ho zapíšeme takto:

(KD) $[\vartheta : \chi]/\vartheta \to \chi$.

Kalkulu sestávajícímu ze čtyř doposud zmíněných pravidel, tedy z (S), (ND), (MP) a (KD), budeme říkat KPD pro KVL. Překvapivě se ukazuje, že omezíme-li se na základní skupinu spojek $\neg, \to$, jak jsme to učinili také v případě hilbertovského kalkulu, určuje KPD celou výrokovou logiku: formule vyplývá z množiny předpokladů právě tehdy, když ji lze pomocí daných čtyř pravidel z těchto předpokladů odvodit. To je věta o úplnosti pro KPD, kterou v následujícím textu dokážeme. Jak vypadají jednotlivá odvození v KPD? Výše jsme uvedli úsudek:

pokud nebyl dnes Jarda v práci, tak navštívil Petra,
<u>Jarda dnes Petra nenavštívil</u>
Jarda dnes v práci byl.

Tento úsudek po formalizaci sestává z premis $\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}, \neg\mathtt{q}$ a závěru $\mathtt{p}$. Zdůvodnění toho, že je platný, jak jsme ho předvedli dříve za použití nepřímého důkazu, můžeme v našem kalkulu zachytit velmi přímočaře. V každém kroku se přitom odvoláváme na nějaké pravidlo:

1	$\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}$	předpoklad
2	$\neg\mathtt{q}$	předpoklad
3	| $\neg\mathtt{p}$	hyp
4	| $\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}$	1
5	| $\mathtt{q}$	3, 4, (MP)
6	| $\neg\mathtt{q}$	2
7	| $\bot$	5, 6, (S)
8	$\mathtt{p}$	3–7, (ND)

Zkratkou „hyp“ vyjadřujeme, že jsme učinili hypotetický předpoklad, a tím jsme založili novou, nižší úroveň důkazu. V té můžeme znovu opsat a použít jakoukoli formuli, která je k dispozici na vyšších úrovních. To jsme také učinili ve čtvrtém a šestém kroku, když jsme do linie hypotetického odvozování vložili formule, které se nacházejí v hlavní linii důkazu. Avšak tento postup nelze obrátit. V hlavní linii důkazu nemůžeme opsat či využít to, co se objevuje v poddůkazu, tedy ani hypotetický předpoklad, ani to, co z něho v rámci poddůkazu odvodíme. Jak lze poddůkaz využít v hlavní linii důkazu, to nám přesně říkají pravidla (ND) a (KD). Tento nesymetrický vztah mezi důkazem a jeho poddůkazem se může promítat i do nižších úrovní, neboť pochopitelně můžeme učinit další hypotetický předpoklad i v rámci poddůkazu. To znamená, že kdykoli můžeme založit poddůkaz poddůkazu. Novou důkazovou úroveň zakládáme horizontálním posunem vpravo. V každé takové úrovni jsou dostupné formule, které se vyskytují na úrovních vyšších. Obráceně to neplatí.

Obecně lze říci, že odvoditelnost formule ϑ z hypotetického předpokladu χ v rámci nějaké úrovně důkazu znamená prostě to, že χ je hypotetický předpoklad, který zakládá novou důkazovou linii, jejíž poslední formulí je ϑ. V našem příkladě je v třetím kroku založena důkazová linie pomocí hypotetického předpokladu $\neg \mathtt{p}$ a z tohoto předpokladu je odvozen spor $\bot$, neboť se jedná o poslední formuli v této linii. Uvidíme, že navzdory tomu, jak jsme nyní pojem důkazu oproti hilbertovskému kalkulu zkomplikovali, samo dokazování v takovémto systému bude mnohem pohodlnější.

V důkazu úplnosti hilbertovského kalkulu hrála zásadní roli věta o dedukci. Obtížná část této věty je syntaktický korelát sémantického tvrzení 7.3.4, které říká, že obecně platí:

jestliže $T, \vartheta \vDash \chi$, pak $T \vDash \vartheta \to \chi$.

Toto tvrzení bychom mohli volně číst také tak, že platí-li v kontextu dané množiny T, že χ vyplývá z ϑ, pak platí $\vartheta \to \chi$. Všimněme si, že kondicionální důkaz (KD) je přímým vtělením tohoto tvrzení dovnitř samotného systému, a korektnost tohoto pravidla tedy závisí právě na platnosti sémantické věty o dedukci. Podobným způsobem závisí korektnost (ND) na tvrzení

jestliže $T, \neg\vartheta \vDash \bot$, pak $T \vDash \vartheta$,

které platí díky tomu, že $\bot$ chápeme jako zkratku za určitou kontradikci, což zároveň zdůvodňuje korektnost pravidla (S). Jelikož (MP) je, jak již víme, také korektní, získáváme korektnost celého systému `KPD`:

pokud je nějaká formule ϑ odvoditelná v `KPD` z množiny formulí T, pak z této množiny také vyplývá.

Jak `KPD` funguje, ilustrujeme blíže na tom, že v tomto systému dokážeme všechny axiomy `HK` pro `KVL`. Tím zároveň zdůvodníme úplnost `KPD`.

Nejprve ukážeme, že je dokazatelný (čili odvoditelný z prázdné množiny předpokladů) axiom ($H1$), tj. každá formule tvaru $\vartheta \to (\chi \to \vartheta)$. Důkaz vypadá následovně:

1	$\vert\ \vartheta$	hyp
2	$\vert\ \vert\ \chi$	hyp
3	$\vert\ \vert\ \vartheta$	1
4	$\vert\ \chi \to \vartheta$	2–3, (KD)
5	$\vartheta \to (\chi \to \vartheta)$	1–4, (KD)

Tento důkaz bychom mohli stručněji zapsat způsobem, ve kterém poddůkazy zaznamenáváme do závorek, které se mohou do sebe vnořovat ve shodě s tím, jak se do sebe vnořují poddůkazy:

$$[\vartheta, [\chi, \vartheta], \chi \to \vartheta], \vartheta \to (\chi \to \vartheta).$$

Je však zjevné, že při složitějších důkazech je mnohem přehlednější, i když méně úsporný, první styl zapisování důkazů. Přejděme ke schématu ($H2$):

1	$\vert\ \vartheta \to (\chi \to \gamma)$	hyp
2	$\vert\ \vert\ \vartheta \to \chi$	hyp
3	$\vert\ \vert\ \vert\ \vartheta$	hyp
4	$\vert\ \vert\ \vert\ \vartheta \to \chi$	2
5	$\vert\ \vert\ \vert\ \chi$	3, 4, (MP)
6	$\vert\ \vert\ \vert\ \vartheta \to (\chi \to \gamma)$	1
7	$\vert\ \vert\ \vert\ \chi \to \gamma$	3, 6, (MP)
8	$\vert\ \vert\ \vert\ \gamma$	5, 7, (MP)
9	$\vert\ \vert\ \vartheta \to \gamma$	3–8, (KD)
10	$\vert\ (\vartheta \to \chi) \to (\vartheta \to \gamma)$	2–9, (KD)
11	$(\vartheta \to (\chi \to \gamma)) \to ((\vartheta \to \chi) \to (\vartheta \to \gamma))$	1–10, (KD)

Posledním schématem hilbertovského kalkulu, který jsme zavedli pro výrokovou logiku, je axiom ($H3$). Zde je jeho důkaz v kalkulu přirozené dedukce:

1	$\mid\ \neg\chi \to \neg\vartheta$	hyp
2	$\mid\ \mid\ \vartheta$	hyp
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\chi$	hyp
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\chi \to \neg\vartheta$	1
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\vartheta$	3, 4, (MP)
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \vartheta$	2
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \bot$	5, 6, (S)
8	$\mid\ \mid\ \chi$	3–7, (ND)
9	$\mid\ \vartheta \to \chi$	2–8, (KD)
10	$(\neg\chi \to \neg\vartheta) \to (\vartheta \to \chi)$	1–9, (KD)

Na bázi této přípravy a předchozích výsledků z hilbertovského kalkulu již můžeme fakticky obratem předvést důkaz úplnosti kalkulu přirozené dedukce pro KVL.

17.1.1 Věta (O úplnosti): KPD *je silně korektní a úplný vůči sémantice* KVL.

Důkaz: Korektnost kalkulu se zdůvodní tak, že ověříme korektnost všech čtyř pravidel, a v textu jsme již popsali, jak toho dosáhnout. Úplnost plyne z toho, že jsme v KPD (pro KVL) schopni dokázat všechny axiomy HK, jak jsme také výše učinili. Vzhledem k tomu, že jediné odvozovací pravidlo HK, totiž *modus ponens*, je obsaženo též v kalkulu přirozené dedukce, jsme schopni vše, co lze odvodit v HK, odvodit též v KPD. Protože HK je silně úplný vůči sémantice KVL (viz věta 9.4.13), musí vůči ní být silně úplný též KPD. QED

Podobně jako implikaci lze pomocí pravidel, která vyjadřují, jakou roli má daná spojka v inferencích, charakterizovat též konjunkci, disjunkci a ekvivalenci. U konjunkce je to velmi přímočaré. Formuli $\vartheta \wedge \chi$ lze odvodit z dvojice formulí ϑ, χ a naopak, obě tyto formule jsou z konjunkce odvoditelné. Tím získáváme tři pravidla charakterizující logiku konjunkce:

($\wedge$a) $\vartheta, \chi / \vartheta \wedge \chi$ ($\wedge$b) $\vartheta \wedge \chi / \vartheta$ ($\wedge$c) $\vartheta \wedge \chi / \chi$.

Disjunkci lze odvodit z obou jejích členů. K čemu ji pak ale lze využít? Řekněme, že máme již odvozenou formuli $\vartheta \vee \chi$ a jsme schopni odvodit formuli γ jak z ϑ, tak z χ. To nám stačí k tomu, abychom mohli odvodit γ. Získáváme tedy tři pravidla charakterizující disjunkci:

($\vee$a) $\vartheta/\vartheta \vee \chi$ ($\vee$b) $\chi/\vartheta \vee \chi$ ($\vee$c) $\vartheta \vee \chi, [\vartheta : \gamma][\chi : \gamma]/\gamma$.

Ekvivalenci můžeme chápat jako implikaci v obou směrech. Z toho plynou následující pravidla pro tuto spojku. Jednak můžeme formuli tvaru $\vartheta \leftrightarrow \chi$ odvodit tak, že odvodíme jednak ϑ z χ a poté odvodíme χ z ϑ. Naopak, máme-li ekvivalenci a jeden z jejích členů, můžeme odvodit ten druhý. Získáváme tedy tato tři pravidla:

($\leftrightarrow$a) $[\vartheta : \chi], [\chi : \vartheta]/\vartheta \leftrightarrow \chi$ ($\leftrightarrow$b) $\vartheta \leftrightarrow \chi, \vartheta/\chi$ ($\leftrightarrow$c) $\vartheta \leftrightarrow \chi, \chi/\vartheta$.

Čtenář si může ověřit korektnost těchto pravidel. Pokud bychom nechtěli chápat spojky $\vee$, $\wedge$ a $\leftrightarrow$ pouze jako zkratky – a připomeňme, že jsme doposud při kalkulizaci chápali $\vartheta \wedge \chi$ jako zkratku za $\neg(\vartheta \to \neg\chi)$, $\vartheta \vee \chi$ jako zkratku za $\neg\vartheta \to \chi$ a $\vartheta \leftrightarrow \chi$ jako zkratku za $(\vartheta \to \chi) \wedge (\chi \to \vartheta)$ – a chtěli bychom je mít explicitně v našem kalkulu, mohli bychom použít právě uvedená pravidla. Systém sestávající z pravidel (S), (ND), (MP), (KD), ($\wedge$a), ($\wedge$b), ($\wedge$c), ($\vee$a), ($\vee$b), ($\vee$c), ($\leftrightarrow$a), ($\leftrightarrow$b) a ($\leftrightarrow$c) je silně korektní a úplný vůči sémantice KVL. Čtenář si to může ověřit tak, že ukáže, jak lze v tomto systému vzájemně ze sebe odvodit jednak formule $\vartheta \wedge \chi$ a $\neg(\vartheta \to \neg\chi)$, dále formule $\vartheta \vee \chi$ a $\neg\vartheta \to \chi$ a také formule $\vartheta \leftrightarrow \chi$ a $(\vartheta \to \chi) \wedge (\chi \to \vartheta)$. Úplnost tohoto systému pak plyne z věty 17.1.1.

`Příklad 17.1.2:` Pro ilustraci toho, jak funguje nejsložitější z nově přidaných pravidel, totiž ($\vee$c), odvodíme $\neg\vartheta \to \chi$ z $\vartheta \vee \chi$:

1	$\vartheta \vee \chi$	předpoklad
2	$\mid\ \neg\vartheta$	hyp
3	$\mid\ \vartheta \vee \chi$	1
4	$\mid\ \mid\ \vartheta$	hyp
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\chi$	hyp
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \vartheta$	4
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\vartheta$	2
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \bot$	6, 7, (S)
9	$\mid\ \mid\ \chi$	5–8, (ND)
10	$\mid\ \mid\ \chi$	hyp
11	$\mid\ \chi$	3–10, ($\vee$c)
12	$\neg\vartheta \to \chi$	2–11, (KD)

Toto odvození si zaslouží komentář, neboť obsahuje některé matoucí momenty. Sledujme linii od bodu 2 k bodu 11, ve které se odvozuje χ z hypotetického předpokladu $\neg\vartheta$. Bod 2 je sám hypotetický předpoklad $\neg\vartheta$. V bodě 3 jsme z nadřazené důkazové linie opsali formuli $\vartheta \vee \chi$. V bodech 4 až 9 jsme χ odvodili z jednoho členu této disjunkce, totiž z ϑ. V bodě 10 jsme χ odvodili z druhého členu, totiž ze samotného χ. Toto odvození může působit podivně, ale je zcela v souladu s pravidly kalkulu přirozené dedukce. Učinili jsme hypotetický předpoklad χ, čímž vzniklo jednoprvkové odvození, jehož první člen je χ a poslední – který je totožný s prvním – je také χ. Shrnuto platí, že v bodě 3 máme určitou disjunkci, v bodech 4 až 9 jsme v jednom poddůkazu odvodili χ z jednoho členu této disjunkce, v bodě 10 jsme v dalším poddůkazu odvodili χ z druhého členu, což dohromady znamená, že můžeme v bodě 11 aplikovat pravidlo ($\vee$c) a odvodit χ na vyšší úrovni.

Užití pravidla ($\vee$c) v běžném usuzování může mít třeba následující podobu. Je dáno určité číslo n. Nevíme přesně, o jaké číslo se jedná, ale máme alespoň informaci, že $n = 3$ nebo $n = 5$. Z hypotetického předpokladu, že $n = 3$, můžeme usoudit, že n je liché číslo. Z hypotetického předpokladu, že $n = 5$, můžeme také usoudit, že n je liché číslo. To nás vede k závěru, že n je liché číslo. Tento závěr už nezávisí ani na hypotetickém předpokladu, že $n = 3$, ani na hypotetickém předpokladu, že $n = 5$. Pro srovnání zvažme ještě jeden nematematický příklad. Řekněme, že došlo k vraždě a ukázalo se, že vrahem je osoba A nebo osoba B. Řekněme, že z hypotetického předpokladu, že vrahem je osoba A, můžeme odvodit, že motivem vraždy byla žárlivost. Z hypotetického předpokladu, že vrahem je osoba B, můžeme také usoudit, že motivem vraždy byla žárlivost. Tím dospíváme k závěru, že motivem vraždy byla žárlivost, a tento závěr už není závislý ani na jednom ze dvou pomocných hypotetických předpokladů, které jsme během usuzování učinili. Této důležité odvozovací technice se obvykle říká *důkaz po případech.*

17.2 Kalkul přirozené dedukce pro KPL

Kalkul přirozené dedukce pro `KPL` získáme tak, že ke `KPD` pro `KVL` doplníme pravidla pro kvantifikátory. Opět jsou dvě cesty. Buď doplníme pouze pravidla pro obecný kvantifikátor a existenční kvantifikátor budeme považovat za symbol, který je definovaný pomocí obecného kvantifikátoru. Tak jsme postupovali, když jsme formulovali hilbertovský kalkul. Nebo můžeme považovat oba tyto symboly za nedefinované a zavedeme pravidla také pro existenční kvantifikátor. Podívejme se nejprve na první z těchto možností.

K formulaci pravidel budeme potřebovat následující pojem. Nechť je dána libovolná formule ϑ a odvození z množiny formulí T, v němž se tato formule vyskytuje. Ke každému výskytu formule ϑ v tomto odvození přiřadíme množinu předpokladů, na nichž (tento výskyt) formule ϑ závisí. Vyskytuje-li se ϑ v hlavní úrovni odvození, tj. je-li to (nikoli hypotetický) předpoklad či formule z předpokladů odvozená, pak je množinou předpokladů, na nichž ϑ závisí, množina T, resp. množina těch formulí z T, které jsou při odvození použity. Vyskytuje-li se ϑ v nějaké nižší úrovni důkazu, pak množinu předpokladů, na nichž ϑ závisí, tvoří T plus hypotetický předpoklad, který zakládá onu úroveň, plus hypotetické předpoklady, které zakládají všechny úrovně nadřazené. Konkrétně platí, že každý hypotetický předpoklad závisí (mimo jiné) sám na sobě.

`Příklad 17.2.1:` Předpokládejme, že máme odvození, které se shoduje svou strukturou s odvozením z konce předchozího oddílu, tj. má následující tvar:

1	ϑ_1				předpoklad
2		ϑ_2			hyp
3		ϑ_3			
4			ϑ_4		hyp
5				ϑ_5	hyp
6				ϑ_6	
7				ϑ_7	
8				ϑ_8	
9			ϑ_9		
10			ϑ_{10}		hyp
11		ϑ_{11}			
12	ϑ_{12}				

Pro toto odvození platí, že ϑ_1 závisí na $\{\vartheta_1\}$, ϑ_2 a ϑ_3 závisí na $\{\vartheta_1, \vartheta_2\}$, ϑ_4 závisí na $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_4\}$, ϑ_5, ϑ_6, ϑ_7 a ϑ_8 závisí na $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_4, \vartheta_5\}$, ϑ_9 závisí na $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_4\}$, ϑ_{10} závisí na $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_{10}\}$, ϑ_{11} závisí na $\{\vartheta_1, \vartheta_2\}$ a ϑ_{12} závisí na $\{\vartheta_1\}$.

Tento pojem závislosti daného výskytu formule na jisté množině předpokladů v rámci daného odvození bude hrát klíčovou roli při formulaci tzv. pravidla generalizace pro obecný kvantifikátor. Obě pravidla pro obecný kvantifikátor vypadají následovně, přičemž u obou je třeba doplnit určitá podstatná omezení, která teprve zajistí jejich korektnost vůči lokálnímu vyplývání:

(GEN) $\vartheta/(\forall \mathtt{y})\vartheta$ (SPE) $(\forall \mathtt{y})\vartheta/\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{t}}$.

Pravidlo (GEN) smíme aplikovat na daný výskyt formule ϑ pouze tehdy, když se proměnná $\mathtt{y}$ nevyskytuje volně v žádném předpokladu, na kterém tento výskyt formule ϑ závisí. Pravidlo (SPE) smíme použít jen tehdy, když je term $\mathtt{t}$ substituovatelný za $\mathtt{y}$ ve formuli ϑ. Pravidlo (GEN) se označuje jako pravidlo generalizace a v určitém smyslu úzce souvisí s pravidlem (`G`), které jsme zavedli v `HK`. Pravidlo (SPE), čili pravidlo specifikace, zase odpovídá axiomu ($H4$) v `HK`. Co jsme o sémantické motivaci těchto pravidel řekli při zavedení `HK`, můžeme zopakovat i zde. (GEN) zachycuje krok, ve kterém z toho, že jsme něco dokázali o nějakém libovolném prvku daného oboru, odvodíme, že to platí pro všechny prvky tohoto oboru. (SPE) odpovídá zase tomu, že obecné tvrzení vztáhneme na jednotlivý případ. Použití těchto pravidel můžeme ilustrovat na následujícím příkladě.

`Příklad 17.2.2:` Předpokládejme, že máme k dispozici následující dvě tvrzení:

(a) pro každé číslo n platí, že pokud je n sudé, pak n^2 je také sudé,

(b) pro každé číslo n platí, že n je sudé právě tehdy, když n není liché.

Z těchto dvou předpokladů chceme odvodit, že pro každé číslo n platí, že pokud n^2 je liché, tak n je liché. Toto odvození bychom mohli formulovat třeba takto:

(1) Nechť n je libovolné číslo.

(2) Hypoteticky předpokládejme, že n^2 je liché. Z toho odvodíme, že n je také liché.

(3) Pro spor předpokládejme, že n není liché.

(4) Z (b) získáváme, že n je sudé.

(5) Z (a) pak získáváme, že n^2 je také sudé, což – znovu díky (b) – je ve sporu s předpokladem, že n^2 je liché.

(6) Tedy pokud n^2 je liché, pak n je liché.

(7) Jelikož n bylo libovolné, platí toto tvrzení pro každé n.

Použijeme-li pro názornost poloformální jazyk, můžeme strukturu tohoto odvození popsat takto:

1	$(\forall n)(n$ je sudé $\rightarrow n^2$ je sudé$)$	předpoklad
2	$(\forall n)(n$ je sudé $\leftrightarrow \neg n$ je liché$)$	předpoklad
3	n^2 je liché	hyp
4	$\neg n$ je liché	hyp
5	n je sudé $\leftrightarrow \neg n$ je liché	2, (SPE), n za n
6	n je sudé	4, 5, $(\leftrightarrow$c$)$
7	n je sudé $\rightarrow n^2$ je sudé	1, (SPE), n za n
8	n^2 je sudé	6, 7, (MP)
9	n^2 je sudé $\leftrightarrow \neg n^2$ je liché	2, (SPE), n^2 za n
10	$\neg n^2$ je liché	8, 9, $(\leftrightarrow$b$)$
11	$\perp$	3, 10, (S)
12	n je liché	4–11, (ND)
13	n^2 je liché $\rightarrow n$ je liché	3–12, (KD)
14	$(\forall n)(n^2$ je liché $\rightarrow n$ je liché$)$	13, (GEN)

Omezující podmínka u pravidla (SPE) je zřejmá. Zabraňuje nám odvodit např. z formule $(\forall \mathtt{x})(\exists \mathtt{y})\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})$ formuli $(\exists \mathtt{y})\mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{y})$. Omezující podmínka u pravidla (GEN) je o něco komplikovanější a plně se objasní až v důkazu korektnosti tohoto pravidla. Důvod pro její zavedení však naznačuje následující příklad.

Příklad 17.2.3: Uvažme následující odvození bez dané podmínky:

1	$\mathtt{P}(\mathtt{x})$	hyp
2	$(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})$	1, (GEN) bez omezení
3	$\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})$	1–2, (KD)

To by nám tedy umožnilo dokázat formuli $\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})$, která není logicky platná. Ovšem v tomto důkazu je pravidlo (GEN) aplikováno na formuli $\mathtt{P}(\mathtt{x})$ a množinu předpokladů, na kterých $\mathtt{P}(\mathtt{x})$ závisí, tvoří právě formule $\mathtt{P}(\mathtt{x})$, a ta obsahuje volnou proměnnou $\mathtt{x}$. Doplňující podmínka nám tedy zabrání učinit tento krok a výše uvedený postup netvoří důkaz.

Nyní uveďme příklad důkazu, který je v souladu s omezující podmínkou pravidla (GEN).

Příklad 17.2.4: Odvodíme z prázdné množiny předpokladů formuli $(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})) \to ((\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to (\forall \mathtt{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x}))$. Postup je následující:

1	$\quad\mid\ (\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x}))$	hyp
2	$\quad\mid\quad\mid\ (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})$	hyp
3	$\quad\mid\quad\mid\ \mathtt{P}(\mathtt{x})$	2, (SPE)
4	$\quad\mid\quad\mid\ (\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x}))$	1
5	$\quad\mid\quad\mid\ \mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})$	4, (SPE)
6	$\quad\mid\quad\mid\ \mathtt{Q}(\mathtt{x})$	3, 5, (MP)
7	$\quad\mid\quad\mid\ (\forall \mathtt{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x})$	6, (GEN)
8	$\quad\mid\ (\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to (\forall \mathtt{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x})$	2–7, (KD)
9	$(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})) \to ((\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to (\forall \mathtt{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x}))$	1–8, (KD)

V řádku 7 jsme aplikovali pravidlo (GEN) na formuli $\mathtt{Q}(\mathtt{x})$, která závisí na hypotetických předpokladech $(\forall \mathtt{x})\mathtt{P}(\mathtt{x})$ a $(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x}))$. Ani v jedné z těchto dvou formulí se nevyskytuje proměnná $\mathtt{x}$ volně, a proto bylo aplikováno pravidlo (GEN) v souladu s dodatečnou podmínkou.

Přistupme k důkazu věty o korektnosti a úplnosti, ve kterém – tak jako v předchozím případě výrokové logiky – využijeme již hotový důkaz úplnosti HK pro KPL. Situace se však komplikuje tím, že odvozování v hilbertovském kalkulu korespondovalo s vyplýváním globálním. Pravidlo (G), které tvoří součást HK pro KPL, je ostatně korektní pouze vzhledem k němu. Na druhé straně, jak jsme viděli, věta o dedukci, jak ji zachycuje pravidlo (KD), platí pouze vzhledem k lokálnímu vyplývání. Vůči němu jsou korektní také všechna pravidla KPD. Vztah HK a KPD se tím stává mírně nepřehledný.

17.2.5 Věta (O úplnosti): *Kalkul přirozené dedukce obsahující pravidla (S), (ND), (KD), (MP) (tj. pravidla* KPD *pro* KVL*), plus pravidla (GEN) a (SPE), je silně korektní a úplný vůči sémantice klasické predikátové logiky (omezíme-li logické symboly na negaci, implikaci a obecný kvantifikátor).*

Důkaz: Korektnost dokazujeme vzhledem k lokálnímu vyplývání. Pak můžeme konstatovat, že pravidla (S), (ND), (KD), (MP) jsou korektní ze stejných důvodů jako ve výrokové logice. Dokážeme korektnost pravidel

(GEN) a (SPE). Abychom dokázali korektnost (GEN), musíme ukázat, že platí následující tvrzení pro libovolnou formuli ϑ a libovolnou množinu formulí T obsahující pouze formule, v nichž se nevyskytuje $\mathtt{y}$ volně:

jestliže $T \models_l \vartheta$, pak $T \models_l (\forall \mathtt{y})\vartheta$.

Předpokládejme tedy, že v T se proměnná $\mathtt{y}$ nevyskytuje volně. Tento předpoklad můžeme využít díky omezující podmínce vztahující se k pravidlu (GEN). Množina T totiž reprezentuje množinu předpokladů, na nichž ϑ závisí v nějaké fázi nějakého odvození. Předpokládejme dále, že $T \models_l \vartheta$. Na základě tohoto předpokladu chceme dokázat $T \models_l (\forall \mathtt{y})\vartheta$. Předpokládejme tedy, že je dána interpretace I a v ní valuace V tak, že $IV \models T$, tj. $IV \models \psi$ pro každé $\psi \in T$. Nechť a je libovolným prvkem univerza interpretace I. Jelikož se $\mathtt{y}$ nevyskytuje volně nikde v T, platí díky větě 14.5.1 také $IV_a^{\mathtt{y}} \models T$. Důvodem je, že ať už si vezmeme jakoukoli formuli $\psi \in T$, budou se shodovat valuace V a $V_a^{\mathtt{y}}$ na všech volných proměnných formule ψ. Díky předpokladu, že ϑ lokálně vyplývá z T, dostáváme, že $IV_a^{\mathtt{y}} \models \vartheta$. Jelikož bylo a libovolným prvkem U_I, plyne z toho, že pro každé $a \in U_I$ platí $IV_a^{\mathtt{y}} \models \vartheta$. Tarského definice pravdy nás pak vede ke kýženému závěru, že $IV \models (\forall \mathtt{y})\vartheta$. Důkaz korektnosti pravidla (SPE) je analogický důkazu věty 14.8.2. Máme dokázat, že za předpokladu, že term $\mathtt{t}$ je substituovatelný za $\mathtt{y}$ ve formuli ϑ, platí:

jestliže $T \models_l (\forall \mathtt{y})\vartheta$, pak $T \models_l \vartheta_{\mathtt{t}}^{\mathtt{y}}$.

Předpokládejme tedy, že term $\mathtt{t}$ je substituovatelný za $\mathtt{y}$ ve formuli ϑ, dále že $T \models_l (\forall \mathtt{y})\vartheta$ a $IV \models T$. Pak $IV \models (\forall \mathtt{y})\vartheta$. To znamená, že pro každé $a \in U_I$ platí $IV_a^{\mathtt{y}} \models \vartheta$. Konkrétně musí platit i $IV_o^{\mathtt{y}} \models \vartheta$ pro $o = IV(\mathtt{t})$. Věta 14.5.2 pak vede k závěru, že $IV \models \vartheta_{\mathtt{t}}^{\mathtt{y}}$. Tím jsme dokončili důkaz korektnosti.

Co se úplnosti týče, můžeme se odvolat na již dokázanou větu 15.3.4 a ukázat, že každé odvození v HK lze simulovat v KPD. Hilbertovský kalkul pro predikátovou logiku vznikl tak, že jsme ke kalkulu pro výrokovou logiku doplnili axiom $(H4)$ a pravidlo (G):

$(H4)$ $(\forall \mathtt{y})\vartheta \to \vartheta_{\mathtt{t}}^{\mathtt{y}}$, je-li $\mathtt{t}$ substituovatelný za $\mathtt{y}$ v ϑ,

(G) $\vartheta \to \chi / \vartheta \to (\forall \mathtt{y})\chi$, nevyskytuje-li se $\mathtt{y}$ volně v ϑ.

Zde narážíme na zmiňovanou obtíž pramenící z toho, že pravidla KPD jsou korektní vzhledem k lokálnímu vyplývání, zatímco pravidlo G je korektní pouze vzhledem ke globálnímu vyplývání. Můžeme však dokázat následující pomocné tvrzení:

(†) pokud je formule odvoditelná v HK z množiny sentencí, pak je z této množiny též odvoditelná v KPD.

Z předchozího tvrzení již lehce vyplývá důkaz úplnosti pro sentence (což, jak víme, nepředstavuje újmu na obecnosti). Předpokládejme, že nějaká sentence ϑ vyplývá z množiny sentencí T. Pak je ϑ odvoditelná z T v HK, jak nám to říká již dokázaná úplnost hilbertovského kalkulu. Podle pomocného tvrzení je ϑ odvoditelná také v KPD z T. Zbývá zdůvodnit pomocné tvrzení (†). Předpokládejme, že posloupnost formulí $\xi_1, \ldots, \xi_n = \vartheta$ je odvozením formule ϑ z množiny sentencí T v HK. Dokážeme indukcí podle délky tohoto odvození, že pro každé i takové, že $1 \leq i \leq n$, platí, že ξ_i je odvoditelná v KPD z T. Musí přitom nastat jedna z následujících možností, které rozebereme zvlášť:

(a) ξ_i je z T nebo je axiomem tvaru $(H1)$, $(H2)$ nebo $(H3)$,

(b) ξ_i je axiomem tvaru $(H4)$,

(c) ξ_i je odvozena z předchozích členů pomocí (MP),

(d) ξ_i je odvozena z předchozích členů pomocí pravidla (G).

V případě (a) víme na základě úvah z předchozího oddílu, že ξ_i je odvoditelná z T. V případě (b) má ξ_i tvar formule $(\forall \mathtt{y})\chi \rightarrow \chi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{t}}$. Můžeme postupovat takto:

$$
\begin{array}{lll}
1 & \quad\big|\ \underline{(\forall \mathtt{y})\chi} & \text{hyp} \\
2 & \quad\big|\ \chi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{t}} & 1, \text{(SPE)} \\
3 & (\forall \mathtt{y})\chi \rightarrow \chi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{t}} & 1\text{–}2, \text{(KD)}
\end{array}
$$

Případ (c) je jednoduchý, neboť *modus ponens* máme k dispozici i v KPD. Konečně v případě (d), kdy ξ_i má tvar $\gamma \rightarrow (\forall \mathtt{y})\chi$ a $\mathtt{y}$ se nevyskytuje volně v γ, můžeme předpokládat, že v KPD existuje odvození formule $\gamma \rightarrow \chi$ z T. Z této formule pak odvodíme $\gamma \rightarrow (\forall y)\chi$ následujícím způsobem:

$$
\begin{array}{lll}
1 & \gamma \rightarrow \chi & \\
2 & \quad\big|\ \underline{\gamma} & \text{hyp} \\
3 & \quad\big|\ \gamma \rightarrow \chi & 1 \\
4 & \quad\big|\ \chi & 2, 3, \text{(MP)} \\
5 & \quad\big|\ (\forall \mathtt{y})\chi & 4, \text{(GEN)} \\
6 & \gamma \rightarrow (\forall \mathtt{y})\chi & 2\text{–}5, \text{(KD)}
\end{array}
$$

V bodě 5 bylo použito pravidlo (GEN) korektně pouze díky předpokladu, že se $\mathtt{y}$ nevyskytuje volně ve formuli γ, ani ve formulích z T, na kterých příslušný výskyt formule χ závisí. Tím je důkaz pomocného tvrzení – a tedy i důkaz úplnosti – dokončen. QED

Kdybychom nechtěli existenční kvantifikátor považovat za definovaný symbol, mohli bychom pro něj zformulovat tato pravidla:

(∃a) $\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{t}}/(\exists \mathtt{y})\vartheta$ (∃b) $(\exists \mathtt{y})\vartheta, [\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} : \chi]/\chi$.

Opět musíme doplnit omezující podmínky. Pravidlo (∃a) smíme použít jen tehdy, když je term $\mathtt{t}$ substituovatelný za $\mathtt{y}$ ve formuli ϑ. Pravidlo (∃b) smíme použít pouze tehdy, když se konstanta $\mathtt{c}$ v důkazu před učiněním hypotetického předpokladu $\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}}$ nevyskytuje a navíc se nevyskytuje ani ve formuli χ. Pravidlo (∃a) na metaúrovni používáme tehdy, když z konkrétního případu odvozujeme existenční tvrzení, např. když z věty „2 je sudé číslo a 2 je prvočíslo" odvodíme „existuje sudé prvočíslo". Pravidlo (∃b) používáme vždy, když máme k dispozici tvrzení, že existuje objekt x, který má danou vlastnost P, a s tímto tvrzením pracujeme na základě obratu: „nechť m je nějaký takovýto objekt". Tím jsme zavedli pro existující objekt nové dočasné jméno, které nám pomůže dospět k určitému závěru. Mějme např. k dispozici dvě tvrzení, a to že (a) každé číslo n, které má vlastnost P, má i vlastnost Q, a že (b) existuje číslo n, které má vlastnost P. Chceme-li odvodit, že (c) existuje číslo n, které má vlastnost Q, můžeme postupovat tak, že nejprve stanovíme jako hypotetický předpoklad, že m je nějaké číslo, které má vlastnost P. Pomocí pravidla specifikace odvodíme z (a), že pokud m má vlastnost P, tak má i vlastnost Q. Užitím (MP) tedy můžeme odvodit, že m má vlastnost Q. Krok odpovídající aplikaci pravidla (∃a) nás vede k závěru, že existuje číslo n, které má vlastnost Q. Tento závěr přitom byl takto odvozen čistě z (a) a (b) a nezávisí na žádném dalším hypotetickém předpokladu.

Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil dokázat korektnost pravidel pro existenční kvantifikátor – zejména pravidla (∃b) – vzhledem k lokálnímu vyplývání. Pravidla pro všechny spojky a operátory ještě jednou uveďme pohromadě v jedné tabulce:

(S)	$\vartheta, \neg\vartheta/\bot$	(ND)	$[\neg\vartheta : \bot]/\vartheta$
(KD)	$[\vartheta : \chi]/\vartheta \to \chi$	(MP)	$\vartheta \to \chi, \vartheta/\chi$
(∧a)	$\vartheta, \chi/\vartheta \wedge \chi$	(∧b)	$\vartheta \wedge \chi/\vartheta$
		(∧c)	$\vartheta \wedge \chi/\chi$
(∨a)	$\vartheta/\vartheta \vee \chi$		
(∨b)	$\chi/\vartheta \vee \chi$	(∨c)	$\vartheta \vee \chi, [\vartheta : \gamma], [\chi : \gamma]/\gamma$
(↔a)	$[\vartheta : \chi], [\chi : \vartheta]/\vartheta \leftrightarrow \chi$	(↔b)	$\vartheta \leftrightarrow \chi, \vartheta/\chi$
		(↔c)	$\vartheta \leftrightarrow \chi, \chi/\vartheta$
(GEN)	$\vartheta/(\forall \mathtt{y})\vartheta$	(SPE)	$(\forall \mathtt{y})\vartheta/\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{t}}$
(∃a)	$\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{t}}/(\exists \mathtt{y})\vartheta$	(∃b)	$(\exists \mathtt{y})\vartheta, [\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} : \chi]/\chi$

Přitom pravidla (GEN), (SPE), (∃a) a (∃b) jsou omezena výše uvedenými podmínkami. Systém sestávající z těchto pravidel je korektní a úplný vůči sémantice predikátové logiky zahrnující všechny uvedené logické symboly. Pro ilustraci uvedeme ještě pár příkladů.

Příklad 17.2.6: Nejprve odvodíme formuli $(\forall x)(\exists y)R(x,y)$ z formule $(\exists y)(\forall x)R(x,y)$:

1	$(\exists y)(\forall x)R(x,y)$	předpoklad
2	$\quad (\forall x)R(x,c)$	hyp
3	$\quad R(x,c)$	2, (SPE)
4	$\quad (\exists y)R(x,y)$	3, (∃a)
5	$(\exists y)R(x,y)$	1–4, (∃b)
6	$(\forall x)(\exists y)R(x,y)$	5, (GEN)

V tomto odvození jsme využili všechna pravidla, která jsme zavedli pro kvantifikátory. Všechny kroky jsou přitom v souladu s dodatečnými podmínkami. Je ilustrativní podívat se, v jakém kroku selže pokus o inverzní odvození formule $(\exists y)(\forall x)R(x,y)$ z formule $(\forall x)(\exists y)R(x,y)$. Takový pokus by mohl vypadat např. takto:

1	$(\forall x)(\exists y)R(x,y)$	předpoklad
2	$(\exists y)R(x,y)$	1, (SPE)
3	$\quad R(x,c)$	hyp
4	$\quad (\forall x)R(x,c)$	3, (GEN)
5	$\quad (\exists y)(\forall x)R(x,y)$	4, (∃a)
6	$(\exists y)(\forall x)R(x,y)$	2–5, (∃b)

Toto odvození je neplatné, neboť v kroku 4 je porušena dodatečná podmínka. Formule $(\forall x)R(x,c)$ je odvozena z formule $R(x,c)$ pomocí pravidla (GEN). Avšak množina předpokladů, na nichž $R(x,c)$ závisí, obsahuje formuli $R(x,c)$. Jelikož proměnná x je v $R(x,c)$ volná, generalizaci nelze provést.

Příklad 17.2.7: V části věnované sémantickým stromům v příkladě 16.3.5 jsme zvažovali následující úsudek, jehož formalizace vypadá takto:

$$(\forall x)(\exists y)(L(y) \wedge M(x,y)), (\forall x)(L(x) \rightarrow \neg K(x)) \vDash \neg(\forall x)K(x).$$

Podíváme se, jak lze závěr tohoto úsudku odvodit z jeho předpokladů v kalkulu přirozené dedukce:

1	$(\forall x)(\exists y)(L(y) \wedge M(x,y))$	předpoklad
2	$(\forall x)(L(x) \rightarrow \neg K(x))$	předpoklad
3	$\quad \neg\neg(\forall x)K(x)$	hyp
4	$\quad\quad \neg(\forall x)K(x)$	hyp
5	$\quad\quad \neg\neg(\forall x)K(x)$	3
6	$\quad\quad \bot$	4, 5, (S)
7	$\quad (\forall x)K(x)$	4–6, (ND)
8	$\quad (\forall x)(\exists y)(L(y) \wedge M(x,y))$	1
9	$\quad (\exists y)(L(y) \wedge M(x,y))$	8, (SPE)
10	$\quad\quad L(c) \wedge M(x,c)$	hyp
11	$\quad\quad L(c)$	10, ($\wedge$b)
12	$\quad\quad (\forall x)(L(x) \rightarrow \neg K(x))$	2
13	$\quad\quad L(c) \rightarrow \neg K(c)$	12, (SPE)
14	$\quad\quad \neg K(c)$	11, 13, (MP)
15	$\quad\quad (\forall x)K(x)$	7
16	$\quad\quad K(c)$	15, (SPE)
17	$\quad\quad \bot$	14, 16, (S)
18	$\quad \bot$	9–17, ($\exists$b)
19	$\neg(\forall x)K(x)$	3–18, (ND)

Část IV

Základní rozšíření a deviace

18

Logika s rovností

Ve zbytku knihy se budeme zabývat různými způsoby, jakými byly klasická výroková logika a klasická predikátová logika dále rozšiřovány a upravovány. Tyto případy mohou být – jako logika modálních výrazů – historicky podstatně starší nežli Fregův kánon, nebo naopak – jako logika vyšších řádů – přímo odpovídat jeho historické podobě. Základ našeho rozlišení tkví ale v následujících bodech:

(a) zda daný systém k tomu, co jsme vyložili pod hlavičkou `KVL` a `KPL`, pouze přidává nové logické operátory, aniž by měnil význam těch, které jsme zavedli,

(b) zda se pokouší o reinterpretaci těchto operátorů.

Jako příklady těchto přístupů uvedeme dva nejvýznamnější reprezentanty tzv. *neklasických logik*, totiž *logiku modální* a *logiku intuicionistickou*. Jde nám zde tedy od počátku především o pojmový a metodologický kontrast, který vyplyne ze srovnání dále uváděných systémů s předloženými klasickými systémy, nikoli o nějaký reprezentativní přehled neklasických logik. K nim patří další významné případy, jako jsou *logiky intenzionální*, *logiky deontické*, *fuzzy-logiky* a další, jejichž studium by bylo z hlediska této knihy samoúčelné. Plnohodnotným podkladem pro ně je stále vydávaná *Příručka (Handbook) filosofické logiky.*[1] První kapitola této části bude patřit rozšířením, která lze považovat za standardní, a to proto, že v obvyklém výkladu KPL již bývají většinou zahrnuta. To se týká zejména klasické logiky s identitou a funktory. Logiky vyšších řádů pojednáme zvlášť, i když se v klasické logice objevily při jejím vzniku a odděleny byly až později z metateoretických důvodů, k nimž patří především nemožnost jejich úplné kalkulizace. Ta je – spolu s dalšími okolnostmi sémantické povahy – řadí blíže kalkulům matematickým.

18.1 Identita jako logický problém

Ve svém *Pojmovém písmu* Frege upozornil na nápadný rys rovnosti,[2] totiž že se chová velmi specifickým způsobem. Ze syntaktického hlediska ji lze pokládat za dvoumístný predikát, ke kterému je třeba připojit dva termy, abychom získali větu. Takto se pak tvrzení

(a) Večernice je totožná s Jitřenkou

příliš neliší od tvrzení

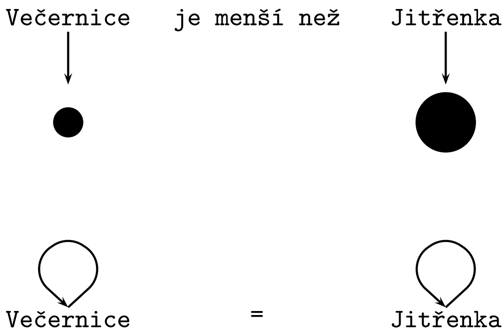
(b) 3 je menší než 5,

(c) Jarda je chytřejší než Honza.

Avšak pokud se, inspirováni Fregem, zaměříme na sémantiku těchto výrazů, můžeme zpozorovat podstatný rozdíl. Věta (b), resp. (c) vyjadřují nějaký vztah mezi tím, co označují výrazy „3“ a „5“, resp. „Jarda“ a „Honza“. Jedná se o relaci mezi jistými objekty univerza diskurzu. Ověření toho, že nastává, vyžaduje, abychom se seznámili s daným faktem, ať již pomocí výpočtu, porovnáním příslušných čísel či intelektuálních kompetencí Jardy a Honzy. U věty (a) tomu tak ale není, protože jejím smyslem není poukázat na to, že jsou nějaké dva objekty objektem jediným – to by mělo dokonce rysy absurdnosti. Důvodem pravdivosti dané věty proto není fakt, že planeta Venuše, kterou výrazy „Večernice“ a „Jitřenka“ označují, je identická sama se sebou, ale spíše to, že tyto dva výrazy označují stejný objekt. Chceme-li, můžeme zde hovořit také o faktu týkajícím se užití jazyka. Přitom ale nesmíme ztratit ze zřetele, že se zde spíše než o fakt v pravém slova smyslu jedná o jeho konstitutivní předpoklad. Pak můžeme usoudit, že zde spíše než o vztah mezi *objekty* univerza jde o vztah mezi *výrazy* jazyka, které tedy v (a) na rozdíl od těch

[1] Gabbay & Guenthner [2001–].
[2] Frege [1879, § 8].

v (b), (c) neodkazují mimo sebe, ke světu, ale samy k sobě, tj. k jazyku, jímž tento svět uchopujeme. Pro názornost si celou věc schematizujme obrázkem 18.1. Uchopení identity jako metajazykové relace, tedy relace



Obrázek 18.1: Jitřenka a Večernice

mezi výrazy jazyka, řeší jak rozdíl mezi obvyklými relacemi a zvláštním případem relace identity, tak problém artikulace rozdílu mezi výrazy:

$$A = A \qquad\qquad A = B.$$

Tento rozdíl spočívá v tom, že první výraz je zcela neinformativní, zatímco v druhém se přece jen jistá informace skrývá, totiž o tom, že je výraz A v jistém smyslu – totiž ve vztahu k tomu, na co odkazuje, co znamená – podobný výrazu B. Toto pojetí identity zároveň snadno indukuje představu, před níž jsme se snažili opakovaně varovat, totiž že jsou zde dvě dobře definované předmětné říše, a to *říše významů* na jedné straně a *říše výrazů* na straně druhé, které se k sobě vztahují arbitrárně, jednoduchým přiřazením jednoho objektu druhému, přičemž identita každé z nich ve smyslu samostatné a dobře definované existence je již zaručena předem. Tím se stírá specifická role identity právě v konstituci významu.

Tato konstituce přitom nespočívá a nemůže spočívat v podobném přiřazování jedné entity entitě druhé, jež z epistemologického hlediska nedává ani dobrý smysl, ale musí naopak vysvětlit, co znamená, že nějakému jevu či artefaktu (A) připisujeme něco jako význam, aniž bychom tento jev museli nahrazovat jevem jiným (B). To je důležité již proto, že k významům nemáme jiný přístup než přes jejich reprezentace, a je to tedy až práce s nimi, co je činí reprezentacemi, nikoli odhalení nějaké vyšší, opravdovější skutečnosti, která se za nimi skrývá. V tomto smyslu je vhodné chápat identitu jako spojující případ, jenž nepředpokládá, jako objektová věta

Večernice je terestrická planeta

ani jako metajazyková věta

„Večernice“ má 9 písmen,

že zde existuje předem daná oblast významů, které lze nějak arbitrárně popsat ve větách tvaru „S je P“, tedy v subjekt-predikátové větě artikulující oddělení substance (S) od akcidentu (P). Identita odpovídá z logického hlediska mezipřípadu, v němž není subjekt od predikátu pevně oddělen, ale predikátem teprve rozvíjen, a v tomto směru na něm závislý.

Tím se vlastně ocitáme zpátky u našeho úvodního problému z kapitoly 1, totiž problému definice, která nemá čistě neplodný tvar nahrazení zcela neznámého, nového symbolu A symbolem B zcela známým, ale komplikovanější tvar, v němž jsou do jisté míry významy obou výrazů známé a do jisté míry zase ne, a příslušným spojením „A je B“ se dále upřesňují. To je fakticky už případ prvního ustanovování významu, v němž se z bezprostředních, tj. na konkrétní čas a prostor vázaných postřehů typu

Mourek je kočka, Mikeš je kočka, Alík není kočka, . . . ,

v Hegelově terminologii z konstatování jistého bytí a nebytí jisté lokální diference, kvality, vyvine existence (bytí-zde, *Dasein*)[3] nějakého trvalejšího rozlišení, prostředkovaného výrazem kočka. Z hlediska subjekt-predikátové věty zde dochází k rozvoji predikátu a jeho následné konstituci, přičemž k rozvoji a konstituci subjektu dochází zase ve větách jako:

Mikeš je chlupatý a také čtyřnohý, ale neštěká, . . .

Je přitom zřejmé, že subjekt a predikát lze v těchto řadách rozvíjet teoreticky do nekonečna, k jejich ustanovení tedy dochází v rámci praktické zkratky, která považuje daný rozvoj za „dostatečně“ dlouhý k tomu, aby šlo příslušné rozlišení považovat za nezávislé na příkladech, které ho zavádějí. Mluvíme-li o kočce či Mikešovi, máme zde vlastně konečný výraz pro nekonečnost možných rozlišení, které se za těmito diferencemi skrývají, v Hegelově terminologii popření prosté ne-konečnosti dalšího rozvoje, jak ji zachycují uvedené tři tečky.[4] V tomto popření vlastně tvrdíme, že není pravda, že by rozvoj *nebyl* konečný, neboť ho lze uchopit skrze daný konečný výraz jako něco, v čem je ona prostá nekonečnost zkrocena.

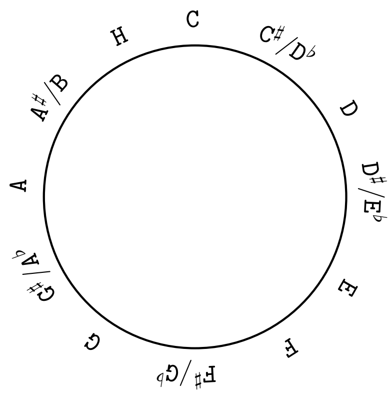
[3] Hegel [1986*c*, díl I, s. 121].
[4] Hegel [1986*c*, díl I, s. 264].

V rámci tvrzení rovnosti dochází k podobné dvojí negaci, totiž toho, že jisté rozlišení A není odlišené od rozlišení B. Hegel takto může o rovnosti hovořit jako o *popření nerovnosti*,[5] tedy chápat ji jako zkratku za základnější tvar:

$$\neg(A \neq B).$$

Tím se vyjevuje specifický charakter rovnosti, kombinující rysy konstituující a popisné. V rovnostech jako $2 + 2 = 4$ se nedozvídáme nic o objektech, které nám byly dány nezávisle předem, ale o tom, jak jsou konstituovány, tedy o jejich celku, v němž je zjevná diference mezi $2 + 2$ a 4 potlačena na úkor jisté aritmetické shody, Hegelovou terminologií, na úkor aritmetické lhostejnosti (*Gleichgültigkeit*). Tato lhostejnost se opírá o praktickou možnost považovat jisté fenomény v jistých kontextech za zaměnitelné.

Jako typově jiný příklad můžeme uvést např. interkulturně rozšířený fenomén oktávové identity, který známe z hudby, kdy jsou jisté tóny určené vztahem frekvencí $(\frac{1}{2})^n$ vnímány jako stejné. To má původ ve vlastnostech oscilátorů vydávajících hudební zvuky, tj. rezonujících pravidelně jako struny či sloupce vzduchu, které vždy spolu se základní frekvencí vibrují také jejími násobky, přičemž první z nich, typicky druhý nejsilnější, je právě tón ve vztahu oktávy k základu. Posluchači jsou



Obrázek 18.2: Chromatický kruh

tedy uvyklí slyšet tyto tóny spolu a nevnímat jejich rozdíly, z čehož vychází také standardní pojmenování celých oktávových skupin – zvukových tříd ekvivalence neboli *chromat* – písmeny C, D, E, F, G, A,

[5] Srov. Hegel [1986*c*, díl I, s. 209] a celý oddíl o kvantitě.

H. Skrze ně, a několik dodatečných záseků vedených potřebou transpozice dané struktury, je zvukové kontinuum rozděleno do diskrétní sady tónů, jak je v praxi zachycují bílé (a černé) klávesy klavíru, s opakujícím se vzorcem oktávových identit, v teorii pak tzv. *chromatický kruh.* Viz obrázek 18.2. Jedná se přirozeně o identity podmíněné, vztahující se typicky k harmonickým celkům. V rámci melodie náhrada oktávově spřízněných tónů k pocitu identického celku nevede, tj. melodie nebývá zpravidla rozpoznána.

Tato závislost rovnosti na širším kontextu nerozlišitelnosti je právě tím, co vedle jejího zjevného konstitutivního a také metajazykového čtení umožňuje chápat identitu jako objektové tvrzení, tedy tvrzení objektového jazyka. Výraz $M = N$ znamená, že jsou výrazy M a N v daném kontextu, tedy nikoli absolutně, jak to plyne z jejich výchozí odlišnosti, zaměnitelné v oblasti jistých vět *salva veritate.* Jinými slovy, pro všechny relevantní vlastnosti F platí:

$$F(M) \leftrightarrow F(N).$$

V řeči o uspořádaných dvojicích lze takto např. odlišit výrazy $1,2$ a $2,1$ a $2,4$, které jsou samy *o sobě* dozajista různé, jako různé i v objektovém modu. I o dvojicích čísel coby objektech úvahy tedy platí:

$$1,2 \neq 2,1 \qquad 2,1 \neq 2,4 \qquad 1,2 \neq 2,4.$$

V řeči o množinách se ale situace mění, neboť:

$$1,2 = 2,1 \qquad 2,1 \neq 2,4 \qquad 1,2 \neq 2,4.$$

Mluvíme-li o zlomcích či proporcích, pak zase:

$$1,2 \neq 2,1 \qquad 2,1 \neq 2,4 \qquad 1,2 = 2,4.$$

Pro tyto odlišnosti můžeme samozřejmě zavést odlišnou notaci, typu:

$\langle 1,2 \rangle$ pro dvojice čísel,

$\{1,2\}$ pro množiny čísel,

$\frac{1}{2}$ pro poměry čísel či zlomky.

V té jsou ony odlišnosti učiněny explicitními, nesmíme ale zapomenout, že tato odlišnost nespočívá v různém zápisu, ale právě v tom, že jsou příslušné výrazy užívány v daných kontextech jinak. Identita v sobě tedy nese vždy odkaz k celku, totiž k celku potlačení jistých rozlišení a následného ustanovení rozlišení jiných. Výrazy, které spojuje, takto nestojí přímo za sebe, jak by se zdálo indukovat prosté metajazykové čtení, neboť nejde o ně coby konkrétní jevy, ale o možná rozlišení, jež jsou s nimi spjata. Na rozdíl od čistě kvalitativních rozlišení zavádí přitom identita rozlišení kvantitativní, úzce spojená právě s odloučením subjektu (coby jména diskrétního objektu, substance) od predikátu (coby nezávislého způsobu, jak tento objekt popsat). V základu tohoto odloučení není nic jiného, než co známe jako substituční strategii.

Role, jakou identita hraje při utváření naší představy o světě jako na nás nezávislé oblasti předmětů, které lze dále specifikovat přípisy vlastností, vystupuje do popředí ve známých paradoxech a tvrzeních jako:

nemůžeš vstoupit dvakrát do téže řeky.

Rovnost nám zde totiž umožňuje číst je pozitivně jako něco, co odkrývá komplikovanou (s Hegelem bychom mohli říci spornou) povahu skutečnosti. Do téže řeky mohu dvakrát vstoupit jako do něčeho, co vzdoruje protichůdným určením typu

tato řeka je kalná, tato řeka je čirá,

a to proto, že řeka je vlastně jen název pro překonání protichůdnosti těchto určení v rovnosti

tato (masa vody) je (s ohledem na spojitost toku) stejná jako tato masa vody.

Můžeme také říci, že řeka a předměty obecně vznikají z lhostejnosti vůči jistému typu specifikací. Nejinak je tomu v případě tzv. *paradoxu Théseovy lodi*, v němž přemítáme, zda je kompletně – část po části – přestavěná loď tatáž nebo odlišná od lodi původní, tj. před úplnou výměnou, ale také od lodi, kterou jsme ze starých částí postavili vedle. Rozhodující jsou opět jisté globální požadavky, které na příslušnou identitu klademe, stejně jako o osobní identitě rozhodují komplexní kritéria zahrnující nejen fyzickou podobnost (bereme-li v úvahu, že organismus se co do částí neustále vyvíjí a mění), ale také koherenci názorů a zvyků. Tím můžeme náš obecnější výklad identity ukončit a přejít k některým technickým záležitostem spojeným s jejím zahrnutím mezi logické výrazy klasické predikátové logiky.[6]

18.2 Identita jako logický symbol

Specifická povaha predikátu identity nás vede k tomu, že ho nadále nebudeme považovat za mimologický symbol, nýbrž za symbol logický. Syntakticky se tedy bude chovat jako ostatní dvoumístné predikáty, ale jeho

[6] Pro další úvahy nad logicko-filosofickou povahou rovnosti srov. např. Kolman [2008] a Kolman [2011].

sémantická interpretace bude stabilní, fixně definovaná, podobně jako pevně stanovujeme chování ostatních logických symbolů. Měníme tedy jazyk KPL tím, že k němu přidáváme nový logický symbol pro identitu. Chceme-li zachovat přesnost, měli bychom tento nový symbol odlišovat od metajazykové rovnosti, pro kterou používáme standardní označení „=“. Rovnost objektového jazyka budeme značit symbolem „$\approx$“ a výsledný systém jako $\mathtt{KPL}_{\approx}$. V oblasti syntaxe $\mathtt{KPL}_{\approx}$ dále stanovíme:

18.2.1 Definice (Elementární formule): *Vedle elementárních formulí* KPL *budeme za elementární formuli* $\mathtt{KPL}_{\approx}$ *považovat též každou posloupnost symbolů tvaru* $\mathtt{t}_1 \approx \mathtt{t}_2$*, kde* $\mathtt{t}_1$ *a* $\mathtt{t}_2$ *jsou termy. Z důvodů symbolické elegance zavádíme také symbol „*$\not\approx$*“, který v kontextu formule* $\mathtt{t}_1 \not\approx \mathtt{t}_2$ *znamená totéž, co komplexní formule* $\neg\, \mathtt{t}_1 \approx \mathtt{t}_2$.

Jinak zůstává vše při starém. Dále musíme vymezit sémantiku našeho nového logického predikátu. Chceme, aby v dané interpretaci a valuaci byla formule $\mathtt{t}_1 \approx \mathtt{t}_2$ pravdivá právě tehdy, když termy $\mathtt{t}_1$ a $\mathtt{t}_2$ označují stejný objekt. Musíme proto provést následující doplnění:

18.2.2 Definice (Tarského definice pravdy): *Definici pravdy pro* KPL *rozšíříme v* $\mathtt{KPL}_{\approx}$ *o následující pravidlo:*

$$IV \vDash \mathtt{t}_1 \approx \mathtt{t}_2 \text{ právě tehdy, když } IV(\mathtt{t}_1) = IV(\mathtt{t}_2).$$

Podíváme se nyní, jaké má tento krok důsledky pro predikátovou logiku. Uvidíme, že se nám tím rozšiřují výrazové možnosti. Konstitutivní rozměr identity je takto potvrzen nepřímo, nikoli tím, že bychom ji chápali jako predikát jiného typu, ale tím, že se rozšířením jazyka o rovnost změní jeho expresivní síla. Každou formuli (resp. množinu formulí) můžeme totiž vnímat tak, že říká něco o svých modelech a popisuje nějaký jejich strukturální rys, tedy rys, který nesouvisí s konkrétní povahou prvků daného univerza interpretace, protože to se mění, ale s tím, co mají tyto prvky společné. To je právě struktura zachycená příslušnými bezobsažnými formulemi. Zachycovat strukturu – formu – je ostatně jejich funkce. Libovolná interpretace I je takto např. modelem formule

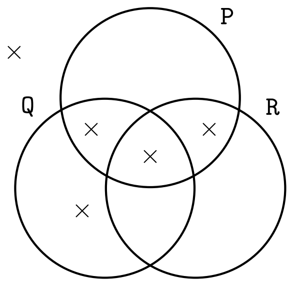
$$(\forall \mathtt{x})(\forall \mathtt{y})(\forall \mathtt{z})(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \wedge \mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{z}) \rightarrow \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{z}))$$

právě tehdy, když je realizace predikátu R tranzitivní: tato formule tedy vyjadřuje tranzitivitu dané relace. Od podobných strukturálních omezení můžeme nyní přejít k omezením kvantitativním, jak je ilustruje následující příklad. Uvažme, co o svých modelech říká formule:

$$(\exists \mathtt{x})(\exists \mathtt{y})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{y}) \wedge \neg \mathtt{P}(\mathtt{y}) \wedge \neg \mathtt{Q}(\mathtt{x})).$$

Realizace predikátů $\mathtt{P}$ a $\mathtt{Q}$ musí být zjevně množiny, které nejsou ve vztahu inkluze, tj. ani jedna z nich není podmnožinou té druhé. To může nastat pouze tehdy, když univerzum má alespoň dva prvky. Zde vidíme, že formule může mít vliv na mohutnost svých modelů. Mohutnost modelů právě uvedené formule je omezena zdola – a to číslem 2. To znamená, že formule nemá žádný model, jehož univerzum by byla jednoprvková množina. K této formuli však existuje pro libovolné číslo větší nebo rovno 2 model takovéto mohutnosti.

Díky našemu příkladu vidíme, že se formulemi jazyka KPL můžeme vyjádřit k mohutnosti modelu. Navíc je zřejmé, že v KPL lze omezit mohutnost modelů zdola, a to pro libovolné číslo: stačí přidat vhodný počet predikátů $\mathtt{P}, \mathtt{Q}, \mathtt{R}, \ldots$ a provést permutace příslušného obsazení jejich extenzí prvky, tj. popsat, které části Vennova diagramu jsou neprázdné. V případě tří predikátů můžeme omezit univerzum zdola až osmi prvky, obecně tedy 2^n prvky pro n predikátů, jak to ukazuje obrázek 18.3. V rámci důkazu věty 15.3.6 jsme ovšem zmínili, že má-li množina formulí



Obrázek 18.3: Velikost univerza

model, má také model libovolné nekonečné mohutnosti. Obecně platí, že splnitelné formule KPL nemohou omezit mohutnost modelů shora. Žádná formule KPL není s to např. vyjádřit následující vlastnost:

univerzum interpretace obsahuje právě dva prvky.

Přidáme-li do jazyka rovnost, vyjádříme tuto vlastnost jednoduše jako:

$$(\exists \mathtt{x})(\exists \mathtt{y})(\mathtt{x} \not\approx \mathtt{y} \wedge (\forall \mathtt{z})(\mathtt{z} \approx \mathtt{x} \vee \mathtt{z} \approx \mathtt{y})).$$

Má-li univerzum dané interpretace 2 prvky, je tato formule pravdivá. Avšak pokud je mohutnost univerza jiná, je formule nepravdivá. Mohutnost univerza jsme tedy omezili také shora, a tím jsme vyjádřili něco, co v jazyce bez rovnosti vyjádřit nešlo. Byl tak odhalen podstatný rozdíl mezi KPL a $\mathtt{KPL}_{\approx}$.

Lze lehce nahlédnout, že podobným způsobem můžeme pomocí rovnosti fixovat mohutnost univerza libovolným přirozeným číslem n. A nemusíme se omezovat na univerzum samo. Analogicky lze fixovat velikost extenze (realizace) libovolného predikátu. Chceme-li např. vyjádřit, že pod jednomístný predikát $\mathtt{Q}$ spadá právě jeden prvek, můžeme použít formuli:

$$(\exists \mathtt{x})(\mathtt{Q}(\mathtt{x}) \wedge (\forall \mathtt{y})(\mathtt{Q}(\mathtt{y}) \rightarrow \mathtt{x} \approx \mathtt{y})).$$

Tato formule má mnoho různých modelů, ale ve všech je predikát $\mathtt{Q}$ realizován jako jednoprvková množina. Právě naznačená možnost vyjádřit se přímo k počtu předmětů spadajících pod jistý pojem nás může také vést k zavedení tzv. *numerických kvantifikátorů*. Všimněme si, že existenční kvantifikátor je vlastně rovněž kvantifikátor numerický, neboť v podobě $(\exists \mathtt{x})\mathtt{Q}(\mathtt{x})$ říká, že pod realizaci predikátu $\mathtt{Q}$ spadá alespoň jeden předmět. Nabízí se tedy definovat vedle našich základních kvantifikátorů ještě kvantifikátory odvozené. Standardní je kvantifikátor jedinečnosti definovaný jako:

$$(\exists ! \mathtt{x})\vartheta \leftrightarrow (\exists \mathtt{x})(\vartheta \wedge (\forall \mathtt{y})(\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}} \rightarrow \mathtt{x} \approx \mathtt{y})).$$

Snadno ale zavedeme kvantifikátory pro jakýkoli konečný počet předmětů, a to induktivní definicí:

$$(\exists_{0} \mathtt{x})\vartheta \leftrightarrow \neg(\exists \mathtt{x})\vartheta,$$

$$(\exists_{\mathtt{n+1}} \mathtt{x})\vartheta \leftrightarrow (\exists \mathtt{y})(\vartheta^{\mathtt{x}}_{\mathtt{y}} \wedge (\exists_{\mathtt{n}} \mathtt{x})(\vartheta \wedge \mathtt{x} \not\approx \mathtt{y})).$$

Ta pochází z Fregových *Základů aritmetiky*[7] a byla podána v kontextu jeho zkoumání čísla, konkrétně v rámci postřehu, že se číselné výpovědi typicky vyskytují ve vazbě na nějaký pojem jako ve větě:

Sněhurka má 7 trpaslíků.

Tuto výpověď Frege navrhuje formalizovat jako:

$(\exists_7 x)(x$ je Sněhurčin trpaslík).

Příslušná analýza nás bude zajímat později v rámci logiky vyšších řádů, viz kapitola 19, kde budeme na kvantifikátory a obecně na tvrzení existence nahlížet jako na predikace vyšších řádů, v nichž je nějaký pojem připisován pojmu.

V souvislosti s rovností nás momentálně, v tomto a dalších oddílech, bude zajímat vyjádření jedinečnosti, které se slavně a filosoficky plodně

[7] Frege [1884, § 55–56].

objevuje v Russellově analýze v článku „O označování“.[8] Týká se tam věty:

(F) současný francouzský král je holohlavý.

Podle Russella totiž nemůže mít tato věta jednoduchou subjekt-predikátovou podobu, tj. nelze ji formalizovat jako

(F′) $\mathtt{H}(\mathtt{s})$,

neboť pak bychom podle předchozích ujednání předpokládali, že výraz $\mathtt{s}$ v univerzu něco označuje, což v případě uvedené věty není pravda. Problémy, do nichž bychom se takto dostali, jsou zjevné, neboť pokud příslušný subjekt neexistuje, není jasné, zda mu příslušný predikát pravdivě připsat či odepřít, zpochybněn je tedy sám status výrazu (F) jako výroku. Možnost, že bychom výrazu (F) status výroku upřeli, se samozřejmě nabízí a odpovídá tomu, co razil Frege, totiž že výraz může plnit svou funkci pouze za předpokladu splnění jisté presupozice. Jak jsme řekli již v oddílu 1.5, *presupozicí* věty B máme na mysli větu A, která musí být pravdivá, aby věta B mohla mít smysl, což znamená: být pravdivá nebo nepravdivá neboli mít nějakou pravdivostní hodnotu. V případě věty $\mathtt{H}(\mathtt{s})$ jsou tyto presupozice dány požadavky:

(i) existuje předmět g pojmenovaný $\mathtt{s}$,

(ii) tento předmět je právě jeden.

Jelikož věta (F) tyto požadavky nesplňuje, není podle Frega výrokem. Russell vidí ovšem situaci jinak. Sled jeho úvah je následovný:

(1) Je zřejmé, že lze větě (F) rozumět.

(2) Tudíž musí mít nějakou pravdivostní hodnotu.

(3) Jelikož není možné, aby ve větě s pravdivostní hodnotou jednotlivé výrazy něco neoznačovaly, musí mít (F) jinou formu než tu vyjádřenou formulí (F′).

Toto Russellovo řešení je velmi působivé a fakticky ztělesňuje hlavní metodický princip analytické filosofie, podle něhož nás *povrchová forma* jazyka často klame a k řešení filosofických problémů je typicky třeba proniknout až k *hloubkové formě* logické. Z jejího hlediska není výraz „současný francouzský král“ logické jméno, ale tzv. *neúplný symbol*, který při skutečné analýze věty zmizí ve prospěch pravých jmen. Není divu,

[8] Russell [1905].

že tento typ myšlení předvedl v podstatné podobě již Frege, když např. větu „někdo má rád Petra“ nechápal na bázi gramatické souvislosti, tj. analogicky větě „Jan má rád Petra“, ale jako výraz formy „$(\exists x)(x$ má rád Petra)“. Výraz „někdo“ je tedy jen zdánlivé jméno objektu a při analýze věty mizí.

Aniž bychom blíže rozebírali body (1–3), podívejme se přímo na výsledek Russellovy alternativní analýzy. Její jádro spočívá v tom, že jsou uvedené presupozice smysluplnosti explicitně vyjádřeny ve větě samé. Výsledná formalizace tedy vypadá takto:

(F″) $(\exists \mathtt{x})(\mathtt{S}(\mathtt{x}) \wedge (\forall \mathtt{y})(\mathtt{S}(\mathtt{y}) \rightarrow \mathtt{x} \approx \mathtt{y}) \wedge \mathtt{H}(\mathtt{x}))$.

Ze jména $\mathtt{s}$ se takto stal predikát $\mathtt{S}$, u něhož se selhání reference proměňuje v prostou prázdnotu příslušného pojmu „být současným králem Francie“. Predikát $\mathtt{H}$ zastupuje vlastnost „být holohlavý“. Tím se v jistém ohledu vyřešil problém s pravdivostní hodnotou (F), neboť je jasné, že věta tvaru (F″) má pravdivostní hodnotu nezávisle na tom, zda $\mathtt{s}$ něco označuje. Na druhou stranu se velmi komplikuje vlastní obsah sdělení, neboť vtažením presupozice do věty samé nemá popření (F), tedy toho, že je současný francouzský král holohlavý, jednoduchou formu upření vlastnosti předmětu, ale komplexní formu tvrzení, podle něhož současný francouzský král buďte neexistuje, nebo není jeden, anebo není holohlavý. S ohledem na to mohou být věty

(1) současný francouzský král je holohlavý,

(2) současný francouzský král není holohlavý

obě nepravdivé, aniž by tím byl narušen jejich status výroku. Odpovídají jim totiž analýzy

(1) $(\exists \mathtt{x})(\mathtt{S}(\mathtt{x}) \wedge (\forall \mathtt{y})(\mathtt{S}(\mathtt{y}) \rightarrow \mathtt{x} \approx \mathtt{y}) \wedge \mathtt{H}(\mathtt{x}))$,

(2) $(\exists \mathtt{x})(\mathtt{S}(\mathtt{x}) \wedge (\forall \mathtt{y})(\mathtt{S}(\mathtt{y}) \rightarrow \mathtt{x} \approx \mathtt{y}) \wedge \neg\mathtt{H}(\mathtt{x}))$,

které nejsou vzájemnými negacemi. My chápejme (F″) především jako další doklad toho, že *explicitní* formulace nějakého *implicitního* sémantického faktu, které jsme byli svědky právě při zavedení identity $\approx$ do jazyka KPL, je všechno jiné než neškodná, stejně jako se výbušným ukázalo zdánlivě bezzubé zavedení množinového operátoru $\{\mathtt{x} \mid \mathtt{P}(\mathtt{x})\}$. Tuto poznámku lze vysvětlit na jiném, jednodušším případu, totiž na dotazu typu:

přestal jste bít svou ženu?

Ten může být položen např. obžalovanému u soudu s požadavkem, aby odpovídal pouze `ANO`, či `NE`. Problém je, že v obou odpovědích je fakticky presuponováno, že platí věty

(1) měl jsem ženu,

(2) bil jsem ji,

tj. obviněný – není-li mu umožněno vystoupit z objektové řeči do sféry, v níž lze tuto řeč reflektovat – musí eventuálně přiznat i něco, co nespáchal. Podle Russellova návrhu by se šlo této situaci vyhnout jednoduše tím, že bychom obě presupozice udělali součástí příslušné otázky, tj. ptali se:

měl jste ženu, bil jste ji a přestal jste s tím?

Odpověď `NE` by ale v tomto případě ztratila svoji jednoznačnost, z čehož lze seznat, že explikace implicitních rysů diskurzu pomocí logického výraziva tento diskurz jednoduše nerozšiřuje, ale celkově proměňuje.

18.3 Funktory

Vyjádření jedinečnosti, jak nám ho umožňuje symbol rovnosti, souvisí s jiným výrazovým prostředkem, který je standardně v klasické predikátové logice přítomen a jejž jsme v dřívějším výkladu pro stručnost vynechali, totiž s tzv. *funktory* neboli *funktorovými konstantami.* Ty se vztahují na výrazy, které jsou primárně relační, navíc ale mezi danými reláty existuje funkcionální vztah, tj. vztah jedinečnosti v přiřazení jistých objektů objektům jiným. Ve větě

(1) Mozartův otec byl hudebník

máme takto výraz otec, který lze chápat jako binární relaci

x je otec y.

Formalizace by pak postupovala standardně jako:

$$(\exists \mathtt{x})(\mathtt{O}(\mathtt{x},\mathtt{m}) \wedge \mathtt{H}(\mathtt{x})).$$

V tomto zápisu ale zjevně mizí informace, že na rozdíl od věty typu

(2) Mozartův syn byl hudebník

obsahuje věta (1) jednoznačnost denotace, danou tím, že každý člověk má jen jednoho (biologického) otce. V tomto smyslu je relace „x je otec y“ funkcionální, a lze ji tedy zachytit pomocí funktoru otec x,

který po vzoru aritmetických funkcí typu

x^2

přiřazuje každému předmětu univerza interpretace právě jeden předmět. Analýza věty (1) se nám pak zjednoduší na

$\mathtt{H}(\mathtt{o}(\mathtt{m}))$,

kde výraz `o` je interpretován funkcí, která lidem, např. Wolfgangu Amadeovi Mozartovi, jenž je realizací výrazu `m`, přiřadí jeho otce, v našem případě Leopolda Mozarta, formalizovaného jako `o(m)`, o němž pak řekne, že patří do množiny hudebníků přiřazené predikátové konstantě `H`. Větu (2) takto zjevně formalizovat nejde, neboť případný výraz „syn x“ nemá jednoznačně určený denotát, a formule `H(s(m))` by tedy mohla kolísat v pravdivostní hodnotě, kdyby měl např. Mozart syny, z nichž někteří by hudebníci byli, a jiní ne, či kdyby žádného syna neměl.[9]

Problém, který zde vyvstává, souvisí s předchozí Russellovou analýzou vět, v nichž se vyskytují výrazy jako „současný francouzský král“, „Mozartův otec“, „Mozartův syn“, „největší prvočíslo“ apod., které se svou formou zdají odkazovat právě k jednomu předmětu – jsou to tzv. *určité deskripce* –, ale fakticky tak často nečiní. Russellovo uniformní řešení spočívá v tom, že předpoklad jedinečnosti činí explicitní součástí věty, což ovšem, jak jsme zmínili, narušuje její sémantickou stavbu v případě, že daný výraz skutečně označuje právě jeden předmět. V rámci `KPL` jsme se v těchto případech rozhodli zavést a použít jmennou konstantu jako něco, co z hlediska naší sémantiky nutně označuje jeden objekt. Podobně budeme postupovat v případech relací, které mají jako presupozici jedinečnost, tj. místo toho, abychom je reprezentovali standardními predikátovými konstantami s připojenou explicitní informací o jejich jedinečnosti, zavedeme přímo konstantu se specifickou sémantickou interpretací, v níž je tato jedinečnost skryta. Na rozdíl od rovnosti se zde nebude jednat o nový logický symbol, ale o nový typ mimologických symbolů. Rozšíření jazyka `KPL` na jazyk $\mathtt{KPL}_f$ vypadá takto:

`18.3.1 Definice (Jazyk):` *Jazyk* $\mathtt{KPL}_f$ *se skládá z jazyka* `KPL`*, k němuž pro každé přirozené číslo n přidáváme skupinu n-místných funktorů* $\mathtt{f}^{\mathtt{n}}_1, \mathtt{f}^{\mathtt{n}}_2, \mathtt{f}^{\mathtt{n}}_3, \ldots$ *Funktory budeme značit jako obvykle bez indexů a budeme přitom používat písmena* $\mathtt{f}, \mathtt{g}, \mathtt{h}, \ldots$

[9] Fakticky je pravda to první, tj. ze šesti Mozartových dětí čtyři umřely v dětství, zůstali dva synové, z nichž jeden, Franz Xaver Wolfgang, byl skutečně hudební skladatel, druhý, Karl Thomas, se dal na dráhu překladatele a úředníka.

Funktory umožňují tvořit komplexní termy, které definujeme induktivně. Naše původní definice termu představuje první bod této nové definice, k níž ještě přidáváme induktivní krok.

`18.3.2 Definice (Term):` *Pro term* $\mathtt{KPL}_f$ *platí následující:*

(1) každá proměnná a každá konstanta jsou termem,

(2) je-li $\mathtt{f}^{\mathtt{n}}$ *n-místný funktor a* $\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_{\mathtt{n}}$ *jsou termy, pak je termem také výraz* $\mathtt{f}^{\mathtt{n}}(\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_{\mathtt{n}})$,

(3) nic jiného není termem, než co bylo definováno v (1) a (2).

Termy tedy mohou mít velmi komplexní strukturu. Pokud `f` je jednomístný, `g` dvoumístný a `h` třímístný funktor, pak je termem třeba výraz:

$$\mathtt{g}(\mathtt{x}, \mathtt{h}(\mathtt{g}(\mathtt{c}, \mathtt{y}), \mathtt{y}, \mathtt{f}(\mathtt{c}))).$$

Na základě této definice termu pak definujeme pojem formule stejně jako dříve. Avšak jelikož termy mohou být složité, objevují se nám v jazyce také složité elementární formule jako např.:

$$\mathtt{R}(\mathtt{g}(\mathtt{x}, \mathtt{h}(\mathtt{g}(\mathtt{c}, \mathtt{y}), \mathtt{y}, \mathtt{f}(\mathtt{c}))), \mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{x}, \mathtt{y}))).$$

Sémantiku pro takto obohacenou syntax získáme tím, že v interpretacích realizujeme také funktory, a to vždy jako totální funkce na univerzu interpretace. Pokud je tedy I interpretace pro nějaký jazyk (tj. množinu mimologických symbolů) a pokud tento jazyk obsahuje n-místný funktor $\mathtt{f}^{\mathtt{n}}$, pak:

$I(\mathtt{f}^{\mathtt{n}})$ je n-argumentová funkce na univerzu interpretace I.

Pro danou interpretaci a valuaci je pak každému termu přiřazen nějaký objekt univerza pomocí induktivního předpisu.

`18.3.3 Konvence (Ohodnocení termu):` *Pro libovolné termy* $\mathtt{t}$, *resp.* $\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_{\mathtt{n}}$ *a funktorovou konstantu* $\mathtt{f}^{\mathtt{n}}$ *platí:*

(1) je-li $\mathtt{t}$ *konstanta, pak* $IV(\mathtt{t}) = I(\mathtt{t})$,

(2) je-li $\mathtt{t}$ *proměnná, pak* $IV(\mathtt{t}) = V(\mathtt{t})$,

(3) $IV(\mathtt{f}^{\mathtt{n}}(\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_{\mathtt{n}})) = I(\mathtt{f}^{\mathtt{n}})(IV(\mathtt{t}_1), \ldots, IV(\mathtt{t}_{\mathtt{n}}))$.

Zavedení funktorů je velmi užitečné, chceme-li v predikátové logice formulovat některé matematické (zejména algebraické) teorie. Jako příklad můžeme uvést tzv. *teorii grup*, kterou lze chápat jako matematickou teorii symetrie.

`Příklad 18.3.4:` Grupy se definují jako určité interpretace pro jazyk $\{\bullet, \mathtt{e}\}$, kde $\bullet$ je dvoumístný funktor a $\mathtt{e}$ je konstanta. Aby byla interpretace pro tento jazyk grupou, musí v ní být pravdivé následují formule. Jak je zvykem, term $\bullet(\mathtt{t}_1, \mathtt{t}_2)$ zapisujeme zkráceně jako $\mathtt{t}_1 \bullet \mathtt{t}_2$.

(1) $(\forall \mathtt{x})(\forall \mathtt{y})(\forall \mathtt{z})(\mathtt{x} \bullet \mathtt{y}) \bullet \mathtt{z} \approx \mathtt{x} \bullet (\mathtt{y} \bullet \mathtt{z})$,

(2) $(\forall \mathtt{x})(\mathtt{x} \bullet \mathtt{e} \approx \mathtt{x} \wedge \mathtt{e} \bullet \mathtt{x} \approx \mathtt{x})$,

(3) $(\forall \mathtt{x})(\exists \mathtt{y})(\mathtt{x} \bullet \mathtt{y} \approx \mathtt{e} \wedge \mathtt{y} \bullet \mathtt{x} \approx \mathtt{e})$.

Podle (1) je funkce $\bullet$ asociativní, podle (2) má tzv. neutrální prvek a podle (3) ke každému prvku existuje prvek inverzní.

Kromě pohodlí má zavedení funktorů i výhody teoretické. Je např. bází tzv. *skolemizace* neboli eliminace existenčních kvantifikátorů z formulí `KPL`. Tato eliminace spočívá v zachycení závislosti proměnných, jak byla nejprve vyjádřena kvantifikátory, pomocí funktorů, kdy např. z formule

$$(\forall \mathtt{x})(\exists \mathtt{y})\varphi,$$

činící hledané y závislé na x, utvoříme formuli

$$(\forall \mathtt{x})\varphi^{\mathtt{y}}_{\mathtt{f(x)}},$$

kde je totéž vyjádřeno funktorem. Obě formule jsou pak (v jistém smyslu) ekvivalentní, za předpokladu, že je $\mathtt{f}$ zcela nový symbol. Uvědomíme-li si, že se prvního existenčního kvantifikátoru $(\exists \mathtt{x})\psi$ snadno zbavíme jeho nahrazením novou konstantou $\mathtt{c}$ do podoby $\psi^{\mathtt{x}}_{\mathtt{c}}$, máme zde hrubý nárys toho, jak lze každou formuli transformovat do tzv. *Skolemovy (prenexní) normální formy.*[10] Význam formule v této formě spočívá mj. v tom, že je díky vlastnostem uzávěru ekvivalentní formuli bez kvantifikátorů, neboť z definice sestává pouze z bloku obecných kvantifikátorů následovaných bází, v níž žádné kvantifikátory nejsou.

Pohybujeme-li se již v rámci logiky s rovností, tedy v $\mathtt{KPL}_{\approx}$, je zřejmé, že jedinečnost, která se za n-ární funktorovou konstantou skrývá, dokážeme explicitně definovat ve vztahu k příslušné $(n+1)$-ární konstantě $\mathtt{R}$ predikátové, která splňuje podmínku:

$$(\forall \mathtt{x}_1) \ldots (\forall \mathtt{x}_n)(\exists! \mathtt{y})\mathtt{R}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n, \mathtt{y}).$$

Z toho plyne, že i když si v rámci $\mathtt{KPL}_{\approx}$ přidáním funktorů velice usnadňujeme práci, přece tím nezískáváme nic podstatně nového. Každou formuli s funktory lze nahradit nějakou formulí bez funktorů, která má v podstatě

[10] Detaily lze nalézt třeba in: Monk [1976, s. 212 nn.].

stejný význam. Užitečnost funktorů na jedné straně a jejich principiální postradatelnost na straně druhé ilustrujeme na následujícím příkladě.

`Příklad 18.3.5:` Řekněme, že chceme vyjádřit v $\mathtt{KPL}_{\approx}$ aritmetický zákon, podle něhož pro každá tři přirozená čísla k, l, m platí:

$$k \times (l + m) = k \times l + k \times m.$$

Máme-li je k dispozici, můžeme pro sčítání a násobení použít dvoumístné funktory $\mathtt{f}$ a $\mathtt{g}$ a celý zákon vyjádřit pomocí formule:

$$(\forall \mathtt{x})(\forall \mathtt{y})(\forall \mathtt{z})\mathtt{g}(\mathtt{x}, \mathtt{f}(\mathtt{y}, \mathtt{z})) \approx \mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{x}, \mathtt{y}), \mathtt{g}(\mathtt{x}, \mathtt{z})).$$

Totéž můžeme vyjádřit i bez funktorů, avšak musíme použít velice komplikovanou formuli. Místo dvoumístných funktorů $\mathtt{f}, \mathtt{g}$ použijeme třímístné predikáty $\mathtt{F}, \mathtt{G}$ a ve formuli nejdříve určíme, že relace, které realizují tyto predikáty, jsou skutečně totální funkce. Poté si ještě budeme muset poradit s tím, že termy lze vkládat jeden do druhého, což u predikátů není možné. Vyřešíme to tak, že pro každý výsledek aplikace funkce na argument zavedeme novou proměnnou. Tak v této formuli bude $\mathtt{s}$ zastupovat term $\mathtt{g}(\mathtt{x}, \mathtt{y})$, $\mathtt{t}$ term $\mathtt{g}(\mathtt{x}, \mathtt{z})$, $\mathtt{u}$ term $\mathtt{f}(\mathtt{y}, \mathtt{z})$, $\mathtt{v}$ term $\mathtt{g}(\mathtt{x}, \mathtt{f}(\mathtt{y}, \mathtt{z}))$ a $\mathtt{w}$ term $\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{x}, \mathtt{y}), \mathtt{g}(\mathtt{x}, \mathtt{z}))$. Celá formule může vypadat třeba takto:

$$\begin{aligned}
&(\forall \mathtt{x})(\forall \mathtt{y})(\exists \mathtt{z})(\mathtt{F}(\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}) \wedge (\forall \mathtt{r})(\mathtt{F}(\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{r}) \rightarrow \mathtt{r} \approx \mathtt{z})) \wedge \\
&\qquad (\forall \mathtt{x})(\forall \mathtt{y})(\exists \mathtt{z})(\mathtt{G}(\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}) \wedge (\forall \mathtt{r})(\mathtt{G}(\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{r}) \rightarrow \mathtt{r} \approx \mathtt{z})) \wedge \\
&\quad (\forall \mathtt{x})(\forall \mathtt{y})(\forall \mathtt{z})(\forall \mathtt{s})(\forall \mathtt{t})(\forall \mathtt{u})(\forall \mathtt{v})(\forall \mathtt{w})((\mathtt{G}(\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{s}) \wedge \mathtt{G}(\mathtt{x}, \mathtt{z}, \mathtt{t}) \wedge \\
&\qquad\qquad \mathtt{F}(\mathtt{y}, \mathtt{z}, \mathtt{u}) \wedge \mathtt{G}(\mathtt{x}, \mathtt{u}, \mathtt{v}) \wedge \mathtt{F}(\mathtt{s}, \mathtt{t}, \mathtt{w})) \rightarrow \mathtt{v} \approx \mathtt{w}).
\end{aligned}$$

V posledním oddílu se podívejme jak na možnosti axiomatizace logiky s rovností, tak na její využití v rámci axiomatizace jiných, mimologických teorií.

18.4 Axiomatizace

Přirozenou oblastí mimologického užití predikátu rovnosti je formalizace matematických teorií, která teprve otevírá cestu pro jejich přísnou axiomatizaci. Podívejme se na historicky první z takových formalizací, totiž axiomatizaci geometrie eukleidovského prostoru, jak ji – ještě bez znalosti Fregovy práce – formuloval David Hilbert ve svých *Základech geometrie.*[11] Axiomy jsou rozčleněny do několika skupin. Jedna z těchto skupin vymezuje „logiku“ specifického vztahu mezi body, přímkami a

[11] Hilbert [1899].

rovinami prostoru. Konkrétně jde o vztah „ležet na“ či alternativně „být obsažen v“. Axiomy této skupiny vypadají takto:

(1) ke každým dvěma různým bodům existuje právě jedna přímka, která je obsahuje,

(2) na každé přímce leží nejméně dva různé body,

(3) existují nejméně tři různé body, které neleží na jedné přímce,

(4) na každé rovině leží alespoň jeden bod,

(5) ke každým třem bodům, které neleží na jedné přímce, existuje právě jedna rovina, která je obsahuje,

(6) pokud jsou dva body obsaženy v dané rovině, pak v této rovině leží také přímka, která tyto body obsahuje,

(7) pokud mají dvě roviny nějaký společný bod, pak mají společný ještě nějaký jiný bod,

(8) existují nejméně čtyři body, které neleží v jedné rovině.

Tyto axiomy můžeme formulovat v jazyce predikátové logiky s rovností. Použijeme přitom jednomístné predikáty $\mathtt{B}$ („být bodem“), $\mathtt{P}$ („být přímkou“) a $\mathtt{R}$ („být rovinou“). Dále použijeme dvoumístný predikát $\mathtt{L}$ („ležet na“ či „být obsažen v“).

(1) $(\forall \mathtt{x})(\forall \mathtt{y})((\mathtt{B}(\mathtt{x}) \wedge \mathtt{B}(\mathtt{y}) \wedge \mathtt{x} \not\approx \mathtt{y}) \rightarrow (\exists \mathtt{z})(\mathtt{P}(\mathtt{z}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{x},\mathtt{z}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{y},\mathtt{z}) \wedge (\forall \mathtt{w})((\mathtt{P}(\mathtt{w}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{x},\mathtt{w}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{y},\mathtt{w})) \rightarrow \mathtt{w} \approx \mathtt{z}))),$

(2) $(\forall \mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \rightarrow (\exists \mathtt{y})(\exists \mathtt{z})(\mathtt{B}(\mathtt{y}) \wedge \mathtt{B}(\mathtt{z}) \wedge \mathtt{y} \not\approx \mathtt{z} \wedge \mathtt{L}(\mathtt{y},\mathtt{x}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{z},\mathtt{x}))),$

(3) $(\exists \mathtt{x})(\exists \mathtt{y})(\exists \mathtt{z})(\mathtt{B}(\mathtt{x}) \wedge \mathtt{B}(\mathtt{y}) \wedge \mathtt{B}(\mathtt{z}) \wedge \mathtt{x} \not\approx \mathtt{y} \wedge \mathtt{x} \not\approx \mathtt{z} \wedge \mathtt{y} \not\approx \mathtt{z} \wedge \neg(\exists \mathtt{w})(\mathtt{P}(\mathtt{w}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{x},\mathtt{w}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{y},\mathtt{w}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{z},\mathtt{w}))),$

(4) $(\forall \mathtt{x})(\mathtt{R}(\mathtt{x}) \rightarrow (\exists \mathtt{y})(\mathtt{B}(\mathtt{y}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{y},\mathtt{x}))),$

(5) $(\forall \mathtt{x})(\forall \mathtt{y})(\forall \mathtt{z})((\mathtt{B}(\mathtt{x}) \wedge \mathtt{B}(\mathtt{y}) \wedge \mathtt{B}(\mathtt{z}) \wedge \mathtt{x} \not\approx \mathtt{y} \wedge \mathtt{x} \not\approx \mathtt{z} \wedge \mathtt{y} \not\approx \mathtt{z} \wedge \neg(\exists \mathtt{w})(\mathtt{P}(\mathtt{w}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{x},\mathtt{w}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{y},\mathtt{w}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{z},\mathtt{w}))) \rightarrow (\exists \mathtt{v})(\mathtt{R}(\mathtt{v}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{x},\mathtt{v}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{y},\mathtt{v}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{z},\mathtt{v}) \wedge (\forall \mathtt{u})((\mathtt{R}(\mathtt{u}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{x},\mathtt{u}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{y},\mathtt{u}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{z},\mathtt{u})) \rightarrow \mathtt{u} \approx \mathtt{v}))),$

(6) $(\forall \mathtt{w})(\forall \mathtt{x})(\forall \mathtt{y})(\forall \mathtt{z})((\mathtt{B}(\mathtt{w}) \wedge \mathtt{B}(\mathtt{x}) \wedge \mathtt{w} \not\approx \mathtt{x} \wedge \mathtt{P}(\mathtt{y}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{w},\mathtt{y}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \wedge \mathtt{R}(\mathtt{z}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{w},\mathtt{z}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{x},\mathtt{z})) \rightarrow \mathtt{L}(\mathtt{y},\mathtt{z})),$

(7) $(\forall \mathtt{x})(\forall \mathtt{y})(\forall \mathtt{z})((\mathtt{R}(\mathtt{x}) \wedge \mathtt{R}(\mathtt{y}) \wedge \mathtt{B}(\mathtt{z}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{z},\mathtt{x}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{z},\mathtt{y})) \rightarrow (\exists \mathtt{w})(\mathtt{B}(\mathtt{w}) \wedge \mathtt{w} \not\approx \mathtt{z} \wedge \mathtt{L}(\mathtt{w},\mathtt{x}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{w},\mathtt{y}))),$

(8) $(\exists \mathtt{w})(\exists \mathtt{x})(\exists \mathtt{y})(\exists \mathtt{z})(\mathtt{w} \not\approx \mathtt{x} \wedge \mathtt{w} \not\approx \mathtt{y} \wedge \mathtt{w} \not\approx \mathtt{z} \wedge \mathtt{x} \not\approx \mathtt{y} \wedge \mathtt{x} \not\approx \mathtt{z} \wedge \mathtt{y} \not\approx \mathtt{z} \wedge \neg(\exists \mathtt{v})(\mathtt{R}(\mathtt{v}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{w},\mathtt{v}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{x},\mathtt{v}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{y},\mathtt{v}) \wedge \mathtt{L}(\mathtt{z},\mathtt{v}))).$

Hilbertův systém sice v rigoróznosti zdaleka překonal pionýrský počin Eukleidův, pořád ale trpěl tím, že ve svých prvních verzích nepředkládá vhodný kalkul, který by umožňoval přecházet čistě schematicky od axiomů k teorémům a od nich zas k dalším teorémům. Zrovna tak není na jeho základě možné o těchto axiomech a způsobech vyvozování z nich činit podobně jednoznačné závěry, k jakým lze skrze něj dospět v oblasti geometrie samé.

Jsme tedy zpět u otázky axiomatizace a ptáme se, zda je možno k hilbertovskému kalkulu pro KPL doplnit speciální axiomy, které by úplně vystihovaly logiku rovnosti. Kalkul, který máme zatím k dispozici, nepostačuje, protože v něm pro rovnost žádné speciální axiomy nejsou, a rovnost se tedy vzhledem k němu musí chovat jako každý jiný dvoumístný predikát. To např. znamená, že formule

$$(\forall \mathtt{x})\mathtt{x} \approx \mathtt{x}$$

není v tomto kalkulu dokazatelná, přestože je tato formule v sémantice $\mathtt{KPL}_{\approx}$ logicky pravdivá, neboť platí

$$IV(\mathtt{x}) = IV(\mathtt{x}) \text{ pro jakoukoli interpretaci } I \text{ a valuaci } V.$$

Ptáme-li se, jak bychom mohli rovnost axiomatizovat, nabízí se nám jako východisko Leibnizův princip, jenž spojuje tvrzení rovnosti s tvrzeními, v nichž se rovnost nevyskytuje. Problém je ovšem ten, že Leibnizův princip nelze zapsat jako formuli predikátové logiky prvního řádu. Potřebovali bychom totiž obecný kvantifikátor vztáhnout na predikáty, což nám syntax našeho formálního jazyka neumožňuje. Kvantifikovat přes vlastnosti však lze v predikátové logice druhého řádu, o které bude řeč v příští kapitole. V ní je tedy možné vyjádřit Leibnizův princip pomocí jediné formule:

$$\text{(LP2)}\quad (\forall \mathtt{x})(\forall \mathtt{y})(\mathtt{x} \approx \mathtt{y} \leftrightarrow (\forall \mathtt{X})(\mathtt{X}(\mathtt{x}) \leftrightarrow \mathtt{X}(\mathtt{y}))).$$

Nám se však nabízí podobná možnost, kterou jsme zmínili v souvislosti s předchozími axiomatizacemi. V nich bylo možno vzít buďto konečný počet axiomů a do pravidel přidat pravidlo substituce, nebo nahradit konkrétní formule axiomatickými schématy reprezentujícími nekonečný počet formulí. Stejně tak můžeme chápat (LP2) nikoli jako jednoduchou formuli, ale jako schéma, které dovoluje za X dosadit libovolný predikát patřičného tvaru. K axiomům HK pro KPL tedy přidáme pro každé n a pro každý n-místný predikát $\mathtt{Q}^{\mathtt{n}}$ formuli:

$$\text{(E1)}\quad (\forall \mathtt{x}_1)\ldots(\forall \mathtt{x}_{\mathtt{n}})(\forall \mathtt{y}_1)\ldots(\forall \mathtt{y}_{\mathtt{n}})(\mathtt{x}_1 \approx \mathtt{y}_1 \wedge \cdots \wedge \mathtt{x}_{\mathtt{n}} \approx \mathtt{y}_{\mathtt{n}} \rightarrow (\mathtt{Q}^{\mathtt{n}}(\mathtt{x}_1,\ldots,\mathtt{x}_{\mathtt{n}}) \leftrightarrow \mathtt{Q}^{\mathtt{n}}(\mathtt{y}_1,\ldots,\mathtt{y}_{\mathtt{n}}))).$$

Máme-li v jazyce funktory, doplníme ještě:

(E2) $(\forall \mathtt{x}_1)\dots(\forall \mathtt{x}_n)(\forall \mathtt{y}_1)\dots(\forall \mathtt{y}_n)(\mathtt{x}_1 \approx \mathtt{y}_1 \wedge \dots \wedge \mathtt{x}_n \approx \mathtt{y}_n \to$
$\mathtt{f}^n(\mathtt{x}_1,\dots,\mathtt{x}_n) \approx \mathtt{f}^n(\mathtt{y}_1,\dots,\mathtt{y}_n))$.

Ke stanovení toho, které další vlastnosti rovnost splňuje, lze využít faktu, že se jedná o krajní případ relace ekvivalence, a tudíž predikát rovnosti splňuje podmínky, které tuto relaci definují. Tyto podmínky tedy můžeme vzít za nové axiomy:

(E3) $(\forall \mathtt{x})\mathtt{x} \approx \mathtt{x}$,

(E4) $(\forall \mathtt{x})(\forall \mathtt{y})(\mathtt{x} \approx \mathtt{y} \to \mathtt{y} \approx \mathtt{x})$,

(E5) $(\forall \mathtt{x})(\forall \mathtt{y})(\forall \mathtt{z})(\mathtt{x} \approx \mathtt{y} \wedge \mathtt{y} \approx \mathtt{z} \to \mathtt{x} \approx \mathtt{z})$.

Fakticky stačí přijmout pouze první z nich a ostatní dokázat pomocí axiomů (E1–E3), konkrétně dosazením predikátu $\mathtt{x} \approx \mathtt{y}$ za predikátovou konstantu $\mathtt{Q}(\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2)$.

Axiomy HK pro KPL obohacené o axiom rovnosti jsou z hlediska příslušné logiky splněny všemi interpretacemi pro $\mathtt{KPL}_\approx$. To je mj. tím, že je rovnost coby logická konstanta interpretována jako pravdivá tehdy a jen tehdy, spojuje-li tytéž předměty. Pokud bychom ovšem znak $\approx$ uchopili jako mimologický, s významem vymezeným příslušnými axiomy, tato situace již nenastane. Budou totiž existovat modely axiomů (E1–E5), v nichž $\approx$ není interpretována jako rovnost, tj. v příslušné relaci se vyskytují i různé předměty. Tento stav je přitom nevyhnutelný, neboť, jak víme, v predikátové logice bez rovnosti není rovnost definovatelná: kdyby definovatelná byla, šlo by omezit univerzum shora, což nelze. Je přirozené se nyní ptát, jakou relaci tedy axiomy (E1–E5) vlastně vymezují.

Odpověď není zcela překvapivá, ale filosoficky nesmírně plodná, neboť názorně koresponduje s výše uvedeným vhledem do specifické povahy rovnosti coby vznikající z popření odlišného. Relace zachycená axiomy (E1–E5) je jistá ekvivalence, tj. relace, která rozděluje prvky univerza do klastrů – tříd ekvivalence, které plně vyčerpávají příslušné univerzum, aniž by se jakkoli překrývaly. Jedná se tedy o rozklad univerza. Podobně je to s reprezentacemi, které se mají stát reprezentacemi téhož, např. dvojicemi 1,2 a 2,4 a 4,8 atd., které jsou perspektivními představiteli téhož racionálního čísla, a to proto, že splňují ekvivalenci $\sim$:

(1) $m, n \sim p, q \leftrightarrow m \times q = n \times p.$

Tento příklad není úplně šťastný, protože vyžaduje, abychom chápali znaménko „=“ z pravé strany jako již zavedenou rovnost mezi přirozenými čísly. Rovnost mezi racionálními čísly, a tudíž i racionální čísla sama, získáme tím, že příslušnou ekvivalenci proměníme v identitu, tj. uchopíme formuli (1) jako kritérium identity nových předmětů, které vzniknou ze zanedbání rozdílu mezi starými objekty, jež jsou ekvivalentní. Bude tedy platit:

(2) $m, n = p, q \leftrightarrow m \times q = n \times p.$

Abychom uvedli jiný, méně matoucí příklad, uvažme ekvivalenci mezi přímkami danou jejich rovnoběžností:

(3) $p \sim q \leftrightarrow p \parallel q.$

Proměnou ekvivalence (3) v rovnost získáme, podle Fregova návodu,[12] definici směru, resp. rovnosti směru přímky p a směru přímky q. To lze zachytit jako

(4) $p = q \leftrightarrow p \parallel q,$

nebo, chceme-li podtrhnout změnu, ke které došlo, jako

(5) $\vec{p} = \vec{q} \leftrightarrow p \parallel q.$

Tato změna přitom nespočívá v tom, že bychom danému znaku p přiřadili nějaký jiný *objekt*, ale že jsme se rozhodli tento znak *užívat* jinak, za celek všech výrazů (reprezentací), které mu jsou jistým způsobem ekvivalentní. Teprve odvozeně můžeme o tomto celku hovořit jako o (novém) objektu zjednaném proměnou příslušné ekvivalence v rovnost.

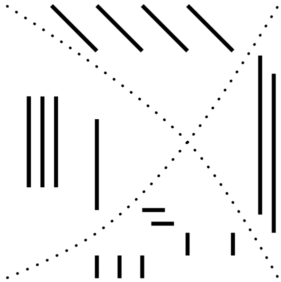
Axiomy (E1–E5), a v tom spočívá jejich zmíněný filosofický význam, nás přitom upozorňují, že je tato proměna vázána na daný jazyk. Ekvivalence, kterou definují, se totiž vůči mimologickým konstantám – predikátům a funktorům daného jazyka – chovají jistým uniformním způsobem. Tyto výrazy, resp. to, co znamenají, totiž nedovolí rozlišit mezi ekvivalentními jmény, resp. jejich významy. Ekvivalence této vlastnosti se nazývá *kongruence*.

`18.4.1 Vysvětlení (Kongruence):` *Kongruence $\sim_L$ je relace ekvivalence $\sim$ relativizovaná k výrazům nějakého jazyka L, a to tak, že se k jejich extenzím chová způsobem vymezeným axiomy (E1–E2).*

Platí-li např. nějaká vlastnost P o nějakém a, pak platí o všech předmětech s a ekvivalentních. To obrazně znamená, že příslušné dělení oboru na dvě části, totiž těch předmětů, které P splňují, a těch, které ne, sleduje hranice jednotlivých tříd ekvivalence $[a]_\sim$. Sestává-li např. naše univerzum z tyčí různé délky a naší ekvivalencí je „stejnost délky“, je tato relace kongruencí tehdy, jestliže každý predikát uvažovaného jazyka, který

[12] Frege [1884, § 74].

lze připsat jedné tyči, lze připsat všem tyčím téže délky. Podobně je to s funktory, kdy přiřazení předmětu b předmětu a funkcí f musí vést k tomu, že funkce přiřazuje předmětům ekvivalentním s a opět předměty ekvivalentní s b, tj. jednotlivá přiřazení se *de facto* dějí na úrovni tříd $[a]_\sim$, $[b]_\sim$. Viz obrázek 18.4. Predikátem, resp. funktorem, který tomuto



Obrázek 18.4: Příklad kongruence

požadavku vyhovuje, je např. „x je menší než y“ či „$x + 1$ metr“, který tyči jisté délky přiřadí tyč o 1 metr delší. Naopak predikát „být železný“ nemusí kongruenci umožňovat, protože je s to jít napříč příslušnou třídou ekvivalence, v níž může být část stejně dlouhých tyčí železných a část dřevěných.

Přirozená výhoda kongruence oproti prosté ekvivalenci tkví v tom, že od kongruence lze zcela přímočaře přejít k rovnosti, a tedy k novým předmětům reprezentovaným příslušnými ekvivalenčními třídami, aniž by přestaly platit původní vlastnosti a vztahy. To znamená, že nově zavedený předmět má danou vlastnost či stojí v nějaké relaci k jinému novému předmětu tehdy a jen tehdy, když tuto vlastnost či vztah měly původní předměty, které nyní slouží jako reprezentace předmětů nových. Konkrétní tyč dané délky nyní reprezentuje všechny tyče téže délky, a tedy délku samu, a jako o takové o ní může platit, že je menší než nějaká tyč, resp. délka jiná. Obecně tedy přecházíme od jedné interpretace I daného jazyka L k interpretaci $I_\sim$ téhož jazyka takové, že $U_{I_\sim}$ sestává z ekvivalenčních tříd na univerzu U_I podle ekvivalence $\sim$ a pro interpretaci mimologických konstant, např. pro modelový případ unární konstanty $\mathtt{P}$, platí:

$$a \in I(\mathtt{P}) \text{ tehdy a jen tehdy, když } [a]_\sim \in I_\sim(\mathtt{P}).$$

Predikát „$\approx$“ má v této nové interpretaci $I_\sim$ význam reálné identity, tj. dva předměty a a b z $U_{I_\sim}$ náleží $I_\sim(\approx)$ tehdy a jen tehdy, když $a = b$. Jinak zapsáno:

$$I_{\sim}(\approx) = \{\langle a, a\rangle \mid a \in U_{I_{\sim}}\}.$$

V tomto ohledu plní axiomy (E1–E5) dobře svou funkci. Způsob, jak rovnost definovat přímo, aniž bychom přecházeli k jiné interpretaci, nám – jak bylo naznačeno – nabízí predikátová logika vyšších řádů, která promění axiomatická schémata (E1–E2) v plnohodnotný axiom. Přistupme tedy k ní.

19

Logika vyšších řádů

V klasické predikátové logice prvního řádu bylo univerzum diskurzu tvořeno entitami odpovídajícími na syntaktické úrovni výrazům kategorie jméno. V tomto smyslu se může zdát být rozlišení logiky prvního a vyšších řádů poplatné tradičním ontologickým diskusím o existenci jiných entit nežli jsou předměty, konkrétně tedy vlastností a relací, a to od středověkých sporů mezi *realismem* a *nominalismem* po současnost. Přitom tomu ale není tak, že bychom vlastnosti či vztahy v daných větách či formulích vůbec nezmiňovali. Naopak, v rámci příslušné formální sémantiky jsme nechali příslušné mimologické (predikátové a funktorové) konstanty označovat jisté extenzionálně chápané entity – množiny, relace a funkce – nad příslušným univerzem. V tomto smyslu je ve větě

Theaitétos sedí

vlastnost „sedět“ stejně existující jako objekt Theaitétos. Neobstojí ani tvrzení, že je Theaitétos na rozdíl od sezení subjektem věty, protože tak jako lze větu chápat coby

(1) přípis vlastnosti „sedět“ Theaitétovi,

lze ji chápat i jako

(2) přípis instance Theaitéta vlastnosti „sedět“.

Před sebou pak máme známou symetrii dvou rozličných jednot, totiž (1) jednoty předmětu coby svazku různých vlastností a (2) jednoty predikátu coby vlastnosti mnoha instancí. Z hlediska funkcionálního čtení se nám nabízí dvě rovnocenné interpretace uvedené věty, totiž jako:

(1) (Theaitétos) sedí,

(2) Theaitétos (sedí).

V této kapitole objasníme, v čem spočívá podstatný rozdíl mezi logikou *prvního řádu*, jak jsme ji probrali v předchozích kapitolách, a logikou *vyšších řádů*, a to zvláště na pozadí faktu, že tento rozdíl zpočátku nebyl chápán jako přirozený. Podstatnou roli v našem výkladu bude hrát jak problém identity, diskutovaný v předchozí kapitole, tak některé logické vlastnosti příslušných formálních systémů, které jsme popsali výše. Nejprve se přitom omezíme na logiku *druhého řádu.*

19.1 Logika druhého řádu

Z hlediska substitučního paradigmatu lze přirozeně nalézt rozdíl mezi logikou prvního a druhého řádu v tom, že to byl spíše výraz „Theaitétos“ než výraz „sedět“, jejž jsme se rozhodli chápat jako substituovatelný. Nejde přitom tedy ani tak o to, že bychom nemohli za substituovatelný prohlásit výraz „sedí“, ale že když už si jeden z těchto typů jako substituovatelný vybereme, bude ten druhý substituovatelný v jiném, relativním smyslu. To je zachyceno fixováním role substitučního rámce jako

x sedí

a tím, že případná substituce za výraz „sedí“ musí nyní tuto jeho roli, především tedy znak x argumentu, podržet. Dále vidíme, že to, čím se obě logiky liší, není dáno typem užívaných mimologických konstant, ale tím, jaké připouštějí proměnné, tj. přes jaké výrazy výsledně kvantifikují. Teprve kvantifikace totiž vyžaduje určení příslušného oboru v jeho kvantitě, což neděláme jinak než stanovením kritéria identity příslušných reprezentací, jak jsme se k tomu vyjádřili v předchozích oddílech, zvláště v oddílu 18.1. Docházíme tak k přirozenému spojení dvou obvyklých kritérií existence nějaké entity, totiž:

(1) stanovení kritéria identity pro její reprezentace,

(2) zavedení proměnné, jejíž jsou tyto reprezentace hodnotou.

Pojmově se celá věc stane jasnější, uvědomíme-li si již řečené, totiž že každá věc je nám fakticky dána vždy jen jako význam určitého výrazu, tedy skrze jistou reprezentaci, která se specifickým použitím stane reprezentací něčeho. Při tomto vědomí jsou pak srozumitelná i slavná Quinova ontologická hesla, podle nichž:

(1) není entity bez identity,[1]

(2) být znamená být hodnotou proměnné.[2]

Podle těchto devíz dospějeme k logice vyšších řádů tehdy, když větu typu „Theaitétos sedí“ rozložíme uvedeným alternativním způsobem, v němž se vyjmutelným stává nejen výraz „Theaitétos“, ale navíc i výraz „sedí“. Fakt, že se jedná o výrazy různých kategorií, nekotvíme tedy v přirozeném jazyku a rozdílu jména a slovesa, ale dáváme mu vyvstat přímo ze substituční strategie, tedy z toho, že Theaitétos byl substituován dřív a výraz „sedí“, je-li nahrazen, musí být reprezentován proměnnou jiného typu, totiž typu, jenž odpovídá substitučním rámcům, do nichž lze dosazovat jména. Dospějeme tak hned k výrazu

Theaitétos X,

kterému odpovídá vlastnost druhého řádu, totiž být vlastností, kterou má Theaitétos. Formálně tedy můžeme vyjít z věty formy

$\mathtt{S(t)}$

a získat dva substituční rámce

$\mathtt{S(x)}$ $\qquad\qquad$ $\mathtt{X(t)}$.

V obou pak lze příslušnou proměnnou kvantifikovat a získat formule

$(\forall\mathtt{x})\mathtt{S(x)}$ $\qquad\qquad$ $(\forall\mathtt{X})\mathtt{X(t)}$,

jimž odpovídají věty jako „každý sedí“ a „Theaitétos má všechny vlastnosti“. Ty jsou samozřejmě v této nepodmíněné formě dosti nepřirozené, ale je zjevné, že např. snadná úprava druhé z nich, jako

Theaitétos má všechny vlastnosti velkého filosofa,

již tímto neduhem netrpí a jasně zdůvodňuje potřebu kvantifikace vyšších řádů. Příslušná formalizace vypadá třeba takto:

[1] Quine [1981*b*, s. 102].
[2] Quine [1953, s. 15].

$$(\forall X)((\forall y)(y \text{ je velký filosof} \to X(y)) \to X(t)).$$

Jiným způsobem, jak vše zapsat, je tento:

$$(\forall X)(X \text{ je vlastnost velkého filosofa} \to X(t)).$$

Výraz „X je vlastnost velkého filosofa“ je zjevně vlastností vlastností, tedy vlastností druhého řádu. Analogicky logice prvního řádu bychom v logice druhého řádu mohli takové vlastnosti mohli pojmenovat, ale nekvantifikovat přes ně – pokud bychom tak učinili, opět pomocí nového typu proměnné, dospěli bychom k logice třetího a dalších řádů.

Samu logiku druhého řádu, symbolicky $\mathtt{KPL}_2$, přirozeně nedělá jen možnost kvantifikovat také přes vlastnosti a vztahy. K tomu potřebujeme navíc popsat příslušnou syntax a sémantiku. Za tímto účelem přidáme mezi základní symboly jazyka klasické predikátové logiky tzv. predikátové proměnné.

`19.1.1 Definice (Jazyk):` *Vedle prostředků* KPL *zavedeme v* $\mathtt{KPL}_2$ *pro každé přirozené číslo n skupinu predikátových proměnných arity n:*

$$\mathtt{X}^{\mathtt{n}}_1, \mathtt{X}^{\mathtt{n}}_2, \mathtt{X}^{\mathtt{n}}_3, \ldots$$

Arita bude vždy explicitně zmíněna nebo bude zřejmá z kontextu. Proto budeme pro predikátové proměnné (podobně jako pro predikáty) používat jednoduše symboly $\mathtt{X}, \mathtt{Y}, \mathtt{Z}, \ldots$

Definice termu se nemění, avšak rozšíříme definici formule.

`19.1.2 Definice (Formule):` *Nejprve doplníme definici elementární formule* KPL *v tom smyslu, že elementární formulí* $\mathtt{KPL}_2$ *je nejen každý výraz tvaru* $\mathtt{Q}^{\mathtt{n}}(\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_{\mathtt{n}})$, *kde* $\mathtt{Q}^{\mathtt{n}}$ *je n-místný predikát a* $\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_{\mathtt{n}}$ *jsou termy, ale také každý výraz tvaru* $\mathtt{Y}^{\mathtt{n}}(\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_{\mathtt{n}})$, *kde* $\mathtt{Y}^{\mathtt{n}}$ *je n-místná predikátová proměnná, jejíž arita je n. K definici formule* KPL *pak doplníme následující klauzuli:*

> *je-li ϕ formule a* Y *libovolná predikátová proměnná, pak posloupnosti symbolů* $((\forall \mathtt{Y})\phi)$ *a* $((\exists \mathtt{Y})\phi)$ *jsou také formule.*

Tímto rozšířením syntaxe KPL jsme vymezili syntax predikátové logiky druhého řádu. Paralelně rozšíříme sémantiku KPL tak, aby zohlednila také nově přijaté syntaktické útvary. Definice pojmu interpretace zůstává beze změny, ale rozšiřuje se pojem valuace. Valuace V je objekt, který je relativní vůči nějaké interpretaci I. V KPL jsme definovali valuaci V jako funkci, která přiřazuje každé proměnné y nějaký objekt univerza interpretace I. Nyní však vedle individuových proměnných musíme zohlednit též predikátové proměnné. To znamená především vymezení univerza diskurzu, přes které budou tyto proměnné probíhat. Přirozeným kandidátem jsou podmnožiny základního univerza U_I, resp. relace na něm, což fakticky znamená, že zavádíme další univerza diskurzu, která sestávají ze všech podmnožin základního univerza, případně jeho kartézské mocniny. Tím se stává určení toho, přes co kvantifikujeme, netriviální, protože související s vymezením pojmu libovolné podmnožiny, jak je diskutováno v teorii množin. Jak je tento pojem komplikovaný, resp. jak je komplikované vymezení toho, co bychom mohli nazývat libovolnou vlastností, uvidíme záhy právě v souvislosti s možností definovat pojem rovnosti. Nyní na okamžik považujme celou záležitost kolem kvantifikace přes vlastnosti za technický problém a vraťme se zpět k pojmu valuace.

`19.1.3 Definice (Valuace):` *U individuových proměnných je valuace stejná jako v* `KPL`. *Dále valuace* $\mathtt{KPL}_2$ *přiřazuje každé* n*-místné predikátové proměnné* $\mathtt{Y^n}$ *nějakou* n*-ární relaci na univerzu interpretace* I*, tj.* $V(\mathtt{Y^n}) \subseteq U_I^n$.

Jedná-li se konkrétně o jednomístnou predikátovou proměnnou `Y`, pak $V(\mathtt{Y})$ je nějaká množina objektů univerza diskurzu.

`19.1.4 Konvence (Y-varianta valuace):` *Pro valuaci* V *a proměnnou* `Y` *o* n*-argumentech zavedeme pojem* `Y`*-varianty valuace* V*, kterou budeme značit* $V_R^{\mathtt{Y}}$*, kde* R *je nějaká* n*-ární relace na univerzu. Pokud* `x` *je individuová proměnná, pak* $V_R^{\mathtt{Y}}(\mathtt{x}) = V(\mathtt{x})$*. Pokud* `X` *je predikátová proměnná odlišná od* `Y`*, pak také* $V_R^{\mathtt{Y}}(\mathtt{X}) = V(\mathtt{X})$*. Dále platí* $V_R^{\mathtt{Y}}(\mathtt{Y}) = R$*.*

Pravdivostní podmínky nově přijatých formulí jazyka $\mathtt{KPL}_2$ jsou určeny následujícími definicemi.

`19.1.5 Definice (Tarského definice pravdy):` *Rozšiřme Tarského definici pravdy z* `KPL` *o další klauzule, kde* `Y` *je* n*-místná proměnná:*

$$IV \vDash \mathtt{Y^n}(\mathtt{t_1}, \ldots, \mathtt{t_n}) \text{ právě tehdy, když } \langle IV(\mathtt{t_1}), \ldots, IV(\mathtt{t_n})\rangle \in V(\mathtt{Y^n}),$$

$$IV \vDash (\forall \mathtt{Y})\phi \text{ právě tehdy, když pro každé } R \subseteq U_I^n \text{ platí } IV_R^{\mathtt{Y}} \vDash \phi,$$

$$IV \vDash (\exists \mathtt{Y})\phi \text{ právě tehdy, když pro nějaké } R \subseteq U_I^n \text{ platí } IV_R^{\mathtt{Y}} \vDash \phi.$$

Výsledkem je definice pravdy pro $\mathtt{KPL}_2$*.*

Další základní sémantické pojmy – jako model, logická platnost, vyplývání (lokální a globální) a logická ekvivalence – jsou definovány stejně jako v `KPL`. Tím je sémantika predikátové logiky druhého řádu zcela vymezena.

19.2 Možnosti druhého řádu

Skutečnost, že jsme v rámci náčrtu syntaxe a sémantiky $\mathtt{KPL}_2$ nezaváděli uvedené definice rozšířením $\mathtt{KPL}_{\approx}$, ale přímo KPL, má svůj jasný původ v tom, že v logice druhého řádu jsme schopni rovnost explicitně definovat. Děje se tak pomocí formule:

$$\mathtt{x} \approx \mathtt{y} \leftrightarrow (\forall \mathtt{X})(\mathtt{X}(\mathtt{x}) \leftrightarrow \mathtt{X}(\mathtt{y})).$$

Jedná se zjevně o nám známý Leibnizův princip (LP2). Fakt, že na rozdíl od schémat (E1–E2) funguje (LP2) jakožto definující princip, není přitom dán ničím jiným než změnou v pojetí pojmu *vlastnosti*. I v axiomech rovnosti coby axiomatických schématech se totiž *kvantifikovalo* přes jisté vlastnosti, jednalo se však o ty, které šlo vyjádřit příslušným slovníkem. S ohledem na toto omezení pak snadno může nastat případ, v němž mají dva předměty zcela stejné vlastnosti vyjádřitelné v daném jazyce, aniž by však tyto předměty byly identické, protože vlastnost, která by toto indukovala, v daném jazyce vyjádřit nelze. Jelikož v $\mathtt{KPL}_2$ kvantifikujeme podle předpokladu přes „všechny“ vlastnosti, měl by být tento případ vyloučen. Potud se vše zdá být v pořádku. Proč by ale, nabízí se znovu otázka, nemohly existovat dva předměty týchž vlastností, které tedy nejsou odlišné kvalitativně, kvantitativně však ano?

Jedna z odpovědí, jak jsme ji naznačili dříve, upozorňuje jednoduše na to, že Leibnizův princip, stejně jako predikát rovnosti, který vymezuje, nejsou deskriptivní, ale *preskriptivní* povahy. Neříkají tedy, kdy jsou *dvě* věci *jedna*, ale kdy lze dvě reprezentace považovat za reprezentace téhož, což je právě tehdy, když je nelze v rámci jistého jazyka příslušnými predikáty odlišit. V $\mathtt{KPL}_2$ je nám ale tato odpověď upřena, právě proto, že jsme se rozhodli dívat na rovnost jako na jakýkoli jiný predikát. Důvod, proč jsou dva předměty týchž vlastností nutně tytéž, musíme tedy hledat jinde, a to právě v široce pojatém pojmu vlastnosti. Musíme najít vlastnost předmětu a, která zajistí, že je a totožný s b, o němž víme, že má stejné vlastnosti jako a. V této formulaci je přitom podoba dané vlastnosti nasnadě. Je to jednoduše vlastnost:

být totožný s a.

Tu musí totiž a triviálně mít, a má-li ji podle předpokladu b, znamená to, že je totožný s a. S ohledem na cíl explicitní definice rovnosti se může tento způsob zdůvodnění korektnosti příslušné definice zdát jako poněkud pochybný, neboť vlastně na úrovni známého již operuje tím, co chce teprve zavést. Z formálního hlediska je ale vše v pořádku. O tom se lze snadno přesvědčit. Jelikož jsou uvažované vlastnosti, přes něž v druhořádové proměnné kvantifikujeme, chápány extenzionálně, v (LP2) vlastně říkáme, že předměty a a b, které jsou prvky týchž množin, musí být identické. To je zjevně pravda, neboť platí následující posloupnost kroků:

(1) $a \in \{a\}$, z vlastnosti množin,

(2) $b \in \{a\}$, (LP2),

(3) $a = b$, z vlastnosti množin.

Z neformálního hlediska se ovšem jedná o tentýž problém jako v případě vlastností, neboť jednoprvková množina stejně jako množina prázdná vděčí za svůj status „mnohosti“ právě tomu, že jsme zobecnili možnost utvářet skupiny objektů pomocí jistých predikátů, v našem případě tedy predikátu $x = a$, kdy platí:

$$\{a\} = \{x \mid x = a\}.$$

Při vymezení rovnosti jsme tudíž museli tuto rovnost opět předpokládat. Podobně se obojí – síla i slabina druhořádových metod – bude projevovat ve srovnatelně významné přeměně schématu na axiom, a to v aritmetickém případě *principu indukce*. Vzhledem k tomu, že jsme s to definovat rovnost, můžeme rovnou pracovat i s funktory, aniž bychom je explicitně zaváděli do jazyka. V rámci `KPL` lze pak princip indukce pojmout jako schéma, které pro libovolnou vlastnost `P` tvrdí, že platí-li pro 0 a přenáší-li se z x na $x + 1$, platí již pro všechna čísla, resp. pro všechny objekty příslušného diskurzu:

(PI) $\mathtt{P(0)} \land (\forall \mathtt{x})(\mathtt{P(x)} \to \mathtt{P(x+1)}) \to (\forall \mathtt{x})\mathtt{P(x)}$.

(PI) lze samozřejmě vztáhnout na libovolnou formuli `KPL` s jednou volnou proměnnou `x`, která pak reprezentuje libovolnou (složenou) vlastnost vyjádřitelnou v daném jazyce. V (PI) je tak zjevně zachycen také princip důkazu indukcí, který jsme opakovaně používali na induktivně definované objekty. Z hlediska `KPL` není ovšem nijak zajištěno, že v interpretaci, ve které (PI) platí, budou pouze objekty, které byly definovány induktivně, tj. k nimž se lze dostat od objektu pojmenovaného jako `0` aplikací operace pojmenované jako $\mathtt{x+1}$. Právě jim se přitom pokoušela zabránit klauzule (3) induktivních definic

nic jiného, než co bylo popsáno v krocích (1) a (2) ...,

a to proto, že připuštění jejich existence vede k neplatnosti důkazu indukcí, neboť je zřejmé, že lze splnit antecedent (PI), aniž bychom museli s ohledem na tyto předměty splnit také jeho konsekvent. Vyloučit tyto nechtěné předměty lze ovšem pomocí kvantifikace vyššího řádu a přepisem (PI) na (PI2):

(PI2) $(\forall \mathtt{X})(\mathtt{X}(\mathtt{0}) \wedge (\forall \mathtt{x})(\mathtt{X}(\mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{X}(\mathtt{x}+\mathtt{1})) \rightarrow (\forall \mathtt{x})\mathtt{X}(\mathtt{x}))$.

Děje se tak zjevně opět s využitím široce pojatého konceptu vlastnosti. Ten zajistí, že splnění premis, tj. platnost jisté vlastnosti pro 0 a její přenos z x na $x+1$, již nepřipustí existenci jiného objektu než takového, k němuž lze od 0 dospět aplikací $x+1$, a to právě proto, že je – jako kritická vlastnost v (LP2) – definována tímto definitorickým účelem, totiž jako:

> být objektem, k němuž lze dospět od 0 aplikací $x+1$.

Je zjevné, že tuto vlastnost splňuje 0, a splňuje-li ji x, pak i $x+1$. Podle předpokladu ji tedy musí splňovat i libovolné a z univerza diskurzu, tj. není možné, aby nějaký objekt nebyl dosažitelný induktivním postupem od 0. Po tomto pojmově-historickém exkurzu[3] se nyní podívejme systematičtěji na další expresivní rozdíly mezi logikou prvního a vyšších řádů.

V $\mathtt{KPL}_{\approx}$ jsme byli schopni vyjádřit pro libovolné n, že univerzum interpretace má n prvků. Kupodivu ale není možné vyjádřit, že univerzum je konečné. To je důsledkem bodu (b) věty o kompaktnosti (tj. věty 15.3.5), resp. faktu, že tato věta platí i po přidání rovnosti ke KPL. Uveďme příslušný důkaz.

19.2.1 Věta (O konečných modelech): *V* $\mathtt{KPL}_{\approx}$ *neexistuje sentence, která by vyjadřovala konečnost univerza diskurzu, tj. která by byla pravdivá právě v těch interpretacích, jejichž univerzum je konečné.*

Důkaz: Budeme postupovat sporem. Předpokládejme tedy, že existuje sentence ϑ vyjadřující konečnost univerza. Nechť ξ_n je nějaká sentence vyjadřující, že univerzum interpretace má více než n prvků, tj. např. formule:

$$(\forall \mathtt{x}_1)\ldots(\forall \mathtt{x}_n)(\exists \mathtt{y})(\mathtt{y} \not\approx \mathtt{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathtt{y} \not\approx \mathtt{x}_n).$$

Tato formule je pravdivá právě v těch interpretacích, které mají více než n prvků. Nechť T je množina všech takovýchto formulí. T tedy obsahuje pro každé přirozené číslo n sentenci ξ_n a nic jiného. Každá konečná část množiny T, ϑ tedy musí být splnitelná, neboť stačí vzít maximální n takové, že ξ_n je obsaženo v dané konečné části množiny T, ϑ. Platí, že každá interpretace, jejíž univerzum má $n+1$ prvků, musí být modelem

[3] Historický rozměr uvedeného příkladu je značný, neboť přímo souvisí s důvodem, proč a v jaké formě zavedl Frege své „pojmové písmo“. Detaily, stejně jako další pojmové náležitosti, lze nalézt in: Kolman [2008, kap. 4 a 5].

této konečné části. Podle věty o kompaktnosti pak musí být splnitelná také celá množina T, ϑ. Ta ale nemůže mít konečné modely, tj. modely s konečným univerzem, tedy musí mít nějaký nekonečný model. Formule ϑ je tedy pravdivá v nějaké interpretaci, jejíž univerzum je nekonečné. To je spor s naším předpokladem. `QED`

Podobný výsledek pochopitelně platí, nahradíme-li konečnost univerza jeho nekonečností, tj. neexistuje prvořádová sentence vyjadřující, že univerzum interpretace je nekonečné. Kdyby totiž taková sentence existovala, její negace by vyjadřovala konečnost univerza. To, co se v předchozí větě tvrdí, se dále objasní v kontextu následujících příkladů.

`Příklad 19.2.2:` Když jsme zaváděli pojem modelu pro `KPL`, uvedli jsme v rámci příkladu 14.7.2, že množina těchto tří sentencí má pouze nekonečné modely:

(1) $(\forall \mathtt{u})(\forall \mathtt{v})(\forall \mathtt{w})(\mathtt{R}(\mathtt{u},\mathtt{v}) \wedge \mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{w}) \rightarrow \mathtt{R}(\mathtt{u},\mathtt{w}))$,

(2) $(\forall \mathtt{u})(\exists \mathtt{v})\mathtt{R}(\mathtt{u},\mathtt{v})$,

(3) $(\forall \mathtt{u})\neg\mathtt{R}(\mathtt{u},\mathtt{u})$.

Konjunkci těchto tří formulí označme jako ξ. Tato formule pochopitelně nevyjadřuje nekonečnost univerza, protože existují nekonečné interpretace, v nichž je ξ nepravdivá, např. když $\mathtt{R}$ je realizována jakožto netranzitivní relace. Avšak když přejdeme k logice druhého řádu, můžeme zkonstruovat formuli ξ^* tak, že ve formuli ξ nahradíme každý výskyt predikátu $\mathtt{R}$ dvoumístnou predikátovou proměnnou $\mathtt{Y}$. Pak platí, že formule $(\exists \mathtt{Y})\xi^*$ je pravdivá právě v těch interpretacích, jejichž univerzum je nekonečné, a její negace právě v těch interpretacích, jejichž univerzum je konečné.

Nárůst expresivní síly v přechodu od prvního řádu k druhému se tedy projevuje v tom, že v $\mathtt{KPL}_2$ jsme schopni konečnost (resp. nekonečnost) univerza vyjádřit jedinou formulí. Podívejme se ještě na alternativní postup v rámci druhého příkladu.

`Příklad 19.2.3:` Vezměme si následující čtyři prvořádové formule:

(1) $(\forall \mathtt{u})(\forall \mathtt{v})(\forall \mathtt{w})(\mathtt{R}(\mathtt{u},\mathtt{v}) \wedge \mathtt{R}(\mathtt{u},\mathtt{w}) \rightarrow \mathtt{v} \approx \mathtt{w})$,

(2) $(\forall \mathtt{u})(\forall \mathtt{v})(\forall \mathtt{w})(\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{u}) \wedge \mathtt{R}(\mathtt{w},\mathtt{u}) \rightarrow \mathtt{v} \approx \mathtt{w})$,

(3) $(\forall \mathtt{u})(\exists \mathtt{v})\mathtt{R}(\mathtt{u},\mathtt{v})$,

(4) $\neg(\forall \mathtt{u})(\exists \mathtt{v})\mathtt{R}(\mathtt{v},\mathtt{u})$.

Nechť ζ je konjunkce těchto čtyř formulí. První část této konjunkce říká, že realizace predikátu $\mathtt{R}$ je funkce, druhá část říká, že je to funkce prostá, třetí část říká, že je to funkce totální, čtvrtá část říká, že není tzv. „na“, tj. její obor hodnot není celé univerzum. Taková funkce může existovat jen na nekonečných množinách. Pokud ζ^* vznikne tak, že ve formuli ζ nahradíme každý výskyt predikátu $\mathtt{R}$ dvoumístnou predikátovou proměnnou $\mathtt{Y}$, pak $(\exists\mathtt{Y})\zeta^*$ představuje alternativní způsob, jak jedinou formulí vyjádřit nekonečnost univerza.

Z toho plyne, že $(\exists\mathtt{Y})\xi^*$ a $(\exists\mathtt{Y})\zeta^*$ představují příklad dvojice druhořádových sentencí, které jsou logicky ekvivalentní. Podobně jako jsme byli s to v $\mathtt{KPL}_{\approx}$ specifikovat mohutnost daného modelu pro konečné velikosti, jsme totéž schopni učinit v $\mathtt{KPL}_2$ pro mohutnosti nekonečné. Pro spočetnou nekonečnost může jako příklad sloužit (PI2) doplněný o požadavek kladený na význam $\mathtt{x}+\mathtt{1}$, totiž že se jedná o prostou funkci

(P1) $(\forall\mathtt{x})(\forall\mathtt{y})(\mathtt{x}+\mathtt{1}\approx\mathtt{y}+\mathtt{1}\rightarrow\mathtt{x}\approx\mathtt{y})$,

která nic nepřiřazuje významu $\mathtt{0}$

(P2) $(\forall\mathtt{x})(\mathtt{x}+\mathtt{1}\not\approx\mathtt{0})$.

Souhrn (P1–P2) a (PI2) tvoří *Peanovu aritmetiku (druhého řádu)*, která je – z důvodů, jež jsme naznačili – splněna pouze interpretacemi majícími strukturu přirozených čísel, což znamená, že má pouze spočetně nekonečné modely. Za spočetnost je přitom zodpovědný (PI2) a jeho druhořádová forma, která dává potenciálně nekonečnému odkazu induktivní definice jednoduchý explicitní tvar. Axiomy (P1–P2) jsou zodpovědné za nekonečnost – strukturou ostatně odpovídají formulím v příkladě 19.2.3, jen místo predikátové konstanty používáme konstantu funktorovou. K dosažení téhož efektu, tedy formule, která je splněna všemi interpretacemi se spočetně nekonečným univerzem a pouze jimi, stačí (při ošetření jistých dalších okolností, které nebudeme tematizovat) kvantifikovat příslušné konstanty.

Důkaz věty 19.2.1 by šlo snadno transformovat v důkaz tvrzení, podle něhož platí, že má-li nějaká množina formulí v $\mathtt{KPL}_{\approx}$ konečný model libovolné mohutnosti, má i nekonečný model. Tato věta je známa jako *věta o konečných modelech* a je zjevným důsledkem věty o kompaktnosti. S ohledem na existenci formule, která platí ve všech a pouze v konečných modelech, nemůže tedy v rámci $\mathtt{KPL}_2$ platit věta o kompaktnosti. Jelikož je ale věta o kompaktnosti přímým důsledkem silné věty o úplnosti, je zjevné, že žádná kalkulizace $\mathtt{KPL}_2$ nemůže být silně úplná! To samozřejmě stále ještě nevylučuje existenci kalkulizace, která je alespoň slabě úplná. Její možnost padá ovšem v důsledku Gödelových vět o neúplnosti aritmetiky. Platí tedy, že množina logicky platných formulí (resp. relace vyplývání) predikátové logiky druhého řádu není reprezentovatelná žádným přehledným systémem axiomů, což znamená, že logiku druhého řádu nelze úplným způsobem kalkulizovat. Pro přehlednost uvádíme jakési shrnutí vybraných vlastností dosud probíraných systémů ve formě tabulky:

	KVL	KPL	$\mathtt{KPL}_{\approx}$	$\mathtt{KPL}_2$
rozhodnutelnost	✓	×	×	×
úplná axiomatizovatelnost	✓	✓	✓	×
kompaktnost	✓	✓	✓	×
omezení shora pro konečné		×	✓	✓
omezení shora pro nekonečné		×	×	✓

Byla to mj. právě otázka úplnosti, co zapříčinilo postupné oddělení prvořádových od druhořádových logik, v tom smyslu, že ty první úplně kalkulizovatelné jsou. Návrh kalkulizace logiky vyšších řádů se objevuje ve Fregově *Pojmovém písmu*, kde jsou příslušné axiomy a pravidla pro predikátový počet podány v obecné formě kvantifikace všech typů proměnných. Ze sémantického hlediska není přitom již přechod mezi druhým a vyššími řády, na rozdíl od přechodu mezi prvním a druhým řádem, nijak podstatný, tj. jakmile jsme schopni kvantifikovat přes podmnožiny univerza, nepřináší nám již z expresivního hlediska možnost kvantifikovat přes množiny těchto podmnožin atd. nic nového. Detaily se nebudeme zabývat.[4] Otázky logiky vyšších řádů stručně shrneme v posledních oddílech této kapitoly, které se věnují teorii typů.

19.3 Teorie typů

Podobně jako jsme přešli od prvního řádu k druhému, lze samozřejmě postupovat výše k řádu třetímu, čtvrtému atd. Tyto řády jsou určeny již Fregovou typizací výrazů a zakládají substituční strategii, která pracuje se základními a odvozenými typy výrazů, jimž ve Fregově terminologii odpovídají výrazy nasycené a nenasycené. Tento přístup byl systematicky rozpracován Bertrandem Russellem v tzv. *teorii typů*, která měla tvořit jakéhosi konkurenta jiné platformě pro založení logiky a matematiky, totiž teorii množin. My se budeme teorií typů zabývat ve značném zjednodušení, které nám do ní umožní integrovat logiky všech řádů v me-

[4] Lze je ve stručnosti najít např. in: Kolman [2008, oddíl 4.5].

zích dosavadního způsobu výkladu. Tak, jak ji zde formulujeme, zavedl teorii typů Alonzo Church.[5]

Prvním krokem je vymezení nekonečného souboru typů. Z hlediska `KPL` jsme přitom disponovali dvěma základními kategoriemi výrazů, totiž *větami* a *jmény*, přičemž obojí mohlo být jak tím, co je substituováno, tak podkladem pro substituci. Frege byl v tomto ohledu ještě úspornější, když prohlásil větu za jméno pravdivostní hodnoty, což znamená, že si vystačil s jedním základním typem. My budeme v dalším respektovat zásadní odlišnost věty jako něčeho, co může být pravdivé a nepravdivé, a jména coby její (relativně) samostatné části, což se projeví hned v následující definici.

`19.3.1 Definice (Elementární typ):` *Máme dva elementární typy, které reprezentují písmena e a t.*

Písmeno e odkazuje k anglickému slovu „entity“ a pod tento typ budou spadat individuové (singulární) termíny, které budou označovat jednotlivé objekty. Písmeno t odkazuje k „truth value“ a pod tento typ budou spadat věty, kterým budeme přiřazovat pravdivostní hodnoty. Systém elementárních typů bychom mohli obměňovat či doplňovat podle potřeby, jak to také některé systémy činí. Uvidíme však, že tato dvojice elementárních typů je pro naše účely zcela vyhovující. Typy budeme označovat pomocí řeckého písmene τ, ke kterému budeme připojovat indexy. Soubor všech typů je vymezen induktivně a opírá se o elementární typy.

`19.3.2 Definice (Typ):` *Typy definujeme takto:*

(1) každý elementární typ je typem,

(2) jsou-li τ_1, τ_2 typy, pak také $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ je typem,

(3) nic jiného není typem, než co bylo popsáno v (1) a (2).

Z této definice není úplně jasné, jakými objekty typy jsou. Pro jednoduchost je můžeme ztotožnit přímo s konečnými posloupnostmi metajazykových výrazů „e“, „t“, „$\langle$“, „$\rangle$“, „,“. Aby však nějaká taková posloupnost byla typem, musí být v souladu s předchozí definicí. Všech typů je pochopitelně nekonečně mnoho. Uveďme několik příkladů typů:

e,

$\langle e, t \rangle$,

[5] Church [1940].

$$\langle t, \langle t, t \rangle \rangle,$$

$$\langle \langle \langle t, e \rangle, \langle e, t \rangle \rangle, \langle t, \langle e, t \rangle \rangle \rangle,$$

$$\langle \langle e, \langle e, e \rangle \rangle, \langle \langle \langle e, t \rangle, \langle \langle t, e \rangle, \langle t, t \rangle \rangle \rangle, \langle \langle e, \langle t, e \rangle \rangle, e \rangle \rangle \rangle.$$

Nyní se budeme zabývat samotnými výrazy objektového jazyka. V objektovém jazyce teorie typů máme k dispozici pro každý typ neomezené množství konstant a proměnných. Dobře utvořené výrazy budeme označovat písmeny $\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \ldots$ Proměnné budeme označovat písmeny $\mathtt{X}, \mathtt{Y}, \mathtt{Z}, \ldots$ Syntax jazyka teorie typů je dán následující definicí, která induktivně vymezuje množinu dobře utvořených výrazů tohoto jazyka. Ve třetím bodě této definice zavádíme tzv. *lambda operátor*, jehož význam bude podrobněji objasněn níže.

`19.3.3 Definice (Dobře utvořené výrazy):` *Dobře utvořené výrazy (jazyka teorie typů) jsou definovány takto:*

(1) každá konstanta a každá proměnná je dobře utvořený výraz,

(2) pokud $\mathtt{B}$ *je dobře utvořený výraz typu* τ_1 *a* $\mathtt{A}$ *typu* $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$*, pak* $\mathtt{A}(\mathtt{B})$ *je dobře utvořený výraz typu* τ_2*,*

(3) pokud $\mathtt{Y}$ *je proměnná typu* τ_1 *a* $\mathtt{A}$ *dobře utvořený výraz typu* τ_2*, pak* $\lambda\mathtt{Y}(\mathtt{A})$ *je dobře utvořený výraz typu* $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$*,*

(4) nic jiného není dobře utvořeným výrazem, než co bylo popsáno v (1), (2) a (3).

Z definice je zřejmé, že máme k dispozici dva způsoby, jak utvořit komplexní výraz z jednodušších výrazů. Pokud spolu požadovaným způsobem korespondují typy, můžeme jeden výraz jednoduše aplikovat na druhý výraz (druhý bod předchozí definice). Nebo můžeme k výrazu připojit proměnnou a lambda operátor (třetí bod definice). První způsob tvorby komplexních výrazů redukuje komplexitu typů. Typ výrazu $\mathtt{A}(\mathtt{B})$ je jednodušší než typ výrazu $\mathtt{A}$, i když nemusí být jednodušší než typ výrazu $\mathtt{B}$. U druhého způsobu je tomu naopak. Typ výrazu $\lambda\mathtt{Y}(\mathtt{A})$ je složitější než typy výrazů $\mathtt{Y}$ a $\mathtt{A}$. Nyní pár jednoduchých příkladů.

`Příklad 19.3.4:` Předpokládejme, že:

$\mathtt{A}$ je konstanta typu $\langle e, \langle e, \langle t, e \rangle \rangle \rangle$,

$\mathtt{B}$ je konstanta typu $\langle t, e \rangle$,

$\mathtt{C}$ je konstanta typu t,

$\mathtt{X}$ je proměnná typu e.

Pak např. $\texttt{A}(\texttt{B})$ není dobře utvořený výraz, protože do sebe nezapadají typy výrazů $\texttt{A}$ a $\texttt{B}$. Avšak třeba následující výrazy jsou dobře utvořené. Uvádíme je spolu s jejich typy:

$\texttt{B}(\texttt{C})$ je výraz typu e,

$\texttt{A}(\texttt{X})(\texttt{B}(\texttt{C}))$ je výraz typu $\langle t, e\rangle$,

$\lambda\texttt{X}(\texttt{A}(\texttt{X})(\texttt{B}(\texttt{C})))$ je výraz typu $\langle e, \langle t, e\rangle\rangle$,

$\lambda\texttt{X}(\texttt{A}(\texttt{X})(\texttt{B}(\texttt{C})))(\texttt{B}(\texttt{C}))$ je výraz typu $\langle t, e\rangle$.

Syntax teorie typů je tedy vymezena a můžeme přejít k sémantice. Ta je jako obvykle založena na pojmu interpretace.

`19.3.5 Definice (Interpretace):` *Interpretací I jazyka teorie typů označujeme funkci, která přiřazuje každému typu τ určitou množinu, které říkáme doména tohoto typu, a každé konstantě* $\texttt{A}$ *nějaký prvek této domény, takže pokud* $\texttt{A}$ *je typu τ, pak $I(\texttt{A}) \in I(\tau)$. Přitom $I(e)$ je libovolná neprázdná množina (univerzum interpretace I), $I(t)$ je množina pravdivostních hodnot* $\{\texttt{0}, \texttt{1}\}$ *a $I(\langle\tau_1, \tau_2\rangle)$ je množina veškerých totálních funkcí z $I(\tau_1)$ do $I(\tau_2)$.*

V dané interpretaci tedy figurují dvě základní množiny, totiž univerzum interpretace a množina pravdivostních hodnot. Nad těmito dvěma množinami je vystavěna hierarchie dalších množin. Každá z těchto množin obsahuje funkce, jejichž oborem hodnot (resp. definičním oborem) je množina, která se nachází níže v této hierarchii.

`Příklad 19.3.6:` Zde je několik příkladů, jak přiřazování domén funguje:

(a) typu $\langle t, t\rangle$ jsou přiřazeny jednoargumentové funkce na pravdivostních hodnotách,

(b) typu $\langle t, \langle t, t\rangle\rangle$ jsou přiřazeny funkce, které pravdivostním hodnotám přiřazují jednoargumentové pravdivostní funkce,

(c) typu $\langle e, t\rangle$ jsou přiřazeny funkce z univerza do pravdivostních hodnot,

(d) typu $\langle e, \langle e, t\rangle\rangle$ jsou přiřazeny funkce, které přiřazují objektům z univerza funkce z univerza do pravdivostních hodnot,

(e) typu $\langle\langle e, t\rangle, t\rangle$ jsou přiřazeny funkce, které přiřazují pravdivostní hodnoty funkcím z univerza do pravdivostních hodnot,

(f) typu $\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle$ jsou přiřazeny funkce, které přiřazují funkcím z univerza do pravdivostních hodnot funkce z univerza do pravdivostních hodnot.

Je tedy patrné, že již poměrně jednoduchým typům jsou přiřazeny velice komplexní objekty. Definice interpretace je doplněna definicí valuace a její varianty.

`19.3.7 Definice (Valuace):` *Valuace V (relativní vůči interpretaci I) je funkce, která každé proměnné* `Y` *typu τ přiřadí nějaký prvek $V(\mathtt{Y})$ z množiny $I(\tau)$. K valuaci V, proměnné* `Y` *typu τ a objektu o z domény tohoto typu definujeme $V^{\mathtt{Y}}_{o}$, tj.* `Y`*-variantu valuace V standardním způsobem jako valuaci, která přiřazuje všem proměnným různým od* `Y` *stejné hodnoty, jaké přiřazuje valuace V, a proměnné* `Y` *přiřazuje objekt o.*

V `KPL` na tomto místě následovala Tarského definice pravdy, která vymezovala, jakou pravdivostní hodnotu (tj. extenzi) mají formule vzhledem k dané interpretaci a valuaci. V obecnějším rámci teorie typů přiřadíme jistou extenzi všem výrazům s ohledem na jejich typ.

`19.3.8 Definice (Extenze):` *Vzhledem k interpretaci I a valuaci V přiřadíme každému dobře utvořenému výrazu* `A` *typu τ tzv. extenzi výrazu* `A`*, což je jistý objekt z domény typu τ. Tento objekt budeme označovat jako $\|\mathtt{A}\|_{IV}$. Přiřazování je určeno následujícími podmínkami:*

(1) pokud je `X` *proměnná, pak $\|\mathtt{X}\|_{IV} = V(\mathtt{X})$,*

(2) pokud je `A` *konstanta, pak $\|\mathtt{A}\|_{IV} = I(\mathtt{A})$,*

(3) $\|\mathtt{A}(\mathtt{B})\|_{IV} = \|\mathtt{A}\|_{IV}\,(\|\mathtt{B}\|_{IV})$,

(4) pokud τ_1 je typ proměnné `Y` *a τ_2 je typ dobře utvořeného výrazu* `A`*, pak $\|\lambda\mathtt{Y}(\mathtt{A})\|_{IV}$ je funkce z $I(\tau_1)$ do $I(\tau_2)$ taková, že pro každý objekt o z $I(\tau_1)$ platí, že $\|\lambda\mathtt{Y}(\mathtt{A})\|_{IV}\,(o) = \|\mathtt{A}\|_{IV^{\mathtt{Y}}_{o}}$.*

Třetí bod předchozí definice je výrazem *principu kompozicionality* pro extenze, jenž říká, jak víme již z oddílu 4.2, že význam komplexního výrazu je určen významy výrazů, z nichž se komplexní výraz skládá, a způsobem, jímž se z nich skládá. Zvažme konkrétnější případ. Je-li `A(B)` dobře utvořený výraz typu τ_1 a `B` je výraz typu τ_2, pak výraz `A` musí být typu $\langle\tau_2,\tau_1\rangle$ a jeho extenzí musí být nějaká totální funkce z $I(\tau_2)$ do $I(\tau_1)$. Extenzi výrazu `A(B)` pak získáme tak, že aplikujeme funkci, která je extenzí výrazu `A` na objekt, který je extenzí výrazu `B`. Např. pokud `A` je typu $\langle e,t\rangle$, je extenzí tohoto výrazu nějaká funkce f přiřazující objektům univerza pravdivostní hodnoty. Pokud výraz `B` je typu e, je jeho extenzí nějaký objekt o z univerza. Pak `A(B)` je dobře utvořený výraz typu t a jeho extenze je pravdivostní hodnota, kterou získáme tak, že aplikujeme funkci f na objekt o, tj. extenzí výrazu $\mathtt{A}(\mathtt{B})$ je pravdivostní hodnota $f(o)$. Čtvrtý bod předchozí definice vymezuje sémantiku lambda operátoru. Jeden významný důsledek této definice stojí za povšimnutí. Máme-li výraz $\lambda\mathtt{Y}(\mathtt{A})$ typu $\langle\tau_1, \tau_2\rangle$, tak pokud $\mathtt{B}$ je dobře utvořený výraz typu τ_1, je $\lambda\mathtt{Y}(\mathtt{A})(\mathtt{B})$ dobře utvořený výraz typu τ_2. Z definice extenze plyne, že pro každou interpretaci I a valuaci V platí následující rovnost

(LK) $\|(\lambda\mathtt{Y}(\mathtt{A})(\mathtt{B})\|_{IV} = \|\mathtt{A}^{\mathtt{Y}}_{\mathtt{B}}\|_{IV}$,

kde $\mathtt{A}^{\mathtt{Y}}_{\mathtt{B}}$ je výraz, který získáme tak, že ve výrazu $\mathtt{A}$ nahradíme každý volný výskyt (tj. výskyt nevázaný operátorem λ) proměnné $\mathtt{Y}$ výrazem $\mathtt{B}$, který je substituovatelný za $\mathtt{Y}$ v podobném smyslu jako v `KPL`. Přechodu od výrazu $\lambda\mathtt{Y}(\mathtt{A})(\mathtt{B})$ k výrazu $\mathtt{A}^{\mathtt{Y}}_{\mathtt{B}}$ se říká *lambda konverze*. Ve výše uvedeném příkladě jsme měli případ, že:

$\lambda\mathtt{X}(\mathtt{A}(\mathtt{X})(\mathtt{B}(\mathtt{C})))(\mathtt{B}(\mathtt{C}))$ je výraz typu $\langle t, e\rangle$.

Pomocí lambda konverze tento výraz můžeme transformovat na výraz $\mathtt{A}(\mathtt{B}(\mathtt{C}))(\mathtt{B}(\mathtt{C}))$. Tento výraz je stejného typu jako výraz původní a rovnost (LK) zaručuje, že oba výrazy budou mít stejnou extenzi v libovolné interpretaci a valuaci.

19.4 Možnosti teorie typů

Vymezili jsme syntax a sémantiku teorie typů. Nyní se podíváme, jak lze do tohoto obecného rámce vnořit predikátovou logiku prvního, druhého a jakéhokoli vyššího řádu. Začneme s prvním řádem. Všem výrazům `KPL` musíme přiřadit nějaký typ. Negaci přiřadíme typ $\langle t, t\rangle$, neboť chceme zajistit, aby její extenze byla jednoargumentová pravdivostní funkce. Binárním výrokovým spojkám přiřadíme typ $\langle t, \langle t, t\rangle\rangle$. Těmto spojkám sémanticky odpovídají dvouargumentové pravdivostní funkce, což jsou objekty, které se přímo v sémantice teorie typů nevyskytují. Máme však k dispozici funkce z pravdivostních hodnot do jednoargumentových pravdivostních funkcí, které jsou přiřazeny právě typu $\langle t, \langle t, t\rangle\rangle$. Tyto funkce mohou bez problémů reprezentovat dvouargumentové pravdivostní funkce, přestože jimi striktně vzato nejsou.

`Příklad 19.4.1:` Vezměme si např. dvouargumentovou funkci, kterou jsme přiřadili konjunkci. Tato funkce přiřazuje dvěma jedničkám jedničku a všemu ostatnímu nulu. Může ji reprezentovat funkce z pravdivostních hodnot do jednoargumentových pravdivostních funkcí, která přiřadí (a) jedničce funkci přiřazující jedničce jedničku a nule nulu, (b) nule funkci přiřazující jedničce nulu a nule nulu. Jinak řečeno, konjunkci v teorie typů odpovídá funkce f taková, že $f(\mathtt{1}) = g$ a $f(\mathtt{0}) = h$, kde $g(\mathtt{1}) = \mathtt{1}$, $g(\mathtt{0}) = \mathtt{0}$, $h(\mathtt{1}) = \mathtt{0}$ a $h(\mathtt{0}) = \mathtt{0}$.

Termům přiřadíme typ e – jejich extenzí je objekt univerza. Jaký typ bychom mohli přiřadit predikátům? Nejprve se zamysleme nad nejjednodušším případem jednomístných predikátů. Extenzí unárního predikátu má být nějaká podmnožina univerza, kterou můžeme reprezentovat pomocí její charakteristické funkce, viz definice 14.3.1. To znamená, že jednomístným predikátům můžeme přiřadit typ $\langle e, t\rangle$. Podobně jako v případě binárních spojek dojdeme k závěru, že n-místné predikáty jsou výrazy typu $\langle e, \langle \dots, \langle e, t\rangle \dots\rangle\rangle$, kde e se vyskytuje n-krát. Tedy např. trojmístný predikát je výraz typu $\langle e, \langle e, \langle e, t\rangle\rangle\rangle$. Dvoumístný predikát pak musí být typu $\langle e, \langle e, t\rangle\rangle$ a sémanticky mu odpovídá funkce, která objektu univerza přiřadí funkci z objektů univerza do pravdivostních hodnot. Pro ilustraci předpokládejme, že $\mathtt{A}$ je výraz typu $\langle e, \langle e, t\rangle\rangle$ a f je extenze výrazu $\mathtt{A}$ vzhledem k nějaké dané interpretaci a valuaci. f je potom funkce přiřazující objektům univerza funkce z objektů univerza do pravdivostních hodnot a reprezentuje binární relaci na univerzu objektů. Tomu rozumíme tak, že dvojice objektů a, b je v této relaci právě tehdy, když $f(a)$ je funkce, která objektu b přiřadí hodnotu $\mathtt{1}$.

Kvantifikátory vyžadují poněkud složitou úvahu, a tak se zatím podívejme, jak situace vypadá bez nich. Při ilustraci syntaxe teorie typů v její aplikaci na jazyk predikátové logiky prvního a vyšších řádů budeme používat následující notační zkratku.

`19.4.2 Konvence (Typ výrazu):` $\mathtt{A} : \tau$ *znamená, že* $\mathtt{A}$ *je dobře utvořený výraz typu* τ*.*

Vezměme si jazyk $\{\mathtt{P}, \mathtt{R}, \mathtt{c}\}$, kde $\mathtt{P}$ je jednomístný predikát, $\mathtt{R}$ je dvoumístný predikát a $\mathtt{c}$ je konstanta. Z výše řečeného tedy plyne, že:

$$\mathtt{P} : \langle e, t\rangle,\ \mathtt{R} : \langle e, \langle e, t\rangle\rangle,\ \mathtt{c} : e,\ \mathtt{x} : e,\ \neg : \langle t, t\rangle \text{ a } \vee : \langle t, \langle t, t\rangle\rangle.$$

Ze syntaxe teorie typů pak dostáváme:

$$\mathtt{P}(\mathtt{c}) : t,\ \mathtt{R}(\mathtt{x})(\mathtt{c}) : t,\ \neg(\mathtt{R}(\mathtt{x})(\mathtt{c})) : t \text{ a } \vee(\mathtt{P}(\mathtt{c}))(\neg(\mathtt{R}(\mathtt{x})(\mathtt{c}))) : t.$$

Zápis výrazu „$\vee(\mathtt{P}(\mathtt{c}))(\neg(\mathtt{R}(\mathtt{x})(\mathtt{c})))$“ se podobá polské notaci. Tento výraz pochopitelně odpovídá formuli:

$$\mathtt{P}(\mathtt{c}) \vee \neg\mathtt{R}(\mathtt{x}, \mathtt{c}).$$

Mezi oběma styly zápisu budeme nyní volně přecházet podle toho, zda bude naší prioritou přehlednost, nebo soulad s obecným vymezením jazyka teorie typů. Nutno poznamenat, že logické spojky patří mezi logické symboly, a jejich význam tedy bude ve všech interpretacích stejný.

Také v rámci teorie typů fixně přiřadíme výrokovým spojkám odpovídající pravdivostní funkce. Extenze výrazu $\mathtt{P(c)}$ bude záviset na tom, zda extenze výrazu $\mathtt{c}$ je či není obsažena v extenzi výrazu $\mathtt{P}$. Přesněji řečeno, $\|\mathtt{P(c)}\|_{IV}$ je hodnota $\mathtt{1}$ právě tehdy, když $\|\mathtt{P}\|_{IV}(\|\mathtt{c}\|_{IV})$ je hodnota $\mathtt{1}$. Analogicky $\|\mathtt{R(x)(c)}\|_{IV}$ je hodnota $\mathtt{1}$ právě tehdy, když $\|\mathtt{R}\|_{IV}(\|\mathtt{x}\|_{IV})(\|\mathtt{c}\|_{IV})$ je hodnota $\mathtt{1}$. Extenzi celého $\vee(\mathtt{P(c)})(\neg(\mathtt{R(x)(c)}))$ (tj. přehledněji $\mathtt{P(c)} \vee \neg\mathtt{R(x,c)}$) získáme na základě extenzí výrazů $\mathtt{P(c)}$ a $\mathtt{R(x)(c)}$. Vidíme, že na této úrovni funguje teorie typů stejně jako KPL prvního řádu.

Zbývá zohlednit kvantifikátory. Jakého typu jsou? Viděli jsme, že podle Frega lze kvantifikátor chápat jako způsob, jak kvantifikovat extenzi predikátu. To je v jeho filosofii součástí širších úvah týkajících se čísla, resp. jeho přípisu. Stejně, jako se ve větě

zakázaných knih je 5

netýká příslušné prohlášení daného předmětu nebo skupiny předmětů, protože ty lze rozkládat rozličným způsobem (na knihy coby díla, výtisky, tituly, na počty stran, písmena či molekuly, z nichž se skládají) do rozličně velkých celků, netýká se podle Frega ani přípis existence nějakého objektu, ale vždy vlastnosti, která vyděluje určité předměty a umožňuje jejich skupiny od sebe odlišit co do kvanta. Teprve o této vlastnosti (kniha jako dílo, kniha jako titul, písmeno v knize atd.) takto vlastně říkáme, že má počet instancí větší nebo roven 1, např. ve větě:

zakázané knihy existují.

Říci o nějakém předmětu, třeba konkrétní knize, že existuje, je banalita, neboť existence tvoří primárně presupozici, nikoli obsah tvrzení o něm. Rozdíl je v predikátové logice naznačen formulemi

$$(\exists \mathtt{x})\mathtt{P(x)} \qquad\qquad (\exists \mathtt{x})(\mathtt{x} = \mathtt{c}),$$

z nichž první je smysluplné tvrzení, zatímco druhá je logická pravda. Jako taková plyne z předchozího rozhodnutí (presupozice) nechat každou jmennou konstantu denotovat právě jeden objekt univerza. Existenční kvantifikátor prvořádové logiky je takto vlastně jistý predikát druhého řádu

$$(\exists \mathtt{x})\mathtt{X(x)},$$

tj. výraz, který lze aplikovat na predikáty $\mathtt{P}$ prvního řádu. Měl by to tedy být výraz typu $\langle\langle e, t\rangle, t\rangle$, a jeho extenzí pak jistá funkce, která přiřazuje pravdivostní hodnoty podmnožinám – či přesněji, charakteristickým funkcím podmnožin – univerza.

Avšak podíváme-li se na syntax predikátové logiky prvního řádu, není na první pohled zjevné, že existenční kvantifikátor aplikujeme na predikáty. Kvantifikátory připojujeme k větám (resp. formulím) za pomoci nějaké proměnné. Můžeme však říci, že tato proměnná nejprve udělá z věty predikát, a na ten pak můžeme aplikovat daný kvantifikátor. Tento krok, kdy z věty vyrábíme predikát pomocí nějaké proměnné, nebyl v syntaxi `KPL` explicitně zachycen, neboť k tomu nebyl žádný speciální důvod. Avšak v rámci teorie typů bez tohoto kroku vůbec nemůžeme kvantifikátory použít. K tvorbě predikátu z věty slouží lambda operátor a aplikaci tohoto operátoru se příhodně říká *lambda abstrakce*: Pokud máme větu $\mathtt{A}$ (jejímž typem je tedy t) a proměnnou $\mathtt{Y}$ typu e, můžeme utvořit výraz:

$$\lambda\mathtt{Y}(\mathtt{A}).$$

Podle definice syntaxe je typem tohoto výrazu $\langle e, t\rangle$, a tento výraz je tedy podle svého typu predikátem.

`Příklad 19.4.3:` Z výrazu $\mathtt{R}(\mathtt{x})(\mathtt{c})$ typu t si můžeme vyrobit predikát:

$$\lambda\mathtt{x}(\mathtt{R}(\mathtt{x})(\mathtt{c})).$$

Ze sémantického hlediska pod tento predikát (při dané interpretaci I a valuaci V) spadají právě ty objekty, které jsou ve vztahu $\|\mathtt{R}\|_{IV}$ k objektu $\|\mathtt{c}\|_{IV}$. Na tento predikát pak můžeme aplikovat existenční kvantifikátor $\exists$, a utvořit tak výraz $\exists(\lambda\mathtt{x}(\mathtt{R}(\mathtt{x})(\mathtt{c})))$, který odpovídá nám známému výrazu $(\exists\mathtt{x})\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{c})$. Jelikož $\exists : \langle\langle e,t\rangle, t\rangle$ a $\lambda\mathtt{x}(\mathtt{R}(\mathtt{x})(\mathtt{c})) : \langle e,t\rangle$, tak platí $\exists(\lambda\mathtt{x}(\mathtt{R}(\mathtt{x})(\mathtt{c}))) : t$, a vzniklý výraz je tedy dobře utvořenou větou. Je zjevné, že obdobným způsobem můžeme také z komplexních formulí tvořit predikáty, např. $\lambda\mathtt{x}(\mathtt{P}(\mathtt{c}) \vee \neg\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{c}))$, a ty pak kvantifikovat, čímž získáme např. výraz odpovídající formuli $(\exists\mathtt{x})(\mathtt{P}(\mathtt{c}) \vee \neg\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{c}))$.

Ze syntaktického hlediska funguje obecný kvantifikátor stejně jako existenční. Tyto výrazy se liší sémanticky. Oba kvantifikátory spadají mezi logické symboly, a přiřadíme jim tedy fixní extenzi podobně jako výrokovým spojkám. Jistý rozdíl ovšem spočívá v tom, že extenze kvantifikátorů – na rozdíl od extenze výrokových spojek – je relativní vůči univerzu diskurzu. Avšak je-li dáno univerzum diskurzu, je tím zároveň určena extenze kvantifikátorů, jak záhy popíšeme.

`19.4.4 Definice (Kvantifikátor):` *Existenční (resp. obecný) kvantifikátor je výraz typu $\langle\langle e,t\rangle, t\rangle$ a jeho extenzí funkce $f_\exists$ (resp. $f_\forall$), která podmnožinám univerza (jejich charakteristickým funkcím) přiřazuje pravdivostní hodnotu, a to hodnotu* `1`*, pokud je daná množina neprázdná (resp. totožná s celým univerzem), a jinak hodnotu* `0`*. Neboli,* *je-li g funkce z univerza do pravdivostních hodnot (tj. charakteristická funkce nějaké podmnožiny univerza), pak:*

$f_\exists(g) = \mathtt{1}$ *právě tehdy, když* $g(o) = \mathtt{1}$ *pro nějaké* $o \in I(e)$,

$f_\forall(g) = \mathtt{1}$ *právě tehdy, když* $g(o) = \mathtt{1}$ *pro každé* $o \in I(e)$.

Takto lze vnořit celou KPL do teorie typů, neboť pojem interpretace v teorii typů lze chápat jako rozšíření pojmu interpretace v KPL a každý výraz KPL lze chápat jako výraz v teorii typů. V omezení na formule prvořádové logiky se teorie typů chová přesně jako KPL, což lze formulovat také jako tvrzení, že pro každou interpretaci I a valuaci V a pro každou prvořádovou formuli ϑ platí:

$IV \models \vartheta$ právě tehdy, když $\|\vartheta\|_{IV} = \mathtt{1}$.

V teorii typů je však obsaženo mnohem více než v KPL. Máme zde nejen predikáty, ale i predikátové proměnné prvního řádu typu $\langle e, t\rangle$. Na ně lze aplikovat predikáty a predikátové proměnné druhého řádu typu $\langle\langle e, t\rangle, t\rangle$. Na ně predikáty a proměnné třetího řádu typu $\langle\langle\langle e, t\rangle, t\rangle, t\rangle$ atd. Obecně jsou k dispozici predikáty a predikátové proměnné libovolného $(n+1)$-ního řádu, které jsou aplikovatelné na predikáty a predikátové proměnné n-tého řádu. Je-li τ typ predikátů n-tého řádu, je $\langle\tau, t\rangle$ typ predikátů (a predikátových proměnných) $(n+1)$-ního řádu.

Na všech úrovních můžeme zavést kvantifikaci. Kvantifikátor aplikovatelný na (jednomístné) predikáty n-tého řádu je jiného typu než kvantifikátor aplikovatelný na (jednomístné) predikáty m-tého řádu, pokud m není totožné s n. Kvantifikátor n-tého řádu, tj. kvantifikátor aplikovatelný na predikáty řádu n, je sám predikátem řádu $n+1$. Pro všechny kvantifikátory jakožto pro logické symboly je třeba fixovat extenzi. Lze to provést naprosto analogicky s tím, jak jsme to učinili u kvantifikátorů prvního řádu. Kvantifikátorům n-tého řádu přiřadíme jako jejich extenze funkce $f^n_\exists$ a $f^n_\forall$. Je-li τ typ predikátů n-tého řádu a g libovolná funkce z $I(\tau)$ (což musí být jistá charakteristická funkce), pak:

$f^n_\exists(g) = \mathtt{1}$ právě tehdy, když $g(o) = \mathtt{1}$ pro nějaké $o \in I(\tau)$,

$f^n_\forall(g) = \mathtt{1}$ právě tehdy, když $g(o) = \mathtt{1}$ pro každé $o \in I(\tau)$.

Tímto způsobem jsou integrovány v teorii typů logiky všech konečných řádů. Výše jsme uvedli, že logika druhého řádu není kalkulizovatelná. Tato negativní vlastnost se pochopitelně přenáší též na mnohem komplexnější teorii typů. To je jistá daň za vysokou expresivní sílu. Teorie typů nám ale na druhou stranu dovoluje zachytit mnohé z toho, co jsme na úrovni prvořádové KPL zachytit nemohli. Kromě predikátů a kvantifikátorů vyšších řádů to jsou ještě například výrazy fungující jako modifikátory predikátů. Např. chceme-li v prvořádové KPL formalizovat větu

(1) Tonda je inteligentní učitel,

můžeme to učinit tak, že sousloví „inteligentní učitel“ rozložíme a větu přeformulujeme na „Tonda je inteligentní a Tonda je učitel“, což lze formalizovat např. jako $\mathtt{P}(\mathtt{c}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{c})$. Avšak totéž nelze učinit např. v případě věty:

(2) Tonda je bývalý učitel.

Soubor slov „Tonda je bývalý a Tonda je učitel“ nedává dobrý smysl. V KPL musíme sousloví „bývalý učitel“ formalizovat jako neanalyzovaný predikát. Problém je s přídavným jménem „bývalý“. Podívejme se blíže, jak se takové přídavné jméno chová. Můžeme tvořit smysluplné výrazy jako „bývalý student“, „bývalý ministr“, „bývalý sportovec“, v nichž slovo „bývalý“ aplikujeme na predikát a získáme komplexní výraz, který opět odpovídá predikátu, jelikož tento výraz lze připisovat jménům a jiným singulárním výrazům. Přídavná jména lze chápat jako modifikátory predikátů, tj. jako výrazy typu

$$\langle\langle e, t\rangle, \langle e, t\rangle\rangle,$$

které pochopitelně v KPL prvního řádu nemáme, ale v teorii typů jsou k dispozici. Pokud $\mathtt{A} : e$, $\mathtt{B} : \langle e, t\rangle$ a $\mathtt{C} : \langle\langle e, t\rangle, \langle e, t\rangle\rangle$, pak $\mathtt{C}(\mathtt{B})(\mathtt{A})$ je dobře utvořený výraz typu t, pomocí kterého můžeme formalizovat větu (2).

19.5 Teorie typů a paradoxy

Teorie typů, jak jsme ji v předchozích oddílech načrtli, zdaleka neodpovídá systému, který jako první navrhl Russell v roce 1908 ve stati „Matematická logika založená na teorii typů“.[6] Zatímco Russellova teorie byla míněna jako komplexní odpověď na logické paradoxy, které Russell nejprve sám objevil ve Fregově logickém systému, námi předložená jednoduchá teorie řeší paradox jen v původní verzi, která Fregův systém nijak nepostihuje, právě proto, že v něm Frege dávno před Russellem a objevem sporu provádí příslušnou typizaci predikátových, resp. funktorových konstant. Pro připomenutí toho, co jsme již zmínili v oddílu 10.2, se jedná o odvození pocházející z definice vlastnosti „být vlastností, která si nenáleží“, tj.

[6] Russell [1908].

$$F(X) \leftrightarrow \neg X(X),$$

a z její aplikace na sebe samu

$$F(F) \leftrightarrow \neg F(F).$$

Ve Fregově systému přitom lze paradox odvodit proto, že na rozdíl od stratifikace pojmu funkce nemá hierarchické pojetí předmětu, k němuž coby kategorii patří kromě individuí i množiny. To znamená, že předmět a stejně jako množina, do níž náleží, jsou téhož typu (e), což pak umožňuje konstrukci množiny všech množin, které si nenáležejí: $\{x \mid x \notin x\}$. Zeptáme-li se nyní, zda si tato množina náleží, či ne, dostáváme paradox, neboť platí $\{x \mid x \notin x\} \in \{x \mid x \notin x\} \leftrightarrow \{x \mid x \notin x\} \notin \{x \mid x \notin x\}$.

Z hlediska teorie typů je cestou ven z paradoxu přirozeně typizace jednotlivých množin, což znamená jejich konstruktivní vystavění z individuí základního typu a rozřazení do jednotlivých stupňů abstrakce, kdy množina nějakých prvků musí mít vždy vyšší typ než tyto prvky samy. Jednotlivé typové vrstvy jsou přitom závislé na vrstvě základní, vrstvě individuí, atomů či „urelementů“ majících typ 0. Typ 1 tvoří všechny množiny objektů typu 0 atd., obecně tedy typ $n+1$ tvoří množiny objektů typu n, viz obrázek 19.1. Frege tuto úpravu, kterou mu Russell

$\vdots$						
3	$\{\{\emptyset\}\}$	$\{\{\{a\}\}\}$	$\cdots$			
2	$\{\emptyset\}$	$\{\{a\}\}$	$\{\{b\}\}$	$\{\{a\},\{a,b\}\}$	$\cdots$	
1	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$		
0		a	b			

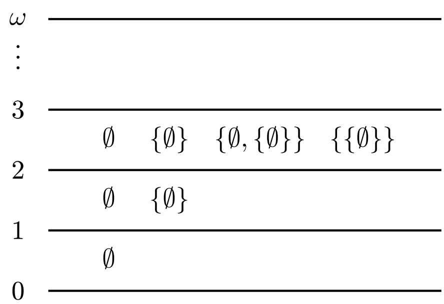
Obrázek 19.1: Hierarchie typů

přímo navrhl, odmítl s odůvodněním, že by se tím až příliš komplikoval jeho původní systém.[7] Fakticky mu zde nešlo ani tak o formální rámec tohoto systému, ale především o cíl čistě logického založení aritmetiky, které předpokládá existenci nekonečně mnoha předmětů (perspektivních čísel) získaných čistě logickými prostředky. K jejich zavedení lze snadno použít právě operátor množinové abstrakce poté, co byl do systému inkorporován jako logický symbol. Máme-li jej, lze skrze logický predikát

[7] Frege [1976, s. 228].

„$\neq$“ zavést předmět $\{x \mid x \neq x\}$, tedy naši známou prázdnou množinu $\emptyset$. Tu je možné – a to je pro Frega zvláště podstatné – realizovat v každém univerzu, neboť např. na rozdíl od množiny všech koťátek či prvočísel nezávisí na tom, v jaké interpretaci, resp. v jakém univerzu interpretace se zrovna pohybujeme. Právě v tomto ohledu se jedná o logicky definovaný předmět, tedy o předmět, jemuž lze připsat existenci nezávisle na interpretaci. Máme-li takový předmět, není problém vystavět další, od něho odlišné, třeba $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \ldots$, jichž je v souladu s principem abstrakce nekonečně mnoho. Jelikož se jedná o logické varianty čísel, které tvoří obor proměnné aritmetiky, je ovšem zásadní právě předpoklad, že se jedná o předměty téhož typu, tj. lze se k nim odkazovat pomocí jediné proměnné. Teorie typů ovšem tento předpoklad likviduje. Množiny uvedeného tvaru, tj. např. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{x \mid x = \emptyset \vee x = \{\emptyset\}\}$, v ní navíc vůbec neexistují, protože odkazují skrze tutéž proměnnou x ke dvěma různým úrovním.

Z logického hlediska je ale takový odkaz neškodný, tj. k žádnému paradoxu nevede, neboť se tyto úrovně nacházejí pod typem příslušné množiny, odkazuje se tedy k množinám, které již byly zkonstruovány. Tato úvaha vedla k úpravě, která je známa jako kumulativní teorie typů, v níž typ n obsahuje množiny prvků všech typů menších, jak to ukazuje obrázek 19.2. V obou teoriích typů, prosté i kumulativní, obsahuje



Obrázek 19.2: Kumulativní typy

každá úroveň pouze konečné množství logicky definovaných čísel. V kumulativní teorii se ale alespoň na úrovni ω dostaneme k proměnné, která kvantifikuje přes jejich nekonečné množství. Je ovšem otázka, zda lze tento transfinitní krok zdůvodnit čistě logickými prostředky, resp. zda jeho použití nepředpokládá víc, než má být jeho prostřednictvím dosaženo. Totéž se týká přijetí axiomu, který postuluje existenci nekonečna objektů základní úrovně, k němuž se odhodlal Russell ve svých *Principia*

Mathematica poté, co zjistil, že jinak není s to zachovat smysl Fregovy původní analýzy, podle níž je číslo něčím, co se vztahuje k pojmu, tedy z typového hlediska se jedná o pojem, případně objekt druhého řádu. Číslo 7 lze takto chápat buďto jako vlastnost (propoziční funkci)

X má 7 prvků,

pod niž spadají prvořádové vlastnosti (propoziční funkce) jako „Sněhurčin trpaslík“ či „den v týdnu“, nebo analogicky jako množinu všech sedmiprvkových množin. Pokud by byla základní úroveň typu 0 konečná, čítající pouze n objektů, je zřejmé, že každé číslo $m > n$ typu 2 je rovno prázdné množině, což by mj. měla být prázdná množina daného typu, tj. dochází k dalším zbytným duplicitám. Přidání axiomu nekonečna tuto situaci řeší, ovšem opět za cenu toho, že se tím zapřahá vůz před koně, tj. říká se explicitně něco, co by se mělo pouze ukazovat, jak to požaduje Wittgenstein ve svém *Tractatu.*[8]

Jestliže si uvědomíme všechny tyto potíže, je přirozené, že ve své zakládající funkci byla nakonec teorie typů plně nahrazena teorií množin, která potřebu konstruktivního přístupu k otázkám existence množin zohlednila přijetím jistých globálních požadavků na strukturu množinového univerza prostřednictvím axiomů bez typové specifikace. K nim patří i axiom nekonečna, jenž tentokráte ovšem netvrdí existenci nekonečně mnoha předmětů (které existují čistě ze syntaktických důvodů), ale existenci nekonečné množiny. Autor původní axiomatizace, Ernst Zermelo, ho uvádí v následující podobě:

$$(\exists c)(\emptyset \in c \wedge (\forall x)(x \in c \rightarrow \{x\} \in c)).$$

Ta garantuje existenci celku všech přirozených čísel, jak je Zermelo definuje, totiž:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

Paradoxům je zabráněno tím, že axiomy garantují pouze existenci množin, jež lze odvodit z množin stávajících, jako jsou ty právě popsané, pomocí jistých konkrétních operací, např. té, která množině přiřazuje její potenci. Možnost vytvořit množinu pomocí vydělující podmínky $Q(x)$ jako $\{x \mid Q(x)\}$ je rovněž zachována, ale vždy vzhledem k již existujícím totalitám, z jejichž prvků je vybírána množina prvků dané vlastnosti. Predikát $x \notin x$ může být tedy na rozdíl od teorie typů povolen, odkaz k množině všech množin, které si nenáleží

$$\{x \mid x \notin x\},$$

[8] Srov. Wittgenstein [1922, § 5.535].

je ale třeba vždy chápat ve vztahu k výběru z prvků nějaké existující množiny a, tedy jako

$$\{x \mid x \in a \wedge x \notin x\}.$$

Paradox proto nehrozí. Z ontologického hlediska se lze na věc dívat tak, že nám není umožněno vytvářet totality, které jsou příliš „velké“, kdy kritérium velikosti je dáno rovnopočetností s totalitou V všech množin. Stručně jsme o tom již hovořili v oddílu 10.6.

Důvodem toho, že byla teorie typů pěstována ještě poté, co teorie množin do velké míry opanovala pole, byl její původní „intenzionální rámec“, který spojoval význam výrazu s jeho komplexní strukturou. Ve své původní verzi měla teorie typů také podobu tzv. *rozvětvené teorie typů.* V té nejsou výrazy typizovány pouze podle svých volných proměnných, a tedy objektů, přes které probíhají, ale i podle toho, jak byly vystavěny z dalších výrazů. Pro označení funkce dané proměnné přitom Russell tuto proměnnou vyznačuje stříškou $\mathtt{P}(\widehat{\mathtt{x}})$, což je vlastně jistá varianta lambda abstrakce. Namísto $\mathtt{P}(\mathtt{x})$ a $(\forall\mathtt{X})\mathtt{X}(\mathtt{x})$ lze tedy psát:

$$\lambda\mathtt{x}\mathtt{P}(\mathtt{x}) \qquad\qquad \lambda\mathtt{x}(\forall\mathtt{X})\mathtt{X}(\mathtt{x}).$$

V obou případech se jedná o funkce téhož typu 1, určeného proměnnou x typu 0. Uvedené formule se ale liší tím, že druhá z nich popisuje objekt x pomocí vlastností, které jsou rovněž typu 1, a mohlo by tudíž dojít k bludnému kruhu. Řád lze přitom chápat jako číslo o 1 vyšší než nejvyšší typ některé z užitých proměnných. Funkce (resp. formule) $\lambda\mathtt{x}\mathtt{P}(\mathtt{x})$ má tedy řád 1, zatímco funkce $\lambda\mathtt{x}(\forall\mathtt{X})\mathtt{X}(\mathtt{x})$ či

$$\lambda\mathtt{x}(\forall\mathtt{X})(\forall\mathtt{y})\mathtt{X}(\mathtt{x},\mathtt{y})$$

mají řád 2. To vede k pojmu *predikativní* funkce či vlastnosti, což je ta, která má řád právě o 1 vyšší než je typ jejích argumentů. Uvážíme-li např. vlastnost $\lambda\mathtt{x}\mathtt{N}(\mathtt{x})$ pro

$$\mathtt{N}(\mathtt{x}) \leftrightarrow (\forall\mathtt{X})(\mathtt{X}(\mathtt{0}) \wedge (\forall\mathtt{x})(\mathtt{X}(\mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{X}(\mathtt{x}+\mathtt{1})) \rightarrow \mathtt{X}(\mathtt{x})),$$

kterou mají právě ty objekty, jež mají stejné vlastnosti, jaké má 0 a jaké se přenášejí z x na $x+1$, je zjevné, že se musí jednat o vlastnost nepredikativní. To především znamená, že ji nelze dosadit za $\mathtt{X}$ v uvedené formuli, což byl, jak jsme viděli dříve, právě onen způsob, jak zajistit, že příslušná formule plní svůj účel, totiž že popisuje interpretaci, jejíž univerzum – resp. extenze predikátu $\mathtt{N}(\mathtt{x})$ – má strukturu přirozených čísel. Podobně se to má s relací rovnosti definovanou druhořádově jako

$$\mathtt{x} \approx \mathtt{y} \leftrightarrow (\forall\mathtt{X})(\mathtt{X}(\mathtt{x}) \leftrightarrow \mathtt{X}(\mathtt{y})),$$

kde za $\mathtt{X}$ nelze dosadit predikát $\lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} \approx \mathtt{y})$, což je ovšem právě způsob, jak ověřit, že věci týchž vlastností musí být vzájemně identické.

Důvod, proč Russell trval na rozvětvené teorii typů přes všechny potíže, které jsou s ní spjaty, spočíval v tom, že se zdála bránit určitému typu sémantických paradoxů, v nichž je kladen větší důraz na strukturovaný výraz než na jeho prostý význam.[9] V těchto paradoxech má podstatnou úlohu použití sémantických obratů typu „znamenat“, „označovat“ apod., které jsou matematice, v jejímž kontextu byla moderní logika vytvořena a dále rozvíjena, spíše cizí. To vedlo k postupnému umenšování úlohy rozvětvené teorie typů, v důsledku teorie typů vůbec. Ze stejného důvodu nebyl po dlouhou dobu rozvíjen ani další logický systém, totiž logika modální. Jemu se budeme věnovat v další kapitole.

[9] K nim patří např. paradox heterologický, jehož rekonstrukci v rámci prosté teorie typů podává Potter [2000, s. 155 nn.].

20

Modální logika

Modální logika je bezesporu nejvýznamnějším příkladem systému, jenž je *nestandardní*, resp. *neklasický*. Takto označována přitom není ani proto, že byla málo rozšířena nebo nebyla dostatečně stará – naopak, v rámci Aristotelova *Organonu* je jí věnován podstatně větší prostor než teorii kategorického sylogismu –, ale že není přímo spjata s moderní logikou tak, jak ji založil Frege, a s jejími problémy. Rozkvětu se přitom modálním a jiným logikám dostalo až v šedesátých letech minulého století, kdy pro ně, resp. pro staré, neinterpretované kalkuly C. I. Lewise,[1] sestrojil Saul Kripke elegantní sémantiku založenou na pojmu možného světa.[2] Důvodem tohoto zvratu bylo mj. to, že se k původním matematickým podnětům, které byly spjaty se vznikem logiky moderní, přidaly i podněty filosofické, spojené především s rozvojem analytické filosofie. I její původ je vázán na vznik moderní logiky, již tím, že s ní má společného zakladatele, oproti ní však představuje, stejně jako modální operátory, vyšší úroveň zobecnění či odstupu.

V případě modalit lze tento odstup spatřit v tom, že se termíny nutnosti a možnosti vztahují na samy formule, resp. věty, jejichž formu tyto formule zachycují, např. tím, že je klasifikují jako logicky pravdivé či splnitelné. Logika modalit by v tomto ohledu vlastně hrála jakousi

[1] Lewis [1918].
[2] Viz Kripke [1963].

roli logiky samotné logiky, tedy cosi podobného, co se připisuje filosofii ve smyslu první vědy. Z hlediska našeho technického výkladu je zavedení logických konstant pro modality analogické zavedení kvantifikátoru. I ten totiž představuje explicitní vyjádření něčeho, co se předtím jen ukazovalo, totiž že je jistá věta pravdivá při záměně všech částí téhož typu. V `KPL` nás to vedlo k potřebě rozlišení obecnosti dvojího druhu, interní, odpovídající platnosti pro každou valuaci, a externí, odpovídající platnosti pro každou interpretaci. Nyní nás čeká podobný krok, ale právě o úroveň výš, v tom smyslu, že budeme mít logický operátor, jenž bude pravdivost v každé interpretaci – v každém možném světě – explicitně vyjadřovat. Tomuto kroku předešleme několik obecnějších úvah nad tím, co můžeme rozumět možným a nutným. Po nich bude následovat náčrt formální syntaxe a sémantiky modální logiky coby rozšíření klasické logiky výroků i predikátů. Tyto úvahy budou zajímavé i z čistě technického hlediska, neboť nabídnou jiný vhled do možností a variability formálně-logických metod.

20.1 Možné a nutné

O důvodech, proč byly termíny „nutnosti“ a „možnosti“ přes svoji zakotvenost v přirozeném jazyce a v jazyce filosofie ponechány zakladateli moderní logiky nejprve stranou, lze rozličně spekulovat. Jako jeden z názorů můžeme uvést ten, že modality jsou jazyku matematiky relativně cizí. Věta

(1) prvočísla větší než dvě jsou *nutně* lichá

je pouze emfatičtějším vyjádřením věty

(2) prvočísla větší než dvě jsou lichá,

tj. výraz „nutně“ nepřispívá nijak podstatně k jejich obsahu. K tomu lze dále argumentovat, že je to proto, že věty matematiky jsou *a priori*, a tedy vždy z definice nutné, a proto je zbytečné jim jako celku nutnost či možnost připisovat. Obojí je vhodné podrobit další analýze. Tak si hned můžeme všimnout, že přepis věty (1) na větu (2) není zcela přesný a výraz nutnosti není zcela redundantní, chápeme-li ho totiž jako výraz obecnosti ve smyslu:

(3) *všechna* prvočísla větší než dvě jsou lichá.

Toto tzv. *statistické* pojetí modalit ukazuje, že výše zmíněná logická podobnost modalit s kvantifikátory jde dále, než by se dalo čekat.[3] Moda-

[3] Toto pojetí zastává např. Russell [1972].

lity zde vlastně přímo zastupují kvantifikátory, jak jsme je zavedli v `KPL`, neboť platí následující přepisy:

A je nutná	$(\forall x)A$,
A je možná	$(\exists x)A$,
A je nemožná	$(\forall x)\neg A$.

Vztah ke kvantifikaci si drží i čtení, v němž se modality nevztahují pouze na predikát (otevřenou formuli), ale k celé větě (uzavřené formuli), a to opět zcela v souladu s naším předchozím rozlišením vnitřní a vnější obecnosti, totiž obecnosti v interpretaci a obecnosti interpretace. Modality takto zachycují splnitelnost v interpretacích, přičemž platí přepisy, které navrhl např. Wittgenstein ve svém *Tractatu*:[4]

A je nutná	A je tautologie,
A je možná	A je splnitelná,
A je nemožná	A je kontradikce.

To, přes co se zde kvantifikuje, je tedy množina všech interpretací, čímž z hlediska příslušné logiky dospíváme ke zdůvodnění onoho vyššího typu abstrakce, který je s modálními logikami – ve vztahu ke `KPL` – spojen. Jelikož podle Wittgensteinova *Tractatu*, stejně jako z pozic Kantovy epistemologie, na kterou Wittgenstein částečně navazuje, jsou věty matematiky součástí formy světa, nikoli světa samého, zůstávají co do pravdivosti v každé interpretaci (= možném stavu světa) stejné, a jsou tedy vždy nutné. Z logického hlediska, v němž kromě sémantické stránky jazyka rozlišujeme také stránku syntaktickou, či lépe řečeno, vedle otázek pravdy bereme v potaz také otázky dokazatelnosti, lze ale v tomto směru učinit další kroky. Řekneme-li např., že Goldbachova domněnka není nutně pravdivá, můžeme tím odkazovat k okolnosti, že se nám ještě nepodařilo prokázat její pravdu, a že tedy v tomto smyslu není příslušná věta odvoditelná z toho, co o dané věci zatím víme a co v principu připouští i platnost opaku. Tento směr úvah nás přivádí k pojetí tzv. *epistemických modalit*, které na rozdíl od pojetí předchozího pracuje s pojmy našich stávajících znalostí, tj. opírá se spíše o efektivní pojem důkazu než o ontologický pojem pravdy. S ohledem na to bývají výše zmíněné modality nazývány obecně jako *modality aletické*, tj. mající vztah k pravdivosti. Zřetelným rysem epistemických modalit je přitom jejich relativita, neboť vazba na konkrétní systém je činí proměnnými: to, co je vůči jednomu

[4] Wittgenstein [1922, § 5.525].

systému nutné, je vůči jinému kontingentní a *vice versa*. To považují jedni za slabost, jiní za sílu, která přibližuje epistemické použití modalit jejich použití obvyklému, jež typicky pracuje s nějakým implicitním systémem znalostí.[5] Řekneme-li např., že zloděj nutně utekl oknem, myslíme tím zpravidla, že věta „zloděj utekl oknem“ plyne z faktů získaných na místě činu, zatímco tvrzení, že Mozart mohl být otráven, naznačuje, že tvrzení „Mozart byl otráven“ není v rozporu se známými fakty. Platí tedy následující přepisy:

A je nutná (vzhledem k S) $\qquad S \vdash A,$

A je možná (vzhledem k S) $\qquad S \nvdash \neg A,$

A je nemožná (vzhledem k S) $\qquad S \vdash \neg A.$

Symbol $\vdash$ je přitom nejprve vhodné číst velmi obecně, tj. nikoli jen ve vazbě na konkrétní, např. axiomaticko-deduktivní, systém odvozování, ale ve smyslu každého (materiálně) platného odvození. Takto lze rozlišit několik případů, kdy *může* být Goldbachova domněnka *nutně* pravdivá (ve smyslu odvoditelnosti či vyplývání z axiomů Peanovy aritmetiky), aniž bychom to ještě věděli. Z toho je vidět, že v rámci matematiky lze modální pojmy snadno uplatnit, což systematicky dělá např. tzv. *logika dokazatelnosti*.[6] Potřebujeme k tomu ovšem alespoň rámcově vyjasnit pojmy (matematické) pravdivosti a dokazatelnosti, jak si to předsevzal Frege ve své logice. Rovněž s ohledem na to musí otázka modalit přicházet až později, tj. není divu, že ji Frege nepodal zároveň s klasickou logikou predikátů, ačkoli se k modálním soudům vyjadřuje i ve svém *Pojmovém písmu*. Zde kolísá mezi statistickým a epistemickým pojetím.[7]

Pokud ztotožníme dokazatelnost s pravdivostí, jak se to děje např. v logice intuicionistické, stává se každá pravdivá věta nutnou, ovšem nikoli absolutně, ale ve vztahu k danému vztažnému systému. Indexování modalit danými systémy se přitom můžeme zbavit v případě, když s jejich pomocí artikulujeme tvrzení platná pro *jakýkoli* systém. Větu

je-li A nutná, pak je A možná,

lze takto číst např. jako požadavek na konzistenci libovolného systému, který chceme brát v úvahu, a tedy perspektivní modálně-logickou tautologii. V případě aletických modalit je naopak modální symbol chápán od počátku jako absolutní, což má výhody, neboť to nepředpokládá vyjasnění vztahu pojmů důkazu a pravdivosti. Na druhou stranu je už

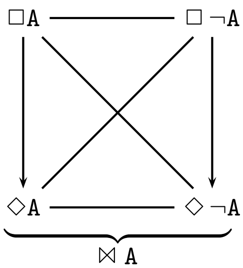
[5] Srov. k tomu např. Quine [1992, kap. 30].

[6] Pro podrobnosti viz třeba Boolos [1993].

[7] Frege [1879, § 4].

třeba disponovat jasně vymezenou formální sémantikou příslušných operátorů. K tomuto vymezení přitom došlo o hodně později, než začala být C. I. Lewisem a dalšími užívána jistá modální schémata jako obecně platná, což přirozeně vedlo k četným zmatkům. Než přistoupíme k rigoróznímu výkladu modální sémantiky, je proto dobré stručně zmínit jisté tradiční návrhy, jak sémantiku modalit regulovat, a to odkazem na zmíněnou kvantifikační podobnost modalit s klasickou predikátovou logikou a především se sylogistikou.

V rámci sylogistiky představoval aristotelský čtverec návrh, jak řídit jednotlivé sémantické vztahy čtyř povolených výrokových forem. Vlastní sémantiku tento prostý regulativ nenahradí, přinejmenším ale představuje první krok na cestě k tomu, jak ji dále budovat, stejně jako nám kruh barev či kvintový kruh poskytují základní orientaci v tom, jak dále míchat barvy či jaké kompoziční postupy zvolit. Přidržíme-li se nyní základní představy, že výraz nutnosti, symbolicky $\Box A$, zachycuje obecnost ve smyslu platnosti A pro všechny možné světy (interpretace), zatímco možnost $\Diamond A$ vyjadřuje částečnost, tedy existenci nějakého možného světa, v němž A platí, získáváme vzorec zachycený na obrázku 20.1. Perspektivně by měly být přitom zachovány tytéž vztahy jako v lo-



Obrázek 20.1: Modální čtverec

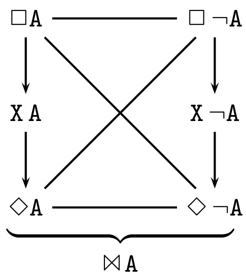
gickém čtverci, tj. svisle platí vztah podřazení, vodorovně kontrárnosti a diagonálně kontradiktoričnosti. Negace bychom tedy definovali jako:

$$\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A \qquad\qquad \Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A.$$

Spojením částečných formulí získáme navíc další operátor

$$\bowtie A \leftrightarrow \Diamond A \wedge \Diamond\neg A,$$

jenž zachycuje jedno z typických pojetí možnosti, která – na rozdíl od $\Diamond A$ – vylučuje nutnost. To odpovídá běžnému použití slova možné, které lze vůči předchozímu pojetí možnosti terminologicky odlišit jako *kontingenci.* Zmínili jsme v oddílu 7.6, že z hlediska základní interpretace modalit, jak ji vyjadřuje *Tractatus*, odpovídá kontingence věty stavu, v němž je splnitelná ona i její negace. Skutečnost, že se jedná o modality aletické, lze spatřovat v tom, že z nutnosti A plyne i její pravdivost v aktuálním možném světě, což je jasně dáno tím, že platí ve všech možných světech. V souladu s tím můžeme nyní doplnit uvažovaný obrazec o pravdivost prostou – symbolicky $\mathtt{X}\,A$. Toto doplnění ukazuje obrázek 20.2. Pro modalizované soudy lze také nastolit jakýsi analogon zákona

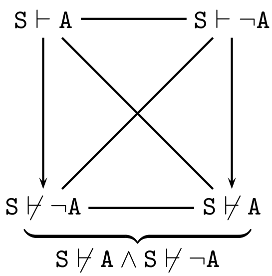


Obrázek 20.2: Modální čtverec s pravdivostí

vyloučeného třetího (*tertium non datur*) kategorických soudů, totiž vyloučený čtvrtý (*quartum non datur*), tj. disjunkci:

$$\Box A \vee \bowtie A \vee \Box\neg A.$$

I v případě epistemických modalit je možná podobná schematizace pomocí čtverce, jak ji zachycuje obrázek 20.3. Kontingenci nějaké formule



Obrázek 20.3: Epistemický čtverec

odpovídá neodvoditelnost této formule i její negace z daného systému S. V kontextu axiomatických teorií se o takové formuli říká, že je na systému S nezávislá. Do příslušného schématu nelze modalitu pravdivosti vsunout, protože je definována dokazatelností, a splývá tedy s nutností.

Pokud bychom ovšem, jak je to běžné v logice dokazatelnosti, chápali $\vdash$ jako dokazatelnost v nějakém konkrétním axiomatickém systému, např. Peanovy aritmetiky nad hilbertovským kalkulem pro `KPL`, nabízí se možnost brát pravdivost ve smyslu platnosti v nějaké interpretaci, jež vystupuje jako „aktuální“ z hlediska cílů dané teorie. V aritmetice je takovým modelem univerzum N všech přirozených čísel s konstantami definovanými tak, jak jsou používány v aritmetice. Přechod od

$$S \vdash A \qquad\qquad \text{k} \qquad\qquad M \models A$$

čteme tak, že je axiomatický systém S vůči pravdivosti zachycené interpretací M korektní. Jelikož vůči dané interpretaci nabývá libovolná sentence v jazyce, který je touto interpretací interpretován, vždy jednoznačnou hodnotu `1` nebo `0`, je zřejmé, že v úplném systému, tedy systému, kde platí přechod od

$$M \models A \qquad\qquad \text{k} \qquad\qquad S \vdash A,$$

se nemohou vyskytnout formule, které by na něm byly nezávislé, tj. pro žádnou formuli nemůže platit $\bowtie A$. Kromě této relativní úplnosti S vůči M lze zavést také úplnost absolutní, definovanou čistě v syntaktických pojmech odvoditelnosti, ve smyslu ustanovení, že S je (deduktivně) úplná, pokud v ní neexistují nezávislé formule, tj. pro každou aritmetickou formuli (větu) platí právě jedna z možností $S \vdash A$, $S \vdash \neg A$. Díky Gödelovi víme, že systém Peanovy aritmetiky není úplný ani vůči N, ani v deduktivním smyslu, a že ho dokonce ani zúplnit nelze. Všimněme si, že zde opět při formulaci problému využíváme modálních obratů.

Mezi nealetickými logikami existují ovšem i takové, u nichž pravdivost mezi nutnost a možnost z podstaty věci vsunout nelze. K těm nejprominentnějším patří tzv. *logiky deontické*, tedy logiky, v nichž nutnosti odpovídá přikázanost a možnosti povolenost nějakého stavu. Příbuznost s operátory dokazatelnosti je zřejmá – *přikázáno* je typicky to, co plyne z nějakého souboru norem (zákonů), *povoleno* je to, co s nimi není v rozporu. Zároveň je zjevné, že z toho, že se něco má dělat, obvykle neplyne, že tomu tak pokaždé je, a zase z toho, že něco nějak je, že by to bylo povoleno. Obdobou kontingence je stav, kdy je nějaké A povoleno a zároveň je povolena jeho negace. Můžeme hovořit o kontingenci deontické. Ve zbytku kapitoly se již ale budeme zabývat jen aletickými modalitami.

20.2 Logika S5

Výrazy „nutně platí, že ...“ a „možná platí, že ...“ fungují ze syntaktického hlediska podobně jako výraz „není pravda, že ...“, tedy jako výrokové operátory. Od negace se však operátory nutnosti a možnosti liší v tom podstatném ohledu, že jejich sémantiku nelze adekvátně formulovat v extenzionálním rámci. Není možné přiřadit jim jednoargumentové pravdivostní funkce jako jejich významy. To lze doložit následujícím příkladem. Zvažme větu:

(V) nutně platí, že $5 > 2$.

Věta (V) je tvaru „nutně platí, že A“, kde věta A říká, že 5 je větší než 2. Věta A je pravdivá a věta (V) je též pravdivá, vezmeme-li v potaz apriorní charakter matematiky, přinejmenším tedy relativně vůči tvrzením empirických věd. Avšak nahradíme-li větu A za nějakou pravdivou, avšak kontingentní větu, např. za „Praha má městský okruh“, získáme větu

(V′) nutně platí, že Praha má městský okruh,

která je – přinejmenším při určité interpretaci nutnosti – nepravdivá. Pravdivostní hodnota věty „nutně platí, že A“ tedy nemůže záviset pouze na pravdivostní hodnotě věty A, protože – jak jsme viděli – může dojít k tomu, že když nahradíme větu A za jinou větu se stejnou pravdivostní hodnotou, změní se pravdivostní hodnota celku. V tomto ohledu můžeme tedy modální logiku považovat za nestandardní rozšíření KVL. Nejprve specifikujeme její syntax. Budeme se zatím držet na úrovni výrokové logiky.

`20.2.1 Definice (Jazyk):` *Jazyk modální výrokové logiky (*MVL*) získáme z jazyka* KVL *přidáním unárních výrokových operátorů* $\Box$ *a* $\Diamond$.

Pojem formule vznikne opět snadným rozšířením KVL. Z výroků, které – jako např. „je možné, že byl Mozart otráven“ – byly elementárními výroky, se takto stanou výroky složené.

`20.2.2 Definice (Formule):` *Pro formule* MVL *platí:*

(1) každá výroková proměnná $\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}, \ldots$ *je formulí* MVL,

(2) jsou-li ϕ, ψ *formule* MVL, *pak* $(\Box\phi), (\Diamond\phi), (\neg\phi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ *jsou také formule* MVL,

(3) nic jiného, než co je popsáno v bodech (1), (2), formule MVL *není.*

Výrokové proměnné přitom stejně jako v KVL *nazýváme formulemi atomickými nebo jen atomy, ostatní formule nazýváme formulemi složenými či molekulárními.*

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme některé závorky vynechávat, podobně jako tomu bylo doposud. Co se týče formalizace a interpretace v přirozeném jazyce, platí, že $\Box A$ znamená „nutně platí, že A“, zatímco $\Diamond A$ reprezentuje výraz „možná platí, že A“. V předchozím oddílu jsme naznačili některé základní možnosti, které ukazují, jak obtížné a bohaté je z hlediska přirozeného jazyka užití formalizovaných modálních operátorů. Typickým problémem např. je, zda a jak je dovoleno modality řetězit. V přirozeném jazyce se totiž sice kumulace modalit objevuje, např. ve větě

> je nutné, aby bylo možné otevírat okna,

pak ale nemá typicky aletickou povahu. První modalita je zjevně deontická, přikazující výrobcům oken, aby postupovali jistým způsobem. Druhá modalita je praktická, cosi je fyzicky možné, proveditelné. Proto také není divu, že na sebe funkční formální sémantika vzhledem k formulím popsaným dříve nechala dlouho čekat. V dalším načrtneme její základní tvar.

Budeme vycházet z postřehu, že aletické modality nutnosti a možnosti lze chápat jako kvantifikátory specifického typu, totiž kvantifikující přes interpretace výrokové logiky chápané jako možné světy. Základní kritérium modalizované pravdivosti přitom zní:

> věta A je nutně pravdivá právě tehdy, když věta A je pravdivá v každém možném světě.

Kritérium pro modalitu možnosti je symetrické:

> věta A je možná pravdivá právě tehdy, když věta A je pravdivá alespoň v jednom možném světě.

Ve zbytku oddílu transformujeme tato kritéria v přesně vymezenou sémantiku. V prvním kroku tak získáme logiku označovanou jako `S5`, což je název jednoho z původních Lewisových kalkulů. Už z toho lze tedy seznat, že budeme naši sémantiku jistým způsobem modifikovat tak, aby v ní různé systémy formulí mohly být považovány za logicky platné.

Možné světy nyní budeme chápat jednoduše jako interpretace klasické logiky, tj. funkce z atomických formulí do pravdivostních hodnot. Základním rysem sémantiky možných světů je to, že modální formule se sice opět vyhodnocují relativně vůči jednotlivým světům (ohodnocením atomických formulí), ale každý takový svět je součástí určitého prostoru možností (dalších světů), který se promítá do podmínek pravdivosti pro modalizované formule. Jednotlivé možné světy budeme značit písmeny $s, t, u, \ldots$ Předpokládejme, že prostor možností W je množina sestávající z interpretací klasické výrokové logiky a $s \in W$. Pak můžeme formulovat následující verzi definice pravdy.

`20.2.3 Definice (Tarského definice pravdy):` *Formule ϑ je pravdivá ve světě s vzhledem k prostoru možností W, symbolicky $W, s \vDash \vartheta$, jestliže platí jedna z následujících podmínek:*

(1)	$\vartheta = \mathtt{p}$	*a*	$s(\mathtt{p}) = \mathtt{1}$,
(2)	$\vartheta = \neg\phi$	*a*	*neplatí* $W, s \vDash \phi$,
(3)	$\vartheta = \phi \wedge \psi$	*a*	$W, s \vDash \phi$ *a* $W, s \vDash \psi$,
(4)	$\vartheta = \phi \vee \psi$	*a*	$W, s \vDash \phi$ *nebo* $W, s \vDash \psi$,
(5)	$\vartheta = \phi \rightarrow \psi$	*a*	*jestliže* $W, s \vDash \phi$, *pak* $W, s \vDash \psi$,
(6)	$\vartheta = \phi \leftrightarrow \psi$	*a*	$W, s \vDash \phi$ *právě tehdy, když* $W, s \vDash \psi$,
(7)	$\vartheta = \Box\phi$	*a*	*pro každé* $t \in W$ *platí* $W, t \vDash \phi$,
(8)	$\vartheta = \Diamond\phi$	*a*	*pro některé* $t \in W$ *platí* $W, t \vDash \phi$.

V opačném případě je formule ϑ ve světě s vzhledem k prostoru možností W nepravdivá, což zapisujeme také jako $W, s \nvDash \vartheta$.

Oproti Tarského definici pravdy z KVL se v definici pravdy pro MVL objevily dvě nové podmínky, totiž (7) a (8), reflektující rozšíření jazyka. Ostatní podmínky se neliší od toho, co známe z KVL. To, jak podmínky fungují, můžeme ilustrovat na jednoduchém příkladu.

`Příklad 20.2.4:` Řekněme, že prostor možností sestává ze tří světů s, t, u. Označme tento prostor možností jako W. Omezíme se na dvě atomické formule $\mathtt{p}$ a $\mathtt{q}$. Světy chápeme jako ohodnocení atomických formulí, tj. jako funkce z atomických formulí do pravdivostních hodnot. Povahu našich tří světů můžeme specifikovat např. následujícím způsobem:

$$s(\mathtt{p}) = \mathtt{1},\ s(\mathtt{q}) = \mathtt{1},\ t(\mathtt{p}) = \mathtt{0},\ t(\mathtt{q}) = \mathtt{1},\ u(\mathtt{p}) = \mathtt{0},\ u(\mathtt{q}) = \mathtt{0}.$$

Ve světě s (vzhledem k prostoru možností W) jsou pak pravdivé např. následující formule: $\mathtt{q}$, $\Diamond\neg\mathtt{q}$, $\Box\Diamond\neg\mathtt{q}$, $\Box(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q})$, $\Box\Diamond(\mathtt{p} \wedge \Diamond\neg\mathtt{q})$. Zdůvodněme podrobně alespoň platnost poslední z nich. Jelikož platí $W, u \vDash \neg\mathtt{q}$, tak platí také $W, s \vDash \Diamond\neg\mathtt{q}$. Přitom platí též $W, s \vDash \mathtt{p}$. Tedy $W, s \vDash \mathtt{p} \wedge \Diamond\neg\mathtt{q}$. Pak ale pro každý svět $v \in W$ máme $W, v \vDash \Diamond(\mathtt{p} \wedge \Diamond\neg\mathtt{q})$. To znamená, že $W, s \vDash \Box\Diamond(\mathtt{p} \wedge \Diamond\neg\mathtt{q})$.

Máme-li pojem pravdy, můžeme definovat standardním způsobem další sémantické pojmy logiky S5.

`20.2.5 Definice (Splnitelnost, ..., vyplývání):` *ϑ je splnitelná v* `S5`*, když pro nějakou množinu W a nějaké $s \in W$ platí $W, s \models \vartheta$. ϑ je logicky pravdivá v* `S5`*, když pro každé W a $s \in W$ platí $W, s \models \vartheta$. ϑ je logicky nepravdivá v* `S5`*, když pro žádné W a $s \in W$ neplatí $W, s \models \vartheta$. ϑ vyplývá v* `S5` *z množiny formulí T, když $W, s \models \vartheta$ platí pro každé W a $s \in W$ takové, že v s (vzhledem k W) je pravdivé vše z T. Dvě formule jsou logicky ekvivalentní, když ze sebe vzájemně vyplývají. Značení bude odpovídat tomu, které jsme zavedli již dříve pro jiné teorie.*

Vzhledem k tomu, že modality nutnosti a možnosti lze chápat jako kvantifikátory operující na množině možných světů, platí pro ně zákony, které jsou analogické zákonům platícím pro běžné kvantifikátory predikátové logiky. Zejména se jedná o vztah duality, který lze popsat např. ve formě čtyř ekvivalencí:

$$\neg\Diamond\vartheta \mathrel{=}\!\!\mid\!\models \Box\neg\vartheta \qquad\qquad \Diamond\vartheta \mathrel{=}\!\!\mid\!\models \neg\Box\neg\vartheta,$$

$$\neg\Box\vartheta \mathrel{=}\!\!\mid\!\models \Diamond\neg\vartheta \qquad\qquad \Box\vartheta \mathrel{=}\!\!\mid\!\models \neg\Diamond\neg\vartheta.$$

Vztahy na levé straně lze neformálně popsat takto: (a) Když něco není možné, pak to nutně neplatí, a obráceně, když něco nutně neplatí, pak to není možné. (b) Když něco neplatí nutně, pak je možný opak, a zároveň, když je možný opak nějakého tvrzení, pak toto tvrzení neplatí nutně. Vztahy na pravé straně popisují, jak lze jeden operátor vymezit pomocí druhého operátoru. Nutnost znamená nemožnost opaku a možnost znamená popření nutnosti opaku. Tyto vztahy lze lehce odvodit ze vztahů z levé strany. Mezi další významné logické ekvivalence patří:

$$\Diamond(\vartheta \vee \chi) \mathrel{=}\!\!\mid\!\models (\Diamond\vartheta \vee \Diamond\chi) \qquad\qquad \Box(\vartheta \wedge \chi) \mathrel{=}\!\!\mid\!\models (\Box\vartheta \wedge \Box\chi).$$

Dále platí následující vztahy vyplývání:

$$\Diamond(\vartheta \wedge \chi) \models \Diamond\vartheta \wedge \Diamond\chi \qquad\qquad \Box\vartheta \vee \Box\chi \models \Box(\vartheta \vee \chi).$$

Tyto vztahy však již nelze otočit, tj.:

$$\Diamond\vartheta \wedge \Diamond\chi \not\models \Diamond(\vartheta \wedge \chi) \qquad\qquad \Box(\vartheta \vee \chi) \not\models \Box\vartheta \vee \Box\chi.$$

Jak uvidíme v následujícím oddílu, důležitá je též distributivita nutnosti vzhledem k implikaci. Tento fakt vyjádříme pomocí schématu (K), jehož instance jsou v `S5` logicky platné:

(K) $\Box(\vartheta \to \chi) \to (\Box\vartheta \to \Box\chi)$.

Doposud jsme uvedli jen velmi obecné vlastnosti logiky `S5`, které tato logika sdílí s mnoha alternativními logickými systémy, zejména s logikou `K`, se kterou se seznámíme v příštím oddílu. Nyní uvedeme některé logické principy logiky `S5`, které již v `K` platit nebudou:

(T) $\Box\vartheta \to \vartheta$,

(4) $\Box\vartheta \to \Box\Box\vartheta$,

(B) $\vartheta \to \Box\Diamond\vartheta$.

Čtenář si může sám ověřit, že všechny instance těchto schémat jsou v S5 logicky pravdivé. Schéma (T) říká, že to, co je nutné, je pravdivé. V S5 platí též duální princip, který říká, že to, co je pravdivé, je také možné ($\vartheta \to \Diamond\vartheta$). Pravdivost lze tedy chápat jako třetí modalitu, která se nachází mezi nutností a možností. Schéma (4) říká, že sám fakt, že je daná věta nutně pravdivá, je nutnou pravdou. Schéma (B) říká, že to, co je pravdivé, je (nejen možné, ale) nutně možné.

Korektní a úplnou hilbertovskou axiomatizaci logické pravdy v S5 obdržíme třeba tak, že k nějakému kalkulu pro KVL přidáme schémata (K), (T), (4) a (B) a k pravidlu MP přidáme tzv. pravidlo *necesitace*:

(NEC) $\vartheta/\Box\vartheta$.

Toto pravidlo není korektní vzhledem k právě zavedenému vyplývání, ale je korektní pro logicky pravdivé formule v následujícím smyslu. Pokud je ϑ logicky pravdivá, pak $\Box\vartheta$ je též logicky pravdivá. To koresponduje s představou, že logické pravdy jsou pravdivé nutně – logická pravdivost je dokonce tou nejsilnější formou nutnosti. V tomto hilbertovském kalkulu chápeme symbol $\Diamond$ jako zkratku za $\neg\Box\neg$. Pak platí, že formule jazyka MVL je logicky pravdivá v S5 právě tehdy, když je dokazatelná v právě popsaném kalkulu. Tuto větu nebudeme dokazovat. Poznamenejme ještě, že často bývají při axiomatizaci logiky S5 schémata (B) a (4) nahrazována jedním schématem:

(5) $\Diamond\vartheta \to \Box\Diamond\vartheta$.

Tento princip říká, že fakt, že je věta možná pravdivá, je sám nutně pravdivý. Nahradíme-li (B) a (4) schématem (5), nezmění se množina dokazatelných formulí. Tímto nahrazením tedy získáme úspornější axiomatizaci logiky S5.

20.3 Kripkovská sémantika

Jak jsme již zmínili, C. I. Lewis formuloval logiku S5 původně jako axiomatický systém (ekvivalentní, i když odlišný od toho, kterým jsme zakončili výklad předchozího oddílu). Logika S5 ve skutečnosti tvořila nejsilnější z pěti systémů (nazývaných S1–S5), které navrhl. Původní Lewisovou motivací bylo korigovat některé nežádoucí vlastnosti materiální implikace. Domníval se, že kondicionální věty by bylo vhodnější formalizovat pomocí tzv. striktní implikace, která odpovídá nutnosti materiální implikace, tj. formuli:

$$\Box(\vartheta \to \chi).$$

Saul Kripke vytvořil pro Lewisovy systémy adekvátní sémantiku. Jeho přístup vykrystalizoval ve formální aparát, kterému se dnes říká *kripkovská sémantika*. Ta je založena na pojmech kripkovského rámce a kripkovské interpretace. Kripkovský rámec je přitom něčím, co dále strukturuje množinu možných světů, resp. definuje na ní relaci, která určuje, vůči kterým světům bude v určitém světě jistá formule považována za nutnou či možnou. Toto zvláštní a na neformální úrovni obtížně zdůvodnitelné opatření vnese do sémantiky pro MVL podivuhodnou dynamiku.

`20.3.1 Definice (Kripkovský rámec):` *Mějme W neprázdnou množinu (prostor možných světů) a R binární relaci na ní. Kripkovský rámec je uspořádaná dvojice $\langle W, R\rangle$, kde R se nazývá relací dosažitelnosti.*

Množinou možných světů již nyní nemyslíme množinu interpretací KVL, ale libovolnou množinu předmětů, vůči nimž mohou formule MVL nabývat pravdivostních hodnot. O možném světě zde tedy nehovoříme v ontologickém smyslu, ale ve smyslu čistě technickém, stejným způsobem, jakým v KVL mluvíme o pravdivostních hodnotách či významu. Interpretace jazyka MVL je nyní definována následovně.

`20.3.2 Definice (Kripkovská interpretace):` *Mějme nějaký rámec $\langle W, R\rangle$ a funkci O přiřazující každé atomické formuli nějakou podmnožinu množiny W. Trojice $\langle W, R, O\rangle$ se pak nazývá kripkovskou interpretací.*

Na rozdíl od předchozího oddílu, kde možný svět představoval sám nějaké ohodnocení, je nyní ohodnocení atomických formulí dáno až dodatečnou funkcí O, která určuje, ve kterých světech je která atomická formule pravdivá.

`20.3.3 Konvence (Dosažitelné světy):` *Pro libovolný kripkovský rámec $\langle W, R\rangle$ definujeme pro každý svět $s \in W$ množinu W_s takto:*

$$W_s = \{t \in W \mid R(s,t)\}.$$

Množina W_s je tedy množina všech světů, které jsou tzv. dosažitelné ze světa s, tj. množina všech světů, s nimiž je svět s v relaci R.

Množinu W_s interpretujeme jako množinu světů, které jsou z hlediska světa s relativně možné. Pokud tedy můžeme logiku S5 chápat jako logiku absolutní nutnosti a možnosti, pak logika založená na pojmu kripkovské interpretace je logika relativní nutnosti a možnosti. Předchozí definice i sama logika S5 se nám tedy ukážou jako konkrétní případy následujícího zobecnění. V případě definice pravdy to znamená, že jsou podmínky nutnosti a možnosti relativizovány vzhledem k relaci R.

20.3.4 Definice (Tarského definice pravdy): *V kripkovské interpretaci $I = \langle W, R, O\rangle$ je formule ϑ pravdivá ve světě s vzhledem k I, symbolicky $I, s \vDash \vartheta$, jestliže platí jedna z následujících podmínek:*

(1) $\vartheta = \mathtt{p}$ *a* $s \in O(\mathtt{p})$,

(2) $\vartheta = \neg\phi$ *a* *neplatí* $I, s \vDash \phi$,

(3) $\vartheta = \phi \wedge \psi$ *a* $I, s \vDash \phi$ *a* $I, s \vDash \psi$,

(4) $\vartheta = \phi \vee \psi$ *a* $I, s \vDash \phi$ *nebo* $I, s \vDash \psi$,

(5) $\vartheta = \phi \rightarrow \psi$ *a* *jestliže* $I, s \vDash \phi$, *pak* $I, s \vDash \psi$,

(6) $\vartheta = \phi \leftrightarrow \psi$ *a* $I, s \vDash \phi$ *právě tehdy, když* $I, s \vDash \psi$,

(7) $\vartheta = \Box\phi$ *a* *pro každé* $t \in W_s$ *platí* $I, t \vDash \phi$,

(8) $\vartheta = \Diamond\phi$ *a* *pro nějaké* $t \in W_s$ *platí* $I, t \vDash \phi$.

V opačném případě je formule ϑ ve světě s vzhledem k I nepravdivá, což zapisujeme také jako $I, s \nvDash \vartheta$.

Definujeme-li nyní všechny sémantické pojmy standardním způsobem (např. ϑ je logicky pravdivá, když je pravdivá v každém světě každé kripkovské interpretace), získáme tzv. logiku K, která představuje oslabení logiky S5 v tom smyslu, že každá logická pravda logiky K je také logickou pravdou logiky S5, avšak nikoli naopak. V K např. neplatí schémata (T), (4) a (B).

Příklad 20.3.5: Ověřme, že formule $\Box\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{p}$ není logicky pravdivá z hlediska logiky K. Definujeme následující kripkovskou interpretaci $I = \langle W, R, O\rangle$: $W = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle\}$, $O(\mathtt{p}) = \{t\}$. Graficky:

$$\begin{array}{ccc} s & \longrightarrow & t \\ & & \mathtt{p} \end{array}$$

Ohodnocení O jsme specifikovali pouze pro atom $\mathtt{p}$, což pro naše účely postačí. Nyní můžeme ověřit, že v s je pravdivá formule $\Box\mathtt{p}$, neboť je pravdivá v každém světě množiny $W_s = \{t\}$. Avšak ve světě s není pravdivá atomická formule $\mathtt{p}$. Tedy $I, s \nvDash \Box\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{p}$.

Z tohoto hlediska se logika K může jevit jako příliš slabá, protože zde neplatí princip, podle kterého nutnost implikuje pravdivost – a ovšem ani princip, podle kterého pravdivost implikuje možnost. (Např. ve výše uvedeném příkladě máme $I, s \vDash \neg p$, avšak $I, s \nvDash \Diamond\neg p$.) Na druhou stranu se logika S5 může jevit jako příliš silná. Výhodou logiky K je, že poskytuje jakýsi teoretický základ pro další možná rozšiřování, jak to bude patrné z dalšího oddílu.

20.4 Teorie korespondence

Logickou pravdivost v K lze axiomatizovat tak, že přidáme k nějakému adekvátnímu kalkulu KVL schéma (K) a pravidlo NEC. Kripkovská sémantika má jeden pozoruhodný aspekt, který lze popsat v podobě tzv. teorie korespondence, podle níž jistá schémata formulí velmi úzce souvisejí s jistými vlastnostmi relace dosažitelnosti. Abychom mohli být přesnější, budeme potřebovat následující pojem.

20.4.1 Definice (Platnost v rámci): *Řekneme, že dané schéma je platné v rámci F, pokud všechny instance tohoto schématu jsou pravdivé ve všech světech všech kripkovských interpretací $\langle W, R, O\rangle$ takových, že $F = \langle W, R\rangle$.*

Význam definice vysvětlíme na příkladě.

Příklad 20.4.2: Vezměme rámec $F = \langle W, R\rangle$ definovaný takto: $W = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle, \langle t, t\rangle\}$. Graficky:

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r] & t \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

V tomto rámci je platné např. schéma $\Box\Diamond\vartheta \to \Box\vartheta$. Ať už je ϑ jakákoli formule a ať už si nadefinujeme jakékoli ohodnocení O na rámci F, určitě bude platit pro každé $v \in W$, že $\langle W, R, O\rangle, v \vDash \Box\Diamond\vartheta \to \Box\vartheta$. Necháme na čtenáři, aby si tento fakt ověřil.

Nyní ukážeme několik významných příkladů korespondence axiomatických schémat s vlastnostmi relace dosažitelnosti. Vybrali jsme pouze tři.

20.4.3 Věta (O korespondenci): *Nechť $F = \langle W, R\rangle$ je kripkovský rámec. Pak platí:*

(a) (T) je platné v F právě tehdy, když R je reflexivní,

(b) (4) je platné v F právě tehdy, když R je tranzitivní,

(c) (B) je platné v F právě tehdy, když R je symetrická.

`Důkaz:` (a) Předpokládejme nejprve, že R není reflexivní. Pak existuje $s \in W$ tak, že $s \notin W_s$. Definujeme ohodnocení O tak, že $O(\mathtt{p}) = W - \{s\}$. Nechť $I = \langle W, R, O\rangle$. Pak platí $I, s \vDash \Box\mathtt{p}$ a $I, s \nvDash \mathtt{p}$. Tedy $I, s \nvDash \Box\mathtt{p} \to \mathtt{p}$, což znamená, že schéma (T) není platné v F. Viz např. protipříklad z příkladu 20.3.5. Dokázali jsme jednu implikaci tvrzení (a). Nyní naopak předpokládejme, že (T) není platné v F. To znamená, že existuje formule ϑ, svět s a kripkovská interpretace $I = \langle W, R, O\rangle$ tak, že $I, s \vDash \Box\vartheta$ a přitom $I, s \nvDash \vartheta$. To ale znamená, že $s \notin W_s$, a R tedy není reflexivní.

(b) Předpokládejme nejprve, že R není tranzitivní. To znamená, že existují světy s, t, u takové, že $R(s, t)$ a $R(t, u)$, ale nikoli $R(s, u)$. Definujeme ohodnocení O tak, že $O(\mathtt{p}) = W - \{u\}$.

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r] & t \arrow[r] & u \\ \mathtt{p} & \mathtt{p} & \end{tikzcd}$$

Nechť $I = \langle W, R, O\rangle$. Pak platí $I, s \vDash \Box\mathtt{p}$ a $I, s \nvDash \Box\Box\mathtt{p}$, neboť $I, t \nvDash \Box\mathtt{p}$. Tedy $I, s \nvDash \Box\mathtt{p} \to \Box\Box\mathtt{p}$, což znamená, že schéma (4) není platné v F. Tím jsme dokázali první implikaci tvrzení (b). Nyní naopak předpokládejme, že R je tranzitivní. Vezměme si libovolnou formuli ϑ, libovolné ohodnocení O a svět $s \in W$. Nechť $I = \langle W, R, O\rangle$. Předpokládejme dále, že $I, s \vDash \Box\vartheta$. Chceme ukázat, že pak také $I, s \vDash \Box\Box\vartheta$. Tedy že pro každé $t \in W_s$ platí $I, t \vDash \Box\vartheta$. Nechť t je libovolný prvek dosažitelný z s (tj. $t \in W_s$) a u je libovolný prvek dosažitelný z t. Z tranzitivity plyne, že u je dosažitelný z s.

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & t \arrow[r] & u \\ \Box\vartheta & & \vartheta \end{tikzcd}$$

Protože $I, s \vDash \Box\vartheta$, musí platit $I, u \vDash \vartheta$. Dokázali jsme, že formule ϑ je pravdivá ve všech světech dosažitelných z t, a tedy platí, co jsme chtěli dokázat, totiž že pro každé $t \in W_s$ platí $I, t \vDash \Box\vartheta$.

(c) Předpokládejme nejprve, že R není symetrická. To znamená, že existují možné světy s, t takové, že t je dosažitelný z s, ale s není dosažitelný z t. Definujeme ohodnocení O tak, že $O(\mathtt{p}) = \{s\}$. $I = \langle W, R, O\rangle$.

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r] & t \\ \mathtt{p} & \end{tikzcd}$$

Pak $I, t \nvDash \Diamond\mathtt{p}$, a tedy $I, s \nvDash \Box\Diamond\mathtt{p}$. Přitom $I, s \vDash \mathtt{p}$. Tedy $I, s \nvDash \mathtt{p} \to \Box\Diamond\mathtt{p}$, což znamená, že schéma (B) není platné v F. Tím jsme dokázali první implikaci tvrzení (c). Nyní naopak předpokládejme, že schéma (B) není platné v F. To znamená, že existuje formule ϑ, možný svět s a kripkovská interpretace $I = \langle W, R, O\rangle$ tak, že $I, s \vDash \vartheta$, ale přitom $I, s \nvDash \Box\Diamond\vartheta$. Pak ale existuje svět t dosažitelný z s takový, že $I, t \not\models \Diamond\vartheta$. Tedy v žádném světě dosažitelném z t není pravdivá formule ϑ. To znamená, že svět s není dosažitelný ze světa t, a relace R proto není symetrická. QED

Výše uvedená věta naznačuje, jak můžeme rozšiřovat logiku K. Např. omezíme-li se na reflexivní rámce (tj. na rámce, kde relace dosažitelnosti je reflexivní), získáme tzv. logiku T, kterou lze axiomatizovat tak, že přidáme k axiomatizaci logiky K schéma (T). Přidáme-li ještě schéma (4), dostaneme se k významné logice S4, která spadá podobně jako logika S5 mezi Lewisovy původní systémy. Sémanticky lze logiku S4 uchopit jako kripkovskou sémantiku omezenou na tranzitivní a reflexivní rámce.[8] Již jsme řekli, že přidáme-li ještě schéma (B), dostaneme logiku S5. Tu nyní můžeme chápat jako speciální případ kripkovské sémantiky omezené na rámce, jejichž relací dosažitelnosti je relace ekvivalence.

Za stručnou, orientační zmínku ještě stojí, jak by vypadala predikátová modální logika (MPL). Zvolíme ten nejjednodušší přístup, který je založen na konstantním univerzu možných objektů. Nejprve však musíme vymezit formule predikátové modální logiky (MPL), které získáme triviálně rozšířením jazyka KPL o modality $\Diamond$ a $\Box$. Nyní můžeme přistoupit k sémantice. Nechť je tedy dáno nějaké (neprázdné) univerzum objektů U. Prostor možností W bude modelován jako neprázdná množina interpretací predikátové logiky, jejichž univerzum je právě U. Valuací rozumíme to, co dříve, tj. funkci přiřazující proměnným prvky univerza. Značení přebíráme z predikátové logiky. Tarského definici pravdy můžeme upravit následujícím způsobem.

20.4.4 Definice (Tarského definice pravdy): *U je univerzum objektů, W je prostor možností, tj. neprázdná množina interpretací s univerzem U, a $I \in W$. Formule ϑ je pravdivá v interpretaci I při valuaci V vzhledem k prostoru možností W, symbolicky $WIV \models \vartheta$, jestliže platí jedna z následujících podmínek:*

(1) $\vartheta = \mathtt{Q}(\mathtt{t_1}, \ldots, \mathtt{t_n})$ *a* $\langle IV(\mathtt{t_1}), \ldots, IV(\mathtt{t_n})\rangle \in I(\mathtt{Q})$,

(2) $\vartheta = \neg\phi$ *a* *neplatí* $WIV \models \phi$,

(3) $\vartheta = \phi \wedge \psi$ *a* $WIV \models \phi$ *a* $WIV \models \psi$,

(4) $\vartheta = \phi \vee \psi$ *a* $WIV \models \phi$ *nebo* $WIV \models \psi$,

(5) $\vartheta = \phi \rightarrow \psi$ *a* *jestliže* $WIV \models \phi$, *pak* $WIV \models \psi$,

[8] Fakt, že přidání schématu (T) stačí k axiomatizaci logiky T a přidání schémat (T) a (4) stačí k axiomatizaci logiky S4, neplyne bezprostředně z předchozí věty, ale do podrobného zdůvodnění se zde nebudeme pouštět.

(6) $\vartheta = \phi \leftrightarrow \psi$ a $WIV \vDash \phi$ *právě tehdy, když* $WIV \vDash \psi$,

(7) $\vartheta = (\forall \mathtt{y})\phi$ a *pro každé* $a \in U$ *platí* $WIV_a^{\mathtt{y}} \vDash \phi$,

(8) $\vartheta = (\exists \mathtt{y})\phi$ a *pro některé* $a \in U$ *platí* $WIV_a^{\mathtt{y}} \vDash \phi$,

(9) $\vartheta = \Box\phi$ a *pro každé* $J \in W$ *platí* $WJV \vDash \phi$,

(10) $\vartheta = \Diamond\phi$ a *pro některé* $J \in W$ *platí* $WJV \vDash \phi$.

Opět definujeme, že formule ϑ je logicky pravdivá, když pro každé W, I, V platí $WIV \vDash \vartheta$. Ostatní sémantické pojmy můžeme také definovat standardně. Tímto jsme vymezili jistou predikátovou verzi logiky S5. Pro ilustraci logické pravdivosti můžeme uvést schéma pojmenované podle americké logičky Ruth Barcanové:

$$(\forall y)\Box\vartheta \rightarrow \Box(\forall y)\vartheta.$$

Lze lehce ověřit, že všechny instance tohoto schématu jsou univerzálně pravdivé. Formule vzbudila jistou polemiku, neboť okolnost, že je tato formule logicky pravdivá, úzce souvisí s kontroverzním předpokladem, že všechny objekty, které jsou v možných světech, již musí být v daném aktuálním světě. To skutečně v naší definici sémantiky předpokládáme, neboť pracujeme od počátku s jediným univerzem.

Otázka, zda v možných světech musí být tytéž objekty, nebo zda mohou ubývat či přibývat, stejně jako problémy identity možnosvětových dvojníků (pokud bych v možném světě mohl být někým jiným, co zajišťuje, že jsem to ještě já?), vedly spoustu autorů ke skepsi ohledně analýzy jazyka modelované na předložené sémantice. Příslušné schéma má ale různá uplatnitelná využití, z nichž jedním je sledování proměn informačních stavů, o němž se zmíníme v příští kapitole věnované intuicionistické logice. V jeho rámci také povolíme, aby se univerzum měnilo. Jako přirozená se rovněž ukáže být souvislost intuicionistické logiky, resp. logiky informačních stavů s modální logikou S4 tranzitivních a reflexivních rámců. Tuto souvislost popíšeme v oddílu 21.5.

21

Intuicionistická logika

V závěrečné části této knihy jsme se doposud zabývali možnými způsoby *rozšíření* jazyka klasické logiky. Nyní se podíváme na snad nejvýznamnější pokus o její *revizi*. Nepůjde tedy o rozšíření jazyka. Budeme pracovat se základním jazykem klasické logiky, ale změní se vymezení pojmu pravdivosti, což ovlivní charakter všech hlavních logických pojmů. Výsledkem této revize bude tzv. intuicionistická logika, která představuje určitou alternativu k logice klasické. Intuicionistická logika je přitom jakýsi vedlejší, nechtěný produkt útoku na základy klasické matematiky, především té opírající se o teorii množin, který v první polovině dvacátého století podnikl holandský matematik a filosof L. E. J. Brouwer. Ten prohlásil mnoho standardních matematických tvrzení za neplatná na základě specifické představy o matematice a matematické pravdivosti, která se explicitně opírá o Kantovo pojetí matematiky jako vědy žijící z konstrukcí v názorech (*intuitio*) prostoru a času. To postupně vedlo k ustanovení tzv. intuicionistické matematiky a konstruktivní matematiky, které – vůči matematice klasické – představují fakticky jediné rozštěpení této vědy na filosofickém základě.

Součástí Brouwerovy kritiky bylo přitom i napadení klasických logických principů, jako je vyloučený třetí, zprvu ovšem nikoli ve smyslu potřeby alternativních logických zákonů, ale v rámci zpochybnění samotné ideje logiky jako něčeho, co má matematickou a vůbec nějakou úsudkovou relevanci. Teprve postupem času sestavil Brouwerův žák Arend Heyting, zprvu dokonce proti Brouwerově vůli, jakési principy intuicionistické logiky, jimiž se budeme zabývat v této kapitole. Nejprve ale řekněme něco k obecným východiskům a motivacím intuicionismu.

21.1 Filosofická východiska intuicionismu

Brouwerovo pojetí matematiky bylo ovlivněno několika vzájemně propojenými přesvědčeními, která ustanovila doktrínu tzv. *intuicionismu.* Ne všechna z nich byla zastávána jeho žáky a následovníky, pro něž byl celek Brouwerových názorů často dokonce zcela nepřijatelný. To vedlo, zejména skrze osobu Hermanna Weyla, k transformaci intuicionistické doktríny směrem, který sice stále zpochybňoval platnost principů klasické matematiky a logiky, ovšem nikoli za cenu, kterou Brouwerova filosofie vyžadovala. K této ceně patřilo přijetí značně idiosynkratických stanovisek, která v bodech popíšeme a doplníme komentářem.

(1) *Subjektivismus.* Matematika je primárně subjektivní činnost. Jedná se o formu introspekce, jejímž předmětem jsou jisté mentální konstrukce, Heytingovými slovy: „z intuicionistického hlediska je matematika studium jistých funkcí lidské mysli.“[1]

Zmíněné funkce mají svůj zdroj v apriorním názoru času chápaném v kantovském duchu. Názor prostoru již není uvažován, protože jej Brouwer považuje za vyvrácený možností neeukleidovských geometrií.[2] Percepci pohybu času pokládá za základní charakteristiku subjektivity. Nějaký moment života se ve vědomí času rozpadá na dvě kvalitativně odlišné části a tento rozpad je zdrojem veškeré mnohosti.

(2) *Nezávislost na jazyku.* Matematika je primárně nezávislá na jazyku. Názor času není pojem, je to něco, co jazyku předchází.[3]

Brouwerovi slouží jazyk pouze jako intersubjektivní médium, které musíme použít, chceme-li matematiku sdělit druhým subjektům. Jazyk také slouží jako mnemotechnický prostředek, ale má své podstatné nedostatky a není schopen plně uchopit subjektivní matematické konstrukce. Je pozoruhodné, že nezávislost na jazyku předpokládal např. také Cantor, avšak ze zcela protichůdného stanoviska. Podle Cantora svět matematických entit existuje nezávisle na lidských subjektech, a tedy i na jejich jazyku. Oproti tomu Brouwer zdůrazňuje subjektivní původ matematiky a jazyk je podle něho bytostně spojen s intersubjektivitou.

[1] Heyting [1956, s. 10].
[2] Brouwer [1912, s. 85].
[3] Brouwer [1912, s. 86].

(3) *Nezávislost na logice.* Matematika předchází logice – nikoli naopak. Logika je pouze soubor pravidelností, které byly odpozorovány při sledování jazyka, jímž je matematika sdělována.[4]

Tedy intuicionismus nebyl původně pokusem o vybudování alternativní logiky, ale názorem, že logika je pro matematiku nepodstatná, protože logika se týká formy, zatímco matematika se týká obsahu a obsah formě předchází. Přesto Brouwer postupem času uznal některá logická schémata jako platné pravidelnosti a Heyting na jejich základě zkonstruoval intuicionistickou logiku. Avšak ani Heyting, který zmírnil Brouwerovo kritické stanovisko vůči logice, se nedomníval, že by jeho logika mohla představovat disciplínu poskytující základy matematice. Logické principy jsou podle Heytinga pouze matematické teorémy nejvyšší obecnosti. Nemohou tedy předcházet matematice, nýbrž jsou v ní v nejlepším případě obsaženy.

Brouwerova averze vůči logice byla motivována přesvědčením, že jednotlivé kroky v matematickém důkazu musí přenášet a prohlubovat určitý mentální stav – totiž vhled do konstrukcí, se kterými se v důkazu pracuje. Aby byla dokázána nějaká pravda, je třeba, aby byla určitým způsobem zakoušena. Matematické poznání není tedy znalostí jistých matematických pravd, ale je konstituováno určitým modem kognitivního stavu. Spíše než systémem pravd je matematika systémem mentálních aktivit. Naproti tomu logika od této subjektivní stránky odhlíží. Krok v důkazu má pouze přenášet pravdivost, takže z důkazu se může stát pouhá manipulace se symboly podle syntaktických pravidel, jak jsme se s ní setkali v případě kalkulizace. Můžeme slepě aplikovat pravidla a ztratit přitom kontakt se zkoumaným předmětem. Podle intuicionismu tedy čistě logická (syntaktická) inference nemůže nic přidat k matematickému poznání. To je výtka vůči logice, kterou Brouwer sdílí s takovými mysliteli, jako byli Descartes či Poincaré, jak jsme se o tom zmínili v oddílu 1.3.

Takové pojetí logiky je v příkrém rozporu s epistemologickou představou, podle níž spočívá hodnota logických inferencí právě v tom, že nám pomáhají překračovat přímou zkušenost. Podle intuicionistů není cílem matematického dokazování zkušenost překračovat, nýbrž rozvíjet a rozšiřovat. Pro intuicionismus je podstatný určitý posun v pojetí matematické pravdivosti. Chceme-li porozumět Brouwerově filosofii, musíme opustit zažitou – a pro mnohé matematiky velmi přirozenou – platónskou představu, podle níž existuje statický svět matematických pravd, který je sice objevován, avšak nijak podstatně dotčen prací jednotlivých mate-

[4] Brouwer [1907, s. 72 nn.].

matiků. Podle Brouwera nelze matematické pravdy oddělit od matematických konstrukcí, jejichž prostřednictvím k těmto pravdám dospíváme. Matematické pravdy jsou v podstatě výsledky těchto konstrukcí. Prakticky to znamená, že pravdivost ztotožníme s dokazatelností. Nedokazatelná matematická pravda je z intuicionistického hlediska *contradictio in adjecto*.

Redukce pojmu pravdivosti na dokazatelnost nás nutně vede k odlišnému chápání významu logických konstant (logických operátorů), jelikož ten je specifikován pomocí podmínek pravdivosti, které se k těmto konstantám vážou. Např. v klasické logice je význam konjunkce vymezen tím, že určíme, za jakých podmínek je pravdivá formule tvaru $\phi \wedge \psi$. Podle Tarského definice pravdy pro klasickou logiku lze pravdivost této formule převést na pravdivost formulí, z nichž se skládá, tj. formulí ϕ a ψ. Z intuicionistického hlediska pravdivost znamená dokazatelnost, a tak je třeba se ptát, co to znamená mít důkaz formule $\phi \wedge \psi$. Je možné otázku dokazatelnosti komplexní formule redukovat na otázku dokazatelnosti jejích částí? Tím jsme vedeni k tzv. BHK-*interpretaci* (jedná se o počáteční písmena jmen Brouwer, Heyting a Kolmogorov) logických operátorů, v níž se skrývá náznak formální sémantiky intuicionistické logiky:[5]

(1) důkaz formule $\phi \wedge \psi$ je dán dvěma důkazy, jednak důkazem formule ϕ a dále důkazem formule ψ,

(2) důkaz formule $\phi \vee \psi$ je dán jedním důkazem, a to důkazem formule ϕ nebo důkazem formule ψ,

(3) důkaz formule $\phi \rightarrow \psi$ je dán konstrukcí, která transformuje každý důkaz formule ϕ v důkaz formule ψ,

(4) důkaz formule $\neg\phi$ je dán konstrukcí, která transformuje každý potenciální důkaz formule ϕ ve spor,

(5) důkaz formule $(\exists \mathtt{y})\phi$ je dán konstrukcí objektu a a důkazem formule $\phi^{\mathtt{y}}_{a}$,

(6) důkaz formule $(\forall \mathtt{y})\phi$ je dán konstrukcí, která pro každý objekt a konstruuje důkaz formule $\phi^{\mathtt{y}}_{a}$.

Mezi spojkami chybí ekvivalence, ale ta bývá interpretována jako oboustranná implikace. Jak je patrné z třetí a čtvrté podmínky, negaci $\neg\phi$ lze definovat také jako implikaci $\phi \rightarrow \bot$, kde $\bot$ reprezentuje spor. BHK-interpretace představuje vágní, ne zcela formální určení významu logických

[5] K historii interpretace a její formulaci viz např. Troelstra [1991].

operátorů. To je zřejmé z toho, že v tomto vymezení není přesně stanoveno, co to je důkaz a co to je konstrukce. Navíc jsme se při formulaci BHK-interpretace dopustili (pro jednoduchost) směšování objektového jazyka a metajazyka, neboť ve formuli ϕ substituujeme metajazykové označení objektu a za proměnnou objektového jazyka $\mathtt{y}$. BHK-interpretaci tedy nemůžeme považovat za exaktně vymezenou sémantiku. Je však zřejmé, že interpretujeme-li tímto způsobem logické spojky, vede nás to k odmítnutí platnosti některých principů klasické logiky. Nejvýznamnějším příkladem je zákon vyloučeného třetího, vyjádřený schématem:

$$\vartheta \vee \neg\vartheta.$$

Tento princip v intuicionistickém čtení říká, že pro každé matematické tvrzení A je možné zkonstruovat důkaz tvrzení A nebo zformulovat konstrukci, která by každý případný důkaz tvrzení A transformovala v důkaz sporu. To odpovídá principiální možnosti rozhodnout všechny matematické otázky. Předpoklad rozhodnutelnosti každého matematického problému zastává třeba Hilbert, který ho explicitně formuloval jako „axiom“ ve své pařížské přednášce o dosud nevyřešených, aktuálních problémech matematiky. V ní čteme:

> „Toto přesvědčení o řešitelnosti jednoho každého matematického problému je mohutný podnět k naší práci. Uvnitř neustále slyšíme volání: *Tady je problém, hledej řešení. Můžeš na něj přijít čistě rozumem, neboť v matematice neexistuje žádné ignorabimus.*“[6]

Podle intuicionistů naopak nelze rozhodnutelnost všech matematických otázek tvrdit *a priori*, a proto ani nelze *a priori* přijmout zákon vyloučeného třetího. Ovšem *a posteriori* tento princip také přijmout nemůžeme, neboť aktuálně existuje mnoho nerozhodnutých matematických otázek.

Zákon vyloučeného třetího není přirozeně jediným principem, který je platný z hlediska klasické logiky, avšak nikoli z hlediska logiky intuicionistické. Významnou úlohu hraje též princip dvojí negace:

$$\vartheta \leftrightarrow \neg\neg\vartheta.$$

Ten lze rozložit na dvě implikace. První z nich

$$\vartheta \rightarrow \neg\neg\vartheta$$

je z intuicionistického hlediska platným principem. Pokud máme důkaz formule ϑ, pak jistě každý důkaz toho, že ϑ vede ke sporu, vede ke sporu. Avšak druhá implikace

[6] Hilbert [1900, s. 298].

$$\neg\neg\vartheta \rightarrow \vartheta$$

již platným principem intuicionistické logiky není. To, že předpoklad rozporuplnosti formule ϑ vede ke sporu, nemusí vést automaticky k důkazu formule ϑ. Jaký může mít takové tvrzení smysl, si ukážeme v následujícím oddílu. Na úrovni KPL intuicionisté zpochybňují např. princip $\neg(\forall \mathtt{y})\vartheta \rightarrow (\exists \mathtt{y})\neg\vartheta$. To, že jsme schopni prokázat, že $(\forall \mathtt{y})\vartheta$ vede ke sporu, ještě neznamená, že jsme schopni zkonstruovat nějaký konkrétní objekt a a zformulovat konstrukci, která transformuje každý potenciální důkaz formule $\vartheta^{\mathtt{y}}_{a}$ na důkaz sporu. Neplatnost tohoto principu je tedy zejména důsledkem konstruktivního čtení existenčního kvantifikátoru.

21.2 Protipříklady ke klasickým principům

Podle Brouwera funguje klasická logika poměrně spolehlivě v rámci běžných úvah, které mají co do činění s konečnými objekty. Selhává tehdy, když je ve hře nekonečno, a není tedy vhodná pro matematiku. Zejména ji nelze aplikovat na reálná čísla, která sama o sobě jsou nekonečnými objekty. Abychom to ilustrovali a přiblížili tak čtenáři intuicionistický způsob uvažování, sestrojíme dvě reálná čísla a, b, pro něž nejsme (podle intuicionistů) oprávněni tvrdit následující dvě tvrzení:

(†) číslo a je nebo není rovno 0,

(‡) pokud není pravda, že b není racionální, pak b je racionální.

K tomu, abychom mohli čísla, o nichž se v (†) a (‡) mluví, definovat, musíme se stručně seznámit s intuicionistickou teorií reálných čísel. Předpokládejme, že máme již vybudovanou teorii přirozených, celých a racionálních čísel. Pro zavedení čísel reálných je klíčová následující definice.

21.2.1 Definice (Cauchyovská posloupnost): *Zápis (a_n) nechť zachycuje nekonečnou posloupnost prvků $a_1, a_2, \ldots$ indexovanou přirozenými čísly, tedy funkci, která přirozenému číslu n přiřazuje prvek a_n. Daná posloupnost racionálních čísel (a_n) je cauchyovská, když pro každé přirozené číslo k existuje přirozené číslo l takové, že pro každé přirozené číslo m platí $|a_{l+m} - a_l| < \frac{1}{k}$.*

Tedy posloupnost je cauchyovská, když pro libovolně malou vzdálenost x $(= \frac{1}{k})$ existuje nějaký člen posloupnosti takový, že všechny následující členy nejsou od sebe vzdáleny více než x. Každou cauchyovskou posloupnost chápeme jako tzv. *generátor* určitého reálného čísla. Přísně vzato, reálná čísla nelze přímo s cauchyovskými posloupnostmi ztotožnit, protože existují různé cauchyovské posloupnosti, které generují stejné reálné číslo. Např. posloupnosti $(\frac{1}{2^n})$ a $(-\frac{1}{2^n})$ obě generují číslo 0, přestože se liší ve všech svých členech. Připomeneme-li si náš výklad o identitě z oddílu 18.1, neznamená to nic jiného, než že cauchyovské posloupnosti představují reprezentace jiných, abstraktnějších předmětů, které jistým způsobem generují. Přechod mezi nimi spočívá ve stanovení jisté ekvivalence, kterou pak přeměníme v rovnost.

`21.2.2 Definice (Ekvivalence generátorů):` *Dvě cauchyovské posloupnosti* $(a_n), (b_n)$ *jsou ekvivalentní, symbolicky:* $(a_n) \sim (b_n)$*, když pro každé přirozené číslo* k *existuje přirozené číslo* l *takové, že pro každé přirozené číslo* m *platí* $|a_{l+m} - b_{l+m}| < \frac{1}{k}$.

Ekvivalencí dvou cauchyovských posloupností tvrdíme, že pro libovolně malou vzdálenost x $(= \frac{1}{k})$ existuje nějaký index takový, že od tohoto indexu dále nejsou odpovídající si členy těchto posloupností od sebe vzdáleny více než x. Lze lehce ověřit, že $\sim$ je skutečně relace ekvivalence (tj. reflexivní, symetrická a tranzitivní relace). Nyní již můžeme přejít k zavedení reálných čísel tím, že řekneme, že ekvivalentní cauchyovské posloupnosti generují jedno a totéž reálné číslo. Reálná čísla lze tedy přesně definovat jako ekvivalenční třídy ekvivalentních cauchyovských posloupností, stejně, jako je racionální číslo definovatelné jako množina jistých dvojic m, n a p, q čísel přirozených, pro něž platí $m \times q = n \times p$.

Reálné číslo a je dobře definováno, když jsme schopni pro něj udat příslušnou cauchyovskou posloupnost (a_n), což znamená, že jsme schopni pro každé číslo n udat hodnotu a_n a doložit, že výsledná posloupnost je skutečně cauchyovská. Na reálných číslech pak lze zavést standardní početní operace a do struktury reálných čísel lze přirozeným způsobem vnořit čísla přirozená, celá a racionální. Pro další úvahy bude podstatné, že z intuicionistického hlediska jsme oprávněni o daném reálném čísle z tvrdit, že je racionální, pouze tehdy, když jsme schopni předložit celá čísla x a y taková, že $z = \frac{x}{y}$. Než se pustíme do konstrukce dvou avizovaných reálných čísel z tvrzení (†) a (‡), připomeňme si jeden z nejznámějších otevřených problémů v matematice, tzv. Goldbachovu domněnku. Ta říká, že každé sudé číslo větší než dvě je součtem dvou prvočísel. Goldbach formuloval jistou verzi této domněnky v roce 1742 a dodnes se ji nikomu nepodařilo dokázat ani vyvrátit. Pro každé konkrétní sudé číslo lze pochopitelně v konečném čase ověřit, zda je, či není součtem dvou prvočísel. A skutečně to bylo ověřeno pro všechna sudá čísla od 4 do 4×10^{18}, což jistě svědčí ve prospěch pravdivosti této domněnky. Avšak zatím se nepodařilo zdůvodnit, že toto tvrzení je skutečně pravdivé pro všechna sudá čísla větší než dvě. Na základě Goldbachova problému definujme vlastnost přirozených čísel G takto:

$$G(x) \leftrightarrow x \text{ je sudé} \wedge x > 2 \wedge x \text{ není součtem dvou prvočísel.}$$

Goldbachovu domněnku lze nyní formulovat tak, že neexistuje přirozené číslo, které by mělo vlastnost G. Vlastnost čísel H definujme takto:

$$H(x) \leftrightarrow (\exists y)(y \leq x \wedge G(y)).$$

Je-li dáno přirozené číslo n, jsme schopni rozhodnout, zda má vlastnost H, či nikoli. Prostě procházíme sudá čísla od 4 do n a postupně ověřujeme, zda některé z nich má vlastnost G. Je zjevné, že pokud má nějaké číslo vlastnost H, pak i všechna čísla vyšší mají vlastnost H. Definujme nyní posloupnost racionálních čísel (a_n) takto:

$$a_m = \begin{cases} (\frac{1}{2})^m & \text{jestliže neplatí } H(m), \\ 1 & \text{jestliže platí } H(m). \end{cases}$$

Prvních několik členů posloupnosti (a_n) vypadá takto:

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{32}, \ldots$$

Dá-li nám někdo číslo n, jsme schopni vyčíslit hodnotu a_n. To znamená, že (a_n) je dobře definovaná posloupnost a není těžké ověřit, že tato posloupnost je cauchyovská. Generuje tedy nějaké reálné číslo a. Jsme oprávněni tvrdit, že pokud existuje sudé číslo větší než 2, které není součtem dvou prvočísel, pak $a = 1$. Pokud takové číslo neexistuje, pak $a = 0$. Přesto podle intuicionistů nemůžeme tvrdit výše uvedenou větu (†), tj. větu „číslo a je nebo není rovno 0". Abychom tuto disjunkci mohli obhájit, museli bychom (při intuicionistickém čtení disjunkce) být schopni obhájit alespoň jeden z disjunktů, což zatím neumíme. Dokud nebudeme mít řešení Goldbachovy domněnky, nebudeme mít oprávnění tvrdit (†). Z hlediska klasické logiky je přitom věta (†) tautologií, a její pravdivost tak předchází pravdivosti či nepravdivosti jednotlivých matematických vět, jako je např. Goldbachova domněnka. Z hlediska intuicionismu není vyloučeno, že větu (†) lze dokázat, ale její dokazatelnost závisí na potvrzení či vyvrácení Goldbachovy domněnky. Tímto způsobem tedy převrací intuicionismus pořádek věcí.

Zavedeme ještě jednu posloupnost racionálních čísel (b_n), kterou definujeme indukcí. Nejprve stanovíme, že $b_1 = 0$. Nyní předpokládejme, že b_m je již definováno a na jeho základě definujme číslo b_{m+1}:

$$b_{m+1} = \begin{cases} b_m + \frac{3}{10^m} & \text{jestliže neplatí } H(m), \\ b_m & \text{jestliže platí } H(m). \end{cases}$$

Prvních několik členů posloupnosti (b_n) vypadá takto:

$$0, \tfrac{3}{10}, \tfrac{33}{100}, \tfrac{333}{1000}, \tfrac{3333}{10000}, \ldots$$

Dá-li nám někdo číslo m, jsme schopni vyčíslit hodnotu b_m. To znamená, že (b_n) je dobře definovaná posloupnost a lze lehce ověřit, že je cauchyovská. Generuje tedy nějaké reálné číslo b. Jsme oprávněni tvrdit, že pokud neexistuje sudé číslo k větší než dvě, které není součtem dvou prvočísel, pak $b = \frac{1}{3}$. Uvažujme, co to znamená, jestliže takové číslo existuje. Řekněme, že k je nejmenší číslo s touto vlastností. Pak k je také první číslo, které má vlastnost H. To znamená, že $b_{k+1} = b_k$ a obecně platí pro každé přirozené číslo m, že $b_{k+m} = b_k$. Pak ale číslo b se musí též rovnat číslu b_k. Celkově by tedy platilo:

$$b = b_k = \frac{\overbrace{33\ldots3}^{(k-1)-\text{krát}}}{10^k} = \frac{10^k-1}{3\times10^k}.$$

Ukázali jsme, že pokud existuje sudé číslo větší než dvě, které není součtem dvou prvočísel, pak b je racionální číslo. Nyní předpokládejme, že b není racionální číslo. Z toho plyne, že neexistuje sudé číslo větší než dvě, které není součtem dvou prvočísel (to lze zdůvodnit sporem: předpokládejme, že by takové číslo existovalo, pak by b bylo racionální, což je ve sporu s předpokladem, že b racionální není). Ale výše jsme ukázali, že v tomto případě $b = \frac{1}{3}$, což je opět ve sporu s předpokladem, že b není racionální. Předpoklad, že b není racionální číslo, je tedy sporný. Můžeme tedy tvrdit:

> není pravda, že b není racionální číslo.

Přitom však nemůžeme tvrdit:

> číslo b je racionální číslo.

Důvodem je, že nejsme schopni předložit celá čísla x a y taková, že $b = \frac{x}{y}$. Tím jsme zdůvodnili, že nejsme oprávnění tvrdit výše uvedenou větu (‡), tj. větu „pokud není pravda, že b není racionální, pak b je racionální“.

Brouwer s Heytingem vytvořili celou řadu podobných protipříkladů ke klasickým principům. Nazýváme je *slabými protipříklady*, neboť nepředstavují vyvrácení těchto principů v nějakém silném slova smyslu. Tyto příklady lze použít na podporu tvrzení, že v jednotlivých případech nejsme oprávněni některé klasické logické principy aplikovat. Avšak každý takový příklad je závislý na jistém empirickém faktu – totiž že lidstvo doposud nedokázalo vyřešit nějaký matematický problém. V případě našich dvou případů se jednalo o Goldbachovu domněnku. Jakmile bude vyřešena, přestanou tyto příklady plnit svoji funkci. Avšak dokud nebude vyřešen každý matematický problém, vždy bude možné za Goldbachovu domněnku substituovat něco jiného tak, aby příklady byly použitelné.

Naše dva protipříklady jsme označili za slabé, protože nepředstavují vyvrácení vět (†) a (‡), nýbrž pouze poukazují na to, že věty (†) a (‡)

nejsou tvrditelné *a priori* před veškerou matematikou. Brouwer se však se slabými příklady nespokojil a zformuloval jistou silnou formu vyvrácení zákona vyloučeného třetího. To může vyznít poněkud překvapivě v kontextu následujícího textu, kde ukazujeme, že intuicionistická logika představuje oslabení klasické logiky. Nemělo by být tedy pro intuicionisty možné pozitivně dokázat ani vyvrátit (tj. převést na spor) něco, co nelze dokázat či vyvrátit v klasické logice. A jelikož v klasické logice nelze vyvrátit klasické principy, nemělo by být možné klasické principy vyvrátit ani v intuicionistické logice. Avšak zde je třeba vzít v potaz, že intuicionismus není jen nový způsob myšlení, který je Heytingem formalizován a přetaven v intuicionistickou logiku. Brouwer s Heytingem budují v rámci svého intuicionistického projektu celou alternativní matematiku a přijímají některé mimologické matematické principy, pro které mají jisté intuicionistické důvody a které v klasické matematice neplatí. To znamená, že intuicionistická matematika je nejen neúplná vůči matematice klasické, ale je vůči ní navíc také nekorektní. V intuicionistické matematické analýze se pomocí nestandardních matematických principů podařilo Brouwerovi dokázat např. následující překvapivou větu:

každá totální funkce z kontinua do kontinua je spojitá.

Toto tvrzení se zdá být nejprve snadno vyvratitelné, uvážíme-li funkce definované po částech, třeba:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{když } x \leq 0, \\ +1 & \text{když } x > 0. \end{cases}$$

Podle Brouwerovy sémantiky ale k úspěšné definici této funkce v bodě x musí být znám jeho vztah k 0, tj. jedna z podmínek $x \leq 0$, $x > 0$. V případě čísla, které jsme uvažovali v rámci tvrzení (†), tomu tak ale zjevně není, a funkce f tedy není totální. Z této věty plyne, že intuicionistické kontinuum nelze rozdělit na dvě neprázdné části. Kdyby to totiž bylo možné, tj. kdyby existovaly dvě neprázdné množiny reálných čísel X, Y takové, že $X \cap Y$ by byla prázdná množina a $X \cup Y$ množina všech reálných čísel, pak by bylo analogicky možné definovat totální funkci z kontinua do kontinua, která by prvkům množiny X přiřazovala třeba číslo 1 a prvkům množiny Y číslo -1. Taková funkce by nebyla spojitá a dostali bychom se do sporu s větou o spojitosti všech totálních funkcí.

Intuicionistické kontinuum se tedy do jisté míry podobá aristotelskému kontinuu, neboť není pouhou množinou bodů, ale spíše prostorem pro jejich vydělování, a v tomto smyslu souvislým celkem, který nelze jednoduše roztrhat na kusy.[7] Pro nás je důležité, že na základě takovéhoto

[7] Srov. třeba Aristotelés [Phys., 227a].

kontinua lze formulovat jisté silné vyvrácení zákona vyloučeného třetího. To může být překvapivé zejména vzhledem k poznámce o Aristotelovi, jenž zákon vyloučeného třetího zastával, a lze u něj také najít jeho první formulaci.[8] Avšak skutečně lze v intuicionistické matematice pozitivně dokázat tvrzení:

> není pravda, že pro každé reálné číslo x platí, že x je nebo není větší než 0.

Kdyby totiž pro každé reálné číslo x platilo, že x je nebo není větší než 0, pak bychom mohli vyčerpávajícím způsobem rozdělit kontinuum na ta čísla, která jsou větší než 0, a na ta čísla, která nejsou větší než 0. Takové rozdělení na dvě části by však bylo ve sporu s povahou intuicionistického kontinua. Zároveň ale z uvedené věty (intuicionisticky) neplyne tvrzení:

> existuje reálné číslo x, pro které neplatí, že x je nebo není větší než 0.

Toto tvrzení již intuicionisté tvrdit nemohou, neboť nejsou schopni zkonstruovat konkrétní číslo x, pro které by bylo možné odvodit spor z tvrzení „x je nebo není větší než 0."[9]

Síla Brouwerovy kritiky obou, klasické matematiky i logiky, spočívala v tom, že kromě filosofických důvodů pro odmítnutí jednotlivých principů, které se – jako vyloučený třetí – zdály z tradičních pozic nenapadnutelné a racionálně sebeevidentní, dokázal předložit i konkrétní způsoby, jak toto odmítnutí rozpracovat ve věrohodnou alternativu. V hegelovské dikci lze říci, že kromě prosté negace, důvodů pro nespolehlivost jistých principů, dokázal Brouwer přidat i negaci druhou, specifikující, o co se opírá jejich opak. To platilo především v oblasti matematiky, kde byl Brouwer uznávaným badatelem. V oblasti logiky byly tyto cíle dosaženy až v okamžiku, kdy byla pro příslušný logický systém předložena adekvátní sémantika. Té se budeme věnovat ve zbylých oddílech.

21.3 Kripkovská sémantika

Nyní se podíváme na přesnější vymezení intuicionistické výrokové logiky (`IVL`). Jazyk `IVL` je totožný s jazykem `KVL`. Máme tedy k dispozici množinu atomických formulí a z nich skládáme komplexní formule pomocí

---

[8] Aristotelés [Met., 1011b26–27].

[9] Další detaily viz Kolman [2008, kap. 7].

spojek $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ a $\leftrightarrow$. Jak jsme již dříve zmínili, přesné vymezení intuicionistické logiky podal nejprve v axiomatické podobě Heyting. Zde uvedeme jednu modernější verzi hilbertovského kalkulu pro IVL. Vzhledem k tomu, že v intuicionistické logice nejsou jednotlivé operátory vzájemně definovatelné, musíme použít axiomy charakterizující chování všech spojek. Pouze $\leftrightarrow$ budeme z hlediska kalkulu považovat za zkratku: $\vartheta \leftrightarrow \chi$ znamená totéž, co $(\vartheta \rightarrow \chi) \wedge (\chi \rightarrow \vartheta)$.

`21.3.1 Definice (Hilbertovský kalkul):` HK *pro* IVL*, resp.* HK *obsahuje deset axiomatických schémat:*

(1) $\vartheta \rightarrow (\chi \rightarrow \vartheta)$,

(2) $(\vartheta \rightarrow (\chi \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\vartheta \rightarrow \chi) \rightarrow (\vartheta \rightarrow \gamma))$,

(3) $\vartheta \rightarrow (\vartheta \vee \chi)$,

(4) $\vartheta \rightarrow (\chi \vee \vartheta)$,

(5) $(\vartheta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\chi \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\vartheta \vee \chi) \rightarrow \gamma))$,

(6) $(\vartheta \wedge \chi) \rightarrow \vartheta$,

(7) $(\chi \wedge \vartheta) \rightarrow \vartheta$,

(8) $\vartheta \rightarrow (\chi \rightarrow (\vartheta \wedge \chi))$,

(9) $(\vartheta \rightarrow \neg\vartheta) \rightarrow \neg\vartheta$,

(10) $\vartheta \rightarrow (\neg\vartheta \rightarrow \chi)$.

Jediným odvozovacím pravidlem je MP.

Není těžké si povšimnout, že tento kalkul je korektní vůči KVL, tj. každá intuicionisticky platná formule je také tautologií ve smyslu KVL. Skutečnost, že intuicionistická logika je ostře slabší než logika klasická, zdůvodníme níže sémanticky. Úplný kalkul pro KVL bychom získali třeba tak, že bychom k předchozímu kalkulu přidali zákon vyloučeného třetího či zákon dvojí negace, tj. jedno z následujících dvou schémat:

$$\vartheta \vee \neg\vartheta \qquad\qquad \neg\neg\vartheta \rightarrow \vartheta.$$

Saul Kripke vytvořil pro intuicionistickou logiku formální sémantiku, vůči které je předchozí kalkul silně úplný. Jak uvidíme, motivace této sémantiky je poněkud odlišná od dříve zmíněné poloformální BHK-interpretace. Je však plně v souladu s Heytingovým pojetím intuicionistické logiky jakožto „logiky poznání“, která je v kontrastu k logice klasické, již lze charakterizovat jako „logiku existence“.

Kripkovská sémantika intuicionistické logiky se velmi podobá té, s níž jsme se setkali v kapitole o modální logice, už tím, že je založena na pojmech kripkovského rámce a kripkovské interpretace. Tyto pojmy jsou však upraveny do podoby vhodné pro intuicionistickou logiku. Nejprve definujme varianty pojmů kripkovského rámce a kripkovské sémantiky pro IVL.

`21.3.2 Definice (Kripkovský rámec):` *Kripkovský rámec pro* IVL *je uspořádaná dvojice $\langle W, R\rangle$, kde W je libovolná neprázdná množina a R je relace neostrého uspořádání, tj. reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrická binární relace na množině W. Množině W říkáme prostor informačních stavů, prvky množiny W označujeme jako (informační) stavy, relaci R nazýváme relace dosažitelnosti.*

`21.3.3 Definice (Kripkovská interpretace):` *Pro rámec $\langle W, R\rangle$ a funkci O přiřazující každé atomické formuli nějakou podmnožinu množiny W se trojice $\langle W, R, O\rangle$ nazývá kripkovskou interpretací* IVL*, když je příslušný rámec kripkovským rámcem pro* IVL *a funkce O splňuje tzv. podmínku stability, která říká, že pokud $s \in O(\mathtt{p})$ a $R(s,t)$, pak i $t \in O(\mathtt{p})$.*

Jak bylo naznačeno v předchozí definici, kripkovský rámec IVL reprezentuje určitou informační strukturu složenou z informačních stavů. Relace dosažitelnosti určuje určité uspořádání informačních stavů, které indikuje možné procesy získávání informací. Fakt, že $R(s,t)$, interpretujeme tak, že je možno dostat se v procesu získávání informací z informačního stavu s do informačního stavu t. Stav t tedy musí být informačně bohatší než stav s. Touto interpretací je také zdůvodněna podmínka stability. Pokud je v nějakém informačním stavu k dispozici informace reprezentovaná atomem p, pak také musí být tato informace k dispozici v každém z dosažitelných, tj. informačně bohatších stavů.

`21.3.4 Konvence (Dosažitelné stavy):` *Nechť je dán kripkovský rámec $\langle W, R\rangle$. Stejně jako v kapitole o modální logice vzhledem k danému rámci definujeme pro každý stav $s \in W$ množinu dosažitelných stavů:*

$$W_s = \{t \in W \mid R(s,t)\}.$$

Množina W_s je tedy množinou všech stavů t, s nimiž je stav s v relaci R.

Nyní definujeme relaci pravdivosti mezi stavy v kripkovských interpretacích a formulemi jazyka KVL a hned nato základní sémantické pojmy.

`21.3.5 Definice (Tarského definice pravdy):` *Mějme kripkovskou interpretaci $I = \langle W, R, O\rangle$. Pak řekneme, že formule ϑ je pravdivá ve* *stavu s vzhledem k I, symbolicky $I, s \vDash \vartheta$, jestliže platí jedna z následujících podmínek:*

(1) $\vartheta = \mathtt{p}$ *a* $s \in O(\mathtt{p})$,

(2) $\vartheta = \neg\phi$ *a* *pro žádné* $t \in W_s$ *neplatí* $I, t \vDash \phi$,

(3) $\vartheta = \phi \wedge \psi$ *a* $I, s \vDash \phi$ *a* $I, s \vDash \psi$,

(4) $\vartheta = \phi \vee \psi$ *a* $I, s \vDash \phi$ *nebo* $I, s \vDash \psi$,

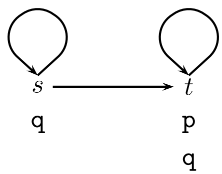
(5) $\vartheta = \phi \rightarrow \psi$ *a* *pro každé* $t \in W_s$, *jestliže* $I, t \vDash \phi$, *pak* $I, t \vDash \psi$,

(6) $\vartheta = \phi \leftrightarrow \psi$ *a* *pro každé* $t \in W_s$, $I, t \vDash \phi$ *právě tehdy, když* $I, t \vDash \psi$.

V opačném případě je formule ϑ ve stavu s vzhledem k I nepravdivá, což zapisujeme také jako $I, s \nvDash \vartheta$.

`21.3.6 Definice (Splnitelnost, ..., vyplývání):` *Pro formuli ϑ platí, že je intuicionisticky splnitelná, když pro nějakou kripkovskou interpretaci $I = \langle W, R, O\rangle$ a nějaký informační stav $s \in W$ platí $I, s \vDash \vartheta$. Formule ϑ je (intuicionisticky) logicky pravdivá, když pro každé $I = \langle W, R, O\rangle$ a $s \in W$ platí $I, s \vDash \vartheta$. Formule ϑ je (intuicionisticky) logicky nepravdivá, když pro žádné $I = \langle W, R, O\rangle$ a $s \in W$ neplatí $I, s \vDash \vartheta$. ϑ vyplývá v intuicionistické logice z množiny formulí T, když $I, s \vDash \vartheta$ platí pro každé $I = \langle W, R, O\rangle$ a $s \in W$ takové, že v s (vzhledem k I) je pravdivé vše z T.*

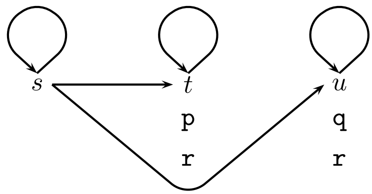
`Příklad 21.3.7:` Vezměme si kripkovskou interpretaci $I = \langle W, R, O\rangle$, kde $W = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle, \langle t, t\rangle\}$, $O(\mathtt{p}) = \{t\}, O(\mathtt{q}) = \{s, t\}$.



Omezili jsme se na dva atomické výroky $\mathtt{p}$ a $\mathtt{q}$. Tato interpretace může posloužit jako protipříklad jak k zákonu vyloučeného třetího, tak k zákonu dvojí negace. Např. ve stavu s není pravdivý ani atom $\mathtt{p}$, ani jeho negace $\neg\mathtt{p}$ (neboť $\mathtt{p}$ je pravdivý v dosažitelném stavu t). To znamená, že v s není pravdivá ani formule $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p}$. Ani v jednom ze stavů s, t není pravdivá formule $\neg\mathtt{p}$. To znamená, že v s je pravdivá formule $\neg\neg\mathtt{p}$. Avšak již jsme řekli, že v s není pravdivá formule $\mathtt{p}$, takže v s není pravdivá ani formule $\neg\neg\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{p}$. V s jsou pravdivé např. formule $\mathtt{q}, \neg\neg(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p})$ či $\mathtt{p} \rightarrow (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{p})$.

Dalším z významných klasicky platných principů, který není logicky pravdivý v intuicionistické logice, je jeden z De Morganových zákonů. Konkrétně selhává platnost následujícího schématu: $\neg(\vartheta \wedge \chi) \rightarrow (\neg\vartheta \vee \neg\chi)$. Doložíme to na následujícím protipříkladu.

`Příklad 21.3.8:` Vezměme si kripkovskou interpretaci $I = \langle W, R, O\rangle$, kde platí toto: $W = \{s, t, u\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle t, t\rangle, \langle u, u\rangle, \langle s, t\rangle, \langle s, u\rangle\}$, $O(\mathtt{p}) = \{t\}, O(\mathtt{q}) = \{u\}, O(\mathtt{r}) = \{t, u\}$.



V žádném stavu této interpretace nejsou pravdivé atomy `p` a `q` zároveň. Z toho plyne, že ve stavu s (stejně jako kdekoli jinde) je pravdivá formule $\neg(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$. Přitom v s není pravdivá ani formule $\neg\mathtt{p}$ (neboť z s je dosažitelný stav t, ve kterém je pravdivý atom `p`), ani formule $\neg\mathtt{q}$ (neboť z s je dosažitelný stav u, ve kterém je pravdivý atom `q`). To znamená, že v s není pravdivá formule $\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}$. Tedy v s není pravdivá ani formule $\neg(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \rightarrow (\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q})$. V interpretaci I jsou pravdivé např. formule $\mathtt{p} \rightarrow \neg\mathtt{q}, \mathtt{r} \rightarrow (\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$ či $\neg\neg\mathtt{r}$.

21.4 Vlastnosti intuicionistické logiky

Zformulujeme několik obecných vlastností kripkovské sémantiky intuicionistické logiky. Nejprve je dobré si povšimnout, že vlastnost stability se přenáší z atomických formulí na všechny formule jazyka `IVL`. To je v souladu s pojetím relace dosažitelnosti jako relace informačního uspořádání. Je-li nějaká informace k dispozici v daném stavu, je k dispozici také v každém informačně bohatším stavu.

`21.4.1 Věta (O stabilitě):` *Nechť ϑ je libovolná formule jazyka* `IVL`*, $I = \langle W, R, O\rangle$ je kripkovská interpretace* `IVL` *a pro $s, t \in W$ platí $R(s, t)$. Pak jestliže $I, s \vDash \vartheta$, tak také $I, t \vDash \vartheta$.*

`Důkaz:` Toto tvrzení lze ověřit indukcí podle složitosti formule ϑ. Detaily necháme na čtenáři. `QED`

Nyní zvážíme, jaký je vztah intuicionistické logiky k logice klasické. Existuje jeden speciální kripkovský rámec $J = \langle W_J, R_J\rangle$, který vypadá tak, že $W_J = \{s\}$, $R_J = \{\langle s, s\rangle\}$. J tedy obsahuje pouze jeden stav, který je dosažitelný sám ze sebe. Vezměme si libovolnou interpretaci I KVL, tj. funkci z atomických formulí do pravdivostních hodnot. K této interpretaci můžeme sestrojit jednoduše ohodnocení atomických formulí O_I v rámci J. Pro každý atom $\mathtt{p}$ definujeme:

$$O_I(\mathtt{p}) = \begin{cases} \{s\} & \text{jestliže } I(\mathtt{p}) = \mathtt{1}, \\ \emptyset & \text{jestliže } I(\mathtt{p}) = \mathtt{0}. \end{cases}$$

V s je tedy daná atomická formule pravdivá právě tehdy, když je klasicky pravdivá v interpretaci I. Indukcí lze lehce ověřit, že tato vlastnost se přenáší na všechny formule: Nechť I je tedy klasická interpretace a $J_I = \langle W_J, R_J, O_I \rangle$. Pro každou formuli ϑ platí: $I \models \vartheta$ právě tehdy, když $J_I, s \models \vartheta$. Z toho již lehce plyne následující věta.

`21.4.2 Věta:` *Intuicionistická logika je slabší než logika klasická v tom smyslu, že pokud je ϑ logicky pravdivá z hlediska intuicionistické logiky, pak je ϑ také logicky pravdivá z hlediska klasické logiky.*

`Důkaz:` Předpokládejme, že ϑ není logicky pravdivá z hlediska klasické logiky. Pak existuje klasická interpretace I, ve které je tato formule nepravdivá. Pak je také nepravdivá ve stavu s intuicionistické interpretace J_I, což znamená, že ϑ není logicky pravdivá ani z hlediska intuicionistické logiky. QED

Intuicionistická logika je tedy sice slabší než logika klasická, přesto v sobě klasickou logiku pozoruhodným způsobem odráží a lze obrazně říci, že je-li něco klasickou tautologií, intuicionistická logika o tom ví. Popíšeme tuto skutečnost přesněji. K tomu však budeme potřebovat jeden nový pojem a dvě pomocná tvrzení.

`21.4.3 Definice (Informačně finální stav):` *Nechť At je množina atomických formulí. Řekneme, že stav s kripkovské interpretace $I = \langle W, R, O \rangle$ je informačně finální vzhledem k množině At, když pro každý stav $t \in W_s$ a pro každý atom $\mathtt{p} \in At$ platí $I, t \models \mathtt{p}$ právě tehdy, když $I, s \models \mathtt{p}$.*

Informačně finální stav je tedy takový, který nevede do žádného informačně bohatšího stavu, omezíme-li se na informace vystavěné z atomů množiny At. Vše, co je pravdivé v nějakém stavu dosažitelném z informačně finálního stavu s, je pravdivé již ve stavu s samotném. Z hlediska informačně finálního stavu tedy již nelze získat žádnou novou informaci (vystavěnou z atomů množiny At). Informačně finální stavy se chovají jako valuace klasické logiky, jak je vyjádřeno v následující větě.

`21.4.4 Věta:` *Nechť s je informační stav nějaké kripkovské interpretace. Předpokládejme, že s je informačně finální vzhledem k množině atomů At. Pak existuje klasická interpretace I taková, že pro každou formuli ϑ neobsahující jiné atomy než ty z množiny At platí, že ϑ je pravdivá v s právě tehdy, když ϑ je klasicky pravdivá v I.*

`Důkaz:` Pro každý atom $\mathtt{p}$ z At definujeme $I(\mathtt{p}) = \mathtt{1}$ právě tehdy, když $\mathtt{p}$ je pravdivý v s. I je interpretace klasické logiky a tvrzení se pak snadno dokáže metodou indukce. `QED`

Je-li At konečná množina atomů, pak vzhledem k této množině je z každého stavu dosažitelný nějaký informačně finální stav.

`21.4.5 Věta:` *Předpokládejme, že At je konečná množina atomů a je dán stav s libovolné kripkovské interpretace $I = \langle W, R, O\rangle$. Pak existuje nějaký stav $t \in W_s$, který je informačně finální vzhledem k At.*

`Důkaz:` Nechť $At = \{\mathtt{p}_1, \dots, \mathtt{p}_n\}$. Ke stavu s definujeme induktivně posloupnost stavů $u_0, \dots, u_n$. Nejprve stanovíme, že $u_0 = s$. Nechť je již určen stav u_i $(0 \leq i \leq n-1)$. Pokud je ze stavu u_i dosažitelný nějaký stav, ve kterém je pravdivý atom $\mathtt{p}_i$, pak u_{i+1} bude některý (libovolně vybraný) takovýto stav. Pokud ze stavu u_i není dosažitelný žádný stav, ve kterém by byl pravdivý atom $\mathtt{p}_i$, pak $u_{i+1} = u_i$. Díky tranzitivitě a reflexivitě relace R platí, že $R(s, u_n)$, a přitom je zřejmé, že u_n je informačně finální stav vzhledem k množině At. u_n je tedy hledaným informačně finálním stavem t. `QED`

Nyní již můžeme formulovat tvrzení, které ukazuje, jak je možné, že v jistém smyslu je `KVL` obsažena v `IVL`, přestože intuicionistická logika je slabší než logika klasická. Klasické tautologie jsou přesně ty formule, jejichž dvojitá negace je logicky pravdivá v intuicionistické logice.

`21.4.6 Věta:` *Libovolná formule ϑ jazyka* `KVL` *je logicky pravdivá z hlediska klasické logiky právě tehdy, když je formule $\neg\neg\vartheta$ logicky pravdivá z hlediska intuicionistické logiky.*

`Důkaz:` Pravolevý směr ($\Leftarrow$) je jednoduchý. Předpokládejme, že formule $\neg\neg\vartheta$ je logicky pravdivá z hlediska intuicionistické logiky. Pak podle věty 21.4.2 je $\neg\neg\vartheta$ logicky pravdivá také z hlediska klasické logiky. Díky klasicky platnému zákonu dvojí negace musí být potom klasickou tautologií též formule ϑ. Nyní dokážeme levopravý směr ($\Rightarrow$). Předpokládejme, že $\neg\neg\vartheta$ není logicky pravdivá z hlediska intuicionistické logiky. To znamená, že existuje kripkovská interpretace $I = \langle W, R, O\rangle$ a stav $s \in W$ tak, že $I, s \not\models \neg\neg\vartheta$. To znamená, že existuje stav $t \in W_s$ takový, že $I, t \models \neg\vartheta$.

Tedy pro každý stav $u \in W_t$ máme $I, u \nvDash \vartheta$. Nechť At je množina atomů vyskytujících se ve formuli ϑ. At je zjevně konečná. Podle věty 21.4.5 tedy existuje stav $v \in W_t$, který je informačně finální vzhledem k At, a i pro tento stav musí platit $I, v \nvDash \vartheta$. Z věty 21.4.4 plyne, že existuje klasická interpretace, ve které je formule ϑ (klasicky) nepravdivá, což znamená, že ϑ není klasická tautologie. QED

Předchozí věta poukazuje na důležitý vztah mezi intuicionistickou a klasickou logikou. Nyní se podíváme na jeden podstatný rozdíl mezi těmito systémy. Intuicionistická disjunkce je konstruktivní. To znamená, že je-li nějaká formule tvaru disjunkce logicky pravdivá (v intuicionistické logice), pak je taky logicky pravdivý alespoň jeden z disjunktů. Tuto vlastnost pochopitelně klasická disjunkce nemá. Např. $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p}$ je klasická tautologie, avšak ani $\mathtt{p}$, ani $\neg\mathtt{p}$ nejsou klasické tautologie. Tvrzení o konstruktivní disjunkci se dokáže velmi elegantním způsobem. Důkaz je založen na pozorování, že máme-li protipříklad (kripkovskou interpretaci) k formuli ϑ a protipříklad k formuli χ, můžeme tyto dvě interpretace jednoduše k sobě svázat jedním objektem a výsledkem bude interpretace, která je protipříkladem k disjunkci $\vartheta \vee \chi$.

21.4.7 Věta: *V intuicionistické logice platí, že pokud $\vartheta \vee \chi$ je logicky pravdivá formule, pak je logicky pravdivá též formule ϑ nebo formule χ.*

Důkaz: Dokážeme, že pokud není logicky pravdivá ani ϑ, ani χ, pak není logicky pravdivá ani formule $\vartheta \vee \chi$. Předpokládejme, že $I_1 = \langle W_1, R_1, O_1 \rangle$ je protipříklad k formuli ϑ, tj. existuje $s_1 \in W_1$ tak, že $I_1, s_1 \nvDash \vartheta$. Předpokládejme, že $I_2 = \langle W_2, R_2, O_2 \rangle$ je protipříklad k formuli χ, tj. existuje $s_2 \in W_2$ tak, že $I_2, s_2 \nvDash \chi$. Pochopitelně můžeme uvažovat takové interpretace, že W_1 a W_2 nemají žádný společný prvek. Vezměme si nějaký objekt u, který neleží ani ve W_1, ani ve W_2. Zkonstruujeme interpretaci $I = \langle W, R, O \rangle$ následujícím způsobem:

$$W = W_1 \cup W_2 \cup \{u\},$$

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \{\langle u, s \rangle \mid s \in W\},$$

$$O(\mathtt{p}) = O_1(\mathtt{p}) \cup O_2(\mathtt{p}), \text{ pro každý atom } \mathtt{p}.$$

I je skutečně kripkovskou interpretací intuicionistické logiky (W je neprázdná množina, R je neostré uspořádání, O je v souladu s podmínkou stability). Není těžké ověřit, že pro libovolnou formuli γ a libovolné stavy $t_1 \in W_1$ a $t_2 \in W_2$ platí:

$$I, t_1 \vDash \gamma \text{ právě tehdy, když } I_1, t_1 \vDash \gamma,$$

$$I, t_2 \vDash \gamma \text{ právě tehdy, když } I_2, t_2 \vDash \gamma.$$

Konkrétně tedy platí, že $I, s_1 \nvDash \vartheta$, $I, s_2 \nvDash \chi$. To ovšem znamená, že $I, u \nvDash \vartheta \vee \chi$. Kdyby tomu totiž tak nebylo, byla by v u pravdivá (vzhledem k I) formule ϑ nebo formule χ. Ovšem pak díky stabilitě všech formulí (věta 21.4.1) by byla jedna z těchto formulí pravdivá ve všech stavech množiny W, a tedy i ve stavech s_1 a s_2. To by vedlo ke sporu. QED

21.5 Vztah intuicionistické a modální logiky

Kripkovská sémantika intuicionistické logiky se na první pohled velmi podobá kripkovské sémantice pro modální logiky. A skutečně se ukazuje, že intuicionistická logika úzce souvisí s modální logikou S4. Problém je, že tyto logické systémy se vztahují k jiným jazykům. V případě intuicionistické logiky se jedná o jazyk shodný s jazykem KVL. V případě modální logiky jsou ve hře navíc modality možnosti a nutnosti. Souvislost mezi S4 a IVL zprostředkovává překlad, který můžeme definovat jako funkci přiřazující každé formuli ϑ jazyka IVL jistou formuli ϑ^* jazyka MVL. Tento překlad je definován induktivně následujícím předpisem:

$$\mathtt{p}^* = \Box\mathtt{p},$$

$$(\neg\phi)^* = \Box\neg\phi^*,$$

$$(\phi \wedge \psi)^* = \phi^* \wedge \psi^*,$$

$$(\phi \vee \psi)^* = \phi^* \vee \psi^*,$$

$$(\phi \to \psi)^* = \Box(\phi^* \to \psi^*),$$

$$(\phi \leftrightarrow \psi)^* = \Box(\phi^* \leftrightarrow \psi^*).$$

Každé formuli jazyka IVL tedy tento překlad jednoznačně přiřadí nějakou formuli jazyka MVL, např.:

$$(\mathtt{p} \to \neg(\mathtt{q} \vee \mathtt{r}))^* = \Box(\Box\mathtt{p} \to \Box\neg(\Box\mathtt{q} \vee \Box\mathtt{r})).$$

K tomuto závěru jsme se dostali postupně pomocí těchto kroků:

$$(\mathtt{p} \to \neg(\mathtt{q} \vee \mathtt{r}))^*,$$

$$\Box(\mathtt{p}^* \to (\neg(\mathtt{q} \vee \mathtt{r}))^*),$$

$$\Box(\Box\mathtt{p} \to \Box\neg(\mathtt{q} \vee \mathtt{r})^*),$$

$$\Box(\Box\mathtt{p} \to \Box\neg(\mathtt{q}^* \vee \mathtt{r}^*)),$$

$$\Box(\Box\mathtt{p} \to \Box\neg(\Box\mathtt{q} \vee \Box\mathtt{r})).$$

Nyní dokážeme, že logika S4 reflektuje skrze právě zavedený překlad intuicionistickou logiku, podobně jako intuicionistická logika reflektuje klasickou logiku pomocí dvojité negace, jak bylo ukázáno ve větě 21.4.6. Budeme nyní přecházet mezi kripkovskou sémantikou intuicionistické logiky a kripkovskou sémantikou modální logiky. Sémantické podmínky pro jednotlivé logické operátory se v těchto sémantických systémech liší. V případě, že bude hrozit nedorozumění, budeme používat následující pomocné značení:

$I, s \vDash_i \vartheta$ znamená $I, s \vDash \vartheta$ ve smyslu sémantiky `IVL`,

$I, s \vDash_m \vartheta$ znamená $I, s \vDash \vartheta$ ve smyslu sémantiky `MVL`.

Připomeňme si, že logiku `S4` jsme popsali jako modální logiku všech reflexivních a tranzitivních rámců. Každá kripkovská interpretace `IVL` je tedy zároveň sémantickou strukturou logiky `S4`. Navíc lze snadno zdůvodnit následující souvislost.

`21.5.1 Věta:` *Nechť $I = \langle W, R, O \rangle$ je kripkovská interpretace* `IVL` *a ϑ je formule jazyka* `IVL`. *Pak pro každé $s \in W$ platí $I, s \vDash_i \vartheta$ právě tehdy, když $I, s \vDash_m \vartheta^*$.*

`Důkaz:` Tvrzení lze dokázat indukcí podle složitosti formule ϑ. Projdeme pro ilustraci krok pro implikaci. Předpokládejme, že je dáno libovolné $s \in W$. Předpokládáme, že pro každé $t \in W$ platí:

$I, t \vDash_i \phi$ právě tehdy, když $I, t \vDash_m \phi^*$,

$I, t \vDash_i \psi$ právě tehdy, když $I, t \vDash_m \psi^*$.

Na základě tohoto předpokladu ukážeme, že platí:

$I, s \vDash_i \phi \to \psi$ právě tehdy, když $I, s \vDash_m (\phi \to \psi)^*$.

To lze zdůvodnit pomocí následujícího postupu. Od levé strany ekvivalence se postupně pomocí ekvivalentních vyjádření dostáváme k pravé straně:

(1) $I, s \vDash_i \phi \to \psi$,

(2) pro každé $t \in W_s$ platí, že jestliže $I, t \vDash_i \phi$, pak $I, t \vDash_i \psi$,

(3) pro každé $t \in W_s$ platí, že, jestliže $I, t \vDash_m \phi^*$, pak $I, t \vDash_m \psi^*$,

(4) pro každé $t \in W_s$ platí, že $I, t \vDash_m \phi^* \to \psi^*$,

(5) $I, s \vDash_m \Box(\phi^* \to \psi^*)$,

(6) $I, s \vDash_m (\phi \to \psi)^*$.

Platnost jednotlivých kroků je zřejmá. Zdůvodnění ostatních částí je analogické. `QED`

Předchozí větu využijeme, abychom ukázali podstatný vztah mezi IVL a S4. Avšak chceme-li popsat tuto souvislost, narážíme dále na následující překážku. Kripkovské interpretace intuicionistické logiky nejsou obecně totožné s kripkovskými interpretacemi logiky S4. Hlavní rozdíl spočívá v podmínce stability, kterou klademe na ohodnocení v rámci sémantiky IVL. Další rozdíl spočívá v tom, že jsme při zavedení kripkovských interpretací intuicionistické logiky požadovali, aby relace dosažitelnosti byla nejen reflexivní a tranzitivní, ale ještě navíc slabě antisymetrická tak, aby informační stavy byly touto relací uspořádány. Ukazuje se, že tento druhý rozdíl není podstatný. Kdybychom ze sémantiky intuicionistické logiky odstranili tento požadavek, množina logicky platných formulí by se tím nezměnila. Na druhé straně, modální logika všech rámců s relací neostrého uspořádání je opět logika S4. Tento fakt jsme však nezdůvodnili a nebudeme ho dále předpokládat. Problémy s odlišnostmi v ohodnocení i v relaci dosažitelnosti vyřešíme pomocí následující konstrukce.

Každé kripkovské interpretaci $I = \langle W, R, O\rangle$ modální logiky, kde R je reflexivní a tranzitivní relace, přiřadíme jistou kripkovskou interpretaci intuicionistické logiky $I^* = \langle W^*, R^*, O^*\rangle$. Pro tento účel zavedeme následující značení. Pro každé $s \in W$ je $[s]$ množinou těch objektů $t \in W$, pro které platí $R(s,t)$ a zároveň $R(t,s)$. To znamená, že $[s]$ je množina těch světů, které jsou dosažitelné z s a ze kterých je zároveň dosažitelné s. Množině $[s]$ říkejme třeba třída určená prvkem s. Vzhledem k reflexivitě a tranzitivitě relace R tvoří množina všech tříd určených prvky z W dohromady rozklad množiny W, tj. tyto množiny jsou neprázdné, pokrývají celou množinu W a každé dvě různé mají prázdný průnik.[10] Pak můžeme definovat:

$$W^* = \{[s] \mid s \in W\},$$

$$R^* = \{\langle [s], [t]\rangle \mid R(s,t)\},$$

$$O^*(\mathtt{p}) = \{[s] \mid I, s \vDash \Box\mathtt{p}\}.$$

W^* je tedy příslušný rozklad množiny W, tj. množina všech tříd určených prvky množiny W. Relace R^* kopíruje v jistém smyslu relaci R. Ohodnocení O^* přiřadí danému atomu ty třídy, které jsou určené prvky, v nichž je tento atom nutně pravdivý. Nejprve je třeba ověřit, že se skutečně jedná o dobře definovanou kripkovskou interpretaci IVL.

[10] O rozkladech množin a jejich vztahu k relacím ekvivalence jsme pojednali v kapitole 12.

`21.5.2 Věta:` *Je-li I kripkovská interpretace modální logiky s reflexivní a tranzitivní relací dosažitelnosti, pak I^* je kripkovská interpretace intuicionistické logiky.*

`Důkaz:` Nechť je tedy dána kripkovská interpretace $I = \langle W, R, O\rangle$ modální logiky, kde R je reflexivní a tranzitivní relace. Vzhledem k povaze definice interpretace I^* je nejprve třeba ověřit, že se vůbec jedná o dobře definovaný objekt. Konkrétně je třeba ověřit, že R^* je dobře definovaná relace a O^* dobře definované ohodnocení. Pro R^* má podle definice platit:

$R^*([s],[t])$ právě tehdy, když $R(s,t)$.

Abychom ověřili, že se jedná o dobře vymezenou relaci, musíme ukázat toto:

pokud $[u] = [s]$ a $[v] = [t]$, pak $R(s,t)$ právě tehdy, když $R(u,v)$.

Kdyby to neplatilo, tj. kdyby např. platilo $R(s,t)$ a neplatilo $R(u,v)$, pak by platilo $R^*([s],[t])$ a neplatilo by $R^*([u],[v])$, což by na základě předpokládaných rovností znamenalo, že by platilo a zároveň neplatilo $R^*([s],[t])$. Tak by definice vedla ke sporu. Definice naštěstí ke sporu nevede, protože uvedené tvrzení platí, jak nyní zdůvodníme. Jelikož díky reflexivitě R pro každé $s \in W$ platí $s \in [s]$, znamená předpoklad $[u] = [s]$ a $[v] = [t]$, že $R(u,s)$, $R(s,u)$, $R(v,t)$, $R(t,v)$. Předpokládáme-li navíc $R(s,t)$, získáváme z tranzitivity nejprve $R(u,t)$, a pak $R(u,v)$. Přepokládáme-li naopak $R(u,v)$, získáváme z tranzitivity nejprve $R(s,v)$, a pak $R(s,t)$. Tím je ověřeno, že R^* je korektně definovaný objekt. Nyní ověříme, že O^* je dobře definované ohodnocení. Zde musíme z důvodů podobných jako v předchozím odstavci dokázat, že:

pokud $[s] = [t]$, pak $I, s \models \Box\mathtt{p}$ právě tehdy, když $I, t \models \Box\mathtt{p}$.

Předpokládejme $[s] = [t]$. Z toho plyne, že $R(s,t)$ a $R(t,s)$. To však díky tranzitivitě znamená, že $W_s = W_t$. Pak je ale skutečně formule $\Box\mathtt{p}$ pravdivá v s právě tehdy, když je pravdivá v t. V dalším kroku musíme ověřit, že relace R^* je reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrická. Reflexivita a tranzitivita plyne přímo z reflexivity a tranzitivity relace R. Slabou antisymetrii zdůvodníme tak, že předpokládáme, že $R^*([s],[t])$ a $R^*([t],[s])$. Platí tedy $R(s,t)$ a $R(t,s)$. To však znamená, že $s \in [t]$ a $t \in [s]$. Z toho plyne, že $[s] = [t]$. Posledním bodem důkazu je zdůvodnění, že O^* splňuje podmínku stability. Předpokládejme $[s] \in O^*(\mathtt{p})$ a $R^*([s],[t])$. První předpoklad znamená, že $I, s \models \Box\mathtt{p}$, druhý pak, že $R(s,t)$. Díky tranzitivitě platí $W_t \subseteq W_s$, a tedy $I, t \models \Box\mathtt{p}$, tj. $[t] \in O^*(\mathtt{p})$, což jsme chtěli dokázat. `QED`

Nyní můžeme zohlednit výše zavedený překlad z jazyka `IVL` do jazyka `MVL`.

`21.5.3 Věta:` *Nechť $I = \langle W, R, O\rangle$ je kripkovská interpretace modální logiky s reflexivní a tranzitivní relací dosažitelnosti a ϑ formule jazyka* `IVL`*. Pak pro každé $s \in W$ platí $I, s \models_m \vartheta^*$ právě tehdy, když $I^*, [s] \models_i \vartheta$.*

`Důkaz:` Postupujeme indukcí podle složitosti formule ϑ. Pro atomické formule platí ekvivalence mezi následujícími tvrzeními:

(1) $I, s \models_m \mathtt{p}^*$,

(2) $I, s \models_m \Box\mathtt{p}$,

(3) $[s] \in O^*(\mathtt{p})$,

(4) $I^*, [s] \models_i \mathtt{p}$.

Pro ilustraci rozebereme ještě případ negace. Předpokládejme tedy, že pro každé $s \in W$ platí $I, s \models_m \phi^*$ právě tehdy, když $I^*, [s] \models_i \phi$. Nechť je dáno nějaké konkrétní $s \in W$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(1) $I, s \models_m (\neg\phi)^*$,

(2) $I, s \models_m \Box\neg\phi^*$,

(3) pro každé $t \in W_s$ platí $I, t \models_m \neg\phi^*$,

(4) pro žádné $t \in W_s$ neplatí $I, t \models_m \phi^*$,

(5) pro žádné $[t] \in W_{[s]}$ neplatí $I^*, [t] \models_i \phi$,

(6) $I^*, [s] \models_i \neg\phi$.

Případy ostatních operátorů se proberou analogicky. `QED`

Nyní již můžeme přistoupit ke zmiňované souvislosti mezi `IVL` a logikou `S4`.

`21.5.4 Věta:` *Libovolná formule ϑ jazyka* `IVL` *je logicky pravdivá z hlediska intuicionistické logiky právě tehdy, když je formule ϑ^* logicky pravdivá z hlediska logiky* `S4`*.*

`Důkaz:` Předpokládejme nejprve ($\Leftarrow$), že ϑ není logicky pravdivá z hlediska intuicionistické logiky. To znamená, že existuje kripkovská interpretace intuicionistické logiky $I = \langle W, R, O\rangle$ a $s \in W$ tak, že $I, s \not\models_i \vartheta$. Podle věty 21.5.1 pak $I, s \not\models_m \vartheta^*$, což znamená, že ϑ^* není logicky pravdivá z hlediska logiky `S4`. Nyní předpokládejme ($\Rightarrow$), že ϑ^* není logicky pravdivá z hlediska S4. To znamená, že existuje kripkovská interpretace modální logiky $I = \langle W, R, O \rangle$, kde R je reflexivní a tranzitivní relace a kde $s \in W$ tak, že $I, s \not\models_m \vartheta^*$. Podle věty 21.5.3 tedy platí $I^*, [s] \not\models_i \vartheta$. Formule ϑ tedy není logicky pravdivá z hlediska IVL. QED

Předchozí věta říká, že logická platnost v intuicionistické logice se odráží v logické platnosti logiky S4. Jedním z důsledků této věty je, že libovolná úplná axiomatizace logiky S4 představuje nepřímou axiomatizaci intuicionistické logiky. Chceme-li dokázat, že daná formule ϑ je intuicionisticky platná, můžeme to udělat tak, že zkonstruujeme důkaz formule ϑ^* ve vhodném kalkulu pro logiku S4.

21.6 Harmonie odvozovacích pravidel

Skutečnost, že původní motivace sémantiky pro intuicionistickou logiku byly deduktivní, spočívající v přesvědčení, že pravdivost nelze oddělit od dokazatelnosti, je pozoruhodným způsobem potvrzena v některých úvahách týkajících se toho, jak by vypadal adekvátní kalkul přirozené dedukce intuicionistické logiky. Připomeňme, že kalkul přirozené dedukce klasické logiky sestává z pravidel shrnutých v následující tabulce:

(S)	$\vartheta, \neg\vartheta / \bot$	(ND)	$[\neg\vartheta : \bot] / \vartheta$
(KD)	$[\vartheta : \chi] / \vartheta \rightarrow \chi$	(MP)	$\vartheta \rightarrow \chi, \vartheta / \chi$
($\wedge$a)	$\vartheta, \chi / \vartheta \wedge \chi$	($\wedge$b)	$\vartheta \wedge \chi / \vartheta$
		($\wedge$c)	$\vartheta \wedge \chi / \chi$
($\vee$a)	$\vartheta / \vartheta \vee \chi$		
($\vee$b)	$\chi / \vartheta \vee \chi$	($\vee$c)	$\vartheta \vee \chi, [\vartheta : \gamma], [\chi : \gamma] / \gamma$
($\leftrightarrow$a)	$[\vartheta : \chi], [\chi : \vartheta] / \vartheta \leftrightarrow \chi$	($\leftrightarrow$b)	$\vartheta \leftrightarrow \chi, \vartheta / \chi$
		($\leftrightarrow$c)	$\vartheta \leftrightarrow \chi, \chi / \vartheta$

Odmyslíme-li si na chvíli první dvě pravidla týkající se negace, můžeme zbylá pravidla rozdělit do dvou skupin. Na levé straně jsou tzv. *zaváděcí pravidla*, na pravé straně jsou *pravidla eliminační.* Např. v případě konjunkce je zaváděcím pravidlem $\vartheta, \chi / \vartheta \wedge \chi$, neboť právě toto pravidlo nám říká, jak lze odvodit formuli tvaru konjunkce. Naproti tomu eliminační pravidla, která se vážou ke konjunkci, jsou $\vartheta \wedge \chi / \vartheta$ a $\vartheta \wedge \chi / \chi$. Ta nám říkají, jakým způsobem lze formuli tvaru konjunkce použít a co z ní lze bezprostředně odvodit.

Mezi zaváděcími a eliminačními pravidly je vztah určité *harmonie*, jehož vymezení není zprvu zcela průhledné, ale projasní se na příkladech. Řekneme, že zaváděcí pravidlo je ve vzájemné harmonii s eliminačním pravidlem, když zavedená formule (tj. závěr zaváděcího pravidla) je:

(1) v kontextu eliminačního pravidla nejsilnější formulí, která může být z premis zaváděcího pravidla odvozena,

(2) v kontextu zaváděcího pravidla nejslabší formulí, která může být eliminačním pravidlem eliminována.

Jak uvidíme na příkladech, toto vymezení lze lehce upravit tak, aby bylo možno vzít v úvahu případy s více zaváděcími či eliminačními pravidly, jako tomu je např. u konjunkce, ke které se váže jedno zaváděcí a dvě eliminační pravidla. Harmonie mezi pravidly není žádnou samozřejmostí. Kdybychom namátkou zformulovali zaváděcí a eliminační pravidlo pro nějaký nový operátor, pak by tato pravidla pravděpodobně ve vzájemné harmonii nebyla. Vezměme si třeba nějaký nový dvouargumentový výrokový operátor $\oplus$. Přiřadíme mu zaváděcí pravidlo shodné s tím, které jsme formulovali pro konjunkci, a eliminační pravidlo shodné s tím, které jsme formulovali pro disjunkci. Máme tedy dvě pravidla:

$$\vartheta, \chi / \vartheta \oplus \chi \qquad \text{a} \qquad \vartheta \oplus \chi, [\vartheta : \gamma], [\chi : \gamma] / \gamma.$$

Tato pravidla nejsou ve vzájemné harmonii. Ověřme, že např. pravidla, která se vážou ke konjunkci, jsou ve vzájemné harmonii. Nejprve předpokládejme, že máme k dispozici eliminační pravidla $\vartheta \wedge \chi / \vartheta$ a $\vartheta \wedge \chi / \chi$. S jejich pomocí máme ukázat, že $\vartheta \wedge \chi$ je nejsilnější formule, kterou lze odvodit z formulí ϑ, χ. To znamená, že cokoli je odvoditelné z ϑ, χ, je odvoditelné též z $\vartheta \wedge \chi$. Předpokládejme tedy $\vartheta, \chi \vdash \gamma$. Máme ukázat, že $\vartheta \wedge \chi \vdash \gamma$. To lze učinit velice jednoduše:

1	$\vartheta \wedge \chi$	předpoklad
2	ϑ	1, ($\wedge$b)
3	χ	1, ($\wedge$c)
4	γ	2, 3, předpoklad $\vartheta, \chi \vdash \gamma$

Tím jsme zdůvodnili první bod. Dále předpokládejme, že máme k dispozici zaváděcí pravidlo $\vartheta, \chi / \vartheta \wedge \chi$. S jeho pomocí máme ukázat, že $\vartheta \wedge \chi$ je nejslabší formulí, ze které můžeme odvodit obě formule, ϑ i χ. Předpokládejme tedy, že $\gamma \vdash \vartheta$ a $\gamma \vdash \chi$. Máme ukázat, že $\gamma \vdash \vartheta \wedge \chi$. To lze udělat opět velice jednoduše:

1	γ	předpoklad
2	ϑ	1, předpoklad $\gamma \vdash \vartheta$
3	χ	1, předpoklad $\gamma \vdash \chi$
4	$\vartheta \wedge \chi$	2, 3, ($\wedge$a)

Tím jsme zdůvodnili vzájemnou harmonii zaváděcího pravidla ($\wedge$a) s eliminačními pravidly ($\wedge$b) a ($\wedge$c). Pro názornost uveďme ještě jeden příklad harmonie pravidel.

Podrobně zdůvodníme harmonii zaváděcího pravidla (KD) s eliminačním pravidlem (MP). Předpokládejme nejprve, že máme k dispozici eliminační pravidlo (MP). S jeho pomocí máme ukázat, že $\vartheta \to \chi$ je nejsilnější formule, kterou lze odvodit z toho, že jsme schopni odvodit χ z ϑ. Předpokládejme tedy, že γ je formule, kterou lze odvodit z toho, že jsem schopni odvodit χ z ϑ (symbolicky $[\vartheta : \chi] \vdash \gamma$). Musíme ukázat, že $\vartheta \to \chi \vdash \gamma$. To lze udělat takto:

1	$\vartheta \to \chi$	předpoklad
2	$\quad\vartheta$	hyp
3	$\quad\chi$	1, 2 (MP)
4	γ	2, 3, předpoklad $[\vartheta : \chi] \vdash \gamma$

Nyní předpokládejme, že máme k dispozici zaváděcí pravidlo (KD). Pomocí něho máme ukázat, že $\vartheta \to \chi$ je nejslabší formule taková, že přidáme-li k ní ϑ, můžeme odvodit χ. Předpokládejme tedy, že γ je nějaká formule s touto vlastností, tj. $\gamma, \vartheta \vdash \chi$. Máme ukázat, že $\gamma \vdash \vartheta \to \chi$:

1	γ	předpoklad
2	$\quad\vartheta$	hyp
3	$\quad\chi$	1, 2, předpoklad $\gamma, \vartheta \vdash \chi$
4	$\vartheta \to \chi$	2, 3, (KD)

Vzájemnou harmonii můžeme podobným způsobem pozorovat jednak mezi zaváděcími pravidly ($\vee$a), ($\vee$b) a eliminačním pravidlem ($\vee$c) a také mezi zaváděcím pravidlem ($\leftrightarrow$a) a eliminačními pravidly ($\leftrightarrow$b), ($\leftrightarrow$c). Ověření tohoto faktu necháme na čtenáři. Vrátíme-li se ovšem k prvním dvěma pravidlům (S) a (ND), která se týkají negace, zjistíme, že narušují tuto systematičnost. Nelze o nich říci, že jsou ve vzájemné harmonii, a nelze dokonce ani říci, že pravidlo (ND) je zaváděcí pravidlo pro negaci $\neg$, protože v závěru tohoto pravidla není formule tvaru $\neg\vartheta$. Co bychom mohli udělat, abychom toto napravili a získali harmonická pravidla též pro negaci? Nabízí se nahradit pravidlo (ND) jeho alternativou:

(ND)* $[\vartheta : \bot]/\neg\vartheta$.

Tato alternativa skutečně představuje zaváděcí pravidlo pro negaci, které je v harmonii s eliminačním pravidlem (S), což nyní ověříme. Předpokládejme, že máme k dispozici (S). Musíme ověřit, že pro libovolnou formuli γ takovou, že $[\vartheta : \bot] \vdash \gamma$, platí $\neg\vartheta \vdash \gamma$:

1	$\neg\vartheta$	předpoklad
2	$\vert\ \vartheta$	hyp
3	$\vert\ \bot$	1, 2, (S)
4	γ	2, 3, předpoklad $[\vartheta : \bot] \vdash \gamma$

Nyní předpokládejme, že máme k dispozici (ND)*. Musíme ověřit, že pro libovolnou formuli γ takovou, že $\vartheta, \gamma \vdash \bot$, platí $\gamma \vdash \neg\vartheta$:

1	γ	předpoklad
2	$\vert\ \vartheta$	hyp
3	$\vert\ \bot$	1, 2, předpoklad $\vartheta, \gamma \vdash \bot$
4	$\neg\vartheta$	2, 3, (ND)*

Jaký je dopad záměny pravidla (ND) za (ND)*? Ukážeme, že pokud máme k dispozici (ND), pak pokud je z ϑ odvoditelný spor $\bot$, můžeme odvodit $\neg\vartheta$, což odpovídá pravidlu (ND)*:

1	$\vert\ \neg\neg\vartheta$	hyp
2	$\vert\ \vert\ \neg\vartheta$	hyp
3	$\vert\ \vert\ \bot$	1, 2, (S)
4	$\vert\ \vartheta$	2, 3, (ND)
5	$\vert\ \bot$	4, předpoklad
6	$\neg\vartheta$	1–5, (ND)

Ovšem pravidlo (ND) nelze odvodit z pravidla (ND)*. Dosadíme-li tedy (ND)* za (ND) do systému pravidel, celý systém tím oslabíme. Je překvapivým výsledkem, který nebudeme dokazovat, že adekvátní kalkul `IVL` získáme tak, že přidáme k takto oslabenému systému pravidlo, podle něhož je ze sporu odvoditelné cokoli, tedy *ex falso quodlibet*:

(EFQ) $\bot/\vartheta$.

Toto pravidlo je odvoditelné, máme-li k dispozici (ND), takže v kalkulu přirozené dedukce pro klasickou výrokovou logiku nemusí být explicitně uvedeno. Avšak vyměníme-li (ND) za (ND)*, pravidlo (EFQ) odvodit nelze. Všechna pravidla silně úplného a korektního kalkulu `IVL` jsou ještě jednou shrnuta v následující tabulce:

(EFQ)	$\bot/\vartheta$		
(S)	$\vartheta, \neg\vartheta/\bot$	(ND)*	$[\vartheta : \bot]/\neg\vartheta$
(KD)	$[\vartheta : \chi]/\vartheta \to \chi$	(MP)	$\vartheta \to \chi, \vartheta/\chi$
($\wedge$a)	$\vartheta, \chi/\vartheta \wedge \chi$	($\wedge$b)	$\vartheta \wedge \chi/\vartheta$
		($\wedge$c)	$\vartheta \wedge \chi/\chi$
($\vee$a)	$\vartheta/\vartheta \vee \chi$		
($\vee$b)	$\chi/\vartheta \vee \chi$	($\vee$c)	$\vartheta \vee \chi, [\vartheta : \gamma], [\chi : \gamma]/\gamma$
($\leftrightarrow$a)	$[\vartheta : \chi], [\chi : \vartheta]/\vartheta \leftrightarrow \chi$	($\leftrightarrow$b)	$\vartheta \leftrightarrow \chi, \vartheta/\chi$
		($\leftrightarrow$c)	$\vartheta \leftrightarrow \chi, \chi/\vartheta$

Je pozoruhodným faktem, že na rozdíl od klasické negace lze intuicionistickou negaci charakterizovat pomocí dvojice jednoduchých pravidel – jednoho zaváděcího a jednoho eliminačního –, která jsou ve vzájemné harmonii podobně jako pravidla pro všechny ostatní operátory. Z tohoto hlediska se intuicionistická logika jeví jako velmi elegantní systém.

21.7 Predikátová intuicionistická logika

Kripkovskou sémantiku výrokové intuicionistické logiky lze upravit na sémantiku pro predikátovou intuicionistickou logiku (IPL). Pojem kripkovského rámce zůstává nezměněn, jedná se tedy o neprázdnou množinu, na níž je zavedena relace neostrého uspořádání. Co se zásadním způsobem změní, je charakter ohodnocení, které musíme ke kripkovskému rámci přidat, abychom získali kripkovskou interpretaci.

21.7.1 Definice (Kripkovská interpretace): *Máme rámec* $\langle W, R\rangle$ *a nějaký jazyk predikátové logiky* J *(tj. nějakou množinu predikátů a jmen). Prvořádové ohodnocení* O *na tomto rámci (vzhledem k jazyku* J*) je funkce, která každému stavu* $s \in W$ *přiřadí nějakou interpretaci* KPL I_s *(pro jazyk* J*), a přitom jsou splněny následující požadavky. Předpokládejme, že* c *je jméno a* Q *predikát jazyka* J*. Dále předpokládejme, že* s, t *jsou stavy z* W *takové, že* $R(s,t)$*. Pak musí platit:*

(1) univerzum interpretace I_s *je podmnožinou univerza interpretace* I_t*,*

(2) pokud $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in I_s(\mathtt{Q})$*, pak* $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in I_t(\mathtt{Q})$*,*

(3) $I_s(\mathtt{c}) = I_t(\mathtt{c})$*.*

Kripkovská interpretace IPL *je každá trojice* $\langle W, R, O\rangle$*, kde* $\langle W, R\rangle$ *je kripkovský rámec a* O *je prvořádové ohodnocení na tomto rámci.*

Předchozí definice má opět přímočarý výklad. Stejně jako na úrovni IVL reprezentuje kripkovská interpretace IPL určitou informační strukturu.

Uspořádání R mapuje informační růst. S nárůstem informací roste univerzum objektů, které jsou brány v potaz (tomu odpovídá první podmínka předchozí definice) a rozšiřuje se též informace o tom, které objekty spadají do extenzí predikátů (druhá podmínka). Je-li nějaký objekt explicitně pojmenován, své jméno s nárůstem informací neztrácí, a toto jméno tedy nemůže být v dosažitelném stavu použito pro jiný objekt (třetí podmínka).

Vzhledem ke standardní sémantice modální predikátové logiky, jak jsme ji vymezili v oddílu 20.4, zdůrazněme ten podstatný rozdíl, že nepracujeme s jedním fixně daným univerzem, které je konstantní pro všechny stavy. V sémantice intuicionistické logiky se univerzum s jednotlivými stavy může proměňovat. Tato konvence je motivována snahou reflektovat dynamiku změny informačních stavů. Posun od jednoho informačního stavu k druhému může spočívat nejen v tom, že např. získáme novou informaci o vztahu mezi dvěma objekty, jejichž existenci jsme již dříve přijali. Může spočívat také v registraci nových objektů, které jsme doposud nevzali v úvahu.

Pro formulaci Tarského definice pravdy bude užitečná následující poznámka. Interpretaci klasické predikátové logiky, kterou ohodnocení O přiřazuje danému stavu s, budeme značit v následující definici opět jako I_s. Univerzum interpretace I_s budeme značit jako U_s. Předpokládejme, že V je valuace proměnných v interpretaci I_s, tj. funkce přiřazující proměnným prvky množiny U_s, a $R(s,t)$. Pak je ovšem V také valuací proměnných v interpretaci I_t, neboť $U_s \subseteq U_t$ (viz první podmínka předchozí definice). A nejen to. Také každá valuace $V^{\mathtt{y}}_{a}$, kde a je objekt z U_t, musí být valuací v interpretaci I_t. Díky tomu dává následující definice dobrý smysl.

`21.7.2 Definice (Tarského definice pravdy):` *Nechť $\langle W, R, O\rangle$ je kripkovská interpretace* `IPL`, *kterou označíme jako I, $s \in W$ a V je valuace proměnných ve stavu s. Stanovujeme, že formule ϑ je pravdivá ve stavu s při valuaci V a vzhledem k interpretaci I, symbolicky $IV, s \vDash \vartheta$, jestliže:*

(1) $\vartheta = \mathtt{Q}(\mathtt{t_1}, \ldots, \mathtt{t_n})$ *a* $\langle IV(\mathtt{t_1}), \ldots, IV(\mathtt{t_n})\rangle \in I_s(\mathtt{Q})$,

nebo jestliže platí jedna z následujících podmínek:

(2) $\vartheta = \neg\phi$ *a* *pro žádné $t \in W_s$ neplatí $IV, t \vDash \phi$,*

(3) $\vartheta = \phi \wedge \psi$ *a* $IV, s \vDash \phi$ *a* $IV, s \vDash \psi$,

(4) $\vartheta = \phi \vee \psi$ *a* $IV, s \vDash \phi$ *nebo* $IV, s \vDash \psi$,

(5) $\vartheta = \phi \to \psi$ *a* *pro každé $t \in W_s$, jestliže $IV, t \vDash \phi$, pak $IV, t \vDash \psi$,*

(6) $\vartheta = \phi \leftrightarrow \psi$ *a* *pro každé* $t \in W_s$*,* $I, t \vDash \phi$*, právě když* $I, t \vDash \psi$*,*

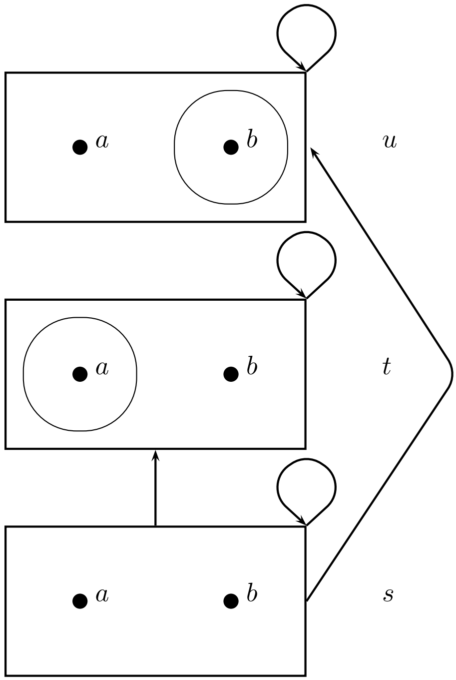
(7) $\vartheta = (\forall \mathtt{y})\phi$ *a* *pro každé* $t \in W_s$ *a každé* $a \in U_t$ *platí* $IV^{\mathtt{y}}_{a}, t \vDash \phi$*,*

(8) $\vartheta = (\exists \mathtt{y})\phi$ *a* *pro některé* $a \in U_s$ *platí* $IV^{\mathtt{y}}_{a}, s \vDash \phi$*.*

V opačném případě je formule ϑ *ve stavu* s *při valuaci* V *a vzhledem k interpretaci* I *nepravdivá, což zapisujeme také jako* $IV, s \nvDash \vartheta$*.*

Hlavní sémantické pojmy jsou definovány standardním způsobem, tj. nebudeme je dále rozepisovat.

`Příklad 21.7.3:` Přesvědčíme se pro ilustraci, že v takto vymezené sémantice není platné schéma $\neg(\forall y)\vartheta \rightarrow (\exists y)\neg\vartheta$. Vezměme si rámec $\langle W, R\rangle$, kde $W = \{s, t, u\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle t, t\rangle, \langle u, u\rangle, \langle s, t\rangle, \langle s, u\rangle\}$. Pro tento rámec definujeme prvořádové ohodnocení O. Jazyk bude obsahovat jeden jednomístný predikát `P`. Nechť $U_s = U_t = U_u = \{a, b\}$. Tedy univerzum všech tří klasických interpretací je shodné a obsahuje dva objekty a, b. Predikát `P` je realizován v jednotlivých interpretacích takto: $I_s(\mathtt{P}) = \emptyset$, $I_t(\mathtt{P}) = \{a\}$, $I_u(\mathtt{P}) = \{b\}$.



Tím je tedy prvořádové ohodnocení O jednoznačně vymezeno. Budeme pracovat s interpretací $I = \langle W, R, O\rangle$. Jelikož v žádné ze tří uvažovaných interpretací není predikát P realizován jako celé univerzum, platí $I, s \vDash \neg(\forall \mathtt{y})\mathtt{P}(\mathtt{y})$. Přitom však neplatí $I, s \vDash (\exists \mathtt{y})\neg\mathtt{P}(\mathtt{y})$. Aby tato formule byla v s pravdivá, musel by v U_s existovat objekt, který by nebyl obsažen v realizaci predikátu P žádného z dosažitelných stavů, tedy ani v $I_s(\mathtt{P})$, ani v $I_t(\mathtt{P})$, ani v $I_u(\mathtt{P})$. Žádný takový objekt v U_s není.

Závěrem, víceméně pro pořádek, dodejme, jak by vypadala axiomatizace IPL. Ke kalkulu HK pro IVL (kde ovšem formulové proměnné ve schématech lze nahrazovat libovolnými formulemi predikátové logiky), přidáme nejprve dvě axiomatická schémata:

$(\forall \mathtt{y})\vartheta \rightarrow \vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{t}}$, je-li t substituovatelný za y v ϑ,

$\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{t}} \rightarrow (\exists \mathtt{y})\vartheta$, je-li t substituovatelný za y v ϑ.

K tomu doplníme ještě dvě odvozovací pravidla:

$\vartheta \rightarrow \chi / \vartheta \rightarrow (\forall \mathtt{y})\chi$, nevyskytuje-li se y volně v ϑ,

$\vartheta \rightarrow \chi / (\exists \mathtt{y})\vartheta \rightarrow \chi$, nevyskytuje-li se y volně v χ.

Systém pravidel kalkulu přirozené dedukce pro predikátovou intuicionistickou logiku může vypadat takto:

(EFQ)	$\bot/\vartheta$		
(S)	$\vartheta, \neg\vartheta/\bot$	(ND)*	$[\vartheta : \bot]/\neg\vartheta$
(KD)	$[\vartheta : \chi]/\vartheta \rightarrow \chi$	(MP)	$\vartheta \rightarrow \chi, \vartheta/\chi$
($\wedge$a)	$\vartheta, \chi/\vartheta \wedge \chi$	($\wedge$b)	$\vartheta \wedge \chi/\vartheta$
		($\wedge$c)	$\vartheta \wedge \chi/\chi$
($\vee$a)	$\vartheta/\vartheta \vee \chi$		
($\vee$b)	$\chi/\vartheta \vee \chi$	($\vee$c)	$\vartheta \vee \chi, [\vartheta : \gamma], [\chi : \gamma]/\gamma$
($\leftrightarrow$a)	$[\vartheta : \chi], [\chi : \vartheta]/\vartheta \leftrightarrow \chi$	($\leftrightarrow$b)	$\vartheta \leftrightarrow \chi, \vartheta/\chi$
		($\leftrightarrow$c)	$\vartheta \leftrightarrow \chi, \chi/\vartheta$
(GEN)	$\vartheta/(\forall \mathtt{y})\vartheta$	(SPE)	$(\forall \mathtt{y})\vartheta/\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{t}}$
($\exists$a)	$\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{t}}/(\exists \mathtt{y})\vartheta$	($\exists$b)	$(\exists \mathtt{y})\vartheta, [\vartheta^{\mathtt{y}}_{\mathtt{c}} : \chi]/\chi$

Přitom pravidla (GEN), (SPE), ($\exists$a) a ($\exists$b) jsou omezena stejně jako u KPL. Tím je náš výklad rozšíření a deviací klasické logiky ukončen. Není tomu tak proto, že by nebylo o čem dále hovořit. Významných logických systémů, které nám mohou prostředkovat vhled do formálních metod a obecně do schematické podoby našeho myšlení a našeho jazyka je neobyčejně mnoho. Z těch nejvýznamnějších, které jsme nechali stranou, jmenujme třeba ještě vícehodnotové logiky. Důvod, proč se jimi není třeba zabývat, je i ten, že čtenář, jenž dospěl v knize do těchto míst, již ovládá příslušné techniky natolik, že je s to se vyznat i ve specializovanějších knihách, které jsou těmto systémům věnovány, stejně jako filosofickým problémům, které jsou s nimi spjaty.

Než přejdeme k závěrečnému shrnutí, které se zamyslí nad knihou v jejím celku a z pohledu toho, kdo ji s větším či menším porozuměním přečetl, shrňme ještě některé obecnější otázky, které souvisejí s povahou logiky tak, jak ji předložila tato kniha a jak k nim vyzvalo právě intuicionistické hnutí.

21.8 Podoby logiky

Zmínili jsme, že intuicionismus problematizoval od počátku jako pochybnou samu ideu logiky, a to vzhledem k její vazbě na jazyk. Fakt, že Brouwerův podnik přesto vedl k svébytnému pojetí logiky, navíc logiky formální, je něčím, co nás zavazuje k zamyšlení, jaké podoby logiky se nám v důsledku objevují, pustíme-li se do studia či kritiky jedné z nich, např. logiky formální, jak tomu bylo v této knize. Na počátku lze uvažovat o něčem, co lze nazvat:

(1) obecná logika.

Ta odpovídá obvyklému užití slova „logické“ ve smyslu zařazení určitého jevu, např. jednání, do řádu dalších jevů, konkrétně toho, co Brandom nazývá *logickým prostorem* nebo *prostorem důvodů*. Význam této metafory je snadno objasnitelný. Obecný konflikt, např. střet o potravu, lze řešit bezprostředním odstraněním překážky, v tomto případě konkurujícího strávníka, nebo prostředkovaně, typicky odkazem k důvodům, proč je potrava spíše moje než jeho apod. Pokud je zdůvodnění úspěšné, což znamená, že je typicky druhou stranou jako takové uznáno, lze hovořit o dobrém důvodu a tento důvod chápat jako rozšíření či doplnění prostoru, v němž se nacházíme jako lidské bytosti a jenž nás jako lidské bytosti vymezuje.

Úlohou obecné logiky je přitom orientace v tomto prostoru jako takovém, tj. nikoli pouhý pohyb v něm, ale jeho mapování či explikace. Typickým produktem této činnosti je identifikace jistého zdůvodnění, např.

$$\frac{\text{prší}}{\text{je mokro,}}$$

jako platného. Odkazem k němu lze pak říci, že je logické, že ten, kdo šel v dešti, zmokl. Kvalita tohoto odkazu spočívá přitom v tom, že je použitelný na více situací. Právě tím zjednodušuje a dále pořádá daný prostor.

Snaha o maximalizaci této obecnosti vede k dalšímu kroku, v němž je abstrahováno od materiální vazby (na déšť a mokro), a tematizuje se struktura vlastního logického prostoru, např. to, že je inferenčně členěn. Z tohoto hlediska se zdá být vhodným zdůvodněním argument:

jestliže prší, je mokro,
prší
je mokro.

Tento argument, jak jsme již zmínili, není vázán na konkrétní tvrzení, ale na jejich formu, již lze zachytit schematicky takto:

$$\frac{A \to B, \quad A}{B.}$$

Tím se dostáváme k agendě, již má ve správě:

(2) formální logika.

Právě jí jsme se zabývali v této knize, a to včetně postřehu, že je přes zamýšlenou obecnost, tj. schematizaci celého logického prostoru, fakticky obecná jen zdánlivě, a její čistě mechanické užití nás tedy může snadno přivést na scestí. Právě tento rys formalismu kritizuje intuicionismus, zejména ve vztahu k vyloučenému třetímu a také k logice predikátů, v níž dochází ke kvantifikaci přes nekonečná množství. Problém přitom tkví již v tom, že sám pojem nekonečna nejprve neoznačuje pozitivní pojem, tedy určité množství, ale jen deficit konečnosti, což nedovoluje přistoupit k nekonečné totalitě stejně jako k totalitě konečné.

Úskalí aplikace formální logiky ilustruje např. již diskutovaný problém nemonotónnosti obvyklého usuzování, v protikladu k monotónnímu charakteru výrokové logiky, resp. k obvyklému pojetí materiální implikace a logického vyplývání. V klasické výrokové i predikátové logice platí, že přidání premisy k platnému úsudku z něj neudělá neplatný. Běžně tomu tak být ale nemusí, jak to ukazuje příklad:

prší,
jsem v autě
je mokro.

K tomu jsme opakovaně poznamenali, že logické zákony nemají charakter obecné deskripce, vůči níž nelze najít nějaké výjimky, ale normy, která výskyt výjimek pasivně nepopírá, ale aktivně je zakazuje jako nepřípadné. Vzhledem k tomuto postřehu lze vymezit jinou logickou oblast, kterou zkoumá:

(3) dialektická logika.

Ta se logickým prostorem zabývá v ještě vyšším plánu, totiž ve vztahu k jeho konstituci a vývoji. Jako taková se věnuje konstitutivním předpokladům obou, formální i obecné logiky. Patří k nim např. postřeh, že spor není překážkou, ale naopak motorem pravdivosti, totiž v situacích, kdy je třeba změnit pravdivostní podmínky jistého logického prostoru a transformovat ho na prostor jiný. V těchto statických fázích pak zákon sporu platí jako formálnělogický princip.

Lze říci, že intuicionismus se chtěl s ohledem na matematické poznání držet právě na dialektické rovině, kterou ale opustil tím, že se pohyb, jejž považoval za příznačný pro danou oblast zkušenosti, pokusil schematizovat, tedy znehybnit. Sama intuicionistická logika je jen zvláště viditelným vyvrcholením této chyby, a to paradoxně jako důsledek Brouwerovy zdánlivě opačné snahy vyhnout se v úvahách o matematice logice jako takové. Aplikace jazykových schémat, přes jejich konvenční a omezenou povahu, je přitom součástí jakéhokoli uvažování, už proto, že uvažování coby součást prostoru důvodů nemůže být vázáno na prosté „tady" a „teď", a naopak je odkazy mimo sebe vždy překračuje. Součástí dialektického pohledu přitom musí být zohlednění toho, že principy, které vytváří, jsou samy adekvátní tomu, co tvrdí, tj. předpokládají-li, že se poznání, na něž jsou aplikovány, vyvíjí, musí samy podléhat vývoji. Tím se řeší klasická výtka směřovaná proti Hegelově filosofii, totiž že se jako filosofie vývoje staví nad tento vývoj, a tím si odporuje. Součástí tohoto řešení je vhled, že vztah poznání a poznávaného není externí, ale že se kognitivním procesem mění jak to, co je poznáváno, tak ten, kdo poznává. K místu logiky v takto pojatém poznání se vyjádříme v úplném závěru knihy.

Závěr

Poté co jsme prošli kanonické systémy moderní logiky a předvedli – v širším filosofickém a historickém kontextu – způsoby, kterými se v nich a s nimi pracuje, se můžeme vrátit na začátek knihy. V úvodním citátu tam Mefistofeles ironicky vědychtivému žákovi oznamuje, že jako první v jeho studiu přichází na řadu *collegium logicum*.[11] Dojem, který podrobné studium jednotlivých definic, vět a příkladů může vyvolat, je vskutku takový, že je naše myšlení pouze obouváno do španělských bot a že jsme v něm spíše duševně omezováni než podněcováni. Výsledkem takto může být čiré fachidiotství, v němž se technická radost ze zvládnutí jistého relativně obtížného schématu zamění za hluboký vhled a porozumění.

Tento názor na účelnost logiky, jak jsme v knize zmínili, zastávali myslitelé jako Descartes či Brouwer. Jedním z cílů knihy bylo ukázat, že jejich námitky platí jen tehdy, pokud od logiky a myšlení vůbec očekáváme něco, co nám nemohou splnit, právě proto, že hluboké vhledy a myšlení samo nelze jednoduše schematizovat, neboť se stále vyvíjejí a mění. Jistý hluboký vhled jsme se ale předvést snažili nepřímo, totiž že v tomto vývoji hraje průběžná schematizace podstatnou roli, tedy že návrhy přehledných schémat toho, jak myslíme a jak bychom myslet měli, jsou podstatné pro to, abychom vůbec myslet mohli.

Původ této myšlenky spočívá v analogickém postřehu, za který vděčíme německému idealismu, totiž že každé *poznání* je vlastně *sebepoznáním*, a tedy závisí na schopnosti reflexe a způsobech, jak ji pěstovat. To je zprvu nejasné, neboť pravé *poznání* na rozdíl od pouhého *mínění* se zdá svoji objektivitu čerpat právě ve vazbě na to, co je mimo nás, ba co je na nás nezávislé, ať jsou to fakta týkající se každodenního světa lidí a věcí, mikrosvěta částic, buněk a mikroorganismů či makrosvěta vesmírných těles a vzdáleností, ale i historických epoch a sociálních formací. V těchto světech také hrajeme jistou roli, zpravidla ale jako empirické bytosti, které lze zkoumat co do běžných projevů nebo jejich původu v genetické výbavě či sociálních a druhových přináležitostech. To, co se nám zdálo jako pravdivé, oblast běžných jevů a domněnek, je takto často odhaleno jako nepřesné, neodpovídající pravé realitě tak, jak se ukrývá za jevy.

[11] Viz Goethe [1986].

Stůl, jehož povrch se mi zdál hladký, je ve skutečnosti, podíváme-li se blíže do jeho mikrostruktury, prototypem nerovnosti a drsnosti, stejně jako je souzvuk, jenž se mi zdál libozvučný, po bližším přezkoumání alikvotních tónů a jejich interferencí, vlastně disonantní. Podobně člověk, který se zdál krutý, je ve skutečnosti jen geneticky a edukativně zatížený, a tedy morálně indiferentní, zatímco tvor, kterého jsem považoval za rybu, protože má ploutve a plave ve vodě, se ukázal být savcem. Všechny tyto příklady jakoby naznačují, že to nejsem já ani žádný jiný člověk, kdo je měrou všech věcí, a tudíž poznání jako sebepoznání nedává smysl, snad kromě úzké oblasti společensko-etických norem.

Pravý opak je ale pravdou, neboť to, co nacházíme za jevy, se mi opět musí jevit, i když zprostředkovaně *našimi* teoriemi a stále se měnícími cíli. Tyto teorie mají právě podobu smysly – tedy jevově – manifestovatelného schématu, bez něhož by se nám neotevřel ani svět elementárních částic, ani svět vesmírných těles, jejichž pohyby – typicky pohyb Země – nevidíme, ale dedukujeme. Právě proto, že ono schéma je bezpochyby schéma *naše*, nenacházíme za jevy novou, ukrytou realitu, jakýsi druhý, opravdovější svět, ale sebe sama, to, co jsme do světa sami vložili. Okamžik, kdy se stane člověk poznávajícím, je právě ten, kdy se oddělí od světa jako na něm nezávislý subjekt, což znamená, že se jako takový začne nezávisle pozorovat. Výrazy jako

zdá se mi, že A

explicitně vyjadřují moment, kdy k tomuto oddělení došlo, tedy kdy došlo k oddělení *subjektivního já*, které klade jisté domněnky, a *já objektivního*, které dospívá k pravdivým přesvědčením

je pravda, že A,

aniž by pro daný rozdíl, tedy rozdíl zdání a skutečnosti, mělo jinou oporu než v poznávající aktivitě samé. To, co se mi v klanové společnosti jevilo jako spravedlnost, se mi ve společnosti liberální jeví jako svévolná pomsta; to, co jsem jako domorodý lovec považoval za rybu, jsem jako student druhových klasifikací začal vidět jako savce; to, co se mi v prvních fázích emancipované aritmetiky zdálo být neschopné aritmetického výrazu, jsem po revizi pojmu aritmetického poměru začal považovat za číslo nového druhu, atd. Transcendentní iluze nám zde velí chápat tento pohyb jako absolutní, vedoucí od minulosti zkalené pověrčivostí předchozích generací a nevědeckostí jejich metod k budoucnosti prozářené metodami exaktní vědy. Soudnost vedená „fenomenologickou“ reflexí běžné zkušenosti nás vede k pohledu relativnímu, jenž nevidí stálost v členech příslušného pohybu, které se z jevového hlediska nijak neliší, tj. mohou sloužit jako reprezentace obou, jevu i skutečnosti, ale v pohybu samém, jenž rozdíl zdání a skutečna chápe jako interní rozdíl v člověku samém, ve dvou stále se proměňujících já. Jak tato já dále specifikovat – běžné podoby jsou přirozeně známy, ať třeba z rozlišení transcendentálního a empirického já, individuálního a sociálního já, či zcela obecně z rozdílu ducha a těla – a jak specifikovat jejich proměny a „boj“, to je úkol pro jinou knihu, než je ta naše, byť by si možná právě ona zasloužila název logika v podstatně obecnějším a důstojnějším smyslu.

Na celou věc se lze podívat také z opačné strany. Spočívá-li poznání v sebepoznání, v tom, že za jevy zahlédneme sebe sama jako to, co z oněch jevů činí jevy něčeho, co skutečně je, je třeba připustit také roli prostředníka, toho, skrze co se v jevech sami vidíme. Své fyzické já jsme s to ostatně vidět až prostřednictvím zrcadla a své sociální já prostřednictvím druhých lidí. Logická schémata, stejně jako schémata obecně, zde pak mají právě tuto funkci, skrze niž se obvykle setkáváme s celkem nějaké praxe, ať je to praxe úsudková, kterou se zabývá logika, či jakákoli praxe jiná. Reflektivní funkce příslušných schémat je přitom delikátní záležitostí, právě proto, že ji lze snadno zaměnit za funkci deskriptivní, která z logiky učiní pokus o věrné a přímočaré zachycení toho, jak se usuzuje či – v jakémsi přísném a absolutním duchu – usuzovat má. To vede k výše uvedeným zklamáním a nedorozuměním. Ačkoli logická schémata musí mít oporu jak v tom, jak reálně usuzujeme (v realitě toho, co je empiricky možné a co nám biologicko-psychologické podmínky naší fyzické konstituce dovolí), tak v tom, jak bychom usuzovat měli (v realitě sociálního, normami vázaného já, toho, co nám dovolí podmínky naší existence jako sociálních bytostí), jejich role je přednostně mediující, rozvíjející bezprostřední svět empirického, individuálního já ve svět já normativního, sociálního, což znamená stálou souhru obou aspektů člověka, v níž se popsaná pravidelnost stává normou, a ta zase pravidelností.

Vezmeme-li oblíbený případ vyloučeného třetího, je zjevné, že k jeho přijetí je zapotřebí více než prosté pozorování, které by muselo vzít v úvahu i zcela běžné případy prosté nerozhodnosti, vágnosti či pojmové nedourčenosti. To, co potřebujeme, je také rozhodnutí tyto případy potlačit a překonat. Odhodlání, s nímž toto rozhodnutí činíme, a případné úspěchy plynoucí z jeho přijetí by v nás však neměly potlačit vhled, že se v případě vyloučeného třetího jedná jen o schéma, které lze nahradit schématem jiným, ba zcela protichůdným, jak to učinil Brouwer. Podobně tušíme, že výskyt sporu, např. v aritmetice, se pro nás nestane podnětem k tomu, abychom aritmetiku opustili, jednak proto, že jednoduše nepřestaneme počítat, a také proto, že se jí jako praktické činnosti princip *ex falso quodlibet* klasické logiky, který by toto opuštění přikazoval, netýká zcela globálně, ale jen lokálním způsobem, jaký historie zažila a ošetřila již mnohokrát. Nejvýznamnější případ lze nalézt ve starořeckém odhalení nesouměřitelnosti – v tehdejším pojetí vlastně

„nearitmetičnosti“ – veličin v jednoduchých geometrických útvarech. Ti, kdo podobný smírný postoj, tedy relativizaci zákona sporu, považují za útok na racionální řád skutečnosti, jak to činili např. matematici Turing a Gödel tváří v tvář Wittgensteinově filosofii matematiky,[12] umožňují jen zajímavější interpretaci Wittgensteinova pojetí filosofie jako *terapie*, totiž ve smyslu psychoanalytické léčby racionální hysterie. Té se přitom dopouští jak ti, kdo užití logických schémat v absolutním smyslu hájí, tak ti, kdo ho kritizují ve jménu okamžitého vhledu a prožitku. Ti druzí tak paradoxně činí vedeni chybným sylogismem, podle něhož z konvenčnosti, nahraditelnosti a omezenosti schémat plyne jejich celková zbytnost. To je, jak jsme již říkali, podobně mylné, jak kdybychom z konvenčnosti peněz či z toho, že jsou některé z nich falešné, usoudili, že jich netřeba či že jsou falešné všechny.

Tvrdíme-li nyní, že je veškeré myšlení schematické, v rámci obhajoby knihy věnované logice, lze tomu přitom rozumět mnoha způsoby. Ten nejméně zajímavý a vnitřně falešný by se myšlení snažil umístit do jednoho preferovaného a provždy fixovaného rámce. Zajímavé je naopak čtení, které pod vlivem Lacana navrhuje ve spřízněném kontextu Slavoj Žižek.[13] Idea je zhruba tato. Z toho, že jsou všechny peníze falešné, lze buďto usoudit, že se vlastně nejedná o peníze, anebo, v objektové verzi tohoto metajazykového rozlišení (zde vzpomeňme na podobné čtení relace identity), že naopak musí existovat peníze, které jsou pravé, protože jinak by rozdíl falešného a pravého přestával dávat smysl. Toto schéma, které je zcela v rozporu s klasickou predikátovou logikou, lze uplatnit i na výše uvedené pojmy, konkrétně jako:

$$\frac{\text{všechno je jev}}{\text{něco jev není.}}$$

Jeho výhoda spočívá v tom, že drží v povědomí jak vzájemnou závislost obou pojmů, tj. jevu a skutečnosti, tak jejich relativitu, podle níž nemáme ke skutečnosti jiný přístup než opět skrze jevy. Přeneseme-li tuto dualitu opět na rovinu já, jsme konfrontováni se známou zkušeností, kdy jsme s to sami sebe diferencovat jako přemýšlející a empirickou bytost, aniž bychom toto rozlišení byli schopni dovést prakticky do úspěšného konce, v němž by obě tato já byla dokonale oddělena. Přemýšlení či jiné intelektuální činnosti spočívají ovšem ve výcviku a empiricky se projevujících aktivitách, jako je čtení či psaní, které se od prvních oddělují až tehdy, byly-li dovedeny k jisté stabilitě, při níž jim již nemusíme věnovat explicitní pozornost. Z toho vzniká i námi studovaný a zdánlivě ostrý

[12] Srov. Wang [1996, s. 179] či Wittgenstein [1976, s. 217–220].
[13] Viz Žižek [2012, s. 47].

rozdíl mezi výrazem a jeho významem. Ale tak jako nemůže nikdo produkty svého ducha sklidit jinak, než že je vykoná či vyřkne, tedy skrze své tělo, čímž tyto produkty ztratí mnoho ze své domnělé ušlechtilosti a hloubky, nelze se k podstatě myšlení dobrat jinak než skrze návrhy konkrétních schémat toho, v čem spočívá a čím se řídí.

Reflektivní role logiky se ukazuje již v tom, že v ní nejde o tato schémata sama, ale o jejich návrhy, komparace a posuzování jejich limit, jak jsme se jim v knize na několika významných případech podrobně věnovali. Čtenář, kterému se nad textem otevřela tato zkušenost, pochopil tedy naši knihu lépe než ten, kdo pouze neměl problém sledovat technická úskalí výkladu. Jejich zvládnutí přitom není znakem jakýchkoli vyšších intelektuálních schopností, ale především ochoty k soustředěné a pravidelné práci. Potřeba opakování, rutiny a výcviku, kterými má „duchovní“ stránka já sklony pohrdat, jsou přitom spolehlivými cestami k vhledu a transcendenci, jak to kromě ritualizovaných náboženství dokazuje i zdánlivě přízemnější praxe pěstování hudby. Vztah hudebního zápisu, tedy umělecké intence, a jejího provedení, se zdá být bezprostřední v okamžiku, kdy jsme již praxi jejich převádění zvládli natolik, že nás neobtěžuje a umožňuje zvládnout dosud nehrané party. Fakticky je ale tato práce, jak nás naučil Hegel, vždy součástí celého vztahu, tj. podstatně ho prostředkuje a připravuje půdu dalším prostředkovatelům v okamžiku, kdy vztah vnímáme jako (relativně) bezprostřední. Totéž platí o vztahu výrazu k významu, který se osamostatnil poté, co jsme zjistili, že lze jiný výraz v jistém kontextu užívat stejným způsobem. V nějakém smyslu zde výraz a význam nikdy nejsou jako oddělené entity, ale vždy je tu jen výraz a práce s ním spjatá, přičemž význam, či obecně intelektuální a „duchovní“ složka výrazu, označují pouze jeho sofistikovanější, prostředkované užití.

Sofistikovanost tohoto použití pak spočívá ve schopnosti sebevztahu, tedy nikoli v překonání schematičnosti, ale ve schopnosti vytvářet schémata, která v sobě již zahrnují skutečnost vlastní omezenosti. Jedním z nich, které jsme v knize naznačili, byla diagonální konstrukce a s ní spjatá rozšíření pojmu reálného čísla či důkazu, jak k nim došlo v teorii množin a v metamatematice v souvislosti s Gödelovými větami. Že tyto disciplíny nedokázaly pravou povahu příslušných schémat docenit, tj. považovaly je spíše za důkaz neschematičnosti a absolutní svobody myšlení, je věc jiná, související podstatně s rozdílem negativní svobody, tj. svobody definované jednoduchým popřením všech omezení, a svobody pozitivní, vědomé si role, kterou omezení a jejich aktivní překonávání hrají v poznání a v životě vůbec. Tato kniha by splnila vrchovatě svůj účel, kdyby svým skromným dílem přispěla k rozvíjení druhé z nich.

Résumé

The book *Forms of Language: An Introduction to Logic and Its Philosophy* is devoted to logic, primarily in its formal shape, covering traditional systems of propositional and predicate logic, syllogistic logic, modal logics and intuitionistic logic. Its aim, though, is not only introductory, i.e. to present the obligatory technical details against the relevant historical and philosophical background, but also to use these details and their context by way of example to demonstrate the original purpose of the science of logic.

This purpose amounts to a systematic reflexion of our language and its forms which are the forms of the ways the language is used, i.e. the general rules of this usage. The main thesis developed in the book is that these rules must be simple enough to be feasibly followed and, as such, are, by their nature, limited and prospectively replaceable by other sets of rules more suitable to the respective discursive needs. The systems included in the book are thus not standing for themselves, but primarily for their mutual comparison from which their schematic nature as well as the role of schemata in our language directly emerge. Consequently, the book deals not only with formal logic but also with a more general, let us say dialectical, concept of logic which is not the books explicit subject and yet shows itself in the course of an active and sympathetic reading.

Literatura

ANELLIS, Irving H. (1990): „From semantic tableaux to Smullyan trees: A history of the development of the falsifiability tree method“. *Modern Logic*, 1: 36–69.

ARISTOTELÉS (1831–1870): *Aristotelis opera I–V* (Immanuel BEKKER, ed.). Georg Reimer, Berlin.

——— (1958): *Kategorie* (Antonín KŘÍŽ, překl.). Nakladatelství ČSAV, Praha.

——— (1959): *O vyjadřování* (Antonín KŘÍŽ, překl.). Nakladatelství ČSAV, Praha.

——— (1961): *První analytiky* (Antonín KŘÍŽ, překl.). Nakladatelství ČSAV, Praha.

——— (1962): *Druhé analytiky* (Antonín KŘÍŽ, překl.). Nakladatelství ČSAV, Praha.

——— (1996): *Fyzika* (Antonín KŘÍŽ, překl.). Petr Rezek, Praha.

——— (2008): *Metafyzika* (Antonín KŘÍŽ, překl.). Petr Rezek, Praha, 2. vydání.

——— (2009): *Etika Níkomachova* (Antonín KŘÍŽ, překl.). Petr Rezek, Praha, 3. vydání.

——— (An1.): *Analytica priora.* In Aristotelés [1831–1870]. Český překlad vydán jako Aristotelés [1961].

——— (An2.): *Analytica posteriora.* In Aristotelés [1831–1870]. Český překlad vydán jako Aristotelés [1962].

——— (Cat.): *Categoriae.* In Aristotelés [1831–1870]. Český překlad vydán jako Aristotelés [1958].

——— (Eth.): *Ethica Nicomachea.* In Aristotelés [1831–1870]. Český překlad vydán jako Aristotelés [2009].

——— (Int.): *De interpretatione.* In Aristotelés [1831–1870]. Český překlad vydán jako Aristotelés [1959].

——— (Met.): *Metaphysica.* In Aristotelés [1831–1870]. Český překlad vydán jako Aristotelés [2008].

——— (Phys.): *Physica.* In Aristotelés [1831–1870]. Český překlad vydán jako Aristotelés [1996].

Baker, Gordon P. & Hacker, Peter Michael Stephan (1984): *Frege: Logical Excavations.* Oxford University Press, Oxford.

Berkeley, George (1734): *The Analyst, or, A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician.* Jacob Tonson, London. Český překlad vydán jako součást Kolman & Roreitner [2013], 101–148.

Beth, Evert Willem (1959): *The Foundations of Mathematics. A Study in the Philosophy of Science.* North-Holland, Amsterdam.

Bolzano, Bernard (1810): *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung.* Caspar Widtmann, Prag. Anglický překlad otištěn in Bolzano [2004], 82–137. Český překlad části je obsažen in Janoušek & Kolman [2012], 117–123.

——— (1837): *Dr. Bolzanos Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und größtentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherigen Bearbeiter. I–IV.* Seidel, Sulzbach. Český překlad vybraných částí vyšel jako Bolzano [1981]. Z věcných důvodů využíváme vlastní překlad.

——— (1851): *Dr. Bernard Bolzanos Paradoxien des Unendlichen, herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Prihonsky.* Reclam, Leipzig. Český překlad vyšel jako Bolzano [1963].

——— (1963): *Paradoxy nekonečna* (Otakar Zich, překl.). Nakladatelství ČSAV, Praha.

——— (1981): *Vědosloví (výbor)* (Marie Bayerová; Jiří Loužil, překl.). Academia, Praha.

——— (2004): *The Mathematical Works of Bernard Bolzano* (Steve Russ, ed.). Oxford University Press, Oxford.

Boole, George (1847): *The Mathematical Analysis of Logic. Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning.* Macmillan, Barclay, & Macmillan, Cambridge.

——— (1854): *An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.* Walton & Maberly, London.

Boolos, George (1993): *The Logic of Provability.* Cambridge University Press, Cambridge.

Brandom, Robert (1994): *Making It Explicit. Reasoning, Representing, and Discursive Commitment.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

——— (2000): *Articulating Reasons. An Introduction to Inferentialism.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (1907): *Over de grondslagen der wiskunde.* Disertace, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam. Citováno podle anglického překladu otištěného in Brouwer [1975], 13–101. Český překlad části je obsažen in Janoušek & Kolman [2012], 289–315.

——— (1908): „De onbetrouwbaarheid der logische principes“. *Tijdschrift voor wijsbegeerte*, 2: 152–158. Citováno podle anglického překladu otištěného in Brouwer [1975], 107–111.

——— (1912): *Intuïtionisme en formalisme.* Inaugurační přednáška, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam. Citováno podle anglického překladu Brouwer [1914].

——— (1914): „Intuitionism and formalism“. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 20: 81–96.

——— (1975): *Collected Works I* (Arendt Heyting, ed.). North-Holland, Amsterdam.

Cajori, Florian (1928/1929): *A History of Mathematical Notations.* Open Court Publishing Company, Chicago.

Cantor, Georg (1883): *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen.* Teubner, Leipzig. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 165–209. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 878–919.

——— (1886): „Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche“. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 88: 224–233. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 370–376.

——— (1887/1888): „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten I, II“. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 91/92: 81–125, 252–270/250–265. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 378–439. Český překlad části otištěn in Kolman & Roreitner [2013], 278–318.

——— (1892): „Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre“. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1: 75–78. Citováno podle přetisku in Cantor [1932], 278–281. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 920–922.

——— (1932): *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind* (Ernst Zermelo, ed.). Springer, Berlin.

Carnap, Rudolf (1931): „Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache“. *Erkenntnis*, 2: 219–241. Český překlad vyšel jako Carnap [1991].

——— (1947): *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic*. University of Chicago Press, Chicago.

——— (1991): „Překonání metafyziky pomocí logické analýzy jazyka (Karel Berka, překl.)“. *Filosofický časopis*, 39: 622–643.

Carroll, Lewis (1895): „What the tortoise said to Achilles“. *Mind*, 4: 278–280.

Cauchy, Augustin-Louis (1821): *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. De Bure, Paris.

Coffa, J. Alberto (1991): *The Semantic Tradition from Kant to Carnap: To the Vienna Station*. Cambridge University Press, Cambridge.

Davis, Martin (1965): *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*. Raven Press Books, New York.

Descartes, René (1701): „Regulae ad directionem ingenii“. In *Opuscula posthuma, physica et mathematica*. Blaeu, Amsterdam. Zrcadlový česko-latinský překlad vyšel jako Descartes [2000].

——— (2000): *Pravidla pro vedení rozumu* (Vojtěch Balík, překl.). OIKOYMENH, Praha.

Diogenés Laertský (1964): *De vitis et dogmatibus clarorum philosophorum* (H. S. Long, ed.). Clarendon Press, Oxford.

——— (1995): *Životy, názory a výroky proslulých filosofů* (Antonín Kolář, překl.). Nová tiskárna Pelhřimov, Pelhřimov.

——— (Vit.): *De vitis et dogmatibus clarorum philosophorum*. Vydáno jako Diogenés Laertský [1964]. Český překlad vyšel jako Diogenés Laertský [1995].

Dummett, Sir Michael (1991): *Frege: Philosophy of Mathematics*. Harvard University Press, Cambridge, MA.

Eukleidés (1883–1916): *Euclidis opera omnia I–IX* (Johan Ludvig Heiberg; Hermann Menge; Maximilian Curtze, eds.). Teubner, Leipzig.

——— (1907): *Základy* (František Servít, překl.). Jednota českých matematiků, Praha.

——— (El.): *Elementa geometriae*. In Eukleidés [1883–1916], díl I–IV. Český překlad vyšel jako Eukleidés [1907]. Nový překlad některých částí je obsažen in Šír [2011].

Ewald, William (ed.) (1996): *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics I–II*. Clarendon Press, Oxford.

Fitch, Frederic (1952): *Symbolic Logic. An Introduction*. The Ronald Press Company, New York.

Frede, Michael (1987): *Essays in Ancient Philosophy*. University of Minnesota Press, Minneapolis.

Frege, Gottlob (1879): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. L. Nebert, Halle. Český překlad vyšel jako Frege [2013]. V textu užíváme z věcných důvodů vždy vlastního překladu.

——— (1883): „Ueber den Zweck der Begriffsschrift“. *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, 16: 1–10.

——— (1884): *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. W. Koebner, Breslau. Český překlad vyšel jako část Frege [2012], 145–261.

——— (1891): *Function und Begriff. Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 9. Januar der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft*. H. Pohle, Jena. Český překlad vyšel in Frege [2012], 55–78.

——— (1892*a*): „Über Begriff und Gegenstand“. *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 16: 192–205. Český překlad vyšel in Frege [2012], 79–94.

——— (1892*b*): „Über Sinn und Bedeutung“. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100: 25–50. Český překlad vyšel jako Frege [1992]. Je rovněž přetištěn in Frege [2012], 17–42.

——— (1893/1903): *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet I–II.* H. Pohle, Jena.

——— (1896): „Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene“. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe*, 48: 361–378.

——— (1906): „Über die Grundlagen der Geometrie I–III“. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15: 293–309, 377–403, 423–430.

——— (1918): „Der Gedanke. Eine logische Untersuchung“. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, 1: 58–77. Český překlad vyšel jako Frege [1994]. Byl rovněž přetištěn in Frege [2012], 95–122. Z věcných důvodů využíváme vždy vlastní překlad.

——— (1923): „Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefüge“. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, 3: 36–51.

——— (1976): *Wissenschaftlicher Briefwechsel* (Gottfried Gabriel; Hans Hermes; Friedrich Kambartel; Christian Thiel; Albert Veraart, eds.). Felix Meiner, Hamburg.

——— (1983): *Nachgelassene Schriften* (Hans Hermes; Friedrich Kambartel; Friedrich Kaulbach, eds.). Felix Meiner, Hamburg, 2. vydání.

——— (1992): „O smyslu a významu (Jiří Fiala, překl.)“. *Scientia & Philosophia*, 4: 33–75.

——— (1994): „Myšlenka: logické zkoumání (Jiří Fiala, překl.)“. *Scientia & Philosophia*, 6: 50–75.

——— (2012): *Logická zkoumání a základy aritmetiky* (Jiří Fiala, překl.). OIKOYMENH, Praha.

——— (2013): *Pojmopis* (Jiří Fiala, překl.). OIKOYMENH, Praha.

von Fritz, Kurt (1971): *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft.* Walter de Gruyter, Berlin.

Gabbay, Dov & Guenthner, Franz (eds.) (2001–): *Handbook of Philosophical Logic I–*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2. vydání.

GENTZEN, Gerhard (1935): „Untersuchungen über das logische Schliessen I–II“. *Mathematische Zeitschrift*, 39: 176–210, 405–431. Anglický překlad otištěn in Gentzen [1969], 68–131.

——— (1969): *The Collected Papers of Gerhard Gentzen* (M. E. SZABO, ed. & překl.). North-Holland, Amsterdam.

GÖDEL, Kurt (1930): „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls“. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37: 349–360. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 582–591 a Gödel [1986], 102–123.

——— (1931): „Über formal unentscheidbare Sätze der ‚Principia Mathematica‘ und verwandter Systeme I“. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38: 173–198. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 592–617 a Gödel [1986], 144–195.

——— (1986): *Collected Works I* (S. FEFERMAN; J. W. DAWSON; S. C. KLEENE; G. H. MOORE; R. M. SOLOVAY; J. van HEIJENOORT, eds.). Oxford University Press, Oxford.

GOETHE, Johann Wolfgang (1965): *Faust* (Otokar FISCHER, překl.). SNKL, Praha.

——— (1986): *Faust. Der Tragödie erster Teil.* Reclam, Stuttgart. Český překlad vyšel jako Goethe [1965].

GRAESER, Andreas (1993): *Die Philosophie der Antike 2. Sophistik und Sokratik. Plato bis Aristoteles.* C. H. Beck, München, 2. vydání.

HAUSDORFF, Felix (1914): *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit, Leipzig.

HEGEL, Georg Wilhelm Friedrich (1986*a*): *Grundlinien der Philosophie des Rechts.* Suhrkamp, Frankfurt am Main. Český překlad vyšel jako Hegel [1992].

——— (1986*b*): *Jenaer Schriften 1801–1807.* Suhrkamp, Frankfurt am Main.

——— (1986*c*): *Wissenschaft der Logik I–II.* Suhrkamp, Frankfurt am Main.

——— (1992): *Základy filosofie práva* (Vladimír ŠPAČEK, překl.). Academia, Praha.

VAN HEIJENOORT, Jean (ed.) (1967): *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879–1931.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

Heyting, Arend (1956): *Intuitionism. An Introduction.* North-Holland, Amsterdam.

Hilbert, David (1899): *Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen.* Teubner, Leipzig, 1. vydání. Přetištěno in Hilbert [2004] včetně úprav z dalších vydání.

——— (1900): „Mathematische Probleme. Vortrag gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris 1900“. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 253–297. Citováno podle přetisku in Hilbert [1935], 290–329. Fragmenty v angličtině otištěny in Ewald [1996], 1096–1104.

——— (1923): „Die logischen Grundlagen der Mathematik“. *Mathematische Annalen*, 88: 151–165. Citováno podle přetisku in Hilbert [1935], 178–191. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 1134–1148.

——— (1931): „Die Grundlegung der elementaren Zahlentheorie“. *Mathematische Annalen*, 104: 485–495. Neúplně přetištěno in Hilbert [1935], 192–195. Anglický překlad otištěn in Ewald [1996], 1148–1156.

——— (1935): *Gesammelte Abhandlungen. Dritter Band: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes.* Springer, Berlin.

——— (2004): *Lectures on the Foundations of Geometry, 1891–1902* (Michael Hallett; Ulrich Majer, eds.). Springer, Berlin.

Hume, David (1739/1740): *A Treatise of Human Nature.* John Noon & Thomas Longman, London.

——— (1748): *An Enquiry concerning Human Understanding.* Andrew Millar of the Strand, London. Český překlad vyšel jako Hume [1996].

——— (1996): *Zkoumání o lidském rozumu* (Josef Moural, překl.). Svoboda, Praha.

Church, Alonzo (1936): „A note on the Entscheidungsproblem“. *Journal of Symbolic Logic*, 1: 40–41. Přetištěno in Davis [1965], 108–114.

——— (1940): „A formulation of the simple theory of types“. *Journal of Symbolic Logic*, 5: 56–68.

Jahnke, Hans Niels (ed.) (1999): *Geschichte der Analysis.* Spektrum, Heidelberg.

Janoušek, Hynek & Kolman, Vojtěch (eds.) (2012): *Syntetické apriori.* Filosofia, Praha.

Jevons, William Stanley (1864): *Pure Logic, or The Logic of Quality apart from Quantity*. Stanford, London.

Kant, Immanuel (1781/1787): *Kritik der reinen Vernunft*. Johann Friedrich Hartknoch, Riga. Český překlad vyšel jako Kant [2001]. Z věcných důvodů užíváme většinou vlastní překlad.

——— (1783): *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können*. Johann Friedrich Hartknoch, Riga. Český překlad vyšel jako Kant [1992].

——— (1800): *Immanuel Kants Logik. Ein Handbuch zu Vorlesungen* (Gottlob Benjamin Jäsche, ed.). Friedrich Nicolovius, Königsberg.

——— (1992): *Prolegomena ke každé příští metafyzice, jež se bude moci státi vědou* (Jaroslav Kohout; Jiří Navrátil, překl.). Svoboda, Praha.

——— (2001): *Kritika čistého rozumu* (Jaromír Loužil; Jiří Chotaš; Ivan Chvatík, překl.). OIKOYMENH, Praha.

Kolman, Vojtěch (2002): *Logika Gottloba Frega*. Filosofia, Praha.

——— (2008): *Filosofie čísla*. Filosofia, Praha.

——— (2011): *Idea, číslo, pravidlo. Prolegomena k analytické filosofii, která se nechce stát čistou vědou*. Filosofia, Praha.

Kolman, Vojtěch & Roreitner, Robert (eds.) (2013): *O špatném nekonečnu*. Filosofia, Praha.

Kripke, Saul (1963): „Semantical considerations on modal logic“. *Acta Philosophica Fennica*, 16: 83–94.

Kuratowski, Kazimierz (1921): „Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles“. *Fundamenta Mathematicae*, 2: 161–171.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1705): *Nouveaux essais sur l'entendement humain*. Citováno podle Leibniz [1848], díl I.

——— (1714): *La monadologie*. Přetištěno in Leibniz [1991]. Český překlad vyšel v rámci Leibniz [1982].

——— (1848): *Nouveaux essais sur l'entendement humain*. Charpentier, Paris.

——— (1960): *Fragmente zur Logik* (Franz Schimdt, ed.). Akademie Verlag, Berlin.

——— (1982): *Monadologie a jiné práce* (Jindřich Husák, překl.). Svoboda, Praha.

——— (1991): *La monadologie* (Émile Boutroux, ed.). LGF, Paris.

Lewis, Clarence Irving (1918): *A Survey of Symbolic Logic.* University of California Press, Berkeley.

Locke, John (1690): *An Essay concerning Human Understading.* Thomas Basset, London. Český překlad vyšel jako Locke [2012].

——— (2012): *Esej o lidském chápání* (Miloš Dokulil, překl.). OIKOYMENH, Praha.

Lorenzen, Paul (1987): *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie.* Bibliographisches Institut, Mannheim.

Lorenzen, Paul & Lorenz, Kuno (1978): *Dialogische Logik.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

Łukasiewicz, Jan (1935): „Zur Geschichte der Aussagenlogik". *Erkenntnis*, 5: 111–131. Anglický překlad otištěn in Łukasiewicz [1970], 197–217.

——— (1970): *Selected Works* (Ludwik Borkowski, ed.). North-Holland, Amsterdam.

Moleschott, Jakob (1855): *Der Kreislauf des Lebens.* Zabern, Mainz, 2. vydání.

Monk, J. Donald (1976): *Mathematical Logic.* Springer, New York.

Moore, George Edward (1903): *Principia Ethica.* Cambridge, Cambridge University Press.

Peano, Giuseppe (1888): *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva.* Bocca, Turin.

——— (1897): *Formulaire de mathématiques II.* Bocca frères, Clausen, Turin.

Peirce, Charles Sanders (1931–1958): *Collected Papers I–VI* (Charles Hartshorne; Paul Weiss, ed.). Harvard University Press, Cambridge, MA.

——— (1982–): *The Writings of Charles Sanders Peirce. Chronological Edition* (Peirce Edition Project, ed.). Indiana University Press, Indianapolis, IN.

PEREGRIN, Jaroslav (2014): *Inferentialism. Why Rules Matter.* Palgrave Macmillan, Basingstoke.

PLATÓN (1900–1907): *Platonis opera: recognovit brevique adnotatione critica instruxit I–V* (John BURNET, ed.). Oxford University Press, Oxford. Český překlad vyšel jako Platón [2003].

——— (2003): *Spisy I–V* (František NOVOTNÝ, překl.). OIKOYMENH, Praha.

——— (Euth.): *Euthydemus.* In Platón [1900–1907].

——— (Hipp.): *Hippias maior.* In Platón [1900–1907].

——— (Lac.): *Laches.* In Platón [1900–1907].

——— (Men.): *Meno.* In Platón [1900–1907].

——— (Par.): *Parmenides.* In Platón [1900–1907].

——— (Phaedo): *Phaedo.* In Platón [1900–1907].

——— (Res.): *Respublica.* In Platón [1900–1907].

——— (Soph.): *Sophista.* In Platón [1900–1907].

——— (Thea.): *Theaetetus.* In Platón [1900–1907].

——— (Tim.): *Timaeus.* In Platón [1900–1907].

POPPER, Sir Karl Raymund (1935): *Logik der Forschung.* Julius Springer, Wien. Český překlad vyšel jako Popper [1997].

——— (1963): *Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge.* Routledge, London.

——— (1997): *Logika vědeckého bádání* (Jiří FIALA, překl.). OIKOYMENH, Praha.

POST, Emil (1921): „Introduction to a general theory of elementary propositions“. *American Journal of Mathematics*, 43: 163–185. Přetištěno in van Heijenoort [1967], 264–283.

POTTER, Michael (2000): *Reason's Nearest Kin: Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap.* Oxford University Press, Oxford.

PRANTL, Carl von (1855–1867): *Geschichte der Logik im Abendlande.* S. Hirzl, Leipzig.

Prawitz, Dag (1965): *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study.* Almqvist and Wiksell, Stockholm.

Presburger, Mojżesz (1929): „Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt“. *Sprawozdanie z I. Kongresu matematyków krajów slowiańskich, Warszawa 1929*, 92–101.

Quine, Willard Van Orman (1940): *Mathematical Logic.* Norton, New York. Citováno podle vydání Quine [1981*a*].

——— (1953): *From a Logical Point of View. Nine Logico-Philosophical Essays.* Harvard University Press, Cambridge, MA. Citováno podle vydání Quine [1961]. Části byly přeloženy do češtiny a vydány v rámci Quine [2006].

——— (1960): *Word and Object.* MIT Press, Cambridge, MA.

——— (1961): *From a Logical Point of View.* Harper Torchbooks, New York, 2. vydání.

——— (1973): *The Roots of Reference.* Open Court Publishing Company, La Salle.

——— (1981*a*): *Mathematical Logic.* Harvard University Press, Cambridge, MA, revidované vydání.

——— (1981*b*): *Theories and Things.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

——— (1992): *The Pursuit of Truth.* Harvard University Press, Cambridge, MA, 2. vydání. Český překlad vyšel jako Quine [1994].

——— (1994): *Hledání pravdy.* Hermann a synové, Praha.

——— (1995): *Selected Papers.* Harvard University Press, Cambridge, MA, 2. vydání.

——— (2006): *Vybrané články k ontologii a epistemologii* (Ludmila Dostálová; Tomáš Marvan, eds.). Západočeská univerzita, Plzeň.

Ramsey, Frank Plumpton (1925): „The foundations of mathematics“. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 25: 338–384. Citováno podle přetisku in Ramsey [1990], 164–224.

——— (1990): *Philosophical Papers* (D. H. Mellor, ed.). Cambridge University Press, Cambridge.

Rezek, Petr (ed.) (2000): *Logos apofantikos.* Petr Rezek, Praha.

Rosenberg, Jay F. (2005): *Accesing Kant. A Relaxed Introduction to the Critique of Pure Reason.* Clarendon Press, Oxford.

Rosenkranz, Johann Karl Friedrich (1844): *Hegel's Leben.* Duncker & Humblot, Berlin.

Russell, Bertrand (1905): „On denoting“. *Mind*, 14: 479–493. Český překlad vyšel v rámci Russell [1967], 19–49.

——— (1906): „On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types“. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 4: 29–53.

——— (1908): „Mathematical logic as based on the theory of types“. *American Journal of Mathematics*, 30: 222–262. Citováno podle přetisku in van Heijenoort [1967], 150–182.

——— (1967): *Logika, jazyk a věda* (Karel Berka; Ladislav Tondl, eds.). Svoboda, Praha.

——— (1972): *Russell's Logical Atomism* (David Pears, ed.). Collins, London.

Russell, Bertrand & Whitehead, Alfred North (1910–1913): *Principia Mathematica I–III.* Cambridge University Press, Cambridge.

Seneca, Lucius Annaeus (1658): *L. Annaei Senecae philosophi opera omnia.* Daniel & Louis Elzevir, Amsterdam.

——— (1969): *Výbor listů Lucilovi* (Bohumil Ryba, překl.). Svoboda, Praha.

——— (Epi.): *Epistulae morales ad Lucilium.* Vydáno jako Seneca [1658]. Český překlad vybraných dopisů vydán jako Seneca [1969].

Sheffer, Henry M. (1913): „A set of five independent postulates for Boolean algebras, with applications to logical constants“. *Transactions of the American Mathematical Society*, 14: 481–488.

Schopenhauer, Arthur (1819): *Die Welt als Wille und Vorstellung.* F. A. Brockhaus, Leipzig. Citováno podle Schopenhauer [1993]. Český překlad vyšel jako Schopenhauer [1999].

——— (1993): *Die Welt als Wille und Vorstellung I–II.* Suhrkamp, Frankfurt am Main, 4. vydání.

——— (1999): *Svět jako vůle a představa I–II* (Milan Váňa, překl.). Nová tiskárna Pelhřimov, Pelhřimov.

Schröder, Ernst (1880): „Rezension von Freges ‚Begriffsschrift'". *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 25: 81–94.

——— (1890–1895): *Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik) I–III.* Teubner, Leipzig.

Smullyan, Raymond Merrill (1968): *First-Order Logic.* Springer, Berlin.

Spinoza, Baruch (1677*a*): *Ethica, ordine geometrico demonstrata.* Jan Riewertsz, Amsterdam. Vyšlo v rámci Spinoza [1677*b*]. Český překlad vyšel jako Spinoza [2001].

——— (1677*b*): *Opera posthuma.* Jan Riewertsz, Amsterdam.

——— (2001): *Etika* (Karel Hubka, překl.). Dybbuk, Praha.

Stekeler-Weithofer, Pirmin (1986): *Grundprobleme der Logik. Elemente einer Kritik der formalen Vernunft.* Walter de Gruyter, Berlin.

——— (1992): „Plato and the method of science". *History of Philosophy Quarterly*, 9: 359–375.

——— (1995): *Sinn-Kriterien. Die logischen Grundlagen kritischer Philosophie von Platon bis Wittgenstein.* Schöningh, Paderborn.

——— (2006): *Philosophiegeschichte.* Walter de Gruyter, Berlin.

Šír, Zbyněk (ed.) (2011): *Řecké matematické texty* (Richard Mašek; Adam Šmíd, překl.). OIKOYMENH, Praha.

Tarski, Alfred (1933): *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych.* Towarzystwo Naukowe Warszawskie, Warszawa. Citováno podle anglického překladu otištěného in Tarski [1983], 152–278.

——— (1944): „The semantic conception of truth and the foundations of semantics". *Philosophy and Phenomenological Research*, 4: 341–376.

——— (1983): *Logic, Semantics, Metamathematics* (John Corcoran, ed.). Hackett Publishing Company, Indianapolis, IN, 2. vydání.

Tichý, Pavel (1988): *The Foundations of Frege's Logic.* Walter de Gruyter, Berlin.

Tomáš Akvinský (1882–): *Opera omnia.* S. C. de Propaganda Fidae, Roma.

——— (1970–): *Quaestiones disputatae de veritate*. Vydáno jako část Tomáš Akvinský [1882–], díl XXII.

Troelstra, Anne Sjerp (1991): *History of Constructivism in the Twentieth Century*. University of Amsterdam, Amsterdam.

Wang, Hao (1996): *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*. MIT Press, Cambridge, MA.

Wiener, Norbert (1914): „A simplification of the logic of relations". *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 17: 387–390. Přetištěno in van Heijenoort [1967], 224–227.

Wittgenstein, Ludwig (1922): *Tractatus logico-philosophicus* (F. P. Ramsey; C. K. Ogden, eds.). Routledge & Kegan Paul, London. Vydáno jako část Wittgenstein [1994], díl I. Český překlad vyšel jako Wittgenstein [2008]. Z věcných důvodů využíváme většinou vlastní překlad.

——— (1953): *Philosophische Untersuchungen/Philosophical Investigations* (G. A. Anscombe; G. H. von Wright; R. Rhees, eds.). Basil Blackwell, Oxford. Vydáno jako část Wittgenstein [1994], díl I. Český překlad vyšel jako Wittgenstein [1998].

——— (1976): *Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge 1939* (Cora Diamond, ed.). Cornell University Press, Ithaca.

——— (1983): *Philosophische Bemerkungen*. Suhrkamp, Frankfurt am Main. Vydáno jako část Wittgenstein [1994], díl II.

——— (1989): *Vortrag über Ethik und andere kleine Schriften* (Joachim Schulte, ed.). Suhrkamp, Frankfurt am Main.

——— (1994): *Werkausgabe I–VIII*. Suhrkamp, Frankfurt am Main.

——— (1998): *Filosofická zkoumání* (Jiří Pechar, překl.). Filosofia, Praha.

——— (2008): *Tractatus logico-philosophicus* (Petr Glombíček, překl.). OIKOYMENH, Praha.

Zermelo, Ernst (1908): „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I". *Mathematische Annalen*, 65: 261–281. Anglický překlad otištěn in van Heijenoort [1967], 199–215.

Žižek, Slavoj (2012): *Less Than Nothing: Hegel and the Shadow of Dialectical Materialism*. Verso, London.

Rejstřík

Z praktických důvodů křížového odkazování používám souhrnný rejstřík citací, věcných hesel a vlastních jmen. Citace jsou vlastnímu rejstříku předeslány, aby v něm samém mohly být výskyty jmen zachycovány výběrově. Definující výskyty jsou značeny tučně. Seznam symbolů, zkratek a způsobů zápisu se nachází ve zvláštním oddílu s ohledem na jiný způsob řazení.

A

B

C

Č

D

E

F

K

N

O

P

Q

R

U

V

Seznam symbolů

Seznam symbolů, zkratek a způsobů značení má čtenáři umožnit najít ten z jejich výskytů, v němž byly v textu definovány. Až na výjimky, v nichž došlo během výkladu v posunu nebo upřesnění významu, jsou tedy jednotlivé položky spojeny s konkrétní stránkou v textu a podle ní i řazeny. Nemusí to být nutně stránka prvního výskytu, např. když některé symboly užíváme zprvu pouze v implicitním odkazu k dostatečně známé praxi. Jsou-li i takové výskyty z nějakého důvodu označeny, pak zpravidla kurzívou.

formy jazyka
úvod do logiky a její filosofie

Vojtěch Kolman, Vít Punčochář

Typografie a sazba Vojtěch Kolman
Odpovědná redaktorka Alena Bakešová
Návrh obálky Markéta Jelenová
Rejstřík sestavil Vojtěch Kolman

Vydal Filosofický ústav AV ČR, v.v.i.,
ve svém nakladatelství Filosofia
jako jeho 419. publikaci
Vytiskl PBtisk, s.r.o., Příbram

Vydání první
Stran 656
Praha 2015

Elektronické (PDF) vydání první
ISBN 978-80-7007-710-8
Praha 2024

Co to znamená, říkáme-li, že někdo uvažuje či jedná logicky? Řídí se něčím, co od nás s nutností vyžaduje rozum, společnost či sama příroda? A lze tuto logiku, jíž bychom se měli řídit, blíže popsat? Odpověď, která je v knize nabízena, lze označit za dialektickou. Na jedné straně jsou zde zaváděny a komentovány logické systémy, které moderní filosofie, matematika i lingvistika považují za standardní či klasické, na druhé straně jim není připisována žádná absolutní závaznost, ale jen závaznost relativní. Žádný logický systém či jazykové schéma nejsou samy o sobě nezpochybnitelné, nějaké takové schéma však vždy potřebujeme k tomu, abychom mohli sami sebe definovat jako logické, racionální bytosti. Tímto předsevzetím kniha naplňuje podstatu Wittgensteinova hesla, že jedinou nutností, kterou známe, je nutnost jazykové konvence – formy jazyka. Výsledkem je text, který není jen standardním úvodem ke standardním logickým systémům, ale především příspěvkem k logice a k její filosofii v nejširším slova smyslu.

9 788070 074381